Examen Physique Nucléaire

durée : 1h30 — *Aucun document autorisé — calculatrice autorisée*

Remarque préliminaire : Dans tous les problèmes, on utilisera la convention $\hbar = c = 1$, sauf lors des applications numériques où les bonnes dimensions devront être rétablies.

A - Questions de cours

A-1 Citer deux conséquences de l'interaction d'appariement.

A-2 Expliquer le concept de vallée de stabilité.

B - Modèle du gaz de Fermi

Afin d'obtenir une estimation du terme d'asymétrie de la formule de la goutte liquide, on considère le noyau comme deux gaz de Fermi indépendants, un de protons et un de neutrons, enfermés dans le même volume V. On rappelle que l'énergie de Fermi d'un gaz formé de n particules identiques de masse m dans le volume V s'écrit :

$$E_F(gaz) = \frac{1}{2m}\left(\frac{3\pi^2 n}{V}\right)^{2/3}$$

.

B-1 Si on admet tout d'abord que $N = Z = A/2$, calculer numériquement l'énergie de Fermi d'un nucléon notée E_F^0 (on prendra m=938 MeV/c^2 pour le proton et le neutron)

B-2 L'énergie cinétique totale des n particules d'un gaz de Fermi, s'écrit : $E(n) = (3/5)\, n\, E_F$ (avec E_F=E_F^0 si $N = Z$). Exprimer l'énergie cinétique $E(A)$ totale d'un noyau de masse $A = Z + N$ en fonction de l'excès de neutrons $\epsilon = N - Z$, du nombre de nucléons A et de l'énergie de Fermi E_F^0.

B-3 En développant l'expression de $E(A)$ au deuxième ordre en puissances de ϵ/A , montrer que :

$$E(A) = \frac{3}{5}E_F^0 A + \frac{1}{3}E_F^0 \frac{(N-Z)^2}{A} + o(\epsilon^3/A^3)$$

B-4 Interpréter ces deux termes dans le cadre du modèle de la goutte liquide. Calculer les valeurs numériques des coefficients et comparer aux valeurs empiriques donnés en annexe.

B-5 Quels sont les défauts de ce modèle ?

C - Série isobarique

C-1 Connaissant les excès de masse en MeV des isobares $A = 198$ suivants :

$_{77}$Ir : -22.5 $_{78}$Pt : -29.903 $_{79}$Au : -29.599 $_{80}$Hg : -30.972 $_{81}$Tl : -27.510

Donner le ou les noyau(x) stable(s) de la série

C-2 Donner les modes de désintégration des isobares radioactifs de cette série. Indiquer l'énergie maximum des particules émises.

C-3 Donner dans le cadre du modèle en couches sphérique à nucléon célibataire, le spin et la parité de l'état fondamental et du premier état excité de ^{197}Au.

D - Désintégration β

Remarque préliminaire : dans la suite de ce problème, ne pas faire l'approximation d'un neutrino de masse nulle.
Dans la théorie de Fermi de la désintégration β, le temps de vie d'un noyau peut être calculé à partir de la règle d'or de Fermi :

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_0)$$

où M_{fi} représente l'élément de matrice du potentiel perturbateur qui connecte l'état initial i et l'état final$f$, et $\rho(E_0)$ la densité d'états finals pour une énergie libérée E_0.

D-1 On considère le cas de la désintégration β^- d'un noyau ${}^A_Z\mathrm{X}$ (on notera Y le noyau fils). On définit E_0 comme la différence de masse entre le noyau père et le noyau fils. En assimilant la paire (e, ν) à une particule fictive β, justifier que l'énergie de recul de Y est négligeable, c'est à dire que $E_0 \simeq E_e + E_\nu$, où E_e et E_ν représentent l'énergie totale de l'électron et du neutrino.

D-2 Dans la théorie de Fermi, l'élément de matrice peut s'écrire

$$M_{fi} = G_F \int \psi_p^*(\vec{r})\, \psi_e^*(\vec{r})\, \psi_\nu^*(\vec{r})\, \psi_n(\vec{r})\, \mathrm{d}^3r$$

où les ψ_i sont les fonctions d'ondes des 4 fermions en interaction et G_F la constante de Fermi.

a) Justifier sommairement cette modélisation pour l'interaction.

b) Après la désintégration, l'électron et le neutrino sont des particules libres dont on normalisera les fonctions d'onde à une particule dans un volume arbitraire V. Donner la forme de ψ_e et ψ_ν. Montrer que

$$M_{fi} = \frac{G_F}{V} \int \psi_p^* \psi_n e^{-i\vec{p}_\beta \cdot \vec{r}} \mathrm{d}^3r$$

avec $\vec{p}_\beta = \vec{p}_e + \vec{p}_\nu$.

c) Sachant que les énergies mises en jeu lors des désintégrations β sont au plus de quelques MeV, estimer la valeur de l'argument de l'exponentielle et justifier que l'on peut faire un développement en série de l'élément de matrice. Écrire les deux premiers termes de ce développement.

d) À l'aide du développement en série précédent, expliquer la signification des transitions permises et une fois interdites. Donner explicitement la valeur de M_{fi} dans le cas d'une transition super-permise.

D-3 On rappelle que le nombre d'états accessibles pour une particule d'impulsion p dans une boite de volume V est $\mathrm{d}^3N = V\,\mathrm{d}^3p/(2\pi)^3$. Dans le cas de la désintégration β, calculer en tenant compte de la conservation de l'énergie, la densité d'états correspondant à un électron d'énergie comprise entre E_e et $E_e + \mathrm{d}E_e$.

D-4 Montrer que $\omega = \mathrm{d}\lambda_\beta/\mathrm{d}E_e$ est donné par

$$\omega = \frac{G_F^2 |\mathcal{M}_{\mathrm{nucl}}|^2}{(2\pi)^3} E_e(E_0 - E_e)\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2}\ ,$$

où $\mathcal{M}_{\mathrm{nucl}}$ représente l'élement de matrice nucléaire de la transition.

D-5 On définit

$$R = \sqrt{\frac{\omega}{E_e\sqrt{E_e^2 - m_e^2}}}\ .$$

Calculer R dans le cas d'une masse de neutrinos non nulle et dans le cas d'une masse de neutrino nulle. Pour $|\mathcal{M}_{\mathrm{nucl}}|$ variant peu avec l'énergie de l'électron, tracer qualitativement R en fonction de E_e dans les deux cas. Conclusion.

D-6 En supposant les masses du neutrino et de l'électron négligeables devant leur énergie, dériver l'expression du temps de vie d'une transition super-permise.

Annexe :

- $\hbar c \simeq 197$ MeV.fm
- $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$
- $r_0 = 1.15$ fm
- $m_e = 0.511$ MeV/c^2
- Excès de masse : $({}^A_Z\mathrm{X}) = M({}^A_Z\mathrm{X}) - A \times 1$ u.m.a.
- Dans le modèle de la goutte liquide, l'énergie de liaison est modélisée par :

$$B(A,Z) = u_v A - u_s A^{2/3} - u_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - u_T \frac{(A-2Z)^2}{A} + u_p A^{-1/2}$$

  avec u_v=15.8 MeV ; u_s=18.3 MeV ; u_c=0.71 MeV ; u_T=23.2 MeV ; $u_p = \pm 12$ MeV ou u_p=0

- Succession des couches nucléaires que l'on choisira pour simplifier identiques en protons et en neutrons:

$1s_{1/2}$
$1p_{3/2}, 1p_{1/2}$
$1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}$
$1f_{7/2}$
$2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}$
$2d_{5/2}, 1g_{7/2}, 3s_{1/2}, 2d_{3/2}, 1h_{11/2}$
$2f_{7/2}, 1h_{9/2}, 1i_{13/2}, 3p_{3/2}, 2f_{5/2}, 3p_{1/2}$
$2g_{9/2}$...