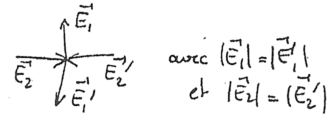
1- Lignes de champ $\perp$ surf. équipotentielles.

2- La figure 1b. permet de conclure qu'à grandes distances l'allure du champ est dipolaire, donc la charge totale est nulle

On a également $q_A < 0$, $q_B > 0$, $q_D > 0$

$\vec{E}(C) = \vec{0}$ (lignes de champ en C) :



avec $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_1'|$ et $|\vec{E}_2| = |\vec{E}_2'|$

$\vec{E}_1 + \vec{E}_1' = \vec{0}$, $\vec{E}_2 + \vec{E}_2' = \vec{0}$

$\vec{E}(C) = \vec{E}_1 + \vec{E}_1' + \vec{E}_2 + \vec{E}_2' = \vec{0}$

d'où $\begin{cases} q_A \dfrac{\vec{AC}}{AC^3} + q_B \dfrac{\vec{BC}}{BC^3} + q_D \dfrac{\vec{DC}}{DC^3} = \vec{0} \\ q_A + q_B + q_D = 0 \end{cases}$ $(\vec{E}(C) = \vec{0})$

$\vec{AC} = -83a\,\vec{e_y}$

$\vec{BC} = 24a\,\vec{e_x} - 8a\,\vec{e_y}$

$\vec{DC} = -51a\,\vec{e_x} - 8a\,\vec{e_y}$

En projetant sur l'axe horizontal (Ox) :

$$q_B \frac{24a}{(\sqrt{640}\,a)^3} + q_D \frac{-51a}{(\sqrt{2665}\,a)^3} = 0 \Rightarrow q_D = 4q_B \text{ et } q_A = -q_B - q_D = -5q_B$$

3- Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ : A, I, E sont absurdes

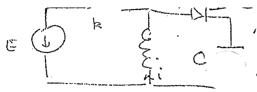
les lignes de champ sont $\perp$ aux surf. équipotentielles : C est exclue

$Q_1 > 0 \Rightarrow V_1 > V = 0 \Rightarrow$ D, F exclues, B correcte

$V_2 < 0$ est impossible car sinon l'équipotentielle $V = 0$ entourerait le conducteur 2 et comme Q_2 est nulle on aurait $V_2 = 0$ (contradict°)

donc $V_2 > 0 \Rightarrow$ H exclue, J, G correctes

G implique que $V_1 > V_2 > 0$



| 1er montage |

1/ A $t=0$ k est fermé : $E = L\dfrac{di}{dt} = -u - u_D$ avec $u(0^+) = u(0^-) = 0$ soit $u_D(0^+) = -E \Rightarrow$ D bloquée $\Rightarrow u = 0$

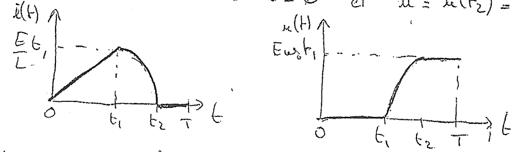
Jusqu'à l'ouverture de l'interrupteur (à t_1), on a donc $u = 0$ et $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{L} \Rightarrow i = \dfrac{E}{L}t$

A $t = t_1$ la diode devient passante à l'ouverture de k (car $i(t_1) = \dfrac{E}{L}t_1 \geq 0$) on a : $L\dfrac{di}{dt} + u = 0$ et $i = C\dfrac{du}{dt}$

d'où $LC\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \Rightarrow \begin{cases} u(t) = E\omega_0 t_1 \sin\omega_0(t-t_1) \\ i(t) = \dfrac{E}{L}t_1 \cos\omega_0(t-t_1) \end{cases}$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

Ces lois restent valables tant que $t < T$ (pour k) et $i(t) > 0$ (pour la diode)

or $\cos\omega_0(t_2 - t_1) = 0 \Rightarrow t_2 = t_1 + \dfrac{\pi}{2\omega_0} = 1{,}88\ 10^{-3}$ s $< T \Rightarrow$ la diode se bloque avant l'ouverture de k. Alors $i = 0$ et $u = u(t_2) = E\omega_0 t_1 = $ cte



2/ A $t = T$ k se ferme : $E = L\dfrac{di}{dt} = -u - u_D$ avec maintenant $u = E\omega_0 t_1$ soit $u_D = -E - u < 0$

D est bloquée et $i(t) = i(t-T)$

A $t = T + t_1$ k s'ouvre et la diode redevient passante et $L\dfrac{di}{dt} + u = 0$ avec $i = \dfrac{E}{L}t_1$ et $u = E\omega_0 t_1$

Le courant va s'annuler plus rapidement qu'à la 1ère période (car $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{u}{L}$).

La même quantité d'énergie ($W = \dfrac{1}{2}L\,i^2(t_1) = \dfrac{E^2t_1^2}{2L}$) est transférée de l'inductance à la capacité.

Donc : 1ère période $W_1 = W$ transférée

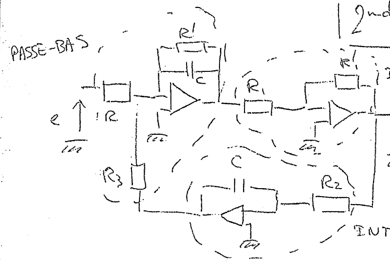
2nde période $W_2 = 2\times W$ $(W_1 + W)$

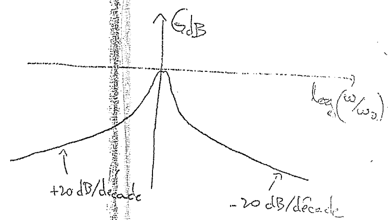
3ème ——— $W_3 = 3\times W$ $(W_2 + W)$

...

nème période $W_n = n\,W = \dfrac{1}{2}C\,u_n^2 \Rightarrow u_n = \sqrt{n}\,E\omega_0 t_1$: ça diverge !!

| 2nd montage |





Fonction de transfert totale, $\underline{H} = \dfrac{R'/R}{R_1/R_1'\,(1 + jR'C\omega) + \dfrac{R'}{jR_2R_3C\omega}}$: filtre passe-bande $\omega_0 = \dfrac{1}{C}\sqrt{\dfrac{R_1'}{R_1R_2R_3}}$

3/ Spectre de Fourier du signal carré : $e(t) = \dfrac{4E}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2p+1)\omega' t}{2p+1}$ avec $\omega_0 \sim 3\omega'$

$\Rightarrow s(t) \sim \dfrac{4E}{\pi}\,\dfrac{1}{3}\sin(3\omega' t)$ après filtrage (seule l'harmonique 3 passe).

ONDES

B_1_a_ Comme l'action de la pesanteur est négligée, les forces subies par la tranche de fluide sont les forces de pression en x et $x+dx$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$\rho_0 S\, dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (P_0 + p(x,t))S - (P_0 + p(x+dx,t))S$$

soit : $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}}$

b_α_ Comme le temps caractéristique des échanges de chaleur est grand devant la période de l'onde acoustique, l'évolution est adiabatique ; à priori c'est irréversible, mais on suppose pour la commodité que c'est réversible.

β_ $\chi_s = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_s$

Pour la tranche de fluide considérée, on a une variation de volume : $\Delta V = S(\psi(x+dx,t) - \psi(x,t)) = S\, dx \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

due à la surpression $\Delta P = p(x,t)$

Comme $V = S dx$, on obtient $\chi_s = -\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

soit : $\boxed{p = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}}$

c_α_ On déduit alors : $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

β & γ_ La solution générale de $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\rho_0 \chi_s}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ est:

$\psi(x,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

avec $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$, c est la célérité.

On voit que ψ est la somme de deux ondes planes progressives, se propageant dans le sens positif pour f et négatif pour g.

d_ On a : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \rho_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \chi_s}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$$

De plus, $u(x,t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ donc en dérivant par rapport à t l'équation de propagation de ψ, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \chi_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}\ ,$$

u et p satisfont à la même équation de propagation que ψ.

e_α_ On a un gaz parfait, donc pour une évolution isentropique : PV^γ = constante

d'où $\dfrac{dP}{P} + \gamma \dfrac{dV}{V} = 0$ et $\chi_s = \dfrac{1}{\gamma P}$

De plus $P = \rho_0 \dfrac{RT_0}{M}$ donc $\chi_s = \dfrac{M}{\gamma \rho_0 R T_0}$ et $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}}$

β_ $\underline{c = 343\ m\,s^{-1}}$: c'est bien la valeur connue!

B_1_f_α_ L'onde $A_1 e^{i(\omega t - kx)}$ se propage vers les x croissants : en $t+\Delta t$ et $x+\Delta x$ elle a la même forme qu'en t, x (avec $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\omega}{k} = c$)

Comme $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, $-k^2 - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2) = 0$ donc $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$

Pour l'air, avec $\dfrac{\omega}{2\pi} = 10^3\ Hz$, $\underline{k = 18{,}3\ m^{-1}}$.

β_ $p = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, donc $\boxed{p_1 = \dfrac{ikA_1}{\chi_s} e^{i(\omega t - kx)}}$

$u = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$, donc $\underline{u_1 = i\omega A_1 e^{i(\omega t - kx)}}$

γ_ $\dfrac{p_1}{u_1} = \dfrac{ik}{i\omega \chi_s} = \dfrac{1}{c\chi_s}$ or $\chi_s = \dfrac{1}{\rho_0 c^2}$ donc $\boxed{\dfrac{p_1}{u_1} = \rho_0 c = \mathcal{R}}$

g_ Pour $\psi_1' = A_1' e^{i(\omega t + kx)}$, on a :

$p_1' = -ik\dfrac{A_1'}{\chi_s} e^{i(\omega t + kx)}$ et $u_1' = i\omega A_1' e^{i(\omega t + kx)}$,

d'où : $\boxed{\dfrac{p_1'}{u_1'} = -\mathcal{R}}$

B_2_a_ La continuité de la pression en 0 implique :

$p_{01} e^{i\omega t} + p_{01}' e^{i\omega_r t} = p_2 e^{i\omega_t t}$

où ω_r et ω_t sont les pulsations des ondes réfléchie et transmise. La validité de cette équation à tous temps implique $\underline{\omega_r = \omega_t = \omega}$.

Les ondes réfléchie et transmise ont même pulsation que l'onde incidente.

b_c_ Continuité de p : $p_{01} + p_{01}' = p_{02}$

Continuité de u : $\dfrac{p_{01}}{\mathcal{R}_1} - \dfrac{p_{01}'}{\mathcal{R}_1} = \dfrac{p_{02}}{\mathcal{R}_2}$

donc $2p_{01}' = p_2\left(1 - \dfrac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2}\right)$, $2p_{01} = p_2\left(1 + \dfrac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2}\right)$

On en tire : $p_2 = \dfrac{2\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} p_{01} \exp i(\omega t - k_2 x)$ $\left(k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}\right)$

$p_1' = \dfrac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1} p_{01} \exp i(\omega t + k_1 x)$

ou : $\boxed{r_{12} = \dfrac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1} \qquad t_{12} = \dfrac{2\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}}$

d_ $R = \dfrac{|p_{01}' u_{01}'|}{|p_{01} u_{01}|} = |r_{12}|^2$ $\qquad \boxed{R = \left(\dfrac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1}\right)^2}$

$T = \left|\dfrac{p_{02} u_{02}}{p_{01} u_{01}}\right| = \dfrac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2} t_{12}^2$ $\qquad \boxed{T = \dfrac{4\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)^2}}$

B_2_d_β_ On remarque que $R + T = 1$, ce qui correspond à la conservation de l'énergie.

e_ $\begin{cases} R = 0{,}9987 \\ T = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \end{cases}$

Presque toute la puissance est réfléchie : il y a une forte discontinuité entre ces 2 milieux.

3_a_ Continuité de p : $p_{01} + p_{01}' = p_{02}$

Continuité du débit : $\dfrac{p_{01} S_1}{\mathcal{R}_1} - \dfrac{p_{01}' S_1}{\mathcal{R}_1} = \dfrac{p_{02} S_2}{\mathcal{R}_2}$

On a donc les mêmes formules qu'en B_2, en remplaçant $\mathcal{R}_i$ par Z_i :

$$\boxed{r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \qquad t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}}$$

b_ De même $\boxed{R = \left|\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right|^2}$ $\qquad (\mathcal{P} = |p.u|.S)$

$$\boxed{T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$$

c_ Même si les deux fluides sont identiques, $Z_2 \neq Z_1$, donc il y a réflexion :

$$\boxed{r_{12} = \frac{\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}}{\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1}} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}}$$

$$\boxed{t_{12} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2}}$$

Comme $S_1 < S_2$, il y a changement de phase à la réflexion. Ce ne serait pas le cas pour $S_1 > S_2$.

B_3_d_ Pour deux fluides de natures différentes, mais $S_1 = S_2$, les Z_i sont proportionnels aux $\mathcal{R}_i$, donc on re-

Problème d'électromagnétisme :

I)

a) Equations de Maxwell dans le vide, en dehors des sources :

$\mathrm{div}\,\vec{B_T} = 0$ (M_1) $\qquad \mathrm{div}\,E_T = 0$ (M_3)

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E_T} = -\dfrac{\partial \vec{B_T}}{\partial t}$ (M_2) $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B_T} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E_T}}{\partial t}$ (M_4)

b) $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E_T}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E_T}) - \Delta\vec{E_T}$ (1)

$$(1)(M_2)(M_3) \Longrightarrow \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B_T}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E_T}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B_T})}{\partial t} = \Delta\vec{E_T} \\ (M_4)\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\Delta\vec{E_T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E_T}}{\partial t^2} = \vec{0}} \qquad (2)$$

c) L'équation (M_2) est valable aussi bien dans le vide que dans le métal. On en déduit, par un raisonnement très classique non demandé ici, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E_T}$ à la surface du métal.

Le métal étant supposé parfaitement conducteur, le champ électrique y est nul à l'intérieur. $\vec{E_T}$ étant, par ailleurs, polarisé suivant la direction $\vec{u_z}$, il est parallèle à la surface métallique. Par continuité, il est donc nul à son voisinage immédiat.

Nous traduirons cette propriété par la relation : $\boxed{\vec{E_T}(x, f(x)) = \vec{0}}$ (3)

II) Les ondes incidente et diffractée doivent satisfaire individuellement aux équations de Maxwell dans le vide. L'équation de propagation (2), démontrée pour l'onde résultante, doit être satisfaite par chacune d'elles.

Considérons le champ électrique de l'onde incidente :

$$\vec{E_i} = E_i\,\vec{u_z} = E_0\, e^{j(kx\sin\theta_0 - ky\cos\theta_0)}\, e^{-j\omega t}\,\vec{u_z}$$

Nous déduisons de cette expression :

* $\Delta\vec{E_i} = \left(\dfrac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial y^2}\right)\vec{u_z} = (-k^2\sin^2\theta_0 - k^2\cos^2\theta_0)\,E_i\,\vec{u_z}$

  $\Delta\vec{E_i} = -k^2 E_i\,\vec{u_z}$ (4)

* $\dfrac{\partial^2\vec{E_i}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_i\,\vec{u_z}$ (5)

En reportant (4) et (5) dans l'équation de propagation, nous obtenons :

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E_i} = \vec{0} \qquad \forall (x, y, z, t)$$

D'où, k étant le module du vecteur d'onde :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \qquad (6)$$

III) Considérons maintenant le champ électrique de l'onde diffractée :

$$\vec{E_D} = E(x,y,z)\,e^{-j\omega t}\,\vec{u_z}$$

a) $\vec{E_D}$ doit satisfaire l'équation de Maxwell $\mathrm{div}\,\vec{E_D} = 0$

or $\mathrm{div}\,\vec{E_D} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(E(x,y,z)\,e^{-j\omega t}\right) = \dfrac{\partial E(x,y,z)}{\partial z}\,e^{-j\omega t}$

D'où : $\dfrac{\partial E}{\partial z} = 0$ <u>la fonction scalaire E ne dépend pas de z</u>

b) E_D doit satisfaire l'équation de propagation. La fonction $E(x,y,z)$ étant indépendante de z, nous en déduisons :

$$\Delta\vec{E_D} = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right) e^{-j\omega t}\,\vec{u_z} \qquad (7)$$

Par ailleurs : $\dfrac{\partial^2\vec{E_D}}{\partial t^2} = -\omega^2 E\, e^{-j\omega t}\,\vec{u_z}$ (8)

En reportant (7) et (8) dans l'équation de propagation, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}E = 0} \qquad (9)$$

c) Ecrivons qu'aux points $M(x, f(x))$ et $M(x+a, f(x))$ le champ E_T satisfait à la condition aux limites (3) :

* En $M(x, f(x))$: $\vec{E_T}(x, f(x)) = \left[E_0\, e^{j(kx\sin\theta_0 - kf(x)\cos\theta_0)} + E(x, f(x))\right] e^{-j\omega t}\,\vec{u_z} = \vec{0}$

$\Longrightarrow E(x, f(x)) = -E_0\, e^{jk(x\sin\theta_0 - f(x)\cos\theta_0)}$ (10)

* En $M(x+a, f(x))$ on démontre de même : $E(x+a, f(x)) = -E_0\, e^{jk((x+a)\sin\theta_0 - f(x)\cos\theta_0)}$

$\Longrightarrow E(x+a, f(x)) = -E_0\, e^{jk(x\sin\theta_0 - f(x)\cos\theta_0)}\, e^{jka\sin\theta_0}$ (11)

* (10) (11) $\Longrightarrow$ $\boxed{E(x+a, f(x)) = E(x, f(x))\, e^{jka\sin\theta_0}}$ (12)

) on recherche une solution de la forme $E(x,y) = Ae^{j(\alpha x+\beta y)}$

a)

1) En reportant l'expression de E dans l'équation (9), nous obtenons:

$$(-\alpha^2-\beta^2)E + \frac{\omega^2}{c^2}E = 0 \qquad \alpha^2+\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad (13)$$

D'où (6) (13) $\Longrightarrow$ $\boxed{\alpha^2+\beta^2=k^2}$ (14)

2) En reportant l'expression de E dans l'équation (12), nous obtenons:

$$Ae^{j(\alpha(x+a)+\beta f(x))} = Ae^{j(\alpha x+\beta f(x))}e^{jka\sin\theta_0}$$

$$\Rightarrow e^{j\alpha a} = e^{jka\sin\theta_0} \Longrightarrow \alpha a = ka\sin\theta_0 + n2\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = k\sin\theta_0 + nK} \quad (15) \quad \text{avec } K = \frac{2\pi}{a}$$

b)

1) La relation (15) peut s'écrire : $\frac{\alpha}{k} = \sin\theta_0 + n\frac{2\pi}{ak}$

Nous pouvons poser $\alpha = k\sin\theta$ à condition que soit respectée la double inégalité suivante :

$$-1 \leqslant \sin\theta_0 + n\frac{2\pi}{ka} \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{ak}{2\pi}(1+\sin\theta_0) \leqslant n \leqslant \frac{ak}{2\pi}(1-\sin\theta_0)$$

En notant $E(\lambda)$ la partie entière de λ, le fait que n soit entier se traduit par:

$\underline{-N_1 \leqslant n \leqslant N_2}$ avec $\begin{cases} N_2 = E\left(\frac{ak}{2\pi}(1-\sin\theta_0)\right) \\ N_1 = E\left(\frac{ak}{2\pi}(1+\sin\theta_0)\right) \end{cases}$

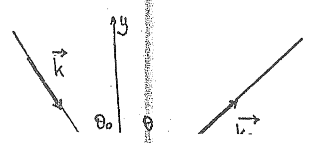
Remarque : N_1 et N_2 ne seront différents de zéro que si a est suffisamment grand.

Il vient alors pour β :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = k\sin\theta \\ (14)\end{array}\right\} \Longrightarrow \beta^2 = k^2\cos^2\theta \Longrightarrow \beta = \pm k\cos\theta$$

Dans ces conditions α et β sont réels. La solution proposée est une onde plane se propageant dans le plan xOy. α et β s'interprètent comme les projections du vecteur d'onde de l'onde diffractée sur les vecteurs de base $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$.
La relation (14) traduit alors que les vecteurs d'onde de l'onde incidente et de l'onde réfractée ont même module.

L'onde réfractée se propageant nécessairement dans le vide $(y > f(x))$ dans le sens des y croissants, nous prendrons physiquement les valeurs de θ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $\beta = +k\cos\theta$ (cf. figure)



Remarque : Attention à la différence de convention d'orientation de θ et θ_0 inhérente à la définiti de θ par $\alpha = k\sin\theta$.

Pour l'onde diffractée, nous aurons donc :

* Vecteur d'onde : $\vec{k_D} = k(\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y})$
* Champ électrique : $\vec{E_D} = A\,e^{j(\vec{k_D}.\vec{r}-\omega t)}\,\vec{u_z}$

A.N.: $a = \frac{1}{500} = 2.10^{-3}$ mm $\quad \lambda = 0{,}55.10^{-3}$ mm $\quad \sin\theta_0 = 0{,}5$

$N_1 = E\left(\frac{a}{\lambda}(1+\sin\theta_0)\right) = E\left(\frac{2}{0{,}55}\times 1{,}5\right) \qquad \underline{N_1 = 5}$

$N_2 = E\left(\frac{a}{\lambda}(1-\sin\theta_0)\right) = E\left(\frac{2}{0{,}55}\times 0{,}5\right) \qquad \underline{N_2 = 1}$

2) Dans chacun des deux cas $n < -N_1$ et $n > N_2$, le rapport $\frac{\alpha^2}{k^2}$ est supérieur à 1. Compte tenu de la relation (14), β est dans ces conditions un imaginaire pur :

$$\beta^2 = k^2 - \alpha^2 < 0$$

Posons alors $\beta = j\beta'$ avec $\beta' = \sqrt{\alpha^2-k^2}$ (16)

Le champ électrique de l'onde diffractée s'écrit:

$$\vec{E_D} = A\,e^{j(\alpha x + j\beta' y)}\,e^{-j\omega t}\,\vec{u_z}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E_D} = Ae^{-\beta' y}e^{j(\alpha x-\omega t)}\vec{u_z}} \qquad (17)$$

L'onde diffractée est une onde évanescente qui s'atténue à mesure qu'on s'écarte du réseau. Son amplitude est inférieure au centième de sa valeur au niveau du réseau pour $\beta' y > \ln 100 = 4{,}6$. Pour fixer les idées, cherchons la valeur minimale de y correspondante.

$$(15)(16) \Longrightarrow \beta' = \sqrt{\left(k\sin\theta_0 + \frac{2\pi}{a}n\right)^2 - k^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\sin\theta_0 + \frac{\lambda}{a}n\right)^2 - 1} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} y > \frac{4{,}6}{\beta'} \\ (18) \end{array}\right\} \Longrightarrow y > \frac{4{,}6}{2\pi}\,\frac{\lambda}{\sqrt{\left(\sin\theta_0 + \frac{\lambda}{a}n\right)^2-1}}$$

$$y > \frac{4{,}6}{2\pi}\,\frac{0{,}55.10^{-3}}{\sqrt{\left(0{,}5+\frac{0{,}55}{2}n\right)^2-1}} = \frac{4{,}03.10^{-4}}{\sqrt{(0{,}5+0{,}28n)^2-1}} \text{ mm}$$

Pour $n = N_2 + 1 = 2 \qquad y > 1{,}3.10^{-4}$ mm.

Pour $n = -(N_1+1) = -6 \qquad y > 2{,}3.10^{-4}$ mm

Nous constatons donc, numériquement, que l'amplitude de l'onde diffractée diminue très rapidement et devient vite négligeable dès que nous nous éloignons du réseau.

Remarque : La solution $\beta = -j\beta'$ n'a pas été retenue car elle correspond à une onde d'amplitude divergente, physiquement inacceptable pour des raisons énergétiques.

c) Pour convenir, la solution doit satisfaire la condition aux limites (3), pour toute valeur de x quelque soit t.

$$\vec{E_T} = \left[E_0\,e^{jk(x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0)} + A\,e^{jk(x\sin\theta + y\cos\theta)}\right]e^{-j\omega t}\,\vec{u_z} \qquad (19)$$

toute évidence, cette condition ne peut être réalisée. La solution proposée ne vient donc pas.

La solution s'écrit en fait sous la forme de la limite d'une série batie à partir de la solution précédente:

$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j(\alpha_n x + \beta_n y)}$

avec $\begin{cases} \alpha_n = k \sin \theta_n & (20) \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \alpha_n = k \sin \theta_0 + n \frac{2\pi}{a} & (21) \end{cases}$

$\beta_n = k \cos \theta_n$

a) Nous savons que pour $n > N_2$ et $n < -N_1$ le terme E_n est un terme évanescent qui s'atténue très rapidement avec la distance au réseau. L'observation se faisant assez loin du réseau, tous les termes de ce type peuvent être négligés. Nous écrirons donc:

$E(x,y) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} A_n e^{j(\alpha_n x + \beta_n y)}$

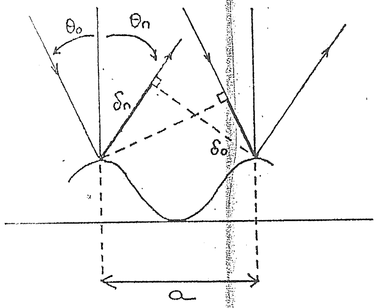
b) Des relations (20) et (21), nous déduisons:

$\sin\theta_n = k \sin\theta_0 + n \frac{2\pi}{a}$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Longrightarrow \boxed{\sin\theta_n - \sin\theta_0 = n\frac{\lambda}{a}}$ (22)

Nous retrouvons ainsi la relation dite des réseaux donnant, dans le phénomène de diffraction à l'infini, les directions dans lesquelles sont observées les maxima principaux.

Cette relation s'obtient classiquement en écrivant que les maxima principaux sont observés dans les directions pour lesquelles les ondes diffractées par deux traits consécutifs du réseau sont en phase.



$\varphi_n = \frac{2\pi}{\lambda}(\delta_n - \delta_0) = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin\theta_n - \sin\theta_0) = n 2\pi$

$\Longrightarrow \sin\theta_n - \sin\theta_0 = n\frac{\lambda}{a}$

B. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel.

1) Selon le modèle de l'électron élastiquement lié, l'équation différentielle régissant le mouvement d'un électron dans le champ électrique extérieur est de la forme:

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt} - eE$ (B.1)

Le champ électrique de l'onde est quant à lui de la forme:

$E = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$

En régime forcé et en utilisant la notation complexe nous pourrons alors poser

$x = \underline{X} e^{i(kz-\omega t)}$ avec $\underline{X} = x_0 e^{j\phi}$

Le seul mouvement à prendre en compte étant celui de l'électron dans le champ extérieur polarisé selon $\vec{u_x}$, nous en déduisons:

$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \doteq \frac{\partial x}{\partial t} = -i\omega x$

De même: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{dz}{dt} \doteq \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x$

En reportant ces expressions dans la relation (B.1):

$-m\omega^2 x = -kx - if\omega x - eE$

$\Longrightarrow x = \frac{eE}{(m\omega^2 - k) + if\omega}$

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, il vient finalement:

$$\boxed{x = \frac{e}{m}\frac{E}{(\omega^2-\omega_0^2) + if\frac{\omega}{m}} = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i(kz-\omega t)}}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}}} \quad (B.2)$$

2) Par définition de la densité volumique de courant:

$\vec{J} = -n^* e \vec{v} = -n^* e \frac{dx}{dt}\vec{u_x}$ (B.3)

(B.2)(B.3) $\Longrightarrow \vec{J} = i n^* \frac{e^2}{m}\frac{\omega E}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}} \vec{u_x}$

Soit, en posant $\omega_c^2 = \frac{n^* e^2}{\varepsilon_0 m}$:

$$\boxed{\vec{J} = \frac{i\varepsilon_0 \omega \omega_c^2}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}} E \vec{u_x}} \quad (B.4)$$

3) Les équations de Maxwell s'écrivent:

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ (M₁) — $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (M₃)

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (M₂) — $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ (M₄)

Remarque: Compte tenu de la forme du champ $\vec{E}$, l'équation (M₃) s'écrit en fait:

$\mathrm{div}\,E = \frac{\partial E}{\partial x} = 0$ (M₃') classique :

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \quad (B.5)$$

$$(M_2) \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) \quad (B.6)$$

$$(B5)(B6)(M_4) \Longrightarrow \mu_0\left[\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right] + \Delta\vec{E} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = \vec{0} \quad (B.7)$$

Or, compte tenu de la forme du champ $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{E} = \Delta E\,\vec{u_x} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\vec{u_x} = -k^2 E\,\vec{u_x} \quad (B.8)$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E\,\vec{u_x} \quad (B.9)$$

En outre $(B.4) \Longrightarrow$ $$\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0\,\omega^2\omega_c^2}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}}\,E\,\vec{u_x} \quad (B.10)$$

Finalement :

$$(B.7)(B.8)(B.9)(B.10) \Longrightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\omega^2\omega_c^2}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}} = 0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_c^2}{(\omega^2-\omega_0^2)+if\frac{\omega}{m}}\right]} \quad (B.11)$$

4) Le fait que k soit complexe traduit le phénomène d'absorption. En effet, si nous posons $k = k' + ik''$ (k' et k'' étant réels), il vient :

$$E = E_0\,e^{-k''z}\,e^{i(k'z-\omega t)}$$

Remarque : la validité physique de la solution impose le choix $k'' > 0$.

5) En supposant f négligeable :

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right]$$

ω_0 étant très grand devant ω, nous obtenons ensuite, par un développement au 2ème ordre :

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)\right]$$

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^4}\frac{\omega^4}{c^2} + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^6}\frac{\omega^6}{c^2} \quad (B.12)$$

En notant V_φ la vitesse de phase, l'indice du milieu se définit par :

$$n = \frac{c}{V_\varphi} \quad \text{avec} \quad V_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

d'où $$n^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} \quad (B.13)$$

$$(B.12)(B.13) \Longrightarrow n^2 \simeq \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^4}\omega^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^6}\omega^4$$

Enfin, compte tenu de $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$:

$$\boxed{n^2 \simeq \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{4\pi^2c^2\omega_c^2}{\omega_0^4}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{16\pi^4c^4\omega_c^2}{\omega_0^6}\frac{1}{\lambda^4}} \quad (B.14)$$

C. Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques.

1) La pulsation ω s'exprime en fonction de la longueur d'onde dans le vide par la relation :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (c.1)$$

Le module k du vecteur d'onde $\vec{k}$ se définit quant à lui par :

$$k = \frac{2\pi\,n(\lambda)}{\lambda} \quad (c.2)$$

En différentiant les relations (c.1) et (c.2), nous obtenons :

$$(c.1) \Longrightarrow d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda \quad (c.3)$$

$$(c.2) \Longrightarrow dk = 2\pi\left[-\frac{n}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}\right]d\lambda = -\frac{2\pi n}{\lambda^2}\left[1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right]d\lambda \quad (c.4)$$

Par définition de la vitesse de groupe :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (c.5)$$

Finalement : $$(c.3)(c.4)(c.5) \Longrightarrow V_g = \frac{c}{n}\,\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}} \quad (c.6)$$

Remarques : * Nous retrouvons bien la relation (A.33) établie en (A III) 2) d))

* $\frac{dn}{d\lambda} < 0 \Longrightarrow V_g$ est inférieure à la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{c}{n}$

2) $\lambda = 657$ nm.

* Cas de l'eau :

$$V_\varphi = \frac{c}{n} \qquad V_\varphi = \frac{2{,}998.10^8}{1{,}331}\ ms^{-1} \qquad \underline{V_\varphi = 2{,}252.10^8\ ms^{-1}}$$

$$V_g = \frac{V_\varphi}{1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}} \qquad V_g = \frac{2{,}252.10^8}{1+\frac{657.10^{-9}}{1{,}331}2{,}5\,10^4}\ ms^{-1} \qquad \underline{V_g = 2{,}225.10^8\ ms^{-1}}$$

Nous constatons que la valeur obtenue pour V_g appartient à l'intervalle d'incertitude $[2{,}216.10^8\ ms^{-1} - 2{,}238.10^8\ ms^{-1}]$

* Cas du sulfure de carbone

$$V_\varphi = \frac{c}{n} \qquad V_\varphi = \frac{2{,}998.10^8}{1{,}614}\ ms^{-1} \qquad \underline{V_\varphi = 1{,}857.10^8\ ms^{-1}}$$

$$V_g = \frac{V_\varphi}{1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}} \qquad V_g = \frac{1{,}857.10^8}{1+\frac{657.10^{-9}}{1{,}614}1{,}2.10^5}\ ms^{-1} \qquad \underline{V_g = 1{,}771.10^8\ ms^{-1}}$$

Nous constatons que la valeur obtenue pour V_g appartient à l'intervalle d'incertitude $[1{,}760.10^8\ ms^{-1} - 1{,}790.10^8\ ms^{-1}]$

Dans les deux cas, il y a donc accord entre les résultats expérimentaux les résultats théoriques.