

Circuits linéaires du premier ordre

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les réponses à un échelon de tension de quelques circuits simples comprenant des condensateurs, des bobines et des résistances (circuit RC série, circuit RL série).

Ces circuits vont permettre d'étudier les régimes transitoires entre deux régimes permanents : l'état de repos et l'état de « pleine charge ».

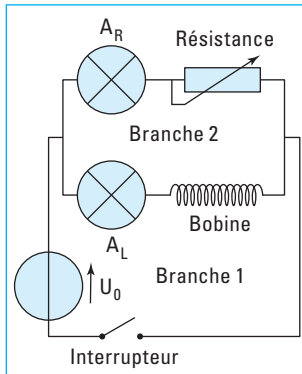
Ce chapitre s'adresse aux classes de MPSI, PCSI et PTSI.

Plan du chapitre 6

A. Mise en évidence expérimentale	X
1. Retard à l'allumage d'une ampoule.....	X
2. Réponse d'un condensateur à un créneau de tension	X
B. Étude d'un circuit RC série	
1. Charge du condensateur.....	X
2. Décharge du condensateur.....	X
3. Études énergétiques.....	X
C. Étude d'un circuit RL série	
1. Établissement du courant dans la bobine	X
2. Arrêt du courant dans la bobine	X
3. Étude énergétique	X
D. Analyse d'un portrait de phase	
Méthodes	X
Exercices	X

A. Mise en évidence expérimentale

A.1. Retard à l'allumage d'une ampoule

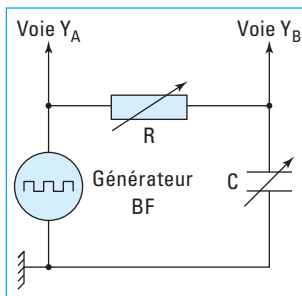


Considérons le montage expérimental à deux branches suivant, dans lequel chaque branche contient une ampoule de lampe de poche (3,7 V ; 0,3 A) et un dipôle différent :

- un conducteur ohmique de résistance R variable (rhéostat) dans la branche supérieure,
- une bobine d'inductance L dans la branche inférieure.

L'ensemble est alimenté par un générateur de tension continue en série avec un interrupteur. Dans un premier temps on utilise la bobine sans noyau de fer et on règle la tension continue à une valeur compatible avec les composants du circuit. On ferme l'interrupteur et on règle la résistance du rhéostat pour que les deux ampoules A_R et A_L brillent de façon identique. On ouvre alors l'interrupteur et on introduit un noyau de fer dans la bobine.

Lorsqu'on ferme à nouveau l'interrupteur, on constate que l'ampoule A_L s'allume après l'ampoule A_R . Le temps caractéristique de ce retard à l'allumage dépend du coefficient d'auto-induction de la bobine L , sur lequel on peut jouer avec le noyau de fer. En particulier, si l'on retire totalement le noyau de fer, il est possible que l'on n'observe aucun retard à l'allumage.



A.2. Réponse d'un condensateur à un créneau de tension

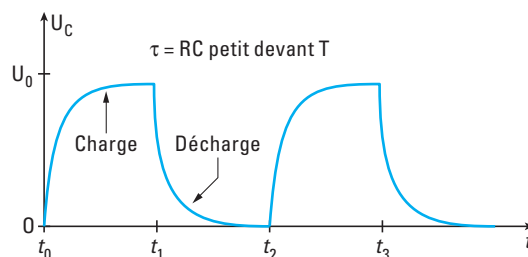
On considère maintenant un condensateur de capacité C en série avec un conducteur ohmique de résistance R . L'ensemble est alimenté par un générateur de tension capable de délivrer un signal périodique, de période T , en forme de créneau :

- de $t = 0$ à $t = t_1 = T/2$ la tension délivrée par le générateur vaut U_0 ,
- de $t = t_1 = T/2$ à $t = t_2 = T$ la tension délivrée par le générateur est nulle.

En observant simultanément sur un oscilloscope la tension délivrée par le générateur et la tension aux bornes du condensateur¹, on observe deux courbes :

- synchrones (les changements de sens de variation se produisent aux mêmes instants),
- de mêmes asymptotes (droites horizontales d'équation : $y = 0$ et $y = U_0$),
- d'allure différente puisque la tension aux bornes du condensateur suit le créneau de la source avec un certain temps de retard.

Ce retard est proportionnel à R et à C ce que l'on vérifie expérimentalement aisément avec ce montage.



Nous allons donner un cadre théorique permettant d'interpréter ces deux expériences simples.

B. Étude d'un circuit RC série

B.1. Charge du condensateur

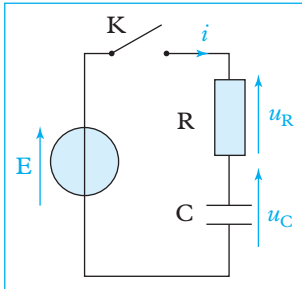


Fig. 1. Montage pour étudier la charge d'un condensateur dans un circuit RC série.

• Montage expérimental

Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure 1 :

- un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RC ;
- pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_C la tension aux bornes du condensateur et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où } u_R = RC \frac{du_C}{dt}.$$

• Équation différentielle vérifiée par la tension u_C

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que les tensions u_R et u_C . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K .

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_C.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

• Constante de temps du circuit

Les termes E et u_C sont des tensions exprimées en volt (V). L'équation différentielle est homogène si le terme $RC \frac{du_C}{dt}$ a la même dimension que les autres

termes. Or, la dérivée $\frac{du_C}{dt}$ s'exprime² en $V \cdot s^{-1}$; le produit RC la dimension d'un temps.

Définition 1

On définit la constante de temps τ du circuit RC par le produit³ :

$$\tau = RC$$

τ constante de temps en seconde(s)

R résistance en ohm (Ω)

C capacité en farad (F)

• Solution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$, il faut résoudre l'équation du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

2. La variation infinitésimale d'une grandeur s'exprime dans la même unité que cette grandeur. Comme du_C s'exprime en V et dt en s, le rapport $\frac{du_C}{dt}$ s'exprime en $V \cdot s^{-1}$.

3. On peut retrouver que τ a la dimension d'un temps grâce aux relations : $q = Cu_C$ et $u_R = Ri$.

En effet :

– l'unité de C est celle d'une charge ($1 C = 1 A \cdot s$) divisée par celle d'une tension (V), c'est-à-dire $A \cdot s \cdot V^{-1}$;

– l'unité de R est celle d'une tension (V) divisée par celle d'une intensité (A), c'est-à-dire $V \cdot A^{-1}$.

Le produit RC s'exprime donc bien en seconde (s).

(1) *Méthode de résolution mathématique*

La solution générale de cette équation est la somme :

– de la solution générale u_1 de l'équation homogène associée :

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0 ;$$

– d'une solution particulière u_2 de l'équation.

(2) *Solution particulière constante*

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$\tau \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \text{ avec } \frac{du_2}{dt} = 0, \text{ d'où : } u_2 = E.$$

(3) *Solution de l'équation homogène*

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}, \text{ où } A \text{ est une constante et } r \text{ un réel.}$$

L'équation homogène s'écrit alors :

$$\frac{du_1}{dt} = rAe^{rt} = ru_1, \text{ soit : } \tau ru_1 + u_1 = 0.$$

4. Ce polynôme n'admet qu'une solution (ce qui est logique, car l'équation différentielle est du premier ordre).

En simplifiant par u_1 , on obtient alors le polynôme caractéristique⁴ en r :

$$\tau r + 1 = 0, \text{ d'où : } r = -\frac{1}{\tau}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

(4) *Solution générale*

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E.$$

• **Application des conditions de continuité**

5. L'équation différentielle étant du premier ordre, connaître une seule condition initiale suffit à déterminer l'unique constante d'intégration A .

La tension u_C aux bornes du condensateur est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur la tension s'écrit⁵ : $u_C(t = 0) = 0$. On en déduit donc, en posant $t = 0$ dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + E, \text{ soit : } A = -E.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension E a pour expression⁶ :

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC \text{ constante de temps (s).}$$

6. Lorsque la charge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), la tension u_C à ses bornes vaut E . Cette tension maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante u_2 .

La charge du condensateur est alors CE .

• **Évolution de l'intensité i**

L'intensité i du courant est proportionnelle à la dérivée de la tension u_C aux bornes du condensateur :

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit } i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

7. Lorsque la charge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), l'intensité i du courant dans le circuit est nulle.

L'intensité i du courant est maximale à la fermeture de l'interrupteur K . Pendant la charge du condensateur, elle décroît avec le temps ; lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert⁷.

• Représentation graphique

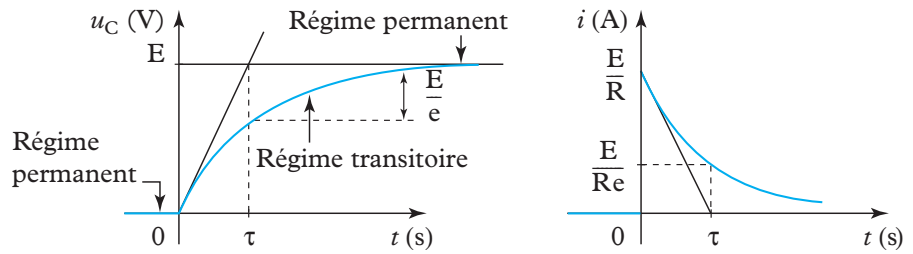


Fig. 2. Évolution de u_C et de i en fonction du temps.

8. Pour la tension u_C , l'axe asymptote est la droite horizontale $u_C = E$. Pour l'intensité i , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

– On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de u_C et de i (fig. 2). La tension u_C aux bornes du condensateur est continue; en revanche, l'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote⁸ au point d'abscisse $t = \tau$.

– La charge du condensateur correspond à un régime transitoire (le courant dans le circuit varie). Lorsque le condensateur est chargé ($t \rightarrow \infty$), le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant): on a alors $u_C = E$ et $i = 0$ (fig. 3).

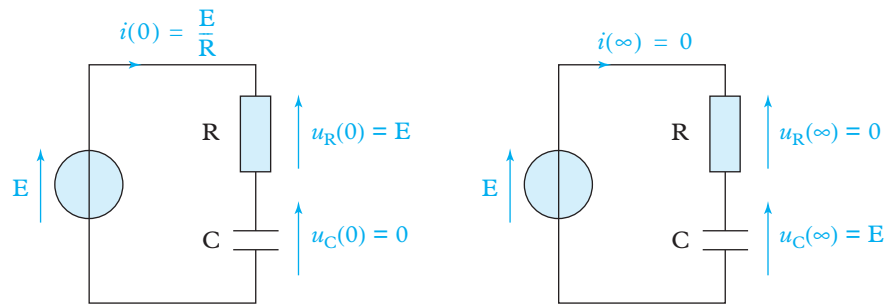


Fig. 3. État du circuit quand $t = 0$ et quand $t \rightarrow \infty$.

Application 1 Démonstration des propriétés de la tangente

Démontrer que la tangente de la courbe $u_C(t)$ à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.

Solution

Lors de la charge, la tension u_C aux bornes du condensateur a pour expression:

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La courbe $u_C(t)$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $u_C = E$. La pente de la tangente à l'origine est donnée par la dérivée à $t = 0$:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{d'où: } \frac{du_C}{dt}(t=0) = \frac{E}{\tau}.$$

L'équation de la tangente à l'origine est alors:

$$y = \frac{E}{\tau} t, \quad \text{d'où: } y = E \text{ pour } t = \tau.$$

La tangente de la courbe $u_C(t)$ à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$. (On pourrait faire la même étude pour l'intensité.)

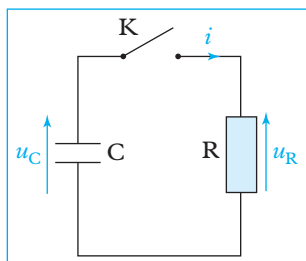


Fig. 4. Montage pour étudier la décharge d'un condensateur dans un circuit RC série.

9. On aurait pu aussi étudier le condensateur en convention récepteur et le conducteur ohmique en convention générateur. On aurait eu alors :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_R = -Ri,$$

ce qui aurait conduit à la même relation entre u_R et u_C . L'étude du montage ne dépend pas de la convention choisie.

10. Lorsque la décharge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), la tension u_C à ses bornes est nulle (car $(e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0)$).

11. En revanche, le sens du courant change, car le condensateur est étudié en convention récepteur pendant la charge et en convention générateur pendant la décharge.

B.2. Décharge du condensateur

• Montage expérimental

Pour étudier la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure 4 :

- le condensateur a été chargé sous la tension E constante ;
- pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur chargé est égale à E et l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Dans ce circuit, on note u_C la tension aux bornes du condensateur, i l'intensité du courant qu'il fournit et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le condensateur est étudié en convention générateur (attention au signe) et le conducteur ohmique en convention récepteur⁹. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = -RC \frac{du_C}{dt}$$

• Évolution de la tension u_C

Équation différentielle vérifiée par la tension u_C

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que la tension u_R . La tension E aux bornes du condensateur se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K .

– Pour $t \geq 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et on a :

$$u_C = u_R, \text{ soit : } u_C - u_R = 0.$$

La tension u_C aux bornes d'un condensateur de capacité C se déchargeant dans une résistance R vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

La constante de temps du circuit RC est encore égale à $\tau = RC$.

Expression de la tension u_C

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution u_1 de l'équation homogène du § B.1 :

$$u_C = u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

La tension u_C aux bornes du condensateur est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur la tension s'écrit : $u_C(t = 0) = E$, d'où : $A = E$.

La tension u_C aux bornes d'un condensateur de capacité C se déchargeant dans une résistance R a pour expression¹⁰ :

$$u_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

• Évolution de l'intensité i

L'intensité i du courant dans le circuit a donc pour expression :

$$i = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit } i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La loi de décroissance du courant est la même lors de la charge et lors de la décharge du condensateur¹¹.

• Représentation graphique

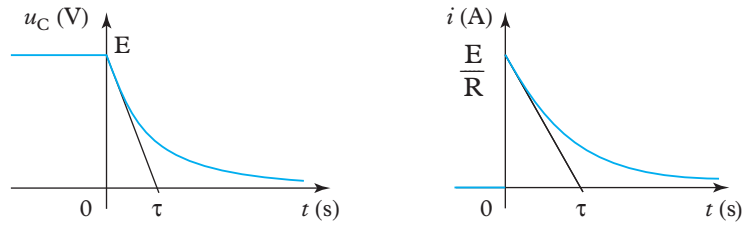


Fig. 5. Évolution de u_C et de i en fonction du temps.

12. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

– On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de u_C et de i (fig. 5). La tension u_C aux bornes du condensateur est continue ; en revanche, l'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote¹² au point d'abscisse $t = \tau$.

– La décharge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $u_C = 0$ et $i = 0$.

B.3. Études énergétiques

• Charge du condensateur

L'addition des tensions dans le circuit étudié s'écrit :

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C.$$

13. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance¹³, on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + u_C i,$$

$$\text{soit}^{14} : Ei = Ri^2 + Cu_C \frac{du_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}.$$

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur de tension idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

– Le terme $\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}$ est la puissance positive reçue par le condensateur et emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique¹⁵.

15. L'énergie électrostatique E_{elec} d'un condensateur est :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2}Cu_C^2.$$

16. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie du condensateur¹⁶ :

$$P_g = P_j + \frac{dE_{\text{elec}}}{dt}. \quad (1)$$

En intégrant l'égalité (1) entre l'instant $t = 0$ (fermeture de l'interrupteur K) et l'instant t , on obtient l'égalité (2) traduisant les transferts d'énergie :

$$E_g = E_j + \Delta E_{\text{elec}}. \quad (2)$$

– L'énergie électrique E_g fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = \int_0^t Ei dt = \int_0^t i dt, \quad \text{avec } idt = Cdu_C.$$

On en déduit donc :

$$E_g = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CEu_C(t).$$

– L'énergie électrostatique $\Delta E_{\text{élec}}$ emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$\Delta E_{\text{élec}} = \int_0^t \frac{dE_{\text{élec}}}{dt} dt = E_{\text{élec}}(t) - E_{\text{élec}}(0) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2.$$

– D'après l'équation (2), l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$E_J = E_g - \Delta E_{\text{élec}} = C u_C(t) \left(E - \frac{1}{2} u_C(t) \right).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension à ses bornes est $u_C = E$. D'après les expressions précédentes, au cours de la charge :

17. Au cours de la charge, l'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique. Elle ne dépend que de la capacité C du condensateur.

18. Lorsque le condensateur est chargé, le générateur ne fournit plus d'énergie au circuit (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

– le générateur a fourni l'énergie : $E_g = CE^2$;

– le condensateur a emmagasiné l'énergie : $\Delta E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} CE^2$;

– le conducteur ohmique a dissipé l'énergie¹⁷ : $E_J = \frac{1}{2} CE^2$.

Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur¹⁸ est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur.

Application 2 Énergie dissipée par effet Joule

Déterminer, par un calcul direct, l'expression de l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R en fonction du temps t . Montrer sa cohérence avec celle donnée dans le cours.

Solution

• La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R est :

$$P_J = Ri^2, \text{ avec } i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (voir § B.1.)}, \text{ d'où : } P_J = \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

L'énergie dissipée par effet Joule entre l'instant $t = 0$ et l'instant t vaut donc :

$$E_J = \int_0^t P_J dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \quad \text{avec } \tau = RC \text{ et } \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1 \right), \text{ d'où : } E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

• L'expression de l'énergie E_J en fonction de la tension u_C est :

$$E_J = C u_C \left(E - \frac{1}{2} u_C \right), \text{ avec } u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ (voir ci-avant).}$$

On obtient donc finalement :

$$E - \frac{1}{2} u_C = \frac{1}{2} E \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{et} \quad E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

• Décharge du condensateur

On a :

$$u_C = u_R = Ri.$$

Pour passer à une égalité en puissance¹⁹, on multiplie par i :

$$u_C i = Ri^2, \text{ soit }^{20} : -C u_C \frac{du_C}{dt} = -\frac{d \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)}{dt} = Ri^2.$$

– Le premier terme est la puissance $-\frac{dE_{\text{élec}}}{dt}$ positive fournie par le condensateur²¹.

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

19. Le condensateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique est étudié en convention récepteur : on fait donc apparaître la puissance reçue.

20. On a : $i = -C \frac{du_C}{dt}$.

21. Le condensateur se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

22. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

23. L'énergie initiale du condensateur est :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

24. L'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique.

La puissance fournie par le condensateur correspond à une diminution de l'énergie électrostatique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique²² :

$$-\frac{dE_{\text{elec}}}{dt} = P_J$$

Quand le condensateur est déchargé ($u_C = 0$), son énergie est nulle : il a donc fourni toute son énergie au circuit²³ ;

Au cours de la décharge, l'énergie électrostatique E_{elec} initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique²⁴.

C. Étude d'un circuit RL série

C.1. Établissement du courant dans la bobine

• Montage expérimental

Pour étudier l'établissement du courant dans une bobine d'inductance L à travers un conducteur ohmique de résistance R ²⁵, on réalise le montage schématisé sur la figure 6 :

– un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RL ;

– pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert ;

– à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_L la tension aux bornes de l'inductance L et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$$

• Équation différentielle vérifiée par l'intensité i

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que les tensions u_R et u_L . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K .

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L, \text{ soit : } E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

• Constante de temps du circuit

Les termes $\frac{E}{R}$ et i sont des intensités exprimées en ampère (A). L'équation différentielle est homogène si le terme $\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ a la même dimension. Or, la dérivée $\frac{di}{dt}$ s'exprime en $A \cdot s^{-1}$; le rapport $\frac{L}{R}$ a donc la dimension d'un temps.

25. La résistance R représente la résistance totale du circuit, incluant éventuellement la résistance interne r de la bobine si celle-ci est réelle.

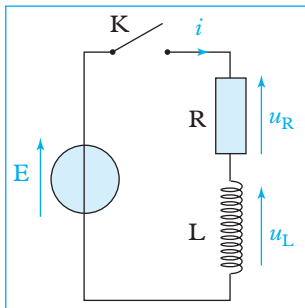


Fig. 6. Montage pour étudier l'établissement du courant

Définition 2

On définit la constante de temps τ du circuit RL par le rapport :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

τ constante de temps en seconde(s)

L inductance en henry (H)

R résistance en ohm (Ω)

• Solution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$, il faut résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

Par analogie avec l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C au § B.1., la solution générale i de cette équation s'écrit²⁶ :

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

• Application des conditions de continuité

L'intensité i du courant dans l'inductance est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur l'intensité s'écrit : $i(t = 0) = 0$. On en déduit donc, en posant $t = 0$ dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + \frac{E}{R}, \text{ soit : } A = -\frac{E}{R}.$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension E a pour expression²⁷ :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R} \text{ constante de temps (s).}$$

• Évolution de la tension u_L

La tension u_L aux bornes de l'inductance L est proportionnelle à la dérivée de l'intensité i du courant :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = \frac{LE}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La tension u_L aux bornes de l'inductance est maximale à la fermeture de l'interrupteur K . Pendant l'établissement du courant, elle décroît avec le temps ; lorsque le courant est établi, l'inductance se comporte comme un fil²⁸.

• Représentation graphique

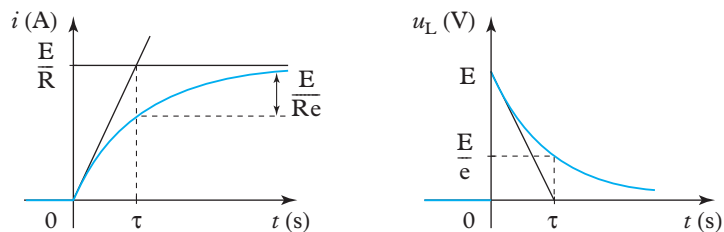


Fig. 7. Évolution de u_L et de i en fonction du temps.

– On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de i et de u_L (fig. 7). L'intensité i du courant dans l'inductance est continue ; en revanche, la tension u_L à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote²⁹ au point d'abscisse $t = \tau$.

26. Dans les deux cas, l'équation différentielle est de la forme :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = \text{cte.}$$

27. Lorsque le courant est établi ($t \rightarrow \infty$), l'intensité i dans le circuit vaut $\frac{E}{R}$ (car $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$).

Cette intensité maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante. La tension aux bornes du conducteur ohmique est alors E .

28. Lorsque le courant est établi ($t \rightarrow \infty$), la tension u_L aux bornes de l'inductance est nulle.

29. Pour l'intensité i , l'axe asymptote est la droite horizontale $i = \frac{E}{R}$. Pour la tension u_L , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

– L'établissement du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $i = \frac{E}{R}$ et $u_L = 0$ (fig. 9).

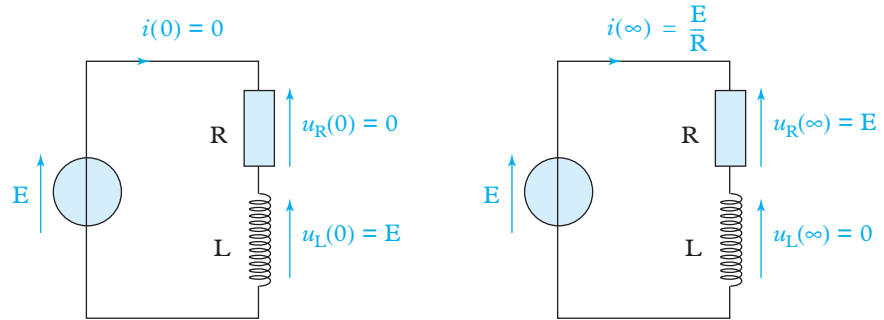


Fig. 8. État du circuit quand $t = 0$ et quand $t \rightarrow +\infty$.

Application 3 Établissement du courant dans une bobine

On établit le courant dans une bobine idéale d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ à travers une résistance $R = 100 \Omega$ grâce à un générateur idéal de tension de fém $E = 5 \text{ V}$. Calculer la constante de temps τ du circuit RL, l'intensité i lorsque le courant est établi dans le circuit et l'instant t au bout duquel l'intensité vaut 90 % de sa valeur finale.

Solution

- La constante de temps τ du circuit RL est alors :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{100} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s, c'est-à-dire } \tau = 1 \text{ ms.}$$

- Lorsque le courant est établi dans le circuit, la bobine se comporte comme un fil et la tension du générateur se retrouve aux bornes du conducteur ohmique :

$$u_R = E = Ri, \text{ d'où : } i = \frac{E}{R} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A c'est-à-dire } i = 50 \text{ mA.}$$

- D'après l'expression déterminée au § C.1., l'intensité i vaut 90 % de sa valeur si :

$$\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0,9 \frac{E}{R}, \text{ d'où : } e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1 = 10^{-1}, \text{ soit : } t = \tau \ln(10) = 2,3 \text{ ms.}$$

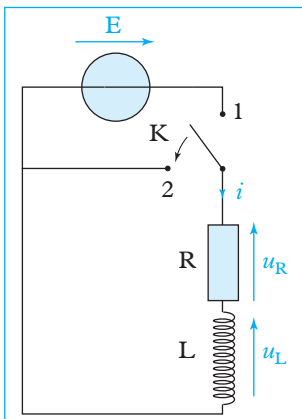


Fig. 9. Montage pour étudier l'arrêt du courant dans un circuit RL série.

30. On a : $I_0 = \frac{E}{R}$.

C.2. Arrêt du courant dans la bobine

Montage expérimental

Pour étudier l'arrêt du courant lors de la fermeture d'un circuit comportant une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure 9 :

- un générateur idéal de tension continue de fém E , branché aux bornes du circuit RL, a permis d'établir un courant permanent d'intensité I_0 positive³⁰ ;
- pour $t < 0$, l'interrupteur K relie le circuit RL au générateur (position 1) ; à l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K en position 2 : le circuit RL est alors en court-circuit.

Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_L la tension aux bornes de l'inductance L et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}.$$

- **Évolution de l'intensité i**

Équation différentielle vérifiée par l'intensité i

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est en position 1 : $i = I_0$, $u_R = RI_0$ et $u_L = 0$.

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L, \text{ soit : } 0 = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série en court-circuit vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0$$

La constante de temps du circuit RL est encore égale à $\tau = \frac{L}{R}$.

- **Expression de l'intensité i**

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution i_1 de l'équation homogène :

$$i = i_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

L'intensité i du courant dans l'inductance est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur l'intensité s'écrit : $i(t = 0) = I_0$, d'où : $A = I_0$.

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série en court-circuit a pour expression³¹ :

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- **Évolution de la tension u_L**

La tension u_L aux bornes de l'inductance a donc pour expression :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = \frac{-LI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La loi de décroissance de la tension est la même lors de l'établissement du courant dans le circuit RL et lors de son arrêt³².

- **Représentation graphique**

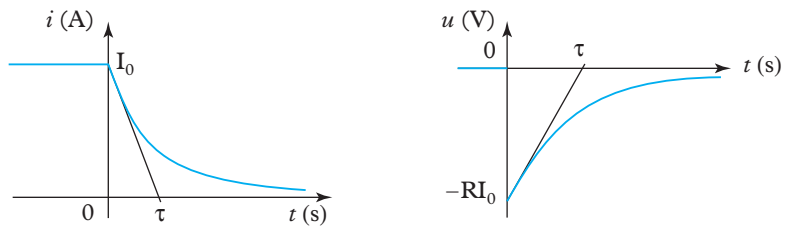


Fig. 10. Évolution de i et de u_L en fonction du temps.

– On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de i et de u_L (fig. 10). L'intensité i du courant dans l'inductance est continue ; en revanche, la tension u_L à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote³³ au point d'abscisse $t = \tau$.

– L'arrêt du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $i = 0$ et $u_L = 0$.

31. L'intensité i tend alors vers 0.

32. En revanche, la tension aux bornes de l'inductance change de signe.

33. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

C.3. Étude énergétique

• Établissement du courant

L'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

34. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance³⁴, on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \text{ soit : } Ei = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}.$$

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

– Le dernier terme est la puissance $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive reçue par la bobine et emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique³⁵.

35. L'énergie magnétique E_{mag} d'une bobine est :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2.$$

36. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie de la bobine³⁶ :

$$P_g = P_j + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}.$$

– Quand le courant est établi, l'intensité dans le circuit est $i = \frac{E}{R}$. En régime permanent, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine n'augmente plus :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \text{cte}, \quad \text{d'où : } \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = 0.$$

La puissance électrique fournie par le générateur et la puissance dissipée par effet Joule sont donc égales et valent :

$$P_g = P_j = \frac{E^2}{R}.$$

36. L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine dépend de la résistance R . Elle est d'autant plus faible que R est grande.

Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine reste constante³⁷. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

• Arrêt du courant

La loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

37. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance³⁷, on multiplie par i :

$$0 = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \text{ soit : } -\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} = Ri^2.$$

– Le terme $-\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ est la puissance négative reçue par la bobine, donc

– $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ est la puissance $-\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive fournie par la bobine³⁸.

38. La bobine se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

– Le terme Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

39. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

40. L'énergie initiale de la bobine est :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_0^2.$$

La puissance fournie par la bobine correspond à une diminution de l'énergie magnétique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique³⁹ :

$$-\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = P_J.$$

À l'arrêt du courant ($i = 0$), l'énergie de la bobine est nulle : celle-ci a donc fourni toute son énergie au circuit⁴⁰.

Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique E_{mag} initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

D. Analyse d'un portrait de phase

Comme nous l'avons vu déjà dans l'analyse d'un système obéissant à une équation différentielle, tel que l'oscillateur harmonique, il est possible d'en prévoir l'évolution graphiquement à partir du portrait de phase.

Dans le cas des circuits linéaires du premier ordre, ce portrait de phase est le graphe $\left(\frac{du}{dt}, u\right)$ ou $\left(\frac{di}{dt}, i\right)$.

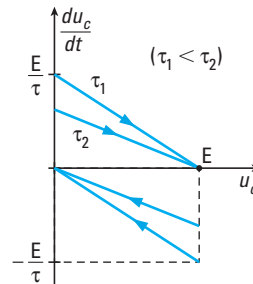
Prenons l'exemple de la charge puis de la décharge d'un condensateur à travers un conducteur ohmique de résistance R . Le générateur de tension utilisé pour la charge délivre une tension E .

Nous avons établi l'équation différentielle régissant chacune de ces deux phases :

– pour la charge : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ soit $\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{\tau} + \frac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$,

– pour la décharge : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$ soit $\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{\tau}$ avec $u_C(0) = E$.

Dans les deux cas, la courbe représentant le portrait de phase du système sera une droite, de pente $-1/\tau$ (figure suivante).



Pour deux valeurs différentes de la constante de temps τ on obtient le système de droites précédent.

Quelle que soit l'étape (charge ou décharge), le système évolue (sens de la flèche) jusqu'à un point fixe, correspondant à une valeur constante de la tension (et donc à une dérivée nulle par rapport au temps).

L'essentiel

✓ Étude d'un circuit RC série

- On définit la constante de temps τ du circuit RC par le produit :

$$\tau_{RC} = RC$$

τ constante de temps en seconde(s)
 R résistance en ohm (Ω)
 C capacité en farad (F)

- Charge et décharge du condensateur :

	Charge du condensateur	Décharge du condensateur
Montage		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$
Conditions initiales	$u_C(0) = 0$	$u_C(0) = E$
Tension u_C (V)	$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$u_C = E e^{-\frac{t}{\tau}}$
Intensité i (A)	$i = \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_C(t)$		
Bilan énergétique	La moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique E_{elec} dans la capacité.	L'énergie électrostatique E_{elec} initialement emmagasinée dans la capacité est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

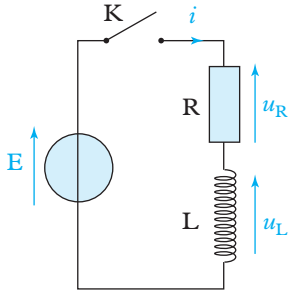
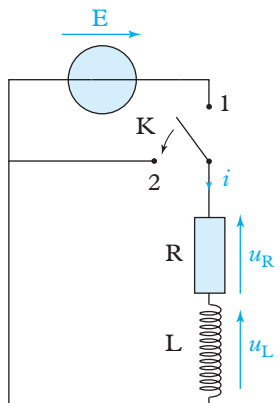
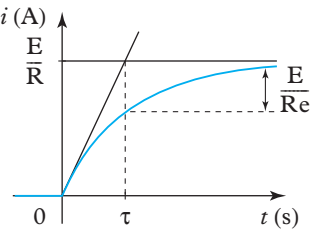
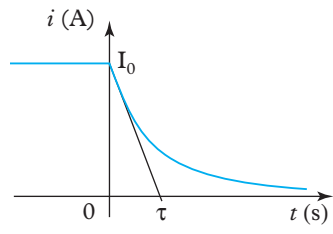
✓ Étude d'un circuit RL série

- On définit la constante de temps τ du circuit RL par le rapport :

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

τ constante de temps en seconde(s)
 L inductance en henry (H)
 R résistance en ohm (Ω)

- Établissement et arrêt du courant dans la bobine :

	Établissement du courant dans la bobine	Arrêt du courant dans la bobine
Montage		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$	$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$
Conditions initiales	$i(0) = 0$	$i(0) = I_0$
Intensité i (A)	$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension u_L (V)	$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_L = L \frac{di}{dt} = -R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_L(t)$		
Bilan énergétique	Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans la bobine reste constante. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.	L'énergie magnétique E_{mag} initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment caractériser un régime transitoire du premier ordre à partir de son oscillogramme ?

Soit un oscillogramme indiquant un régime transitoire du premier ordre. On se propose d'établir l'équation différentielle associée à cet oscillogramme.

→ Savoir faire

- 1 Déterminer la valeur initiale $u(t = 0) = u_0$ de la tension étudiée.
- 2 Déterminer la valeur limite u_∞ en $t \rightarrow +\infty$ de la tension étudiée.
- 3 Tracer la tangente à la courbe $u(t)$ issue du point $t = 0$. Mesurer le temps τ caractéristique du régime transitoire à l'intersection de cette tangente avec la droite $u = u_\infty$.
- 4 Écrire l'équation différentielle sous la forme :

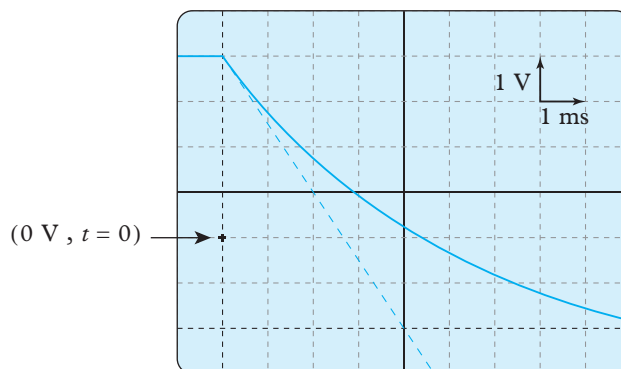
$$\tau \frac{du}{dt} + (u - u_\infty) = 0$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

→ Application

Établir l'équation différentielle associée à l'oscillogramme représenté ci-dessous.



Solution

- 1 On mesure 4 divisions verticales à partir du point origine (0 V, $t = 0$) : $u(0) = 4$ V.
- 2 En $t = +\infty$ l'asymptote a pour équation : $u_\infty = -2$ V.
- 3 La tangente à la courbe $u(t)$ à l'origine coupe la droite $u_c = -2$ V en ($t = 4$ ms ; $u = -2$ V), soit : $\tau = 4$ ms.
- 4 L'équation différentielle vérifiée par u est donc :

$$(4 \cdot 10^{-3}) \frac{du}{dt} + u = -2, \quad \text{avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$



La solution de cette équation est :

$$u(t) = -2 + 4 \exp\left(-\frac{t}{4 \cdot 10^{-3}}\right), \quad \text{avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$

Méthode n°2

Comment effectuer le bilan énergétique d'un régime transitoire ?

On se propose d'évaluer l'énergie dissipée par effet Joule au cours d'un régime transitoire.

→ Savoir faire

- 1 Déterminer les valeurs prises par les courants et les tensions du circuit à $t = 0$ et à l'issue du régime transitoire en utilisant un schéma équivalent du circuit.
- 2 Déterminer l'énergie reçue (et stockée) par les condensateurs et bobines du circuit pendant ce régime transitoire :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \Delta E_{\text{elec}} + \Delta E_{\text{mag.}}$$

– Pour un condensateur : $\Delta E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_{\infty}^2 - \frac{1}{2} C u_0^2$.

– Pour une bobine : $\Delta E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2 - \frac{1}{2} L i_0^2$.

(u_0 , u_{∞} , i_0 et i_{∞} sont les tensions et courants avant et après le régime transitoire.)

- 3 Exprimer le courant $i_g(t)$ qui traverse le générateur. Si ce courant s'annule au bout d'un temps infini, calculer l'énergie fournie au circuit par le générateur :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} u_g i_g dt, \text{ avec } u_g \text{ et } i_g \text{ en convention générateur.}$$

- 4 Si l'énergie fournie par le générateur est finie, calculer l'énergie dissipée par effet Joule :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}}.$$

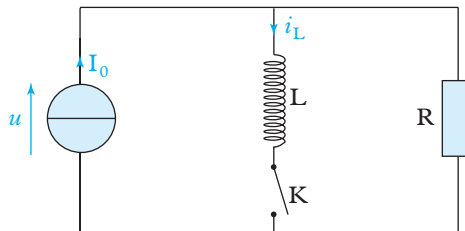


Dans la plupart des circuits, un courant circule encore à l'issue du régime transitoire. La puissance fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par le réseau de résistances.

→ Application

On considère le circuit suivant, dans lequel l'interrupteur K est initialement ouvert. On choisit comme origine des temps l'instant où K est fermé.

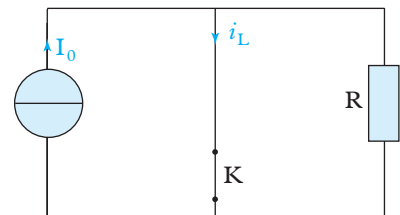
On montre que $u(t) = R I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant le régime transitoire à l'aide d'un bilan énergétique.



Solution

- 1 Initialement, $i_L(0) = 0$ car la branche est ouverte. Au bout d'un temps infini, le régime permanent est établi et la bobine équivaut à un fil : $i_L(\infty) = I_0$.
- 2 Le circuit reçoit et stocke de l'énergie dans la bobine :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} L i_L(\infty)^2 - \frac{1}{2} L i_L(0)^2 = \frac{1}{2} L I_0^2.$$



③ Le courant dans le générateur ne s'annule pas, mais la tension à ses bornes s'annule. La puissance fournie s'annule donc et l'énergie fournie au circuit est calculable :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} I_0 u(t) dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) dt.$$

On intègre la fonction exponentielle entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$E_{\text{fournie}} = RI_0^2 \left[-\frac{L}{R} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]_0^{+\infty} = RI_0^2 \left(\frac{L}{R} \right) = LI_0^2.$$

④ L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance vaut donc :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}} = LI_0^2 - \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance, et ceci indépendamment de sa valeur.



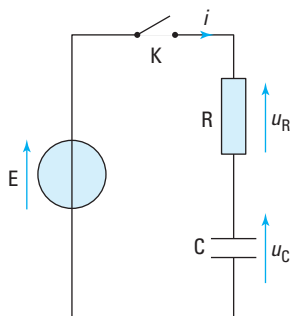
On peut retrouver ce résultat en intégrant la puissance reçue par la résistance pendant le régime transitoire, mais ce calcul est techniquement plus compliqué.

Exercices

Niveau 1

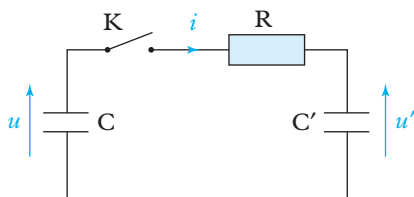
Ex. 1 Quand le courant dans le circuit est-il négligeable ?

On considère le montage schématisé sur la figure. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le courant commence à circuler dans le circuit. Au bout de combien de temps l'intensité initiale est-elle divisée par 10 ? par 100 ?



Ex. 2 Décharge d'un condensateur dans un autre

Le condensateur de capacité C est chargé sous une tension U_0 . Il est branché à l'instant initial sur un autre condensateur de capacité C' , initialement déchargé, par l'intermédiaire d'une résistance R . On note u la tension aux bornes de C et u' la tension aux bornes de C' .



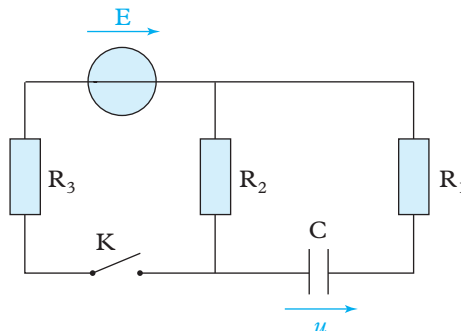
- Déterminer les évolutions des tensions $u(t)$ et $u'(t)$.
- Déterminer l'évolution de l'intensité $i(t)$.
- Déterminer l'énergie E_J dissipée par effet Joule. Effectuer un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.

Ex. 3 Charge et décharge d'un condensateur

On considère le circuit suivant, comportant les résistances R_1 , R_2 et R_3 , le condensateur de capacité C et le générateur de tension E .

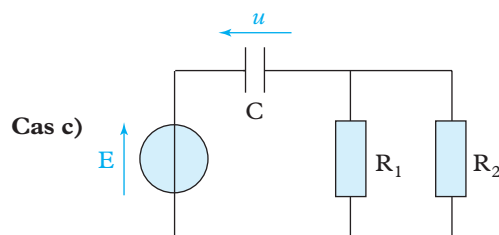
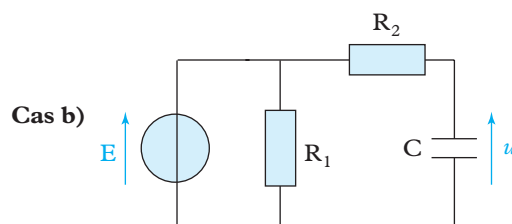
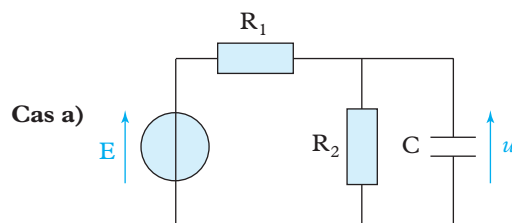
- Initialement, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Pouvait-on prévoir la tension maximale u_{\max} du condensateur ?

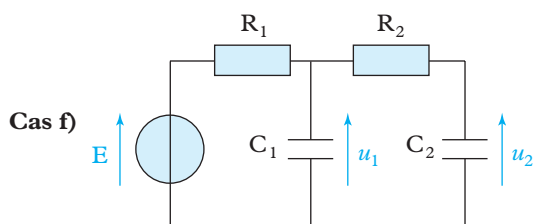
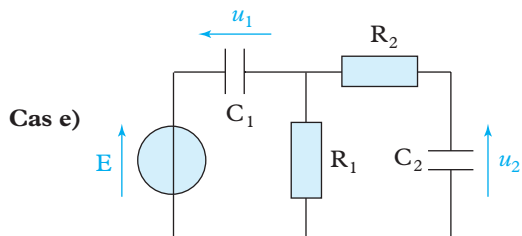
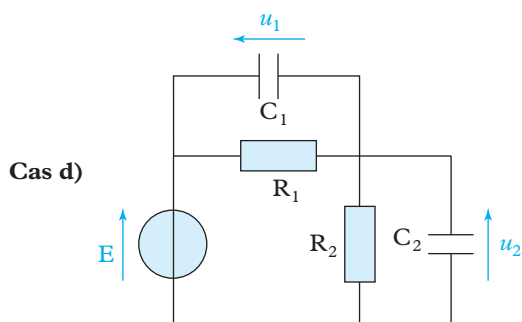
- L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps, on a alors $u = u_{\max}$. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$.



Ex. 4 Recherche de régimes permanents avec des condensateurs

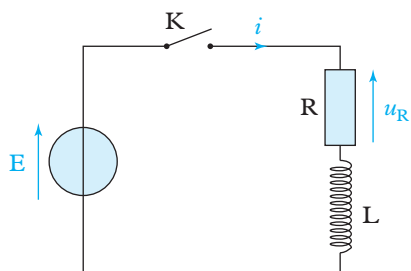
Dans les montages ci-dessous, déterminer la (ou les) tension(s) aux bornes du (ou des) condensateur(s) lorsque le régime permanent est établi.





Ex. 5 Établissement du courant dans une bobine

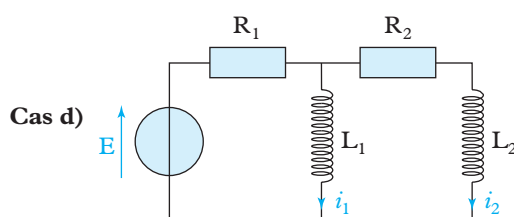
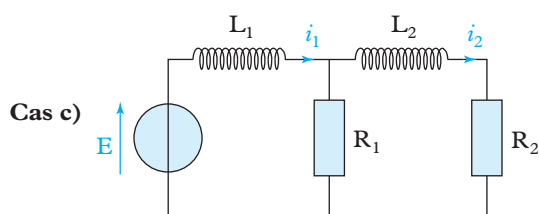
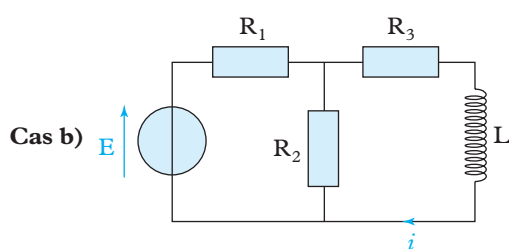
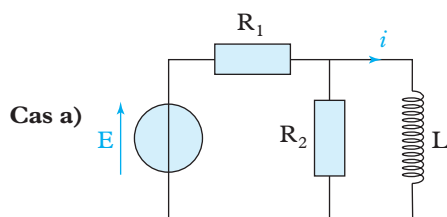
Une bobine parfaite d'inductance L est en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 15 \, \Omega$ et une batterie de force électromotrice $E = 6 \, \text{V}$. À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit. La tension aux bornes de la résistance croît pour atteindre $u_R = 2,7 \, \text{V}$ à l'instant $t = 2 \, \text{ms}$.



- Déterminer la valeur de l'inductance L .
- Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine à l'instant $t = 2 \, \text{ms}$?
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance entre $t = 0$ et $t = 2 \, \text{ms}$.

Ex. 6 Recherche de régimes permanents en présence de bobines

Dans les montages ci-dessous, déterminer l'intensité du courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est établi.

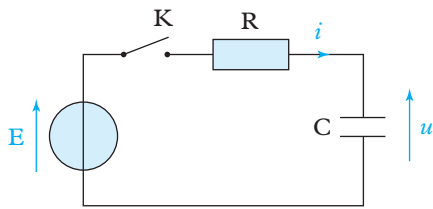


Niveau 2

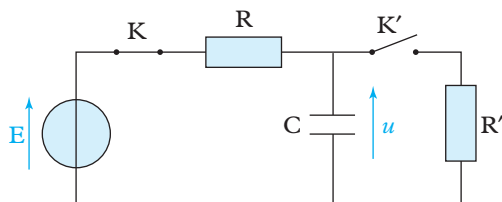
Ex. 7 Établissement du courant dans un condensateur

1) Le condensateur étudié est chargé sous une tension U_0 . Il est placé en série avec une résistance R , un générateur de tension E et un interrupteur K .

Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



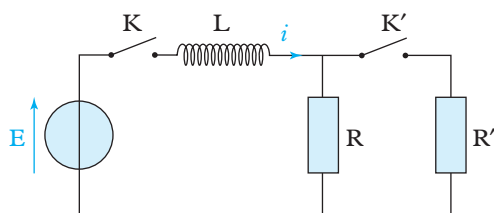
- Déterminer l'équation d'évolution de la tension u aux bornes du condensateur.
 - Résoudre l'équation obtenue pour $t > 0$.
 - Tracer la courbe $u(t)$.
 - Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant.
 - Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule.
 - Faire un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.
- 2) Le condensateur est maintenant chargé sous la tension E . On branche à ses bornes, comme l'indique le schéma ci-après, une résistance R' . On choisit l'origine des temps au moment du branchement de R' , interrupteur K' fermé.



- Déterminer l'équation d'évolution de la tension u aux bornes du condensateur.
- Déterminer $u(t)$ et tracer la courbe correspondante.
- Effectuer un bilan énergétique.

Ex. 8 Établissement du courant dans un circuit

On considère le circuit suivant comportant une bobine d'inductance L et deux résistances R et R' . K et K' sont deux interrupteurs et le générateur de tension possède la fém E .



- K' est ouvert. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Déterminer la loi d'évolution de l'intensité $i(t)$. Quel est le courant I en régime permanent ?
- Le régime permanent d'intensité I est établi (K est fermé). À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K' . Établir la nouvelle loi d'évolution de l'intensité $i(t)$.

Quelle est la nouvelle intensité I' en régime permanent ?

Ex. 9 Diode de roue libre

Un moteur est modélisé par une résistance R et une bobine L .

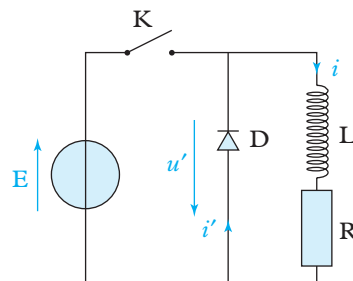
L'interrupteur K est fermé depuis longtemps. Le courant permanent dans la bobine est :

$$i = I = \frac{E}{R}.$$

Pour éviter une étincelle aux bornes du moteur, lors de l'ouverture du circuit, on place en parallèle avec le moteur une diode D .

Quand l'interrupteur K est fermé, aucun courant ne circule dans D .

Quand on ouvre K , la diode court-circuite le moteur et l'énergie magnétique contenue dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance R .



- La caractéristique de la diode vérifie les conditions données ci-dessous :

$$u' \leq 0 : i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = 0.$$

Déterminer la loi d'évolution de $i(t)$.

- Reprendre l'étude en tenant compte de la tension seuil V_s de la diode :

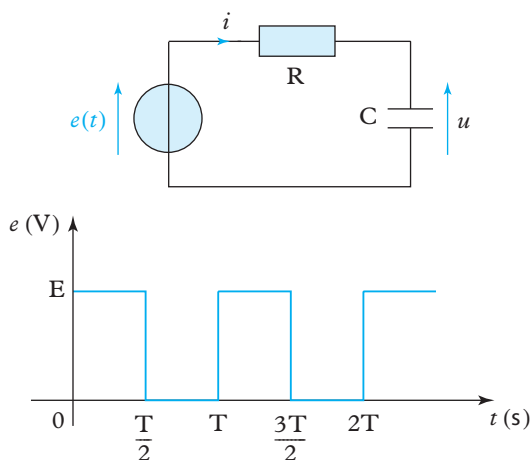
$$u' \leq V_s : i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = V_s.$$

Niveau 3

Ex. 10 Alimentation d'un condensateur par une tension créneau

Le condensateur de capacité C est alimenté par l'intermédiaire d'une résistance R grâce à un générateur délivrant une tension créneau $e(t)$ vérifiant la propriété suivante ($n \in \mathbb{N}$) :

- si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right]$, $e(t) = E$;
- si $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right]$, $e(t) = 0$.



La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur évolue en permanence. Nous allons étudier les premières phases de cette évolution pour essayer d'en tirer une loi, puis nous regarderons le régime oscillatoire permanent.

Nous noterons u_n la tension $u\left(nT + \frac{T}{2}\right)$ et v_n la tension $u(nT)$.

a) Écrire l'équation d'évolution de la tension u dans chaque intervalle de temps.

– pour $t \in \left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right]$, $e(t) = E$;

– pour $t \in \left]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T\right]$, $e(t) = 0$;

b) Déterminer $u(t)$ pour $t \in \left]0 ; \frac{T}{2}\right]$. En déduire u_0 .

On suppose que le condensateur est déchargé à $t = 0$ ($v_0 = 0$).

c) Déterminer $u(t)$ pour $t \in \left[\frac{T}{2} ; T\right]$. En déduire v_1 .

d) Étudier $u(t)$ pour $t \in [nT ; (n+1)T]$ en décomposant l'intervalle en deux parties et obtenir u_n en fonction de v_n puis v_{n+1} en fonction de u_n . Nous avons ainsi défini la double loi de récurrence.

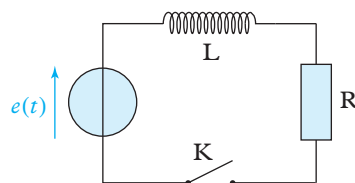
e) On admet que la suite $\{u_n\}$ tend vers une limite U et la suite $\{v_n\}$ vers une limite V . Déterminer U et V .

Tracer alors l'allure du régime oscillatoire permanent $u(t)$.

Ex. 11 Lissage du courant

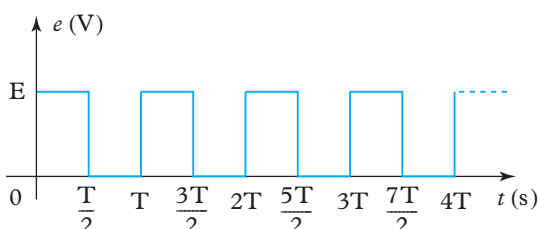
1) Déterminer la loi d'établissement du courant dans une bobine d'inductance L à travers une résistance R .

Le générateur a une fém constante : $e(t) = E$.



Déterminer le temps nécessaire pour que le courant dans le circuit ne diffère pas de plus de 5 % de sa valeur finale.

2) Le générateur de tension $e(t)$ est maintenant périodique, comme le précise sa loi d'évolution sur le schéma ci-dessous.



a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour chaque demi-période :

$$\left]nT ; nT + \frac{T}{2}\right[\text{ et } \left]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T\right[.$$

b) À l'instant $t = 0$, on a : $i(t) = 0$. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$ sur les quatre premières périodes.

c) On recherche le régime périodique permanent.

À l'instant nT , le courant est I_m .

À l'instant $nT + \frac{T}{2}$, le courant est I_M .

À l'instant $(n+1)T$, le courant vaut I_m , etc.

Déterminer I_m et I_M . Tracer l'allure de $i(t)$ en régime permanent.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

Lors de la charge du condensateur, l'intensité i du courant dans le circuit a pour expression :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{d'où : } i(0) = \frac{E}{R}.$$

- L'intensité initiale $i(0)$ est divisée par 10 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{10}, \quad \text{c'est-à-dire : } t = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \tau \ln(10) = 2,3\tau.$$

- L'intensité initiale $i(0)$ est divisée par 100 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \quad \text{c'est-à-dire : } t = -\tau \ln(10^{-2}) = 2\tau \ln(10) = 4,6\tau.$$

On peut estimer que le courant devient négligeable au bout de 5τ . Le condensateur est alors chargé à 1 % près ; sa tension vaut E et sa charge CE .

Exercice 2

- a) • L'intensité i du courant dans le circuit s'écrit :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}, \quad \text{soit : } C' \frac{du'}{dt} + C \frac{du}{dt} = 0.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .

En intégrant, on obtient : $C'u' + Cu = \text{cte}$. Or, à $t = 0$, on a : $u' = 0$ et $u = U_0$, et d'où :

$$C'u' + Cu = CU_0.$$

- La loi des mailles donne :

$$u = Ri + u', \quad \text{soit : } U_0 - \frac{C'}{C}u' = RC' \frac{du'}{dt} + u'.$$

L'équation différentielle vérifiée par u' est alors :

$$\frac{RCC'}{C + C'} \frac{du'}{dt} + u' = \frac{CU_0}{C + C'}.$$

La constante de temps est $\tau = \frac{RCC'}{C + C'}$ et la solution particulière constante est $u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'}$.



La constante de temps τ n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de u' est égal à 1.

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u' = u'_1 + u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{avec } \tau = \frac{RCC'}{C + C'}.$$

La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :


$$u'(t=0) = 0 = \frac{CU_0}{C+C'} + A, \quad \text{soit : } A = -\frac{CU_0}{C+C'}.$$

La loi d'évolution de la tension u' s'écrit :

$$u'(t) = \frac{CU_0}{C+C'} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{avec } \tau = +\frac{RCC'}{C+C'}.$$

On en déduit donc :

$$u(t) = U_0 - \frac{C'}{C} u'(t) = \frac{U_0}{C+C'} \left(C + C' e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

 La tension u' croît au cours du temps, alors que la tension u décroît, ce qui est normal, car le condensateur C se décharge dans le condensateur.

b) L'intensité i du courant vaut alors :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = C' \times \frac{CU_0}{C+C'} \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{soit : } i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

c) • L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{+\infty} Ri^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{U_0^2}{R} \left[-\frac{\tau e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\tau U_0^2}{2R} = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C+C'} U_0^2.$$

• La loi des mailles donne pour : $t > 0$: $u = Ri + u'$.


On multiplie les deux membres de l'égalité par : $i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}$

$$ui = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C' u'^2 \right),$$

$$\text{d'où : } Ri^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C' u'^2 \right).$$

↑
puissance Joule
dissipée dans R

↑
variation de l'énergie des
condensateurs au cours
du temps

 On a : $ui = -C u \frac{du}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$ et $u'i = C' u' \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C' u'^2 \right).$

On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la décharge de C dans C' :

$$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C' u'^2 \right).$$

$$\mathcal{E}_J = -(\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} + \Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}}).$$

La variation de l'énergie électrostatique des condensateurs vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2} Cu(0)^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 - \frac{1}{2} CU_0^2.$$

$$\Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C' u'(\infty)^2 - \frac{1}{2} C' u'(0)^2 = \frac{1}{2} C' \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2.$$

 La variation de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur C est négative, car celui-ci fournit de l'énergie au circuit.

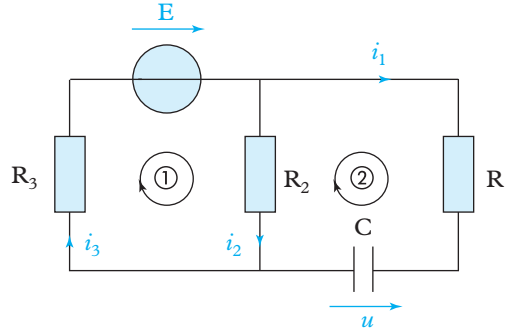
On en déduit donc :

$$\mathcal{E}_J = -\frac{1}{2}C\left(\frac{CU_0}{C+C'}\right)^2 + \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}C'\left(\frac{CU_0}{C+C'}\right)^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\left(1 - \frac{C}{C+C'}\right) = \frac{1}{2}\frac{CC'}{C+C'}U_0^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 3

a) Paramétrons le circuit comme l'indique le schéma ci-dessous :



• La loi des nœuds donne :

$$i_1 + i_2 = i_3, \text{ avec } i_1 = C \frac{du}{dt}.$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes pour lesquelles on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E = R_2 i_2 + R_3 i_3 = (R_2 + R_3) i_2 + R_3 C \frac{du}{dt} \\ \text{maille 2 : } R_2 i_2 = R_1 i_1 + u = R_1 C \frac{du}{dt} + u. \end{cases}$$

Reportons alors i_2 dans l'égalité obtenue pour la maille 1 :

$$E = \left[\frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_2} + R_3 \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u = \left[R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u.$$

L'équation différentielle vérifiée par la tension u s'écrit donc :

$$\frac{(R_1 + R_3)R_2 + R_3 R_1}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E,$$

ou sous sa forme « canonique » :

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

La constante de temps est $\tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C$ et la solution particulière constante vaut

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$



La constante de temps τ n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de u est égal à 1.

Compte tenu des conditions initiales ($u(0) = 0$), nous obtenons :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C.$$

La tension maximale est obtenue pour : $t \rightarrow +\infty : u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E$.

- En régime permanent, nous avons $u = u_{\max} = \text{cte}$, d'où : $i_1 = 0$ et $i_2 = i_3$. La tension u_{\max} vaut :

$$u_{\max} = R_2 i_2 \text{ avec } i_2 = \frac{E}{R_2 + R_3}, \text{ d'où : } u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

☀ En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

b) L'étude correspond à la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension u_{\max} à travers une résistance $R = R_1 + R_2$.

La constante de temps vaut $\tau' = (R_1 + R_2)C$ et nous avons alors :

$$u(t) = u_{\max} e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = (R_1 + R_2)C.$$

☀ Pour plus de détails se reporter au § A. 2 du cours (décharge du condensateur).

Exercice 4

☀ En régime permanent, les tensions aux bornes des condensateurs sont constantes et les courants qui y circulent sont nuls (les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts).

a) Tout le courant passant dans R_1 passe dans R_2 comme si le condensateur n'était pas présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

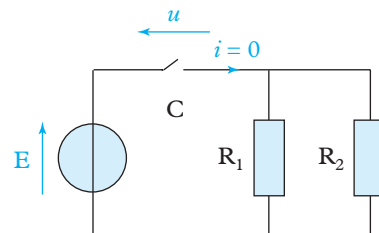
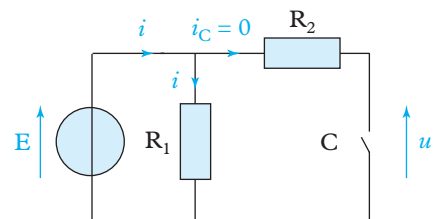
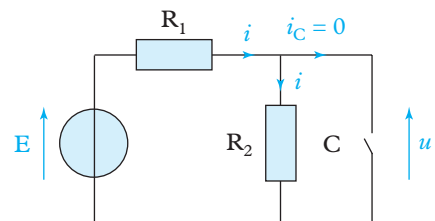
$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$

b) Le courant dans R_2 est nul. La tension u se retrouve entièrement aux bornes de R_1 . On a donc :

$$u = E.$$

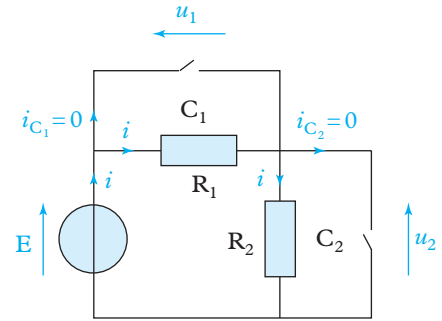
c) Aucun courant ne passe dans R_1 et R_2 . La tension aux bornes du dipôle équivalent est alors nulle et on a :

$$u = E.$$



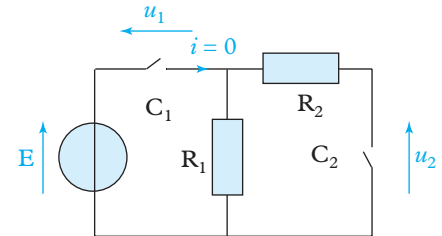
d) Comme les courants dans C_1 et C_2 sont nuls, tout le courant passant dans R_1 passe dans R_2 comme si aucun condensateur n'était présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

$$u_1 = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$



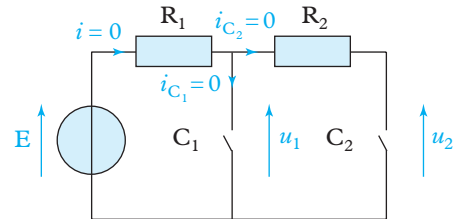
e) Comme la tension u_2 est constante, le courant dans R_2 est nul. La tension u_2 se retrouve alors aux bornes de R_1 . Comme la tension u_1 est constante, le courant dans R_1 est nul et on a :

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = E.$$



f) Les tensions u_1 et u_2 sont constantes. Aucun courant ne circule et on a alors :

$$u_1 = u_2 = E.$$



Exercice 5

a) La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad \text{soit} : \quad \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

Lors de l'établissement du courant dans la bobine, l'intensité i suit la loi d'évolution :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

La tension aux bornes de la résistance R a pour expression :

$$u_R = Ri = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = E \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

On en déduit la valeur de l'inductance L :

$$\frac{Rt}{L} = -\ln \left(1 - \frac{u_R}{E} \right), \quad \text{d'où} : \quad L = -\frac{Rt}{\ln \left(1 - \frac{u_R}{E} \right)} = 50 \text{ mH}.$$



Cette relation est valable quel que soit l'instant t considéré.

b) L'énergie magnétique stockée dans la bobine à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{L}{2R^2} u_R(t)^2.$$

☀ Comme l'énoncé indique la valeur de u_R pour $t = 2$ ms, il est plus rapide d'utiliser cette donnée que l'expression de i trouvée à la question précédente.

A.N. $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \times 2,7^2}{2 \times 15^2} = 0,81 \text{ mJ}.$

c) L'énergie fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^t E i(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \right]_0^t = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - 1 \right) \right].$$

A.N. $\mathcal{E}_g = 1,19 \text{ mJ}.$

D'après la loi de conservation de l'énergie dans le circuit, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 2$ ms vaut donc :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{\text{mag}} = 0,38 \text{ mJ}.$$

Exercice 6

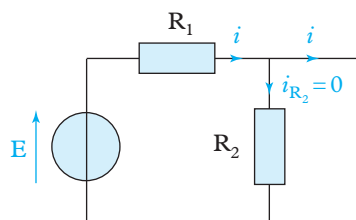
☀ En régime permanent, le courant est constant, la tension aux bornes de chaque bobine est donc nulle (une bobine se comporte comme un fil).

Dans chaque cas on peut remplacer les bobines par des fils et on note l'intensité du courant qui la traverse.

a) La tension aux bornes de R_2 est nulle.

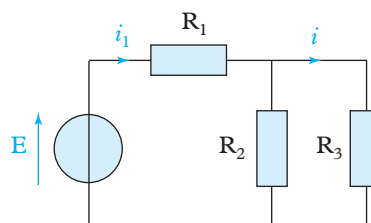
Tout le courant passe donc :

$$i = \frac{E}{R_1}.$$



b) Comme la tension aux bornes de L est nulle, les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle. D'après la loi des mailles, le courant principal i_1 vaut :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

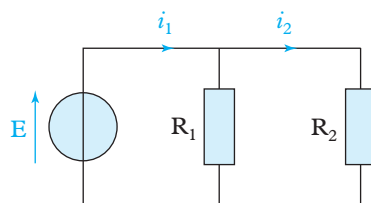


En appliquant le théorème de division de courant, on obtient :

$$i = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1, \text{ soit : } i = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

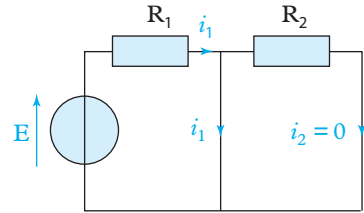
c) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = \frac{E}{R_2} \text{ et } i_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} E.$$



d) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = 0 \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{E}{R_1}.$$



Exercices de niveau 2

Exercice 7

1) a) Quand l'interrupteur est fermé, il circule le courant : $i = C \frac{du}{dt}$. La tension aux bornes de la résistance vaut : $u_R = Ri = RC \frac{du}{dt}$. La loi des mailles nous donne alors :

$$E = u + RC \frac{du}{dt}, \quad \text{avec } \tau = RC.$$

b) – La solution particulière constante de l'équation différentielle est : $u_2 = E$.

– La solution de l'équation homogène est : $u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u = u_1 + u_2 = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{avec } \tau = RC.$$

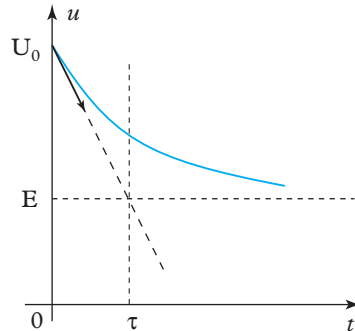
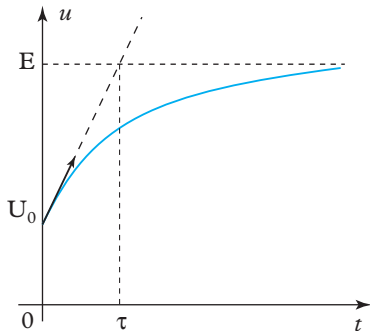
– La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :

$$u(t=0) = U_0 = E + A, \quad \text{soit : } A = U_0 - E.$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{avec } \tau = RC.$$

c) L'allure de la courbe est la suivante (cas $U_0 < E$ et cas $U_0 > E$) :



Si la fém E du générateur est supérieure à la tension initiale U_0 du condensateur, celui-ci se charge ; si la fém E du générateur est inférieure à la tension initiale U_0 du condensateur, celui-ci se décharge.

d) L'intensité $i(t)$ du courant est :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -C \frac{U_0 - E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

e) L'énergie dissipée par effet Joule au cours de la charge vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_J &= \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_J dt = \int_0^{+\infty} Ri(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{(E - U_0)^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{(E - U_0)^2}{R} \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} C(E - U_0)^2.\end{aligned}$$



Comme la loi d'évolution de l'intensité est exponentielle, le calcul direct est assez simple.

f) • La loi des mailles donne pour $t > 0$: $E = Ri + u$.

On multiplie les deux membres de l'égalité par $i = C \frac{du}{dt}$:

$$Ei = CE \frac{du}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

\uparrow
 puissance
fournie par
le générateur

\uparrow
 puissance Joule
dissipée dans R

\uparrow
 variation de l'énergie du
condensateur au cours
du temps

• On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la charge.

– L'énergie fournie par le générateur vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} Eidt = \int_{U_0}^E CEdu = CE(E - U_0).$$

– La variation de l'énergie électrostatique contenue dans le condensateur vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CU^2 \right) dt = \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} CU_0^2.$$

– L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

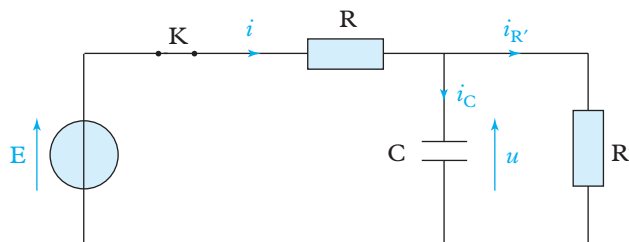
$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_J dt.$$

• La conservation de l'énergie dans le circuit donne :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = CE(E - U_0) \left[\frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} CU_0^2 \right] = \frac{1}{2} C(E - U_0)^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

2) a) On paramètre, pour $t > 0$, le circuit comme le précise le schéma ci-dessous :



On a : $i_C = C \frac{du}{dt}$ et $i_{R'} = \frac{u}{R'}$, et d'où d'après la loi des nœuds :

$$i = i_C + i_{R'} = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R'}.$$

La loi des mailles donne alors l'équation différentielle :

$$E = Ri + u, \text{ d'où : } E = RC \frac{du}{dt} + \left(\frac{R}{R'} + 1 \right) u.$$

b) La constante de temps du circuit est : $\tau' = \frac{RR'}{R+R'}C$.

⚙️ Pour la mettre en évidence, il faut récrire l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{RR'}{R+R'}C \frac{du}{dt} + u = \frac{R'}{R+R'}E.$$

La solution particulière constante de l'équation est :

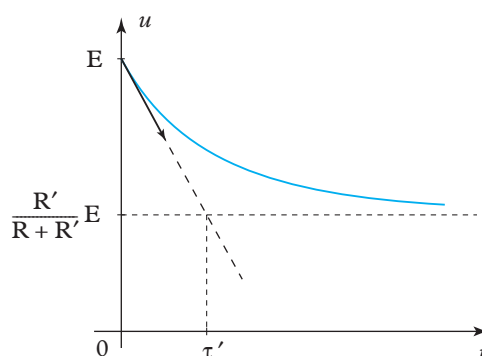
$$u_2 = \frac{R'}{R+R'}E, \text{ d'où : } u(t) = \frac{R'}{R+R'}E + A'e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

À l'instant $t = 0$, $u(0) = E$, soit : $A' = \frac{R}{R+R'}E$.

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{R+R'} \left[R' + R e^{-\frac{t}{\tau'}} \right], \text{ avec } \tau' = \frac{RR'}{R+R'}C.$$

L'allure de la courbe est la suivante :



c) Comme à la question 1) f), on a toujours l'équation :

$$Ei = Ri^2 + ui, \text{ avec } ui = ui_C + ui_{R'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) + R' i_{R'}^2.$$

⚙️ La tension aux bornes de la résistance R' vaut en effet : $u = R' i_{R'}$, d'où : $u i_{R'} = R' i_{R'}^2$.

On obtient donc l'égalité :

$$Ei = Ri^2 + R' i_{R'}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

↑ puissance
fournie par le
générateur
 ↑ puissance Joule
dissipée dans R
 ↑ puissance Joule
dissipée dans R'
 ↑ variation de l'énergie
du condensateur
au cours du temps

La puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans les résistances R et R' et sert à faire varier l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

⚠️ On pourrait calculer tous les termes intervenant dans ce bilan et les intégrer pour obtenir les énergies correspondantes, car on connaît u et i (donc $i_{R'}$).

Exercice 8

a) L'interrupteur K' étant ouvert, le circuit est un circuit RL alimenté par un générateur de fém E . La loi d'évolution de l'intensité i lors de l'établissement du courant dans la bobine est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Lorsque le régime permanent est atteint, le courant dans la bobine est constant et la tension à ses bornes est nulle. On a donc :

$$I = \frac{E}{R}.$$

b) Quand l'interrupteur K' est fermé, la résistance équivalente branchée en série avec l'inductance L est :

$$R_{eq} = \frac{RR'}{R+R'}, \text{ d'où : } \frac{L}{R_{eq}} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_{eq}}.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = \frac{E}{R_{eq}} + A e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L}{R_{eq}}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à $t = 0$, on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = \frac{E}{R_{eq}} + A, \text{ d'où : } A = \frac{E}{R} - \frac{E}{R_{eq}} = -\frac{E}{R'}.$$

La loi d'évolution de l'intensité i est alors :

$$i(t) = E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) - \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{E(R+R')}{RR'} - \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L(R+R')}{RR'}.$$

En régime permanent, l'intensité devient :

$$I' = E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \frac{E(R+R')}{RR'}.$$

Exercice 9

a) La diode joue le rôle de court-circuit. La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales $\left(i(0) = I = \frac{E}{R} \right)$, on obtient donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$



Si K est ouvert, on a : $i' = i > 0$. La diode est bien passante.

b) Quand on ouvre K , le courant $i' = i > 0$ circule dans la diode et la tension à ses bornes vaut $u' = V_S$. La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par i :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = -\frac{V_S}{R}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$i = -\frac{V_S}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à $t = 0$, on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = -\frac{V_S}{R} + A, \text{ d'où : } A = \frac{E + V_S}{R}.$$

La loi d'évolution de l'intensité i est alors :

$$i(t) = -\frac{V_S}{R} + \frac{E + V_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

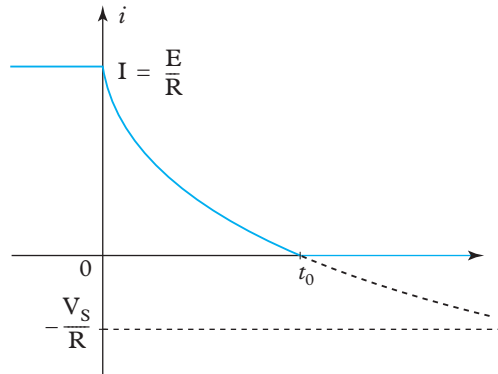


Le courant dans le circuit ne peut pas prendre de valeurs négatives. Il s'annule quand toute l'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine a été dissipée dans le circuit.

L'intensité i du courant s'annule à l'instant t_0 tel que :

$$-V_S + (E + V_S)e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0, \text{ d'où : } t_0 = -\tau \ln\left(\frac{V_S}{E + V_S}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{E}{V_S}\right).$$

Pour $t > t_0$, le courant reste nul. On peut représenter l'évolution de l'intensité i au cours du temps :



Exercices de niveau 3

Exercice 10

a) • Si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$, on a : $e(t) = E$, d'où : $RC \frac{du}{dt} + u = E$.

• Si $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[$, on a : $e(t) = 0$, d'où : $RC \frac{du}{dt} + u = 0$.

b) Pour $t \in \left] 0 ; \frac{T}{2} \right[$, on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement déchargé, soumis à l'échelon de tension E . On a donc :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC.$$

On en déduit : $u_0 = u\left(\frac{T}{2}\right) = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)$.

c) Pour $t \in \left] \frac{T}{2} ; T \right[$, on est dans le cas de la décharge d'un condensateur chargé sous la tension u_0 à l'instant $\frac{T}{2}$. On a donc :

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right)} = E \left(e^{\frac{T}{2\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

 Dans l'expression de u , on introduit un décalage temporel de $\frac{T}{2}$ car la décharge commence à $t = \frac{T}{2}$.

On en déduit : $v_1 = u(T) = E \left(e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)$.

d) On découpe l'intervalle $]nT ; (n+1)T[$ en deux intervalles :

$$\left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[\quad \text{et} \quad \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[.$$

• Pour $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$, on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement chargé sous la tension $u(nT) = v_n$, soumis à l'échelon de tension E .

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors : $u(t) = E + A_n e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}$.

 Le condensateur n'étant pas initialement déchargé, on n'a pas $A_n = -E$. En outre, on tient compte du décalage temporel de nT .

À l'instant $t = nT$, on a : $u(nT) = v_n = E + A_n$, soit : $A_n = v_n - E$.

On en déduit donc :

$$u(t) = E + (v_n - E) e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}.$$

À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$, on obtient :

$$u\left(nT + \frac{T}{2}\right) = u_n = E + (v_n - E) e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

• Pour $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[$, on est dans le cas de la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension u_n . On a donc :

$$u(t) = u_n e^{-\frac{1}{\tau} \left[t - \left(nT + \frac{T}{2} \right) \right]}.$$

À l'instant $t = (n+1)T$, on obtient :

$$u[(n+1)T] = v_{n+1} = u_n e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

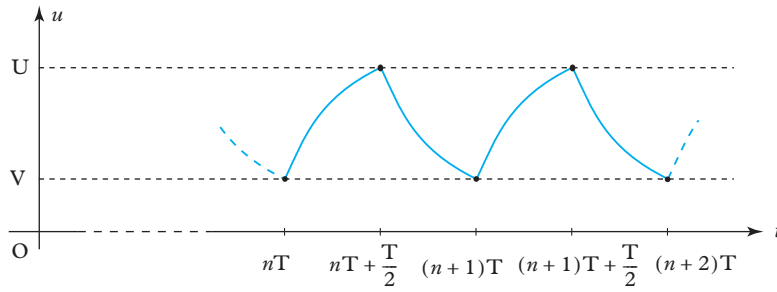
e) Les limites U et V des suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ vérifient les équations :

$$\begin{cases} U = E + (V - E) e^{-\frac{T}{2\tau}} \\ V = U e^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) \\ V = U e^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$U = E \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad V = E \frac{e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

En régime oscillatoire permanent, l'allure de $u(t)$ est représentée ci-dessous :



En régime oscillatoire permanent, on peut considérer le temps écoulé suffisamment grand pour que les limites U et V soient atteintes.

Exercice 11

1) • L'équation différentielle d'établissement du courant dans la bobine est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Compte tenu des conditions initiales ($i(0) = 0$), on obtient donc :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

• La valeur limite de i est $\frac{E}{R}$. Elle est atteinte à 5 % près à l'instant t tel que :

$$0,95 \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ soit : } t = -\tau \ln(0,05) \approx 3\tau.$$



Le régime permanent est établi à 5 % près au bout de 3τ .

2) a) • Si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$, on a : $e(t) = E$, d'où : $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$.

• Si $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; nT + T \right[$, on a : $e(t) = 0$, d'où : $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0$.



Cette question est analogue à la question a) de l'exercice 10.

b) D'après les équations différentielles écrites à la question présente, l'intensité i a la forme :

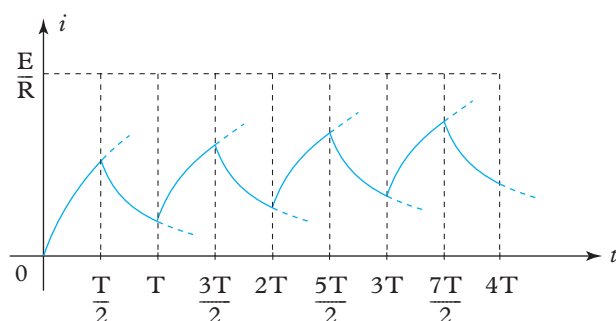
– d'une exponentielle croissante sur la demi-période $\left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$;

– d'une exponentielle décroissante sur la demi-période $\left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[$.



La première demi-période correspond à l'établissement du courant dans la bobine, la seconde à l'arrêt du courant dans la bobine.

L'allure de l'évolution de $i(t)$ sur les quatre premières périodes est représentée ci-dessous :



c) On se place maintenant en régime périodique permanent. L'intensité du courant varie entre les valeurs I_m et I_M au cours d'une période T .

- Si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right]$, la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) a) est :

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{(t-nT)}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$



On tient compte dans l'expression de i du décalage temporel nT .

– À l'instant $t = nT$, on a :

$$i(nT) = I_m = \frac{E}{R} + A, \text{ soit : } A = I_m - \frac{E}{R} \quad (1)$$

– À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$ on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{T}{2\tau}}, \text{ soit : } A = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit donc :

$$I_m - \frac{E}{R} = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (a)$$

- Si $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right]$, la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) a) est :

$$i(t) = A'e^{-\frac{\left[t - \left(nT + \frac{T}{2}\right)\right]}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$



On tient compte dans l'expression de i du décalage temporel $nT + \frac{T}{2}$.

– À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$, on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = A' \quad (3)$$

– À l'instant $t = (n+1)T$, on a :

$$i[(n+1)T] = I_m = A'e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (4)$$

Des égalités (3) et (4), on déduit donc :

$$I_m = I_M e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (b)$$

- Des égalités (a) et (b), on obtient donc finalement :

$$I_M = \frac{E}{R} \frac{e^{\frac{T}{2\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad \text{et} \quad I_m = \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

En régime périodique permanent, l'allure de la courbe devient :

