Examen Physique des Particules

durée : 1h30 — *Aucun document autorisé* — *Calculatrices autorisées*

Diffusion élastique électron-proton. Ce problème propose d'étudier les caractéristiques de l'interaction électromagnétique de diffusion élastique entre un électron et un proton. Dans une première partie on abordera le calcul de l'amplitude invariante de diffusion. On introduira dans une seconde partie la notion de facteurs de forme du nucléon et on étudiera finalement les implications de ces derniers dans la modélisation du processus d'interaction.

Données numériques :

- facteur de "conversion" : $\hbar c = 197$ MeV.fm
- 1 barn (b) $= 10^{-24}$ cm^2
- masse des leptons chargés : $m_e = 511$ keV, $m_\mu = 105.7$ MeV, $m_\tau = 1.78$ GeV

Règles de Feynman de l'interaction électrofaible :

- Pour les lignes externes d'un graphe :
  - à chaque particule de spin $\frac{1}{2}$ entrante, on associe : $u(p, s)$
  - à chaque particule de spin $\frac{1}{2}$ sortante, on associe : $\bar{u}(p, s)$
  - à chaque anti-particule de spin $\frac{1}{2}$ entrante, on associe : $\bar{v}(p, s)$
  - à chaque anti-particule de spin $\frac{1}{2}$ sortante, on associe : $v(p, s)$
  - à chaque particule de spin nul entrante, on associe une constante
  - à chaque anti-particule de spin nul sortante, on associe : $\bar{u}(p, s)$ une constante
- Pour les lignes internes d'un graphe :
  - propagateur de photon : $\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$
  - propagateur de fermion : $\frac{\gamma^\mu q_\mu + m}{q^2 - m^2}$
  - propagateur de boson massif : $-i\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}$
- Pour les vertex :
  - entre un photon et 2 fermions de charge e : $-ie\gamma^\mu$
  - entre un boson intermédaire $W^\pm$ et 2 fermions : $-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)$

Théorèmes de traces et propriétés des matrices gamma :

$$\mathrm{Tr}\left[1_{4\times4}\right] = 4$$
$$\mathrm{Tr}\left[\text{nbr impair de } \gamma\right] = 0$$
$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \gamma^\nu\right] = 4\left(g^{\mu\nu}\right)$$
$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\right] = 4\left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}\right)$$

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$
$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1 \text{ and } \left(\gamma^i\right)^2 = -1$$
$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

Première partie

I-1- Les termes *hadron*, *lepton*, *boson* et *fermion* sont utilisés dans la classification des particules. Détailler leur signification. Lesquels s'appliquent à l'électron? Au proton? Au pion?

I-2- Quelle est la composition d'un proton dans le modèle des quarks? Même question pour un neutron.

I-3- Dans quel type de multiplet d'isospin sont rangés proton et neutron?

I-4- A quel type d'interaction(s) appartiennent les processus suivants :

- $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- $e^+ + e^- \longrightarrow p + \bar{p}$
- $e^- + p \longrightarrow e^- + p$
- $e^+ + e^- \longrightarrow e^+ + e^-$

I-5- Proposer les graphes de Feynman au plus bas ordre pour chacun des mécanismes réactionnels précédents.

Seconde partie

On se propose de calculer la section efficace de diffusion élastique électron-proton. Les états des particules considérées sont caractérisés par leur quadrivecteurs énergie-impulsion k, k', p et p' et par leur spin s, s', r et r' :

$$e^-(k,s) + p(p,r) \to e^-(k',s') + p(p',r') \quad \text{(Réaction1)}$$

On considère dans cette partie que le proton est une particule sans structure.

II-1- Dessiner le diagramme de Feynman du processus correspondant à l'échange d'un photon. Préciser le type d'interaction mis en jeu.

II-2- Quel autre type d'interaction aurait-on pu considérer? Dans quel domaine d'énergie ce graphe peut-il avoir une contribution significative?

II-3- On note $T_{fi}^{s,s';r,r'}(k,k';p,p')$ l'élément de matrice de la réaction 1. Justifier le fait que la section efficace non polarisée soit de la forme :

$$d\sigma \sim \frac{1}{4} \sum_{s,s';r,r'} |T_{fi}^{s,s';r,r'}(k,k';p,p')|^2 \equiv \overline{|T_{fi}|^2}$$

II-4- Quels sont les termes, autres que l'élément de matrice, qui contribuent dans l'expression de $d\sigma$ (on ne demande pas de les expliciter)?

II-5- Donner l'expression de $T_{fi}^{s,s';r,r'}(k,k';p,p')$.

II-6- On définit le quadri-vecteur de transfert $q \equiv k - k' = p' - p$. Montrer que l'on peut écrire

$$\overline{|T_{fi}|^2} = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} P^{\mu\nu}$$

Donner l'expression des tenseurs *leptonique* $L_{\mu\nu}$ et *protonique* $P^{\mu\nu}$ en fonction de traces de matrices de Dirac.

II-7- En utilisant les théorèmes de trace appropriés, donner les expressions de $L_{\mu\nu}$ et $P^{\mu\nu}$ en fonction des quadri-vecteurs k, k', p et p'.

II-8- Montrer que $q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$.

II-9- On se place dans le référentiel du "laboratoire" défini comme le référentiel où le proton est initialement au repos : $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$. Montrer que la section différentielle se met sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right)_{ns} \left(1 - \frac{q^2 \tan^2(\theta/2)}{2M^2}\right)$$

On donne $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right)_{ns} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \cos^2(\theta/2)\frac{k'^3}{k}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat).

II-10- Dans l'expression précédente on définit la section efficace $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right)_{ns}$ de diffusion d'un électron sur une particule sans spin et sans structure. Justifier l'expression précédente et interpréter qualitativement la présence du terme proportionnel à $\tan^2(\theta/2)$.

Troisième partie

Le proton n'étant pas une particule ponctuelle mais constitué de particules élémentaires en interaction forte, on s'attend à ce que les distributions électrique et magnétique soient affectées.

III-1- Quel lien fait-on entre les distributions mentionnées et la notion de facteur de forme? Combien de facteurs de forme doit-on avoir à priori?

III-2- Des arguments d'invariance de Lorentz et de conservation du courant nous conduisent à réécrire le tenseur protonique sous la forme :

$$P^{\mu\nu} = 4A(q^2)\left[p^\mu - \left(\frac{(p.q)}{q^2}\right)q^\mu\right]\left[p^\nu - \left(\frac{(p.q)}{q^2}\right)q^\nu\right] + 2M^2 B(q^2)\left[-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right]$$

où les fonctions A et B ne dépendent que du moment de transfert q. Vérifier que ce tenseur est transverse, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$q_\mu P^{\mu\nu} = q_\nu P^{\mu\nu} = 0$$

III-3- Montrer que la section efficace se met sous la forme modifiée :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right)_{ns} \left(A(q^2) + B(q^2)\tan^2(\theta/2)\right)$$

III-4- On définit des facteurs de forme alternatifs, dits :

- facteur de charge de Dirac : $F_1(q^2)$
- facteur de moment magnétique anormal de Pauli : $F_2(q^2)$

Ils sont définis dans l'expression du "courant" protonique :

$$\langle p', s'|J^\mu|p, s\rangle = (+e)NN'\bar{u}(p', s')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\kappa F_2(q^2)}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p, s)$$

avec : N, N' facteurs de normalisation des états, $F_1(0) = F_2(0) = 1$ et

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] = \frac{1}{2}i\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)$$

Que valent les composantes de type espace σ^{ij} de ce tenseur?

III-5- Quelles valeurs de F_1 et κ redonnent le cas ponctuel?

III-6- Pour donner une signification physique à ces facteurs de forme on utilise la "décomposition du courant de Gordon" :

$$\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s) = \bar{u}(p', s')\left(\frac{(p + p')^\mu}{2M} + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M}\right)u(p, s)$$

Démontrer cette égalité en partant de l'expression de

$$\bar{u}(p', s') i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} u(p, s)$$

et de l'équation de Dirac pour les spineurs $u(p, s)$ et $u(p', s')$. On rappelle que $q = p' - p$.

III-7- En utilisant cette décomposition de Gordon, montrer l'existence, dans l'expression du courant protonique, de termes dépendant de F_1, F_2 et κ représentant :

- l'interaction avec une particule chargée sans spin ("interaction de charge")
- l'interaction avec le moment magnétique de spin

Ceci confirme-t'il l'interprétation de la question **II-10-** ?

III-8- Justifier que le moment magnétique du proton vaut $\mu_p = 1 + \kappa$. Que représente le terme κ?