

Oscillateur harmonique

Ouverture

L'oscillateur harmonique est un concept important en physique car il permet notamment de décrire le comportement autour d'une position d'équilibre de nombreux systèmes physiques dans des conditions d'approximation à définir. Ce chapitre présente le prototype le plus élémentaire d'oscillateur harmonique : le système masse-ressort horizontal non amorti, la mise en équation du mouvement de la masse et la résolution de l'équation différentielle harmonique. Les méthodes d'étude et de résolution présentées dans ce chapitre se retrouveront tout au long de l'ouvrage. Il est important de bien les maîtriser. Les exercices permettent de mieux cerner le cadre d'étude en le dépassant légèrement et en discutant l'influence d'éventuels défauts de non-amortissement ou d'harmonicité du mouvement. Ce chapitre est commun aux enseignements de MPSI, PCSI et PTSI.

Plan du chapitre 1

A. Position du problème

- | | |
|---|---|
| 1. Système d'étude et hypothèses de travail | 2 |
| 2. Bilan des forces | 2 |

B. Équation harmonique

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. Seconde loi de Newton | 2 |
| 2. Équation harmonique | 3 |

C. Solutions générales de l'équation harmonique

- | | |
|---|---|
| 1. Recherche de solutions | 3 |
| 2. Pulsation ω | 4 |
| 3. Mouvement oscillant, période T , fréquence f | 4 |

D. Conditions initiales

- | | |
|-----------------------|---|
| 1. Cas simples | 5 |
| 2. Cas généraux | 5 |

E. Cohérence de la solution

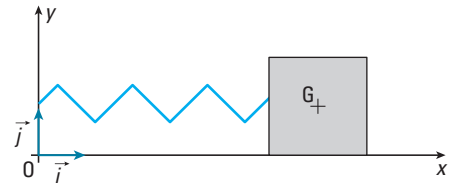
- | | |
|-----------------|----|
| Méthodes | 6 |
| Exercices | 11 |

A. Position du problème

A.1. Système d'étude et hypothèses de travail

On considère une masse m ramenée à son centre d'inertie G , accrochée à un ressort linéaire sans masse et posée sur un support plan horizontal.

Le référentiel est celui du laboratoire.



Hypothèses

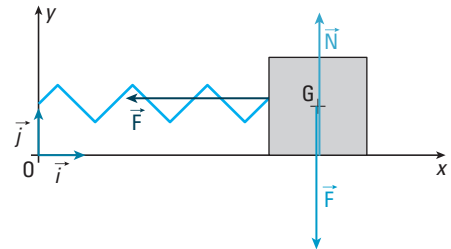
Dans le cas de petites oscillations, c'est-à-dire de petites déformations du ressort, la force \vec{F} de rappel du ressort sur la masse à une norme.

On fait la seconde hypothèse (peu crédible dans la réalité) que la force de frottement entre le plan horizontal et la masse est nulle.

A.2. Bilan des forces

La masse est soumise à trois forces :

- la force de rappel $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$ avec k le coefficient de raideur du ressort (en $N \cdot m^{-1}$), force horizontale ;
- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, force verticale vers le bas ;
- la réaction du support plan horizontal \vec{N} , force verticale vers le haut car normale au plan.



B. Équation harmonique

B.1. Seconde loi de Newton

Définition 1

Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, l'accélération \vec{a} du système est telle que :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$\sum \vec{F}_{ext}$ correspondant à la somme des forces extérieures agissant sur le système.

1. En appliquant la seconde loi de Newton suivant (Oy) , on retrouve le Principe d'inertie $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.

En projetant suivant les axes (Ox) et (Oy) , on obtient :

- suivant (Ox) : $ma_x(t) = -kx(t)$
- suivant (Oy) : $ma_y(t) = 0 = -mg + N$, l'accélération suivant l'axe vertical étant nulle, le poids compensant la réaction du support¹.

Finalement, il reste :

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

que l'on peut encore écrire avec la notation suivante² :

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

2. La notation utilisée est telle qu'un point correspond à la dérivée de la variable par rapport au temps et deux points à sa dérivée seconde :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

B.2. Équation harmonique

On peut encore écrire l'équation (1) précédente sous la forme :

Définition 2

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2)$$

Cette équation est appelée **équation harmonique**.

Application 1 Expression de l'équation harmonique à partir d'une étude énergétique

Donner l'expression de l'énergie cinétique du système {masse}.

L'expression de l'énergie potentielle élastique étant $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, en déduire une expression de l'énergie mécanique.

Retrouver l'équation harmonique.

Solution

L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

On en déduit que l'énergie mécanique du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique est $E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Les frottements étant négligés (hypothèse 2), le système est conservatif : l'énergie mécanique est constante et sa dérivée par rapport au temps est nulle.

On a alors quel que soit le temps t : $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$.

Soit en particulier pour \dot{x} non nul, on a alors $kx + m\ddot{x} = 0$ que l'on écrit à nouveau sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2)$$

C. Solutions générales de l'équation harmonique

C.1. Recherche de solutions

En écrivant sous la forme $x = -\frac{m}{k}\ddot{x}$, on note que la fonction $x(t)$ recherchée

3. Dérivées secondes des fonctions trigonométriques :

$$\frac{d^2(\cos\omega t)}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t$$

est, au facteur $\frac{m}{k}$ près, l'opposé de sa dérivée seconde³.

C'est la propriété des **fonctions sinus et cosinus**.

Les solutions recherchées sont donc du type :

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \text{avec } \omega > 0.$$

On peut montrer que cette solution est équivalente à :

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega > 0, x_0 > 0 \text{ et } \varphi \in [-\pi, +\pi[.$$

Définition 3

La solution à l'équation harmonique est de la forme :

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)$$

avec x_0 **amplitude** du mouvement (en m), ω sa **pulsation** (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et φ la **phase** (en rad).

Application 2 Équivalence des solutions recherchées

Montrer que la solution de la forme $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est équivalente à $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

Solution

En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a + b) : \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on a :

$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) = x_0 \cos \omega t \cdot \cos \varphi - x_0 \sin \omega t \cdot \sin \varphi$. Par identification avec la solution de la forme $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, on en déduit l'équivalence pour $A = x_0 \cos \varphi$ et $B = -x_0 \sin \varphi$.

C.2. Pulsation ω

En injectant la solution $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ dans l'équation harmonique (2), on montre que :

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m} x(t) = -\frac{k}{m} x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

La solution proposée est bien solution de l'équation harmonique si :

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ soit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, quelles que soient les valeurs de l'amplitude x_0 et de la phase φ .

Définition 4

Dans le cas d'une masse accrochée à un ressort linéaire horizontal sans frottement, la pulsation du mouvement (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) est :

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec k la raideur du ressort (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et m masse (en kg).

C.3. Mouvement oscillant, période T , fréquence f

La solution $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ correspond à un mouvement oscillant.

À $t = 0$, $x(0) = x_0 \cos \varphi$

À $t = 0$, $x(T) = x_0 \cos(\omega T + \varphi) = x_0 \cos \varphi = x(0)$ pour $\omega T = 2\pi$.

Définition 5

La période de l'oscillateur est $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

La fréquence⁴ de l'oscillation est donc $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4. Relation liant la période T (en seconde) et la fréquence f (en hertz) : $T = \frac{1}{f}$.

Remarque

La fréquence f , la période T et la pulsation ω sont **indépendants de l'amplitude** x_0 .

D. Conditions initiales

D.1. Cas simples

On étudie deux cas simples⁵, lorsque le mouvement du ressort est tel qu'à l'instant initial $t = 0$:

- soit la position $x(0) = 0$ correspond à la position d'équilibre, la vitesse initiale $v(0)$ est non nulle ;
- soit la vitesse initiale $v(0) = 0$ est nulle et $x(0) \neq 0$.

Premier cas simple

À $t = 0$, $x(0) = x_0 \cos \varphi = 0$, soit alors $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Cela se traduit sur la vitesse initiale : $v(0) = x(0) = -x_0 \omega \sin \varphi = \pm x_0 \omega$.

- $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ correspond à une vitesse initiale : $v(0) = -x_0 \omega < 0$, le ressort se comprime.

On a alors $x(0) = -\frac{v(0)}{\omega}$ et $x(t) = -\frac{v(0)}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = +\frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t$.

- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ correspond à une vitesse initiale : $v(0) = +x_0 \omega > 0$, le ressort se dilate.

On a alors $x_0 = \frac{v(0)}{\omega}$ et $x(t) = \frac{v(0)}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +\frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t$.

Second cas simple

À $t = 0$, $\dot{x}(0) = v(0) = -x_0 \omega \sin \varphi = 0$, soit alors $\varphi = 0$.

On en déduit $x(0) = x_0 \cos \varphi = x_0$ d'où $x(t) = x(0) \cos \omega t$.

D.2. Cas général

Afin de déterminer les valeurs de x_0 et de φ , il faut en général, résoudre le système des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \cos \varphi \\ \dot{x}(0) = -x_0 \sin \varphi \end{cases}$$

On obtient alors⁶ : $\tan \varphi = \frac{\dot{x}(0)}{\frac{x(0)}{-\omega}} = -\frac{\omega \dot{x}(0)}{x(0)}$ et $x_0 = \sqrt{x^2(0) + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}}$.

6. Relations trigonométriques utiles :

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

7. Rappels de Terminale S : l'énergie potentielle élastique est :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

avec k la raideur du ressort (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et x son élongation (en m).

8. Énergie potentielle élastique maximale est atteinte pour le maximum d'amplitude et une énergie cinétique nulle.

9. $E_m = W(\vec{F}_{dis}) = 0$ dans le cas du système de masse m relié à un ressort linéaire dont on a négligé les frottements.

Définition 6

Quel que soit t , l'énergie mécanique E_m s'écrit en additionnant l'énergie cinétique E_c du système et l'énergie potentielle élastique E_p ⁷ :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) \quad 8$$

Avec $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$, $\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\omega^2 = \frac{k}{m}$, l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} k x_0^2 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique du système, $E_m = \frac{1}{2} k x_0^2$, est donc constante⁹. Elle vaut l'énergie potentielle élastique maximale.

Le système n'étant soumis à aucun frottement, la somme des travaux des forces dissipatives est nulle et ainsi la variation d'énergie mécanique.

E. Cohérence de la solution

L'essentiel

✓ Équation harmonique

Une masse m ramenée à son centre d'inertie G , accrochée à un ressort linéaire de raideur k sans masse et posée sur un support plan horizontal est, dans le cas de petites oscillations, un système physique vérifiant l'équation harmonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ avec } k \text{ la raideur du ressort (N} \cdot \text{m}^{-1})$$

et m la masse du système (kg)

✓ Pulsation, période et fréquence

L'oscillation d'un oscillateur harmonique est purement sinusoïdale.

La pulsation ω est : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec k la raideur du ressort (N · m⁻¹)
et m la masse du système (kg).

La période T des oscillations est alors : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,

et la fréquence f des oscillations est : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

La pulsation, la période et la fréquence sont indépendantes de l'amplitude des oscillations.

✓ Solutions de l'équation harmonique

- La solution générale est :

$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec x_0 amplitude du mouvement (en m),
sa pulsation (en rad · s⁻¹)
et φ la phase (en rad).

La solution particulière dépend des conditions initiales.

- Énergie cinétique, potentielle élastique et mécanique

L'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie potentielle élastique est :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie mécanique E_m s'écrit en additionnant l'énergie cinétique E_c du système et l'énergie potentielle élastique E_p :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique est constante et sa valeur est celle de l'énergie potentielle élastique maximale qui est aussi celle de l'énergie cinétique maximale.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Reconnaître l'équation harmonique et en déduire ses solutions?

On s'intéresse à un système physique en régime libre dont on a obtenu l'équation différentielle sans second membre.

À $t = 0$, il est lâché, écarté de sa position de repos avec une vitesse initiale nulle.

On cherche l'évolution temporelle du système physique.

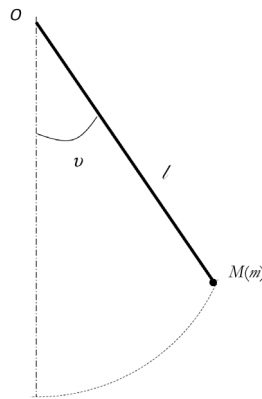
→ Savoir faire

- 1 Mettre l'équation différentielle sous forme canonique (normalisée): $\ddot{y} + Ay = 0$ avec y la variable d'étude et A une grandeur positive.
- 2 Identifier les différents paramètres et exprimer $A = \omega^2$ en fonction des données du problème.
- 3 La solution générale est alors: $y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
- 4 En fonction des conditions initiales données dans l'énoncé, en déduire la solution particulière.

→ Application

Un pendule simple est constitué d'une masse m assimilée à un point matériel M et d'un fil sans masse inextensible de longueur ℓ .

Le point M est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale d'angle $\theta_i = \theta(t = 0)$.



La seconde loi de Newton appliquée en M dans le référentiel d'étude supposé galiléen est:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Dans le cas particulier de mouvements de faibles amplitudes l'équation se réduit à:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta$$

Exprimer la solution générale et la solution particulière tenant compte des conditions initiales pour ce pendule simple.

On donne l'expression de la vitesse $v(t)$ en fonction de l'angle $\theta(t)$ du pendule et de sa longueur ℓ :

$$v(t) = \ell\dot{\theta}(t)$$

Solution

- ① La masse du pendule étant non nulle ainsi que la longueur du fil, on a :

$$\ell \ddot{\theta} = -g\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

On reconnaît la forme canonique avec $\theta(t)$ l'angle du pendule ou paramètre d'étude et $A = \frac{g}{\ell}$ constante positive.

- ② La variable $y(t)$ est ici analogue à $\theta(t)$ et $A = \frac{g}{\ell}$ homogène au carré de la pulsation :

$$A = \frac{g}{\ell} = \omega^2$$

On en déduit donc l'expression de la pulsation :

$$\omega = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

- ③ La solution générale est alors par analogie :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \varphi\right)$$

- ④ À l'instant initial, l'angle $\theta(t=0) = \theta_i$ et $v(t=0) = \ell \dot{\theta} = 0$.

On a donc :

$$\theta(t=0) = \theta_0 \cos \varphi = \theta_i$$

$$\dot{\theta}(t=0) = -\theta_0 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sin \varphi = 0$$

On en déduit alors que $\sin \varphi = 0$ soit $\varphi = 0$ et ainsi :

$$\theta(t=0) = \theta_0 = \theta_i$$

$$\theta(t) = \theta_i \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

solution particulière tenant compte des conditions initiales du système.

Méthode n°2

Comment établir l'équation harmonique dans le cas de n ressorts ?

Une masse ponctuelle est accrochée à un nombre n de ressorts horizontaux.

On veut déterminer l'expression de l'équation harmonique.

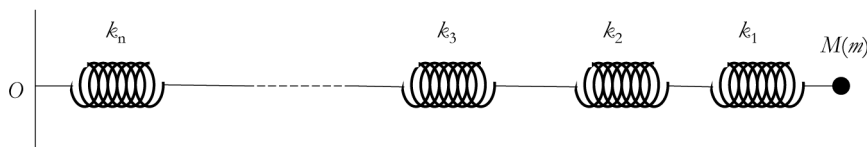
→ Savoir faire

- ① Raisonner sur un système à deux ressorts et paramétrer les positions des points du système : soit par exemple x_A et x_M les positions respectives de A et M avec A la jonction entre les ressorts et M le point matériel de masse m .
- ② Au point A appliquer la seconde loi de Newton sachant que la masse en A est nulle. En déduire une expression de x_A en fonction de x_M .
- ③ Exprimer la force de rappel au point M et l'exprimer en fonction des paramètres des ressorts et de x_M .
- ④ Généraliser pour un nombre n quelconque de ressorts.
- ⑤ En déduire l'équation harmonique généralisée à n ressorts en appliquant la seconde loi de Newton en M.

→ Application

Un objet ponctuel M de masse m est accroché à n ressorts horizontaux de longueur à vide ℓ_0 , ayant des raideurs respectives $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. On néglige les frottements.

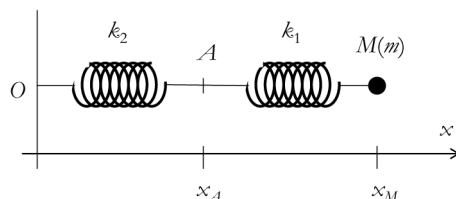
Le ressort 1 est fixé à une de ses extrémités et l'objet ponctuel est accroché au bout du premier ressort, telle que le précise la figure ci-dessous.



Déterminer l'expression de la force de rappel qu'exerce cet ensemble de ressorts horizontaux de masses négligeables sur M et en déduire l'équation harmonique en fonction des paramètres des ressorts. Que vaut alors la pulsation ?

Solution

① Raisonnons dans un premier temps avec deux ressorts. Soit respectivement x_A et x_M les abscisses ou positions sur l'axe (Ox) des points A et M comme notés sur le schéma ci-dessous.



② Si l'on considère le premier ressort entre O et A : à un instant t quelconque, sa longueur est $\ell_1(t) = x_A - x_O = x_A$. On en déduit donc que son allongement est $x_1(t) = \ell_1(t) - \ell_0 = x_A - \ell_0$.

De même en considérant le ressort entre A et M : $x_2(t) = \ell_2(t) - \ell_0 = x_M - x_A - \ell_0$.

En A , point matériel de masse nulle à la jonction entre les deux ressorts, la seconde loi de Newton s'exprime comme suit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \sum \vec{F}$$

En considérant les forces de rappel exercées par le ressort de droite et par le ressort de gauche, on peut écrire :

$$0 = -k_1(x_M - x_A - \ell_0) + k_2(x_A - \ell_0)$$

En développant l'expression précédente et en la réarrangeant, on peut écrire :

$$x_A = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x_M + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0$$

③ En M , la force de rappel s'écrit :

$$\vec{F} = -k_1(x_M - x_A - \ell_0)\vec{i}$$

Soit en remplaçant x_A par son expression établie en 2. et en simplifiant :

$$\vec{F} = \left(-\frac{k_1}{k_1 + k_2} x_M + \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \ell_0 \right) \vec{i} = -\frac{k_1}{k_1 + k_2} (x_M - 2\ell_0) \vec{i}$$

Par analogie, on définit alors la raideur K équivalente et L_0 la longueur à vide au repos équivalente:

$$K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

$$K' = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} = \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}$$

Remarque : dans le cas où les deux raideurs sont identiques $k_1 = k_2 = k$ alors $K = \frac{k}{2}$.

④ Dans le cas de trois ressorts de raideurs k_1 , k_2 et k_3 , on obtient par le même raisonnement que précédemment :

$$K' = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} = \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}$$

$$L'_0 = 3\ell_0.$$

La généralisation apparaît alors comme :

$$K_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

$$L_0 = n\ell_0$$

Remarque : dans le cas où les raideurs des ressorts sont identiques et égales à k , on a $K_n = \frac{k}{n}$.

⑤ En appliquant la seconde loi de Newton, on a :

$$m \frac{d}{dt}(x_M - n\ell_0) = m \frac{d}{dt}(x_M - L_0) = F = -K_n(x_M - L_0) = -\frac{k}{n}(x_M - n\ell_0)$$

$$m \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{k}{n}x(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{nm}x = 0$$

On en déduit la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{nm}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{n}}$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 L'équation harmonique sous toutes ses formes

On considère diverses situations physiques dans lesquelles l'évolution d'un système est décrite par une équation caractéristique. Le but de l'exercice est d'identifier les équations de type harmonique et de déterminer les paramètres caractéristiques de ces dernières.

1) Cas d'un pendule pesant : barre homogène de masse m , de longueur 2ℓ , accrochée en une de ses extrémités à un point fixe O. On considère que la liaison entre la barre et le support, en O, est parfaite. L'équation donnant l'évolution en fonction du temps de l'angle θ que fait la direction de la barre avec la verticale s'écrit alors :

$$J\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta.$$

g désigne l'accélération de la pesanteur, J le moment d'inertie du pendule, homogène à $[M \cdot L^2]$. Cette équation est-elle de type harmonique ? Comment est-elle modifiée si l'on considère que les oscillations du pendule sont limitées aux petits angles, dans un domaine de variation où l'on peut faire l'approximation : $\sin \theta \approx \theta$, les angles étant exprimés en radian ?

2) Cas d'un système masse-ressort vertical dans le champ de pesanteur : une masse m est suspendue à un ressort idéal (masse négligeable, constante de raideur k_0 et longueur à vide ℓ_0), accroché au point fixe O. L'équation donnant l'évolution de l'altitude $z(t)$ de la masse par rapport à l'altitude du point O pris comme référence s'écrit :

$$m\ddot{z} = -k_0(z - \ell_0) + mg.$$

Cette équation est-elle de type harmonique ? Montrer que l'on peut rendre cette équation homogène, c'est-à-dire sans second membre, en changeant l'origine des altitudes. On pourra s'intéresser à la position d'équilibre de la masse.

3) Champ électrique entre deux plans métalliques. L'équation générale régissant l'évolution d'une composante de champ électrique, ici E_x , en fonction d'une coordonnée d'espace et du temps s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

C'est l'équation de d'Alembert qui sera décrite dans la suite de l'ouvrage. c désigne la célérité de la lumière dans le vide. On cherche une famille particulière de solutions, dites solutions stationnaires, pour lesquelles on peut dissocier les variations spatiales et temporelles du champ électrique, soit :

$$E_x(z, t) = E_0 \cos \omega t \times F(z).$$

La pulsation ω est une constante. L'équation en E_x est-elle de type harmonique ? Même question pour l'équation obtenue pour $F(z)$.

4) L'équation de la chaleur donnant l'évolution de la température à l'intérieur d'un matériau en fonction du temps et de la position dans le matériau s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - D \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

D est un coefficient de diffusion que l'on prendra constant. On cherche une solution stationnaire (T indépendant de t). L'équation que l'on obtient alors à partir de la précédente est-elle harmonique ?

Ex. 2 Approche énergétique

1) On considère un système masse-ressort horizontal idéal dont les paramètres sont : m , k_0 et ℓ_0 . Établir les lois d'évolution temporelle de l'énergie cinétique, potentielle et mécanique d'un tel système. Tracer les courbes $E_c(t)$, $E_p(t)$ et $E_m(t)$.

2) Le système est maintenant affecté par la présence de frottements qui se manifestent par une force qui s'oppose au mouvement de m et qui est proportionnelle à sa vitesse. En introduisant f le coefficient, constant, de frottement, on a donc : $\vec{F} = -f\vec{v}$. Reprendre l'étude énergétique précédente. Conclure.

Ex. 3 Rôle de la position d'équilibre

1) On considère un système masse-ressort horizontal idéal dont les paramètres sont : m , k_0 et ℓ_0 . Le ressort est fixé en O à un support. L'origine des abscisses est prise en O. Écrire l'équation différentielle vérifiée par x , position de la masse par rapport à O.

2) Quelle est la position d'équilibre x_{eq} du système ?

3) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable réduite $X = x - x_{eq}$. Quel est l'intérêt de ce changement d'origine ?

Niveau 2

Ex. 4 Oscillateur spatial

En 1904, le physicien anglais Joseph John Thomson a proposé un modèle de l'atome d'hydrogène avec une charge positive e uniformément répartie dans une sphère de centre O et de rayon r_0 fixe.

L'électron de l'atome d'hydrogène est alors ponctuel, repéré par la position M dans le référentiel galiléen d'étude, de masse m et de charge $-e$, pouvant se déplacer librement dans la sphère précédente.

On note $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ le vecteur position de l'électron par rapport au centre de la sphère.

Donner l'équation du mouvement de l'électron et en déduire sa position.

On donne la forme du champ électrique \vec{E} créé par la charge positive en $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_0^3} \vec{r} = K\vec{r}$$

avec K constante positive, $K > 0$.

Ex. 5 Portrait de phase

Le portrait de phase est la courbe représentative de l'évolution d'un système dans l'espace (x, \dot{x}) .

On considère une masse m accrochée à un ressort horizontal linéaire sans masse de raideur k . Les frottements sont négligés ici.

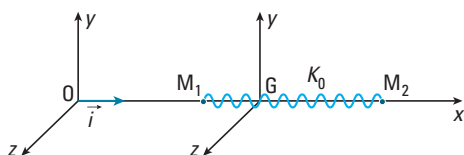
- 1) Rappeler l'équation du mouvement ou équation harmonique ainsi que sa solution dans le cas général.
- 2) Sachant que la masse est lâchée sans vitesse initiale en $x(t) = X_0$, en déduire la forme particulière de la solution.
- 3) Montrer que l'on a une équation de la forme :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{b}\right)^2 = 1.$$

Identifier a et b , coefficients positifs, en fonction des paramètres k et m .

- 4) Représenter le portrait de phase correspondant.
 - 5) que devient ce portrait de phase si la raideur k du ressort augmente? si la masse m augmente?
- On supposera X_0 constante.

Ex. 6 Oscillateur anharmonique



On considère un dispositif mécanique dans lequel deux masses m_1 et m_2 , localisées en M_1 et M_2 , sont reliées par un ressort sans masse, de constante de raideur k_0 et de longueur à vide ℓ_0 . L'ensemble est astreint à se

déplacer le long de l'axe horizontal $(x'Ox)$. On repère les positions des deux masses par leur abscisse x_1 et x_2 . On néglige tous les frottements dans cet exercice.

Dans un premier temps, on suppose que le ressort est idéal et que son allongement suit la loi de Hooke. On appelle $\ell = x_2 - x_1$ et $X = \ell - \ell_0$.

1) Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(X)$ du système. Discuter la nature du mouvement à partir de l'analyse graphique de la courbe $E_p(X)$.

2) Retrouver l'équation du mouvement du système. Donner les caractéristiques du mouvement (pulsation, période) en fonction des paramètres du système.

On considère dans la suite du problème que le ressort est légèrement anharmonique. Cela se traduit dans l'expression de l'énergie potentielle par un terme correctif en X^3 . On prendra pour la suite de l'exercice :

$$E_p(X) = \frac{1}{2}k_0X^2 - \frac{1}{3}s k_0X^3.$$

3) Préciser la dimension du coefficient s introduit dans l'expression précédente. Ce paramètre sera considéré dans la suite de l'exercice comme petit par rapport à une dimension caractéristique du système.

4) Discuter la nature du mouvement à partir de l'analyse graphique de la courbe $E_p(X)$. On s'intéressera aux extrema de la fonction.

5) Montrer que la solution de l'équation différentielle ne peut-être périodique que si l'énergie mécanique totale E du système (M_1, M_2) est inférieure à une valeur E_0 dans (B), repère barycentrique d'axes (Gx, Gy, Gz) , G désignant le centre d'inertie du système (M_1, M_2). Déterminer E_0 .

6) Retrouver l'équation du mouvement du système. On se place dans l'hypothèse où l'on a de petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable. En choisissant convenablement l'origine des temps, on montre qu'on peut rechercher, pour l'équation différentielle précédente une solution de la forme :

$$X(t) = A(\cos(\omega t) + q\cos(2\omega t)) + D$$

où q et D sont des constantes non nulles à déterminer en précisant les approximations à faire pour obtenir la forme souhaitée.

7) Montrer que la moyenne temporelle \bar{X} est proportionnelle à l'énergie mécanique totale dans (B) d'un OH de masse réduite μ , que l'on définira, de pulsation ω et d'amplitude A .

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) L'équation du pendule pesant est clairement non linéaire (présence de la fonction $\sin \theta$). Elle n'est donc pas de type harmonique. Dans la limite des petits angles (faibles oscillations) on peut « linéariser » la fonction sinus en la remplaçant par son équivalent suivant la formule proposée : $\sin \theta \approx \theta$. Dans ce cas l'équation devient : $\mathcal{J}\ddot{\theta} = -mg\ell\theta$ soit $\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{\mathcal{J}}\theta = 0$. On reconnaît l'équation harmonique sous forme canonique avec une pulsation propre : $\omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{\mathcal{J}}}$.



Il est important de vérifier l'homogénéité de tout résultat. L'équation aux dimensions s'écrit :

$$\left[\sqrt{\frac{mg\ell}{\mathcal{J}}} \right] = \left(\frac{M \times L T^{-2} \times L}{M L^2} \right)^{1/2} = T^{-1}.$$

La quantité trouvée est donc bien homogène à une pulsation.

2) L'équation $m\ddot{z} = -k_0(z - \ell_0) + mg$ est du type harmonique mais avec second membre :

$$\ddot{z} + \frac{k_0}{m}z = g + \frac{k_0}{m}\ell_0.$$

On identifie aisément la pulsation propre, identique à celle du système masse-ressort horizontal :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}.$$

Pour s'affranchir du second membre, on peut envisager le problème à partir d'un point de référence différent. Considérons l'altitude d'équilibre z_{eq} définie par $\ddot{z} = 0$. En utilisant l'équation du mouvement, on détermine : $z_{eq} = \frac{m}{k_0}g + \ell_0$. En posant la variable réduite : $Z = z - z_{eq}$ on trouve l'équation réduite suivante :

$\ddot{Z} + \frac{k_0}{m}(Z + z_{eq}) = g + \frac{k_0}{m}\ell_0$ soit $\ddot{Z} + \frac{k_0}{m}Z = 0$ après élimination de z_{eq} . On trouve l'équation harmonique homogène, de même pulsation ω_0 .

3) L'équation en E_x n'est manifestement pas harmonique en une variable unique puisqu'elle fait intervenir des dérivées partielles en z et en t .



Une dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables consiste à prendre la dérivée standard par rapport à une variable, en considérant que les autres sont fixes.

Exemple : $f(x, y) = x^2 \times y$ alors $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \times y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$.

En remplaçant E_x par la forme proposée, dans laquelle les variations spatiale et temporelle sont séparées, on trouve : $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -E_0 \omega \sin \omega t \times F(z)$ et $\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 \cos \omega t \times F(z)$. Dans l'équation de d'Alembert, cette forme particulière de solution conduit à une équation différentielle pour la fonction spatiale $F(z)$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 F}{dz^2} \times E_0 \cos \omega t - \frac{1}{c^2} (-E_0 \omega^2 \cos \omega t \times F) = 0 \text{ soit } \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F = 0$$

après simplification par $E_0 \cos \omega t$ qui n'est pas systématiquement nul.

⚙️ La notation de dérivée partielle n'a pas de sens ici puisque F est une fonction d'une seule variable.

L'équation en F est une équation harmonique. Attention, les dérivées sont prises par rapport à une variable d'espace et non plus par rapport au temps comme dans les exemples précédents. Du point de vue dimensionnel on doit donc vérifier que $\frac{\omega^2}{c^2}$ est homogène au carré de l'inverse d'une longueur.

⚙️ Dans l'exemple des pendules, on a toujours vérifié que le terme ω^2 était bien homogène au carré de l'inverse d'un temps.

Vérification :
$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \right] = \frac{T^{-2}}{L^2 T^{-2}} = L^{-2}.$$

4) Bien que de nature différente, l'équation de la chaleur fait également intervenir deux variables (t et une variable d'espace). La version stationnaire de cette équation, $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$, peut faire penser à une équation harmonique puisque l'on voit apparaître une dérivée seconde de l'observable physique, ici la température, en fonction d'une variable, ici la coordonnée z . Mais l'absence du second terme fait que les solutions sont de nature très différente. En effet, l'intégration de l'équation différentielle est relativement immédiate et conduit au résultat suivant : $T(z) = T_A \times z + T_B$. Cette équation n'est pas harmonique.

Exercice 2

1) Dans le cas du système masse-ressort, la loi de variation de la position de la masse par rapport à la position d'équilibre s'écrit $x(t) = X_0 \cos \omega t$ avec un choix convenable de l'origine des temps. Les énergies cinétique et potentielle s'expriment selon :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \sin^2 \omega t \quad \text{et} \quad E_P = \frac{1}{2} k_0 x^2 = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Ces deux fonctions du temps ont des variations temporelles connues.

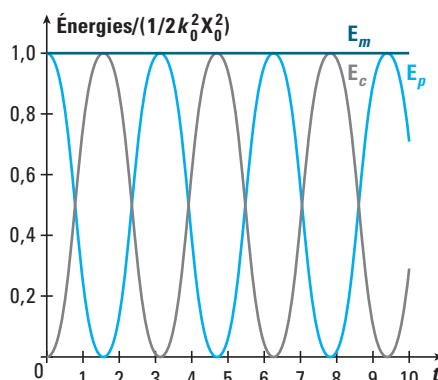
L'énergie mécanique quant à elle vaut :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 = \text{cte}.$$

L'énergie mécanique reste constante, ce qui est compatible avec l'absence de frottements.

⚙️ L'énergie que l'on place initialement dans le système en écartant la masse ou en lui communiquant une vitesse passe alternativement sous forme « cinétique » et « potentielle ».

⚙️ Lorsque la masse est dans une position extrême par rapport à sa position de départ, sa vitesse s'annule (maximum de E_P , minimum de E_C). Inversement lorsque la masse repasse par la position initiale, sa vitesse est extrême (maximum de E_C , minimum de E_P).



Sur la figure sont représentées les trois différentes énergies en fonction de la variable sans dimension ωt . Les énergies sont divisées par $\frac{1}{2}k_0 X_0^2$ pour que l'on puisse plus facilement les comparer. On constate que les énergies cinétique et potentielle oscillent en opposition de phase (quand l'une est maximale, l'autre est minimale). Leur somme (l'énergie mécanique) reste constante.

2) L'introduction d'une force de frottements a pour effet physique une déperdition d'énergie, ce qui se traduit par une diminution de l'énergie mécanique avec le temps. Ceci correspond au cas le plus proche de la réalité. L'équation du mouvement s'obtient par application de la seconde loi de Newton à la masse :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_f,$$

où \vec{N} désigne la réaction normale du support et \vec{F} la force de rappel du ressort.

En projection sur l'axe horizontal ($x'Ox$) et en prenant l'origine des abscisses à la position d'équilibre du système (ce qui élimine la longueur à vide du ressort), on trouve l'équation différentielle de $x(t)$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_0 x - f \frac{dx}{dt} \text{ que l'on peut réordonner en : } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \text{ en posant : } \alpha = \frac{f}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}.$$

La forme générale de la variation de la position en fonction du temps fait apparaître une décroissance exponentielle dont le temps caractéristique dépend du coefficient de frottement. La méthode générale de résolution sera vue ultérieurement dans le programme. On donne ici les principaux résultats.

On définit une pseudo-pulsation : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, dans l'hypothèse où le coefficient α est suffisamment petit pour que la racine soit définie. Physiquement cela correspond à une situation où les frottements sont relativement faibles. La solution générale de l'équation s'écrit : $x(t) = e^{-\alpha t} \times (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ où A et B sont des constantes d'intégration. En supposant que le mobile part initialement, sans vitesse, de la position définie par $x(t=0) = X_0$, on trouve l'expression finale :

$$x(t) = X_0 \times e^{-\alpha t} \times \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$\text{ce qui donne} \quad \dot{x}(t) = -X_0 \times e^{-\alpha t} \times \left(\omega + \frac{\alpha^2}{m} \right) \times \sin \omega t.$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique s'en déduisent. Après simplifications, elles deviennent :

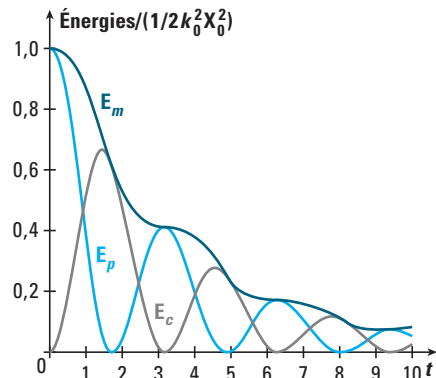
$$E_c(t) = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \times \sin^2 \omega t \times e^{-2\alpha t},$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \left[\cos 2\omega t + \frac{\alpha}{m} \sin 2\omega t + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t \right] \times e^{-2\alpha t}.$$

On en déduit l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} k_0 X_0^2 \left[\cos 2\omega t + \frac{\alpha}{m} \sin 2\omega t + 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t \right] \times e^{-2\alpha t}.$$

Ces trois fonctions du temps sont représentées dans la figure ci-contre, normalisées à $\frac{1}{2}k_0 X_0^2$ avec un paramètre d'amortissement pris égal à $\alpha = 0,14$. On peut voir sur la figure la décroissance de l'énergie avec le temps, caractéristique de l'évolution d'un système mécanique en présence de frottements.



Exercice 3

1) La mise en équation à partir de la seconde loi de Newton est immédiate pour le système idéal masse-ressort (voir Cours) : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$, avec \vec{N} , réaction normale du support (absence de frottements) et \vec{F} , force de rappel du ressort. On projette sur l'axe des abscisses : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_0(x - \ell_0)$, soit : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ en posant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$.

2) La position d'équilibre du système est définie par une vitesse et une accélération nulles. En reportant la seconde condition dans l'équation différentielle, on trouve immédiatement : $x_{eq} = \ell_0$.

3) Le changement de variable $X = x - x_{eq}$ permet d'absorber le second membre de l'équation différentielle.

$$\text{En effet : } x = X + x_{eq} \Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 (X + x_{eq}) = \omega_0^2 \ell_0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0.$$

L'intérêt de la méthode est de n'avoir à résoudre que des équations différentielles homogènes. Une application importante concerne le système masse-ressort vertical.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

La force exercée par la charge positive sur l'électron en $M(t)$ est :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -eK\vec{r}$$

Cette force peut être assimilée à une force de rappel :

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k\overrightarrow{OM}$$

avec $k = eK$ raideur du ressort.

En considérant l'électron dans le référentiel d'étude, la seconde loi de Newton s'exprime alors de la manière suivante :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} = \vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$$
$$\omega \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} + \frac{k}{m} \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

On reconnaît ici l'équation harmonique : il s'agit de l'équation du mouvement d'un oscillateur spatial.



L'équation harmonique vectorielle $\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}$ est appelée équation harmonique spatiale.

La solution est donc du type :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Exercice 5

1) L'équation du mouvement d'une masse m accrochée à un ressort horizontal sans frottement de raideur k ou équation harmonique est :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

de solution $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

2) Conditions initiales : la vitesse est nulle, soit $\dot{x}(t=0) = 0$ et $x(t=0) = X_0$.

$$\dot{x}(\omega t = 0) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega x_0 \sin \varphi = 0$$

On en déduit donc $\varphi = 0$.

D'où $x(t) = x_0 \cos \omega t$ avec $x_0 = X_0$ car $x(t=0) = x_0 = X_0$.

Finalement :

$$x(t) = X_0 \cos \omega t$$



La solution particulière s'obtient en utilisant les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs de position et vitesse à l'origine des temps.

3) D'après la réponse à la question précédente, on a :

$$x(t) = X_0 \cos \omega t$$

et par dérivation par rapport au temps :

$$\dot{x}(t) = -\omega X_0 \sin \omega t$$



On rappelle l'égalité trigonométrique $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$.

En utilisant la somme des carrés du sinus et du cosinus d'un angle, on obtient :

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{-\omega X_0} \right)^2 = \left(\frac{x}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega X_0} \right)^2 = 1$$

Par identification, on obtient alors les coefficients a et b demandés :

$$a = X_0 ; b = \omega X_0$$

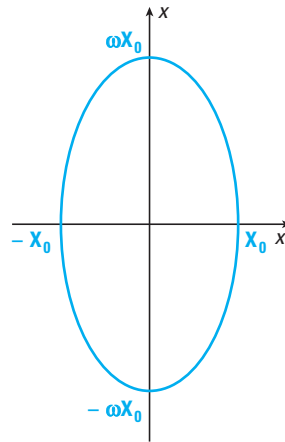


On vérifie bien que a , homogène à x est bien homogène à une longueur X_0 et que b , homogène à \dot{x} est bien homogène à ωX_0 , soit une vitesse.

En effet $[\omega X_0] = [\omega].[X_0] = T^{-1}L$ unité de vitesse.

4) On reconnaît alors l'équation d'une ellipse :

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{b} \right)^2 = 1$$



Le plan (x, \dot{x}) est appelé plan de phase et l'espace $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ est appelé espace des phases.

5) En supposant X_0 constante, si la raideur k augmente, alors la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ augmente, m étant fixée. On en déduit alors que $|\omega X_0|$ augmente et l'ellipse est ainsi plus allongée.

Dans le cas d'une augmentation de la masse à X_0 et k constantes, la pulsation diminue et l'ellipse est ainsi moins allongée.

Exercice 6

Cet exercice met en jeu un système composé de deux éléments ce qui pourrait laisser croire à l'existence de deux degrés de liberté. Nous allons voir qu'il est possible de traiter ce cas, fréquent en physique, en se ramenant à une particule fictive unique dont il convient de déterminer les caractéristiques (masse, position, vitesse etc) par rapport à celles du système initial.

1) La variable réduite $X = \ell - \ell_0$ représente l'allongement relatif du ressort à un instant donné.

L'énergie potentielle associée vaut simplement $E_p(X) = \frac{1}{2}k_0 X^2$, si k_0 désigne la constante de raideur du ressort.

2) Pour retrouver l'équation du mouvement de ce système on peut appliquer la seconde loi de Newton à chaque masse, soumise aux efforts transmis par le ressort. En projection sur l'axe horizontal on obtient :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_0 [(x_2 - x_1) - \ell_0] \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_0 [(x_2 - x_1) - \ell_0] \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre ces équations et en remarquant que : $\ddot{X} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$, on trouve alors une équation pour la variable réduite X :

$$\ddot{X} = -k_0 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) X = -k_0 \left(\frac{1}{\mu} \right) X.$$

On a introduit la masse réduite μ du système : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Par analogie avec le cas du système simple {masse unique + ressort}, on en déduit que le système oscille, de manière harmonique, à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{\mu}}$.

Autour de quel point fixe le système oscille-t-il ? On remarque tout d'abord, en faisant la somme membre à membre des deux équations précédentes, que l'on obtient une relation intéressante pour le centre d'inertie ou centre de masse du système noté G dans la suite de l'exercice.

En effet, la position de G est donnée par définition par : $(m_1 + m_2)x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2$.

Or en sommant les deux équations du mouvement membre à membre, on trouve : $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$. L'accélération du centre de masse est donc nulle. En se plaçant dans le référentiel barycentrique (B), référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire pris comme référence et dans lequel G est immobile, on voit que les deux masses oscillent autour d'un point fixe, le centre de masse G. Nous admettrons le résultat général suivant : l'étude d'un système à deux corps en interaction, se ramène à l'étude d'une particule fictive, de masse μ , masse réduite du système se trouvant à la distance $(x_2 - x_1)$ du centre de masse du système.

Ce résultat sera démontré dans sa généralité lors de l'étude de la mécanique des systèmes.

Peut-on retrouver l'équation du mouvement du système composé à partir de l'équation première de l'énergie ?

Par convention toutes les quantités cinématiques évaluées dans (B) seront notées avec un astérisque, par exemple \vec{v}_1^* et \vec{v}_1^* désignent la vitesse de la masse m_1 dans le référentiel (R) et dans (B) respectivement.

On verra dans la suite du cours les formules de changement de référentiel qui permettent par exemple d'écrire $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 + \vec{v}_G$.

On remarque en particulier que les relations suivantes sont valables : $(x_2 - x_1) = (x_2^* - x_1^*)$ et $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*)$.

L'énergie cinétique totale du système dans le référentiel barycentrique se ramène à l'énergie cinétique de la particule fictive, soit $E_c^* = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}_2^* - \dot{x}_1^*)^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{X}^2$.

L'énergie potentielle quant à elle vaut toujours $E_p(X) = \frac{1}{2}k_0X^2 = \frac{1}{2}k_0X^{*2} = E_p^*$.

En absence de frottement, l'énergie mécanique du système $E_m^* = E_C^* + E_p^*$ se conserve, ce qui se traduit par :

$$\frac{dE_m^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}k_0X^2 + \frac{1}{2}\mu X^2 \right) = 0.$$

et donc par l'équation du mouvement de la particule fictive :

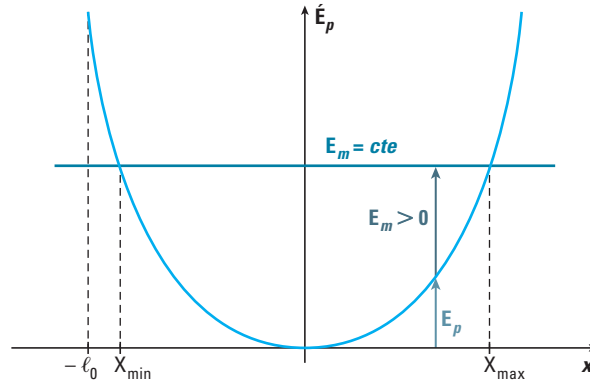
$$\ddot{X} + k_0 \left(\frac{1}{\mu} \right) X = 0.$$

Il est important de pouvoir discuter la nature du mouvement à partir de la conservation de l'énergie. Pour cela il suffit de tracer la courbe de l'énergie potentielle $E_p(X)$, de placer la droite horizontale correspondant à l'énergie mécanique (constante) et d'utiliser le fait que l'énergie cinétique est toujours définie positive.

Ceci permet de contraindre le domaine de variations de X accessible au système.

Pour un ressort idéal, la courbe $E_p(X)$ est une parabole, centrée en $X = 0$. Le mouvement du système est borné, limité au domaine $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$. On parle de mouvement lié.

N.B. on remarque que la variable X ne peut être inférieure à $-\ell_0$, ce qui correspond à la condition $(x_2 - x_1) \geq 0$.



On considère maintenant le cas du ressort non idéal, avec possibilité de déformation(s).

La forme d'énergie potentielle proposée : $E_p(X) = \frac{1}{2}k_0X^2 - \frac{1}{3}sk_0X^3$ rend compte de ce défaut par la présence du terme correctif $sk_0X^3 = sX \times k_0X^2$.

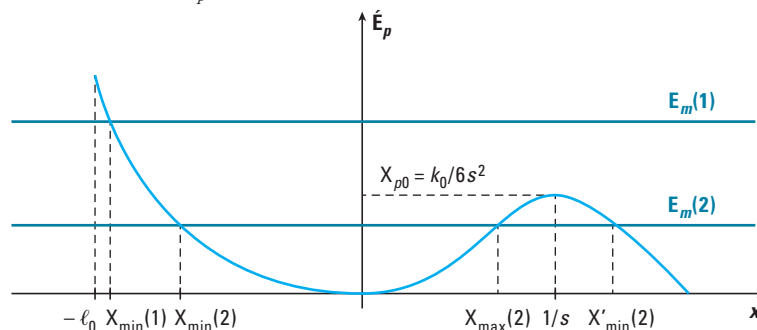
Ce terme étant correctif, son effet doit pouvoir être négligé sous certaines conditions, à préciser.

3) L'analyse dimensionnelle est immédiate : pour que les deux termes présents dans l'expression de l'énergie potentielle soient compatibles, il faut que le produit $[sX]$ soit sans dimension.

De cette façon, le terme correctif a bien les dimensions de k_0X^2 , c'est-à-dire d'une énergie.

Donc s doit être homogène à l'inverse d'une longueur.

4) Graphiquement la courbe $E_p(X)$ a la forme suivante :



Il existe deux positions particulières, $X = 0$ et $X = 1/s$ qui annulent la dérivée $\frac{dE_p}{dX}$.

La première correspond à un minimum, la seconde à un maximum, ce que l'on peut montrer en considérant la dérivée seconde.

5) La présence d'un maximum local en $X = 1/s$, de valeur $E_p 0 = k_0/6s^2$ conduit à distinguer trois cas :

- $E_m^* = E_m(1) > E_{p_0}$: dans ce cas le mouvement n'est borné qu'inférieurement par la valeur notée $X_{\min}(1)$ sur le graphique (intersection de la droite horizontale d'équation $E_m^* = E_m(1)$ et de la courbe $E_p(X)$). Toutes les valeurs de X supérieures à cette borne inférieure sont autorisées. On a un mouvement de diffusion.

- $E_m^* = E_m(2) < E_{p_0}$ et initialement $X > X_{\min}^*(2)$: le mouvement est là encore borné inférieurement à chaque instant par la valeur $X_{\min}^*(2)$. On est encore dans un mouvement de diffusion.

- $E_m^* = E_m(2) < E_{p_0}$ et initialement $X < X_{\max}^*(2)$: le mouvement est borné et les valeurs de X accessibles limitées au domaine $[X_{\min}^*(2), X_{\max}^*(2)]$. Le mouvement est donc lié dans ce cas.

6) Pour établir l'équation du mouvement de ce système, on peut partir de l'équation de conservation de l'énergie comme dans le cas du ressort idéal :

$$E_m^* = E_c^* + E_p^* = \frac{1}{2}\mu\dot{X}^2 + \frac{1}{2}k_0\dot{X}^2 - \frac{1}{3}sk_0\dot{X}^3 = cte.$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on trouve, après simplification par X :

$$\mu\ddot{X} + k_0X - sk_0X^2 = 0.$$

Cette équation du mouvement est non-linéaire (présence d'un terme quadratique en X). La résolution directe d'une telle équation est en général impossible. Nous allons exploiter le fait que ce terme quadratique est « petit » par rapport aux autres termes de l'équation. Une méthode simple consiste à procéder par étapes d'approximations successives : initialement on considère un ressort idéal et on détermine la solution d'ordre 0, $X_0(t)$. On pose alors $X(t) = X_0(t) + \varepsilon(t) \equiv X_1(t)$, où $\varepsilon(t)$ représente une « petite » correction. Pour déterminer la forme exacte de cette correction, on réinjecte $X_1(t)$ dans l'équation complète pour trouver l'équation dont $\varepsilon(t)$ est solution. Mise en œuvre : à l'ordre zéro, le système se ramène à l'équation d'un ressort idéal (on supprime l'effet de la perturbation) :

$$\mu\ddot{X}_0 + k_0X_0 = 0$$

La solution est de la forme : $X_0(t) = A \cos \omega_0 t$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{\mu}}$.

On passe à l'ordre 1 en ajoutant la perturbation $\varepsilon(t)$: $X_1(t) = X_0(t) + \varepsilon(t)$ est solution de : $\mu\ddot{X}_1 + k_0X_1 - sk_0X_1^2 = 0$, où nous allons conserver uniquement les termes principaux en $\varepsilon(t)$ (développement limité à l'ordre 1), ce qui permet d'écrire par exemple :

$$X_1^2 = X_0^2 + 2X_0\varepsilon + \varepsilon^2 \approx X_0^2 + 2X_0\varepsilon$$

Ainsi l'équation à résoudre en X_1 se déduit à :

$$\mu\ddot{X}_0 + \mu\ddot{\varepsilon} + k_0X_0 + k_0\varepsilon - sk_0(X_0^2 + 2X_0\varepsilon) = 0$$

Cette équation se simplifie en remarquant que : $\mu\ddot{X}_0 + k_0X_0 = 0$ et que $sk_0X_0\varepsilon$ est en fait négligeable par rapport aux autres termes, puisque sX_0 est déjà une quantité « petite ».

On doit donc résoudre l'équation suivante :

$$\mu\ddot{\varepsilon} + k_0\varepsilon = sk_0(X_0^2) = s\omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Cette équation différentielle, à coefficients constants, avec second membre, est parfaitement soluble, on obtient des solutions du type $\varepsilon(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \cos(2\omega_0 t)$.

La solution totale à l'ordre 1 pour décrire le mouvement du système (en fait de la particule fictive associée) s'écrit finalement :

$$X(t) = X_1(t) = A \left(\cos \omega_0 t - \frac{sA}{6} \cos(2\omega_0 t) \right) + \frac{sA^2}{2}.$$

7) La valeur moyenne de la position de la particule fictive se détermine à partir de l'expression précédente.

Sachant que la valeur moyenne, sur une période $T_0 = \frac{2}{\omega_0}$ des fonctions $N\omega_0 t$ avec N entier, est nulle, on trouve immédiatement que : $\bar{X} = \frac{sA^2}{2}$.

Cette expression peut se modifier en constatant que le carré de l'amplitude d'oscillation du ressort idéal, A^2 , est proportionnel à l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique.

En effet, à l'ordre zéro (ressort idéal) :

$$E_m^* = \frac{1}{2}k_0 X^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{X}^2 = \frac{1}{2}k_0 A^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}\mu A^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}k_0 A^2.$$

On en déduit que la valeur moyenne de la position s'écrit : $\bar{X} = \frac{sE_m^*}{k_0}$.

On remarque en particulier que cette valeur moyenne est nulle dans le cas d'un ressort idéal pour lequel $s = 0$. Ceci correspond à une oscillation « symétrique » autour d'un point fixe. La présence du terme d'anharmonicité a pour effet principal de décaler la position moyenne d'oscillation.

On retrouve l'idée de la « perturbation » dans le fait que la valeur moyenne est proportionnelle à sA , qui un terme « petit ».