

# *Dynamique du point en référentiel galiléen*

## Introduction

La cinématique du point a permis de décrire le mouvement d'un point, mais sans s'occuper de ses causes : c'est la dynamique qui permet de relier le mouvement à ses causes c'est-à-dire aux efforts.

On pourrait ainsi écrire « dynamique = cinématique + force ».

Newton a établi les lois fondamentales de la dynamique (dite « dynamique newtonienne »), notamment une loi reliant forces et accélération, c'est-à-dire reliant des grandeurs dynamiques (forces) à une grandeur cinématique (accélération) ; dans cette relation une caractéristique du point matériel intervient aussi : sa masse.

### Plan du chapitre 15

<b>A. Le point matériel et les forces</b> .....	x
1. Système étudié : le point matériel .....	x
2. Actions mécaniques : les forces .....	x
3. Différents types de forces .....	x
<b>B. Les lois de Newton</b> .....	
1. Première loi de Newton : principe d'inertie .....	x
2. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique .....	x
3. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques .....	x
<b>C. Généralisation à un système matériel fermé</b> .....	
1. Système matériel fermé .....	x
2. Masse d'un système matériel .....	x
3. Centre d'inertie .....	x
4. Résultante cinétique .....	x
5. Théorème de la résultante cinétique ou théorème du centre de masse .....	x
<b>D. Bilan et exemples d'applications</b> .....	
1. Bilan .....	x
2. Exemples d'application .....	x
Méthodes .....	x
Exercices .....	x

# A. Le point matériel et les forces

## A.1. Système étudié : le point matériel

### Définition 1

1. Un point matériel peut représenter des objets de petite taille (ex. particule) ou de grande taille (ex. terre, voiture).

Un point matériel<sup>1</sup>  $M$  représente un système (un ou plusieurs objets physiques) dont la position peut être décrite à l'aide de 3 coordonnées seulement (celles du point  $M$ ) et caractérisé par sa masse  $m$  ; on le notera  $M(m)$ .

**Remarque :** Le point matériel associe un point géométrique  $M$ , caractérisé par sa position à un instant donné (3 coordonnées dans l'espace) et un scalaire (sa masse  $m$ ).

## A.2. Actions mécaniques : les forces

2. Plus exactement, l'action mécanique permet de modifier le vecteur vitesse.

Les actions mécaniques (appelées aussi efforts mécaniques) sont les causes du mouvement<sup>2</sup> ; elles admettent une représentation vectorielle : le **vecteur force**, caractérisé par sa direction, son sens, sa norme (ou valeur ou intensité) et son point d'application (le point matériel étudié).

L'unité de la force est le newton (N) :  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## A.3. Différents types de forces

### A.3.1. Poids d'un point matériel

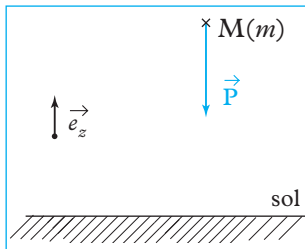


Fig. 1. Poids d'un point matériel  $M$ .

Un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , se trouvant à proximité du sol terrestre est soumis à son poids  $\vec{P}$  force verticale et dirigée vers le bas, de norme  $\|\vec{P}\| = mg$  (fig. 1).

Dans ces conditions, on a :

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{P} \text{ poids en (N)} \\ m \text{ masse (kg)} \\ \vec{g} \text{ champ de pesanteur (m} \cdot \text{s}^{-2}) \end{array} \right.$$

**Remarque :**  $\vec{g}$  est le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme ( $\vec{g} = \overline{\vec{g}}$  en tout point  $M$ ) ; le poids s'identifie quasiment à la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre, qui à sa surface est :

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_z$$

### Application 1 Cas du champ de pesanteur

Calculer la valeur de  $\vec{g}$ , à la surface de la Terre, sachant que :

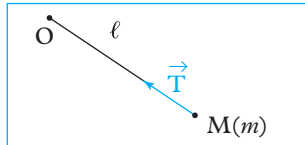
- la constante de gravitation universelle est  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  ;
- le rayon de la terre est  $R_T \approx 6\,370 \text{ km}$  ;
- la masse de la terre est  $M_T \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

### Solution

$$\|\vec{g}\| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

### A.3.2. Tension d'un fil

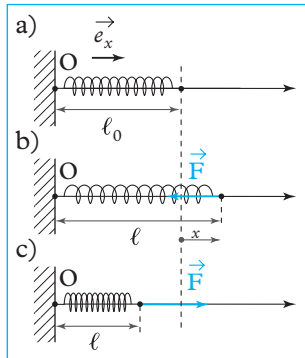
Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$ , accroché à l'extrémité d'un fil souple, de masse négligeable et de longueur constante  $\ell$  (fil inextensible). Le fil exerce



**Fig. 2.** Tension d'un fil.

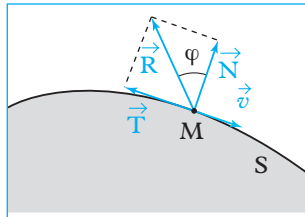
3. La tension est la même en tout point du fil.

4. Ici la longueur de repos du ressort est sa longueur à vide  $\ell_0$ .



**Fig. 3.** Force de rappel élastique du ressort: a) à vide; b) étiré; c) comprimé.

5. Pour simplifier le calcul de la force de rappel, il est préférable de faire un dessin dans le cas où le ressort est étiré.



**Fig. 4.** Force de frottement solide.

6. Le coefficient  $f$  dépend des matériaux en contact mais pas de la surface de contact. ex  $f = 0,6$  pour le contact caoutchouc/bitume.

7. Ceci est vrai dans l'air ou l'eau.

une **tension**  $\vec{T}$  sur le point matériel M, force dirigée selon le fil (fig. 2), de norme dépendant des autres forces appliquées<sup>3</sup> au point M.

**Remarque :** en posant  $\vec{T} = T\vec{u}$  (avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire dirigé de M vers O), le fil reste tendu si  $T > 0$ .

### A.3.3. Force de rappel élastique

Soit un ressort horizontal (axe (O ;  $\vec{e}_x$ ), de masse négligeable, de longueur à vide  $\ell_0$ , de raideur  $k$  (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) (fig. 3).<sup>4</sup>

Si le ressort est étiré (sa longueur est  $\ell$ ) ; il exerce une force de rappel ayant tendance à le ramener à sa longueur de repos, proportionnelle à son allongement  $\ell - \ell_0 (> 0)$  et à  $k$  :

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)(-\vec{e}_x) = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x.$$

Si le ressort est comprimé (sa longueur est  $\ell$ ), il exerce encore une force de rappel ayant tendance à le ramener à sa longueur de repos, proportionnelle à son allongement  $\ell_0 - \ell (> 0)$  et à  $k$  :<sup>5</sup>

$$\vec{F} = k(\ell_0 - \ell)\vec{e}_x = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x.$$

Ainsi, **dans tous les cas**, avec  $\vec{e}_x$  un vecteur unitaire dirigé dans le sens d'un allongement du ressort, on a une expression unique :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x \\ &= -kx\vec{e}_x \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F} \text{ force de rappel élastique}^5 \text{ (N)} \\ k \text{ raideur (N} \cdot \text{m}^{-1}) \\ x = \ell - \ell_0 \text{ allongement (m)} \end{array} \right.$$

### A.3.4. Force de frottement solide, réaction du support

Lors du contact entre deux solides, donc lors du contact entre un point matériel M(m) et un solide S, ce dernier exerce sur le point M une force  $\vec{R}$  appelée réaction, composée d'une réaction normale (à la surface de contact)  $\vec{N}$ , et d'une réaction tangentielle  $\vec{T}$  (dite force de frottement) vérifiant les **lois de Coulomb** (fig. 4) :

- s'il y a glissement de M sur S :  $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement<sup>6</sup> ;  $\vec{T}$  est opposée à la vitesse du point M par rapport à S (c'est-à-dire par rapport à un référentiel lié au solide S) ;
- s'il n'y a de glissement de M sur S ( $\vec{v} = \vec{0}$ ) :  $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ .

**Remarques :**

- En posant  $\vec{N} = N\vec{u}$  ( $\vec{u}$  vecteur unitaire dirigé de S vers M, perpendiculaire à la surface de contact) :
  - le contact se maintient si  $N > 0$  ;
  - le contact cesse si  $N = 0$ .
- En l'absence de frottement ( $f = 0$ ), la réaction du solide S est normale, c'est-à-dire  $\vec{R} = \vec{N}$  ; elle reste donc à chaque instant perpendiculaire au support.

### A.3.5. Force de frottement fluide

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide)<sup>7</sup>, donc lorsqu'un point matériel se déplace dans un fluide, il est soumis à une force de frottement fluide  $\vec{F}$  s'opposant au mouvement :

- $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ ,

si  $\|\vec{v}\|$  est faible ( $\lambda$  est une caractéristique du fluide et des dimensions de l'objet se déplaçant dans le fluide) ;

8. Pour les déplacements de tous les jours (vélo, voiture...) les forces qui interviennent sont celles proportionnelles au carré de la vitesse  $\vec{F} = -K\|\vec{v}\|\vec{v}$  mais la résolution mathématique des problèmes est alors délicate ; on considère donc souvent que les forces sont proportionnelles à la vitesse :  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ .

9. Pour plus de renseignements, on se reportera au cours de mécanique des fluides.

10. La poussée d'Archimède est presque toujours négligeable dans l'air devant le poids (si l'objet en mouvement est plein) ; en revanche, elle n'est plus négligeable dans les liquides.

11. La résultante  $\vec{F}$  de plusieurs forces  $\vec{F}_i$  est :  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ .

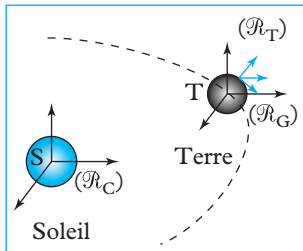


Fig. 5. Référentiels usuels.

12. Le PFD permet de prévoir l'évolution du mouvement (trajectoire) du point matériel si est connue à chaque instant, ou permet de connaître la résultante des forces  $\vec{F}$  à chaque instant si la trajectoire est connue.

13. La masse  $m$  du point matériel  $M$  est supposée constante à chaque instant.

$$\bullet \quad \vec{F} = -K\|\vec{v}\|\vec{v},$$

si  $\|\vec{v}\|$  est plus élevée ( $K$  est aussi une caractéristique du fluide et des dimensions de l'objet se déplaçant dans le fluide).<sup>8, 9</sup>

### A.3.6. Autres forces

Il existe d'autres types de forces comme les forces électromagnétiques ou la poussée d'Archimède<sup>10</sup> qui seront étudiées dans les autres cours (électromagnétisme, thermodynamique, statique des fluides).

## B. Les lois de Newton

### B.1. Première loi de Newton : principe d'inertie

#### Loi 1

##### Principe d'inertie

Il existe des référentiels galiléens  $\mathcal{R}_g$  dans lesquels tout point matériel isolé, est en mouvement rectiligne uniforme ( $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$ ) (ou au repos si  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ ).

Un point matériel isolé est un point isolé de toute influence dans l'espace qui ne subit aucune force ; comme ceci est impossible à réaliser (un point matériel n'est jamais seul dans l'espace), on utilisera comme modèle du point matériel isolé, le point matériel pseudo-isolé soumis à des forces dont la résultante<sup>11</sup> est nulle (par exemple, un mobile sur coussin d'air).

Cette loi postule l'existence de référentiels galiléens. Selon le cas et le degré de finesse souhaité, on pourra considérer comme galiléen l'un des référentiels suivants (fig. 5).

#### – Référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$

- origine : le centre de gravité du système solaire (quasiment centre  $S$  du Soleil) ;
- trois axes : trois étoiles « fixes » très éloignées.

#### – Référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$

- origine centre de la Terre  $T$  ;
- trois axes identiques aux axes du référentiel de Copernic.

– **Référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$** , lié à la surface de la Terre (appelé référentiel du laboratoire).

Ces trois référentiels sont, dans l'ordre suivant :  $\mathcal{R}_C$ ,  $\mathcal{R}_G$ ,  $\mathcal{R}_T$  « de moins en moins galiléen ».

### B.2. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

#### Loi 2

##### PFD

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à un ensemble de forces dont la somme est  $\vec{F}$  vérifie<sup>12, 13</sup> :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F} \quad \left| \begin{array}{l} m \text{ masse (kg)} \\ \vec{a}(M) \text{ accélération (m} \cdot \text{s}^{-2}) \\ \vec{F} \text{ force (N)} \end{array} \right.$$



14. Si le point matériel est isolé (ou pseudo-isolé) alors  $\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{et donc } \left( \frac{d\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0},$$

c'est-à-dire  $\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$  ; la quantité de mouvement du point matériel  $\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}$  se conserve au cours du temps ainsi que sa vitesse  $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$  ; on retrouve le principe d'inertie (1<sup>re</sup> loi de Newton).

15. Il faut faire le bilan de toutes les forces appliquées au point matériel sans oublier la réaction.

En définissant la quantité de mouvement (ou résultante cinétique)  $\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}$  du point matériel  $\mathbf{M}(m)$ , on peut écrire le PFD sous la forme<sup>14, 15</sup> :

$$\left( \frac{d\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}.$$

### Principe fondamental de la statique (PFS)

Si un point matériel est en équilibre dans  $\mathcal{R}_g$ , c'est-à-dire  $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$  alors  $\vec{F} = \vec{0}$ .



La réciproque n'est pas vraie : si  $\vec{F} = \vec{0}$ , le point matériel peut avoir un mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}_g$  (principe d'inertie) et n'est en équilibre que si sa vitesse est nulle à un instant quelconque (donc à tout instant).

## B.3. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

### Loi 3

#### Principe des actions réciproques

Si le point matériel A exerce sur le point matériel B une force  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ , alors B exerce sur A une force  $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$  ; ces deux forces sont portées par la droite (AB) (fig. 6).

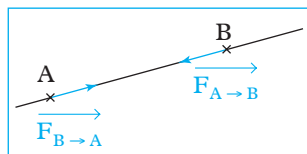


Fig. 6. Principe des actions réciproques.

## C. Généralisation à un système

### C.1. Système matériel fermé

#### Définition 1

Un système matériel fermé  $\mathcal{S}$  est un système qui contient à tout instant les mêmes éléments matériels ; la masse de  $\mathcal{S}$  est constante au cours du temps.

Dans la suite, nous étudierons uniquement des systèmes fermés : **un solide est un exemple de système fermé.**

### C.2. Masse d'un système matériel

Il existe différents types de répartition de masse dans un système matériel :

#### • discrète

le système  $\mathcal{S}$  est constitué de points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$  (fig. 7).

La masse (totale)  $m$  du système  $\mathcal{S}$  est :

$$m = \sum_i m_i.$$

#### • continue

le système  $\mathcal{S}$  est constitué d'éléments de volume  $dV(\mathbf{M})$ , centrés sur les points  $\mathbf{M}$ , de masse  $dm(\mathbf{M})$ , répartis à l'intérieur d'un volume  $V$  (fig. 8). La masse (totale)  $m$  du système  $\mathcal{S}$  est :

$$m = \iiint_{\mathbf{M} \in V} dm(\mathbf{M}).$$

Nous utiliserons, dans la suite de cet ouvrage, l'équivalence entre une somme discrète et une somme continue (intégrale) ; ainsi, nous écrirons par abus :

$$\iiint_{\mathbf{M}} df(\mathbf{M}) = \sum_i f_i.$$

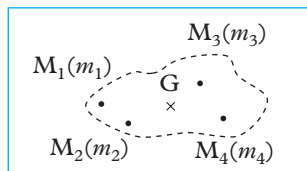


Fig. 7. Répartition discrète de masse.

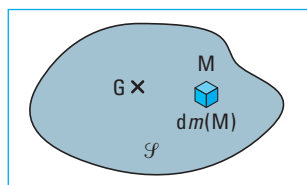


Fig. 8. Répartition continue de masse.

Les démonstrations seront souvent effectuées avec la somme discrète et étendue au cas de l'intégrale.

Ainsi, pour définir la masse d'un système matériel, on pourra écrire, si la répartition de masse est volumique :

- $m = \iiint_{M \in V} dm(M)$  ;
- ou  $m = \sum_i m_i$  si la répartition de masse est discrète.

### C.3. Centre d'inertie

#### Définition 2

Le centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système  $\mathcal{S}$  est le point G (fig. 9) défini par :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \iiint_M dm(M) \overrightarrow{GM} = \vec{0}.$$

En introduisant un point O quelconque, on a :

$$\sum_i m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \sum_i m_i \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} ;$$

ainsi :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \text{ou} \quad m \overrightarrow{OG} = \iiint_M dm(M) \overrightarrow{OM}.$$

Cette dernière expression est une définition opérationnelle pour la détermination de la position de G.

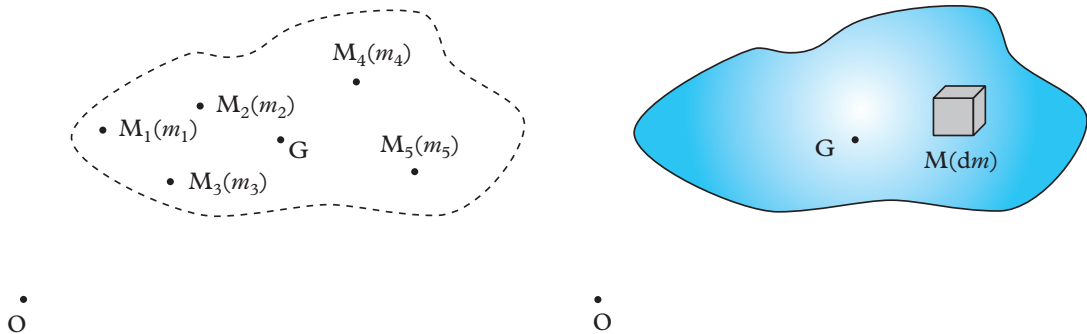


Fig. 9. Centre d'inertie d'un système matériel discret / d'un solide.

### C.4. Résultante cinétique

#### Définition 4

La résultante cinétique (ou quantité de mouvements)  $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$  <sup>16</sup> du système  $\mathcal{S}$  en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est la somme des quantités de mouvements élémentaires de chacun de ses points (fig. 10) :

$$\begin{aligned} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{p}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\vec{p}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M dm(M) \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	résultante cinétique (kg · m · s <sup>-1</sup> )
$m_i$	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse (m · s <sup>-1</sup> )

$\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	résultante cinétique (kg · m · s <sup>-1</sup> )
$dm(M)$	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse (m · s <sup>-1</sup> )

**16.** Si  $\mathcal{S}$  est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), la résultante cinétique de  $\mathcal{S}$  s'obtient par sommation des résultantes cinétiques de chaque sous système.

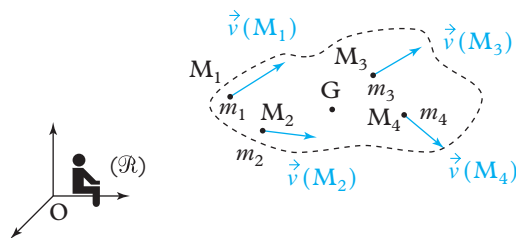


Fig. 10. Ensemble de points matériels et leurs vitesses.

En écrivant :

$$\vec{v}(M_i)_{/R} = \left( \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \right)_{/R} = \left( \frac{d(\vec{OG} + \vec{GM})}{dt} \right)_{/R} = \left( \frac{d\vec{OG}}{dt} \right)_{/R} + \left( \frac{d\vec{GM}}{dt} \right)_{/R},$$

on obtient :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/R} = \sum_i m_i \vec{v}(G)_{/R} + \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{GM} \right)_{/R},$$

ce qui se simplifie, en remarquant que le second terme de la somme précédente est nul par définition de G :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/R} = m \vec{v}(G)_{/R}.$$

### Propriété très importante :

La résultante cinétique d'un système matériel  $\mathcal{S}$  est la quantité de mouvement d'un point matériel fictif placé en G, possédant la masse totale  $m$  du système  $\mathcal{S}$  (fig. 11) :

$$\vec{p}(\mathcal{S})_{/R} = m \vec{v}(G)_{/R}.$$

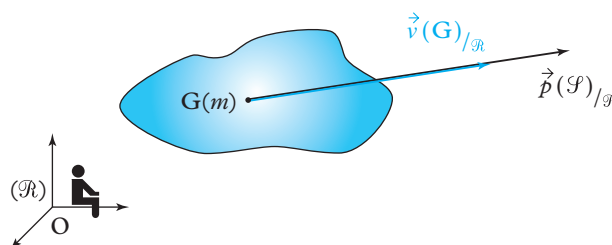


Fig. 11. Résultante cinétique d'un solide ( $m > 1$ ).

## C.5. Théorème de la résultante cinétique ou théorème du centre de masse

On considère un système matériel  $\mathcal{S}$  en mouvement dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . On suppose, pour la démonstration, que le système est composé d'un ensemble de points matériels (fig. 12) ; si le système est continu, on suppose qu'il est décomposable en un ensemble d'éléments de matière quasi ponctuels de volume  $dV(M)$ , de masse  $m = dm(M)$  centrés sur les points  $M_i$  et que ces éléments de matière sont assimilables à des points matériels.<sup>17</sup>

**17.** L'assimilation des éléments quasi ponctuels de matière en points matériels n'est pas toujours possible (ex. : pour les matériaux diélectriques) car il faut pouvoir considérer que chaque point matériel n'a aucun mouvement de rotation (interne) propre. Si la décomposition n'est pas possible, on admettra alors les théorèmes de la dynamique, qui sont vérifiés en pratique pour tous les types de systèmes matériels !

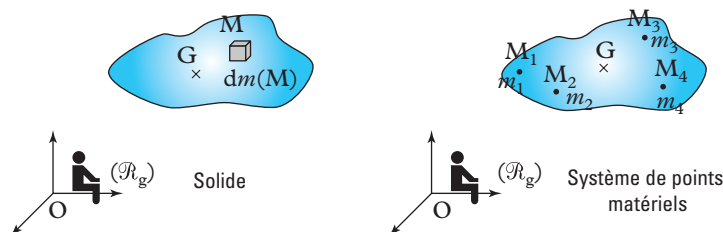


Fig. 12. Décomposition d'un système à répartition de masse en système d'éléments quasi ponctuels et système de points matériels.

Appliquons alors le principe fondamental de la dynamique (2<sup>e</sup> loi de Newton) à chaque élément quasi ponctuel (point  $M_i$ ) composant le système :

$$\left( \frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

$\vec{F}_{e \rightarrow i}$  est la somme des forces extérieures au système  $\mathcal{S}$  appliquées au point  $M_i$  et  $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$  est la somme des forces intérieures au système  $\mathcal{S}$  appliquées au point  $M_i$  par le reste du système.

En sommant sur tout le système, on obtient :

$$\sum_i \left( \frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

Expression dans laquelle :

$$\bullet \sum_i \left( \frac{d\vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{p}(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right) \right]_{/\mathcal{R}_g} = \left[ \frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_g} \text{ est la dérivée}$$

par rapport au temps dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  de la résultante cinétique (ou quantité de mouvements) du système matériel  $\mathcal{S}$  ;

$$\bullet \sum_i \vec{F}_{e \rightarrow i} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est la résultante des actions extérieures appliquées à } \mathcal{S} ;$$

$$\bullet \text{ la somme } \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{F}_{\text{int}} \text{ est la résultante des actions intérieures à } \mathcal{S} : \text{ en}$$

regroupant par deux les termes de la somme, sous la forme :  $\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j}$ , on a d'après le principe des actions réciproques (3<sup>e</sup> loi de Newton) :

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0} \text{ et donc } \vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}.$$

$$\text{On obtient ainsi : } \left( \frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}},$$

qui est la généralisation du principe fondamental de la dynamique appliqué à un point matériel ; comme on a réussi à la démontrer, cette loi est un théorème.

#### Théorème

##### Théorème de la résultante cinétique (TRC)

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la somme des forces extérieures (ou résultante des actions mécaniques extérieures) appliquées à un système matériel fermé  $\mathcal{S}$  est égale à la dérivée par rapport au temps dans  $\mathcal{R}_g$  de la résultante cinétique du système  $\mathcal{S}$  :

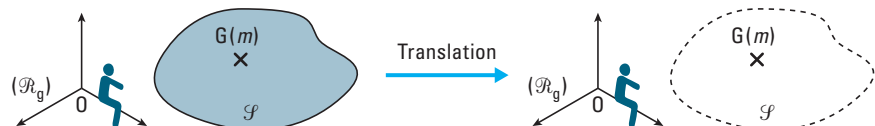
$$\left( \frac{d\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \left| \begin{array}{ll} \vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} & \text{résultante cinétique (kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ t & \text{temps (s)} \\ \vec{F}_{\text{ext}} & \text{résultante des actions mécaniques extérieures (N)} \end{array} \right.$$

Comme  $\vec{p}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g}$ , on a aussi la relation :  $m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$ .

**Cas particulier :** dans le cas où  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$  (système isolé ou pseudo-isolé), la résultante cinétique du système se conserve au cours du temps.

**Remarque très importante :** on voit donc que l'étude dynamique d'un solide  $\mathcal{S}$  de masse  $m$  en translation dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  se réduit à l'utilisation du PFD appliqué :

- à son centre d'inertie  $G$  (point matériel fictif),
- affecté de toute la masse  $m$  du solide ( $\mathcal{S}$ ).



## D. Bilan et exemples d'applications

### D.1. Bilan

Le synoptique de la fig. 13 permet de comprendre où interviennent les forces sur le schéma cinématique (voir chapitre 1).

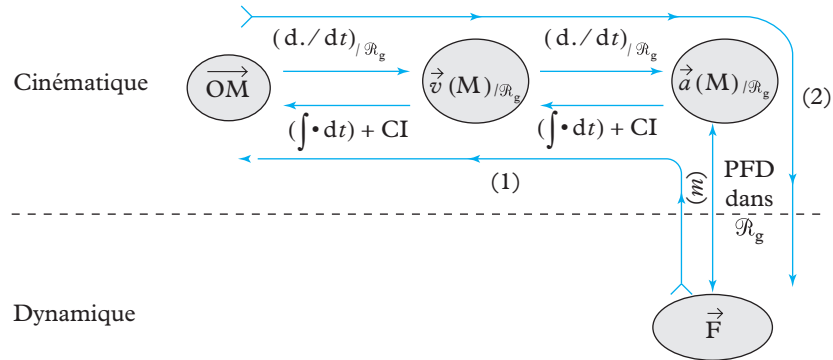


Fig. 13. Synoptique bilan.

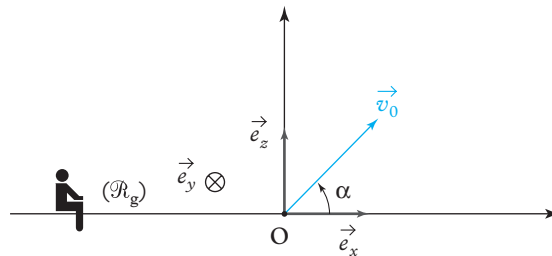
Par exemple, si les forces appliquées au point matériel  $M(m)$  sont connues, la résultante  $\vec{F}$  est connue, donc (si la masse  $m$  est connue) l'accélération  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}$  du point  $M$  est connue ; on peut remonter – trajet (1) – à vitesse  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$  (si une condition initiale sur la vitesse est connue) et à la position  $\overrightarrow{OM}$  à chaque instant donc à la trajectoire (si une condition initiale sur la position est connue).

Si le mouvement  $(\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}, \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g})$  est connu, on peut déterminer les forces appliquées au point  $M$  – trajet (2) –.

### D.2. Exemples d'application

#### Application 2 Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse  $m$  assimilé à un point matériel  $M$ , est lancé dans l'air avec une vitesse  $\vec{v}_0$  depuis le point  $O$ , origine du repère  $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen. La vitesse  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale  $(O ; \vec{e}_x)$  dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ .



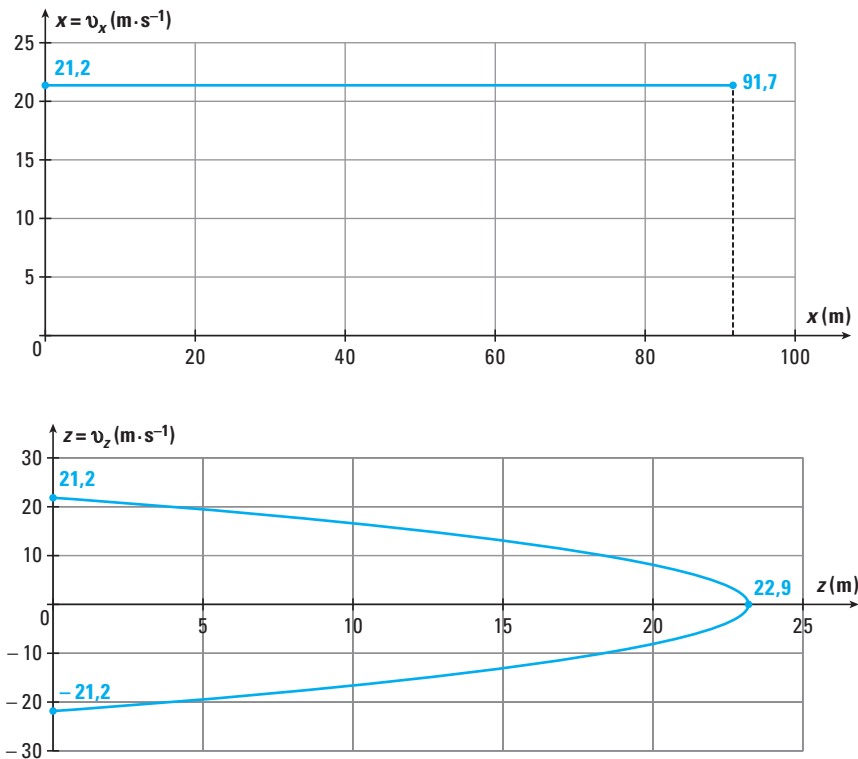
Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est supposé uniforme.

$(O ; \vec{e}_z)$  est la verticale ascendante du lieu.

On néglige tout frottement.

- 1) Déterminer les expressions de  $x(t)$  et  $z(t)$ , coordonnées du point  $M$  dans  $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
- 2) En déduire l'équation de la trajectoire.
- 3) Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte).
- 4) Déterminer la portée  $D$  (distance entre  $O$  et le point de chute sur le plan horizontal  $z = 0$ ). Pour quel angle  $\alpha$  la portée  $D$  est-elle maximale ? Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

5) On donne les portraits de phase sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  d'un tir balistique sans frottement avec  $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



a) Indiquer la valeur  $\alpha$  de l'angle de tir.

b) Indiquer la flèche de la trajectoire.

c) Indiquer la portée du tir.

Données :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $m = 1 \text{ kg}$ .

### Solution

1) • **Système étudié** : obus sphérique assimilé à un point matériel  $M(m)$ .

• **Référentiel galiléen d'étude** :  $\mathcal{R}_g(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

• **Bilan des forces appliquées au point M** :

$$\text{poids } \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z.$$

• Application du PFD au point M dans  $\mathcal{R}_g$  :

$$m\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P}.$$

$$\text{Or } \vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}, \text{ on a donc } m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{g}.$$

En simplifiant par  $m$ , on obtient :

$$\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{g} \quad (1)$$

Or  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  (la pesanteur est verticale vers le bas).

Par ailleurs  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ ,

$$\text{donc } \vec{v} = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\text{et } \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

En projetant l'équation (1) sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ , on obtient :

– projection sur  $\vec{e}_x$  :  $\ddot{x}(t) = 0$

donc  $\dot{x}(t) = \text{cte} = v_0 \cos(\alpha)$

et  $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + \text{cste}$

Or  $x(t=0) = 0$  donc  $\text{cste} = 0$

On obtient :  $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$

– projection sur  $\vec{e}_z$  :  $\ddot{z}(t) = -g$

donc  $\dot{z}(t) = -gt + \text{cste}$

Or  $\dot{z}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$  donc  $\text{cste} = v_0 \sin(\alpha)$

donc  $\dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha)$

et  $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + \text{cste}$

Or  $z(t=0) = 0$  donc  $\text{cste} = 0$

On obtient :  $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t$

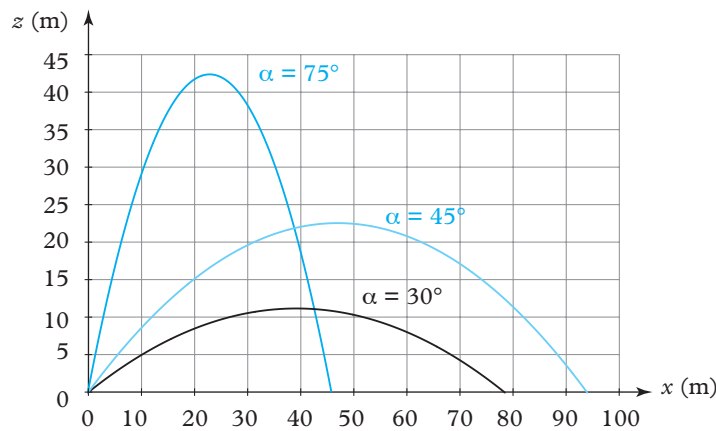
2) L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre  $x(t)$  et  $z(t)$  :

$$z = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \times \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

soit : 
$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

La trajectoire est un arc de parabole.

La figure suivante présente différentes trajectoires obtenues pour différents angles  $\alpha$ .



3) La flèche est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule :  $v_z = -gt + v_0 \sin \alpha$  s'annule pour  $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ .

🌀 L'unité de  $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$  est :  $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{s}$  homogène à  $t_1$ .

Ainsi :

$$x_{\text{flèche}} = x(t_1) = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$$

et  $z_{\text{flèche}} = z(t_1) = -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ , soit  $z_{\text{flèche}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ .

🌀 L'unité de  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$  est :  $\frac{(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m}$  homogène à  $z_{\text{flèche}}$ .



4) La portée est atteinte lorsque  $z = 0$  ; on obtient cette portée  $D$  en résolvant l'équation :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0 \quad \text{soit} \quad x \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right) = 0.$$

La solution  $x = 0$  correspond au point origine, ce n'est donc pas celle cherchée.

L'autre solution est la bonne :

$$D = x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = 2x_{\text{flèche}}$$

$D$  est extremum si  $\frac{dD}{d\alpha} = 0$  soit  $\cos(2\alpha) = 0$ , donc  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  soit :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

**A.N.**  $D = \frac{v_0^2}{g} = 91,7 \text{ m}$  ;  $z_{\text{flèche}} = 22,9 \text{ m}$  et  $x_{\text{flèche}} = 45,9 \text{ m}$ .

5) a) L'équation de mouvement s'écrit  $\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/R_g} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$  donc la vitesse sur  $\vec{e}_x$  est constante et vaut la valeur initiale, c'est-à-dire :

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \text{cste} = v_x(t) = 0 = v_0 \cos \alpha$$

Le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$  nous indique :

$$v_x = 21,2 = v_0 \cos \alpha = 30 \cos \alpha$$

donc  $\alpha = 45^\circ$ .

b) La flèche de la trajectoire correspond au moment où l'altitude est maximale, c'est-à-dire  $\dot{z} = 0$ .

On utilise le portrait de phase sur  $\vec{e}_z$  au moment où  $\dot{z} = v_z = 0$  pour lire  $z = 22,9 \text{ m}$ .

La flèche de la trajectoire est donc  $z_{\text{flèche}} = 22,9 \text{ m}$ .

c) La portée du tir correspond aux portraits de phase quand  $z = 0$ , c'est-à-dire « la fin des portraits de phase ». On utilise le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$  pour lire :

$$x_{\text{fin}} = 91,7 \text{ m}.$$

La portée du tir est donc  $D = 91,7 \text{ m}$ .

### Application 3 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

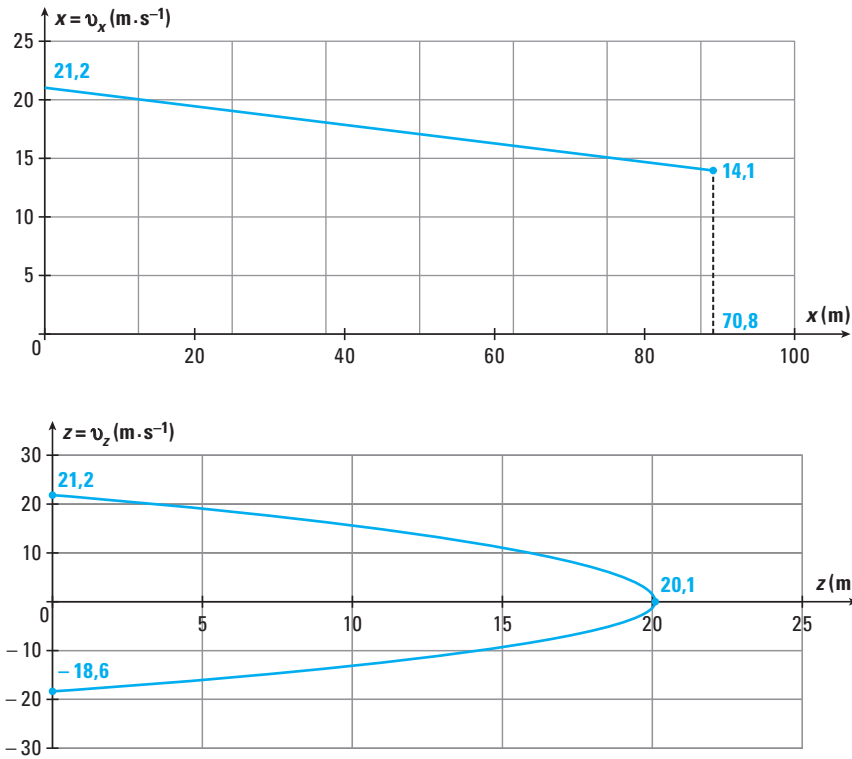
On reprend le problème de l'application 2 en supposant que l'obus est soumis à une force de frottement (résistance de l'air) du type :  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  en plus de son poids.

- 1) Déterminer les composantes ( $v_x(t)$  ;  $v_z(t)$ ) du vecteur vitesse  $\vec{v}$  à chaque instant.
- 2) Déterminer les composantes ( $x(t)$  ;  $z(t)$ ) du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  à chaque instant.
- 3) Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.
- 4) Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.
- 5) Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.
- 6) Tracer l'allure de la trajectoire.
- 7) À l'aide d'une calculatrice programmable, d'un tableur, etc., programmer une résolution numérique de l'équation différentielle permettant d'obtenir numériquement :

- $v_x(t) = \dot{x}(t)$
- $v_z(t) = \dot{z}(t)$
- $x(t)$
- $z(t)$

Données :  $\alpha = 45^\circ$  ;  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $\lambda = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

8) On donne les portraits de phase en «  $x$  » et «  $y$  » d'un tir balistique avec frottement proportionnel à  $v$  avec  $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $m = 1 \text{ kg}$ .



- Déterminer l'angle  $\alpha$  du tir.
- Indiquer la flèche de la trajectoire.
- Indiquer la portée du tir.
- En montrant que le portrait de phase sur  $\vec{e}_z$  est une droite, déterminer numériquement  $\frac{\lambda}{m}$  donc  $\lambda$ .

### Solution

1) On applique le PFD dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  à ce point matériel  $M(m)$  représentant l'obus :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F} \quad \text{soit} \quad m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$$

qui s'écrit  $\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{\lambda}{m} \vec{v} = \vec{g}$

soit en appelant  $\tau = \frac{m}{\lambda} : \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{g}$ .

Comme  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$

alors  $\vec{v} = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + z\vec{e}_z)_{/\mathcal{R}_g}$

De même  $\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z$ .

L'équation différentielle  $\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{g}$  s'écrit donc :

$$\frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z + \frac{1}{\tau}(v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z) = -g\vec{e}_z.$$

- En projection sur  $\vec{e}_x$ , elle donne :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau}v_x = 0$$

soit

Or

donc

$$v_x(t) = \text{cte} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha \quad \text{donc} \quad \text{cte} = v_0 \cos \alpha$$

$$\mathbf{v}_x(t) = v_0 \cos(\alpha) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

• En projection sur  $\overrightarrow{e_z}$ , elle donne :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z = -g$$

$$\text{soit} \quad v_z(t) = \text{cte} e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g$$

$$\text{Or} \quad v_z(t=0) = v_0 \sin \alpha \quad \text{donc} \quad \text{cte} = v_0 \sin \alpha + \tau g$$

$$\text{donc} \quad \mathbf{v}_z(t) = (v_0 \sin(\alpha) + \tau g) e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g.$$

2) On vient d'obtenir  $v_x(t)$  et  $v_z(t)$ . Or, on a :

$$\bullet \dot{x}(t) = v_x(t)$$

$$\bullet \dot{z}(t) = v_z(t)$$

donc en intégrant une nouvelle fois « sur  $\overrightarrow{e_x}$  et sur  $\overrightarrow{e_z}$  », on obtient :

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{donc} \quad x(t) = -\tau v_0 \cos(\alpha) e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cste}$$

$$\text{Or} \quad x(t=0) = 0 \quad \text{donc} \quad \text{cste} = \tau v_0 \cos(\alpha)$$

$$\text{donc} \quad \mathbf{x}(t) = -\tau v_0 \cos(\alpha) (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$$

$$\text{De même} \quad \dot{z}(t) = (v_0 \sin(\alpha) + \tau g) e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g$$

$$\text{donc} \quad z(t) = -\tau (v_0 \sin(\alpha) + \tau g) e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g t + \text{cste}$$

$$\text{Or} \quad z(t=0) = 0 \quad \text{donc} \quad \text{cte} = \tau (v_0 \sin(\alpha) + \tau g)$$

$$\text{donc} \quad \mathbf{z}(t) = -\tau (v_0 \sin(\alpha) + \tau g) (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) - \tau g t$$

3) La flèche de la trajectoire est obtenue au moment  $t_1$  où  $v_z(t_1) = 0$ , soit :

$$(v_0 \sin \alpha + \tau g) e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \tau g \quad \text{ce qui donne} \quad e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha}$$

Alors  $t_1 = \tau \ln \left( \frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g} \right)$  ; en reportant dans  $z(t)$  :

$$\begin{aligned} z_{\text{flèche}} = z(t_1) &= -\tau (v_0 \sin \alpha + \tau g) \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right) - \tau^2 g \ln \left( \frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g} \right) \\ &= \tau v_0 \sin \alpha - \tau^2 g \ln \left( \frac{\tau g + v_0 \sin \alpha}{\tau g} \right) \end{aligned}$$

$$\text{A.N.} \quad z_{\text{flèche}} \approx 20,1 \text{ m.}$$

$$\text{La position de la flèche est : } x_{\text{flèche}} = x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right).$$

$$\text{A.N.} \quad x_{\text{flèche}} \approx 37,7 \text{ m.}$$



On constate que l'abscisse de la flèche est plus petite que dans le cas où il n'y a pas de frottement, ce qui est normal ; de la même façon, l'altitude maximale atteinte est plus faible.

4) Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,  $x(t) \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha$  qui correspond à une asymptote verticale.

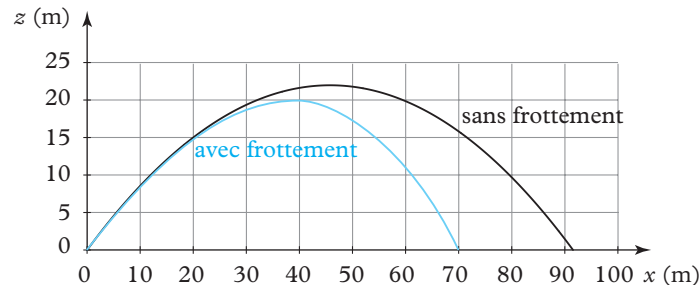
$$\text{A.N.} \quad x_{\text{lim}} = x(t \rightarrow +\infty) \approx 212,1 \text{ m.}$$

$$5) \text{ Lorsque } t \rightarrow +\infty, \begin{cases} v_x(t) \rightarrow 0 \\ v_z(t) \rightarrow -\tau g \end{cases}$$

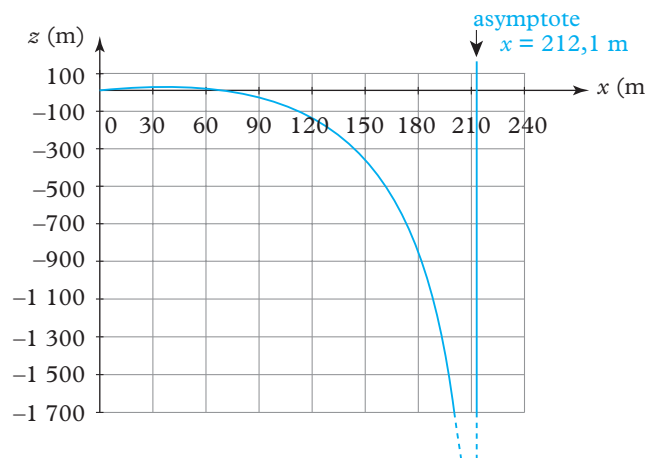
La vitesse tend vers une limite verticale de norme  $\tau g$  :  $\overrightarrow{v}_{\text{lim}} = -\tau g \overrightarrow{e_z}$ .

$$\text{A.N.} \quad v_{\text{lim}} \approx 98,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

6) La trajectoire est tracée ci-dessous. On retrouve une flèche inférieure au cas du tir sans frottement, mais on ne voit pas l'asymptote verticale qui est atteinte pour une position  $x = 212,1$  m, ce qui est très supérieur à la portée :  $D \approx 70$  m.



Si on prolongeait les courbes, on verrait apparaître l'asymptote  $x = 212,1$  m.



7) On reprend les projections sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  de l'équation différentielle du mouvement.

- $\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x = 0$ ,
- $\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z = -g$ , avec  $\tau = \frac{m}{\lambda}$ .

En utilisant une calculatrice programmable, un tableur (Excel) ou tout autre langage de programmation : on peut programmer rapidement une résolution numérique de cette équation par la méthode d'Euler, qui consiste à approcher la dérivée  $\frac{dv_x}{dt}$  par  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$  ; ainsi le système formé des deux équations différentielles  $\frac{dv_x}{dt}$  et  $\frac{dv_z}{dt}$  permet de calculer  $v_x(t + \Delta t)$  et  $v_z(t + \Delta t)$  à partir de  $v_x(t)$  et  $v_z(t)$ .

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{\lambda}{m} v_x \Delta t \\ v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - \frac{\lambda}{m} v_z \Delta t - g \Delta t \end{cases}$$

À partir des conditions initiales sur la vitesse ( $v_x(t = 0) = v_0 \cos \alpha$  et  $v_z(t = 0) = v_0 \sin \alpha$ ), on obtient, de proche en proche (pas d'avancement dans le temps :  $\Delta t$ ), les valeurs approchées de  $v_x$  et  $v_z$  au cours du temps.

On peut de la même manière, connaissant à chaque instant (plus précisément instant multiple du pas de calcul  $\Delta t$ , la vitesse, déterminer la position de M :

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t \\ z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t) \Delta t \end{cases}$$

équations obtenues à partir de  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ .

**Feuille Excel – Calcul fait avec  $\Delta t = 0,01$  s :**

«  $v_0 \cos \alpha$  »    «  $v_0 \sin \alpha$  »    «  $x_0 = 0$  »    «  $z_0 = 0$  »

	A	G	H	I	J
1					
2		avec frottement proportionnel à V			
3	t	Vx	Vz	x	z
4	0.000	21.213	21.213	0.000	0.000
5	0.010	21.192	21.094	0.212	0.212
6	0.020	21.171	20.975	0.424	0.423
7	0.030	21.150	20.856	0.636	0.633
8	0.040	21.128	20.737	0.847	0.841
9	0.050	21.107	20.618	1.059	1.049
10	0.060	21.086	20.500	1.270	1.255
11	0.070	21.065	20.381	1.480	1.460
12	0.080	21.044	20.263	1.691	1.664
13	0.090	21.023	20.145	1.902	1.866
14	0.100	21.002	20.026	2.112	2.068
15	0.110	20.981	19.908	2.322	2.268
16	0.120	20.960	19.790	2.532	2.467
17	0.130	20.939	19.673	2.741	2.665
18	0.140	20.918	19.555	2.951	2.862
19	0.150	20.897	19.437	3.160	3.057
20	0.160	20.876	19.320	3.369	3.252
21	0.170	20.855	19.203	3.578	3.445
22	0.180	20.835	19.086	3.786	3.637
23	0.190	20.814	18.968	3.994	3.828
24	0.200	20.793	18.851	4.203	4.017
25	0.210	20.772	18.735	4.411	4.206
26	0.220	20.751	18.618	4.618	4.393
27	0.230	20.731	18.501	4.826	4.580
28	0.240	20.710	18.385	5.033	4.765

Conditions initiales

«  $z(t + \Delta t) = z(t) + v_z \Delta t$  »  
= J18 + H18  $\times$  0,01

«  $x(t + \Delta t) = x(t) + v_x \Delta t$  »  
= D22 + B22  $\times$  0,25

«  $v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - y \times \Delta t$  »  
= I22 + G22  $\times$  0,01

$$\begin{aligned} \text{« } v_x(t + \Delta t) &= v_x(t) - \frac{\lambda}{m} v_x \Delta t \text{ »} & \text{« } v_z(t + \Delta t) &= v_z(t) - \frac{\lambda}{m} v_z \Delta t - g \Delta t \text{ »} \\ &= G18 - \frac{0,1}{1} \times G18 \times 0,01 & &= H24 - \frac{0,1}{1} \times H24 \times 0,01 - 9,81 \times 0,01 \end{aligned}$$

**8) a) La vitesse initiale est :**

- sur  $\vec{e}_x$   $v_x(t = 0) = v_0 \cos \alpha$  (pour  $x = 0$ )
- sur  $\vec{e}_z$   $v_z(t = 0) = v_0 \sin \alpha$  (pour  $z = 0$ ).

En utilisant le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$  et/ou sur  $\vec{e}_z$ , on obtient :

$$v_0 \cos \alpha = 21,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 \sin \alpha = 21,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{donc } \alpha = 45^\circ.$$

**b) La flèche de la trajectoire correspond au moment où l'altitude est maximale, c'est-à-dire  $\dot{z} = 0$ .**

On utilise le portrait de phase sur  $\vec{e}_z$  au moment où  $v_z = \dot{z} = 0$  pour lire  $z = 20,1$  m.

La flèche de la trajectoire est donc  $z_{\text{flèche}} = 20,1$  m.

 On constate que la flèche de la trajectoire est plus faible dans le cas où il y a du frottement, ce qui est normal.

**c) La portée du tir correspond aux portraits de phase quand  $z = 0$ , c'est-à-dire « la fin des portraits de phase ».**

On utilise le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$  pour lire :

$$x_{\text{fin}} = 70,8 \text{ m}.$$

La portée du tir est donc **D = 70,8 m.**

 On constate que la portée du tir est plus faible dans le cas où il y a du frottement, ce qui est normal.



La portée du tir a été obtenue de manière numérique. Il peut donc y avoir une certaine imprécision, qui dépend :  
 – de la méthode numérique utilisée (ici méthode d'Euler)  
 – du pas de calcul  $\Delta t$  utilisé (plus le pas de calcul est petit, plus la précision augmente, mais plus il y a de lignes de calculs dans le tableau Excel).

d) On reprend l'équation différentielle du mouvement sur  $\vec{e}_x$  :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x = 0$$

qui s'écrit :  $\frac{dv_x}{dx} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x = 0$

Or  $\frac{dx}{dt} = v_x$ , donc en simplifiant par  $v_x$  l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{dv_x}{dx} = -\frac{\lambda}{m}$$

Le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$  est donc bien une droite décroissante de pente  $-\frac{\lambda}{m}$ .

En utilisant les valeurs numériques indiquées sur le portrait de phase sur  $\vec{e}_x$ , on peut calculer la pente de la droite :

$$-\frac{\lambda}{m} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \frac{14,1 - 21,2}{70,8 - 0} = -0,1$$

$$\text{donc } \frac{\lambda}{m} = 0,1 \text{ s}^{-1}$$

Comme  $m = 1 \text{ kg}$ , on en déduit :  $\lambda = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

#### Application 4 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse

On reprend le problème de l'application 2 en supposant que l'obus est soumis à une force de frottement (résistance de l'air) du type :  $\vec{F} = -k\|\vec{v}\|\vec{v}$  en plus de son poids.

- 1) Écrire l'équation différentielle du mouvement et la projeter sur les axes  $(O ; \vec{e}_x)$  et  $(O ; \vec{e}_z)$ .
- 2) Résoudre numériquement cette équation différentielle et tracer l'allure de la trajectoire du point M.
- 3) Déterminer la portée et la flèche de cette trajectoire.
- 4) Existe-t-il une asymptote à cette trajectoire ? une vitesse limite ?

Données :  $m = 1 \text{ kg}$  ;  $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 45^\circ$  ;  $k = 645 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ .

#### Solution

1) Le PFD appliqué dans  $\mathcal{R}_g$  au point matériel M( $m$ ) donne :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k\|\vec{v}\|\vec{v}, \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt}_{/\mathcal{R}_g} = \vec{g} - \frac{k}{m}\|\vec{v}\|\vec{v}.$$

• En projection sur  $\vec{e}_x$  :  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_x$ .

• En projection sur  $\vec{e}_z$  :  $\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_z$ .

2) En utilisant une calculatrice programmable, un tableur (Excel) ou tout autre langage de programmation, on peut programmer rapidement une résolution numérique de cette équation par la méthode d'Euler, qui consiste à approcher la dérivée  $\frac{dv_x}{dt}$  par  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$  ; ainsi le système formé des deux équations différentielles  $\frac{dv_x}{dt}$  et  $\frac{dv_z}{dt}$  permet de calculer  $v_x(t + \Delta t)$  et  $v_z(t + \Delta t)$  à partir de  $v_x(t)$  et  $v_z(t)$  :

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_x(t) \Delta t \\ v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_z(t) \Delta t \end{cases}$$

À partir des conditions initiales sur la vitesse ( $v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha$  et  $v_z(t=0) = v_0 \sin \alpha$ ), on obtient, de proche en proche (pas d'avancement dans le temps :  $\Delta t$ ), les valeurs approchées de  $v_x$  et  $v_z$  au cours du temps.

On peut de la même manière, connaissant à chaque instant (plus précisément à chaque instant multiple du pas de calcul  $\Delta t$ ) la vitesse, déterminer la position de M :

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t \\ z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t) \Delta t \end{cases}$$

équations obtenues à partir de  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ .

À l'aide de cette méthode, on obtient le tableau Excel ci-dessous qui permet (entre autres) de tracer la trajectoire.

**Feuille Excel – Calcul fait avec  $\Delta t = 0,01$  s :**

$$\begin{aligned} \text{« } \Delta t = 0,01 \text{ »} & \quad \text{« } v_0 \cos \alpha \text{ »} & \quad \text{« } v_0 \sin \alpha \text{ »} & \quad \|\vec{v}\| & \quad \text{« } x_0 = 0 \text{ »} \\ & = A4 + 0,01 & & & \text{« } z_0 = 0 \text{ »} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F
1						
2		avec frottement proportionnel à $V^2$				
3	t	Vx	Vz	$(Vx^2 + Vz^2)^{0.5}$	x	z
4	0.000	21.213	21.213	30.000	0.000	0.000
5	0.010	21.172	21.074	29.873	0.212	0.212
6	0.020	21.131	20.936	29.746	0.424	0.423
7	0.030	21.091	20.797	29.620	0.635	0.632
8	0.040	21.051	20.660	29.495	0.846	0.840
9	0.050	21.010	20.522	29.370	1.057	1.047
10	0.060	20.971	20.385	29.246	1.267	1.252
11	0.070	20.931	20.249	29.123	1.476	1.456
12	0.080	20.892	20.113	29.000	1.686	1.658
13	0.090	20.853	19.977	28.878	1.895	1.859
14	0.100	20.814	19.842	28.756	2.103	2.059
15	0.110	20.775	19.707	28.635	2.311	2.258
16	0.120	20.737	19.573	28.515	2.519	2.455
17	0.130	20.699	19.439	28.396	2.726	2.650
18	0.140	20.661	19.305	28.277	2.933	2.845
19	0.150	20.623	19.172	28.158	3.140	3.038
20	0.160	20.586	19.039	28.040	3.346	3.230
21	0.170	20.548	18.907	27.923	3.552	3.420
22	0.180	20.511	18.775	27.807	3.758	3.609
23	0.190	20.475	18.643	27.691	3.963	3.797
24	0.200	20.438	18.512	27.575	4.167	3.983
25	0.210	20.402	18.381	27.461	4.372	4.168
26	0.220	20.366	18.250	27.347	4.576	4.352
27	0.230	20.330	18.120	27.233	4.779	4.535
28	0.240	20.294	17.990	27.120	4.982	4.718

Conditions initiales

$$\text{« } z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t) \Delta t \text{ »} \\ = F18 + C18 \times 0,01$$

$$\text{« } x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t \text{ »} \\ = E22 + B22 \times 0,01$$

$$\begin{aligned} \text{« } v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{k}{m} \|\vec{v}\| v_x \Delta t \text{ »} \\ = B18 - \frac{6,45 \times 10^{-3}}{1} \times D18 = B18 \times 0,01 \end{aligned}$$

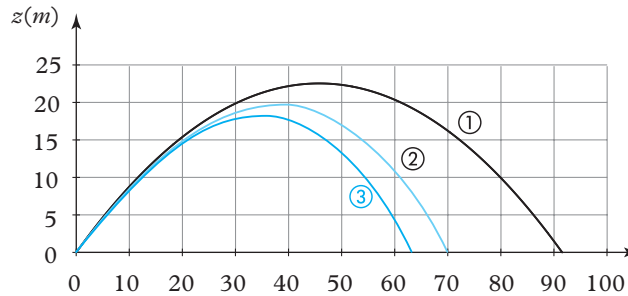
$$\begin{aligned} \text{« } x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \times \Delta t \text{ »} \\ = E22 + B22 \times 0,01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{« } v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - \frac{k}{m} \|\vec{v}\| v_z \Delta t \text{ »} \\ = C24 - \frac{6,45 \times 10^{-3}}{1} \times D24 = C24 \times 0,01 \end{aligned}$$



La trajectoire obtenue est donnée ci-après : courbe ③.

On a aussi indiqué la trajectoire sans frottement ① et avec frottement proportionnel à  $v$  ②.



3) Par lecture graphique, on lit la portée  $D \approx 62$  m et la flèche :  $x_{\text{flèche}} \approx 34,5$  m et  $z_{\text{flèche}} \approx 18,7$  m.

4) Si une vitesse limite existe, elle vérifie :

$$m\vec{g} = k\|\vec{v}\|\vec{v} \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

💡 L'unité de  $\sqrt{\frac{mg}{k}}$  est :  $\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui est homogène à  $v_{\text{lim}}$ .

**A.N.**  $v_{\text{lim}} = 38,99 \text{ ms}^{-1} \approx 39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



- Cette force de frottement est la plus proche de la réalité.
- La vitesse horizontale finit par s'annuler ( $v_x(t \rightarrow \infty) = 0$ ) ce qui indique la présence d'une asymptote verticale à la trajectoire.
- On ne voit pas l'asymptote verticale qui se trouve en  $x \approx 125,4$  m.

### Application 5 Pendule simple

On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible sans masse de longueur  $\ell = OM$ , suspendu en O, point fixe du référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ) supposé galiléen et d'une masse  $m$  assimilée à un point matériel  $M(m)$ . On repère la position du point M à l'aide des coordonnées polaires (d'axe (O ;  $\vec{e}_z$ )) (fig. 14).

On écarte la masse  $m$  d'un angle et on la lâche, sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$ .

1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2) Dans le cas de mouvements de faible amplitude ( $\theta$  faible), montrer que l'équation du mouvement est analogue à celle d'un oscillateur harmonique.

3) Toujours dans le cadre de mouvements de faible amplitude, déterminer l'équation du portrait de phase. Tracer l'allure du portrait de phase dans ces conditions.

**Remarque :** on pourra poser  $w_0 = \frac{g}{\ell}$ .

#### Solution

1) On applique le PFD au point M ( $m$ ) dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  :

- bilan des forces appliquées au point M :
  - poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_x$
  - tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$
- par ailleurs,  $\vec{OM} = \ell\vec{e}_r$

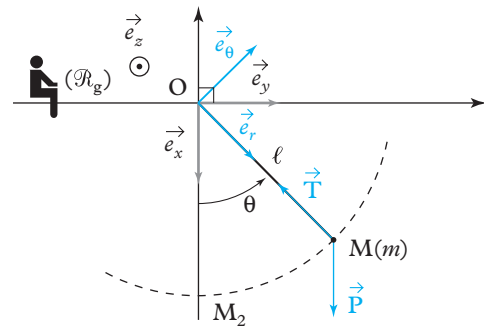


Fig. 14. Le pendule simple.

donc  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\ell \vec{e}_r)_{/\mathcal{R}_g}$   

$$= \ell \left( \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$

soit  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

 En effet, comme démontré dans le cours de cinématique

$$\left( \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

De même  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt}(\ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta)_{/\mathcal{R}_g}$   

$$= \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \ell \dot{\theta} \left( \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$
  

$$= \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \ell \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r)$$

soit  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ .

 En effet, comme démontré dans le cours de cinématique


$$\left( \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

L'équation du PFD s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}$$

soit :  $m(\ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta = mg \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - T \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta$

L'équation du mouvement peut s'obtenir en projetant l'équation vectorielle précédente sur  $\vec{e}_\theta$ , ce qui supprime l'inconnue T.

 En effet,  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$  car  $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$ .

En projection sur  $\vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$m(\ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta = mg \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - T \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta$$

soit :  $m \ell \underbrace{\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta}_{=1} - \ell \underbrace{\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_{=0} = mg \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - T \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_{=0}$

soit :  $m \ell \ddot{\theta} = mg \cos(\vec{e}_x, \vec{e}_\theta) = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$   

$$= -mg \sin \theta$$

En simplifiant par  $m$ , on obtient l'équation (différentielle) du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

2) Si  $\theta$  est petit alors  $\sin \theta \simeq \theta$  et l'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ .

En posant  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ , elle s'écrit  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ .

Cette équation est **analogue** à celle d'un **oscillateur harmonique**.

3) Dans le cadre de petits mouvements, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

En multipliant par  $\dot{\theta}$ , on obtient :

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta \dot{\theta} = 0.$$

En intégrant, on obtient :

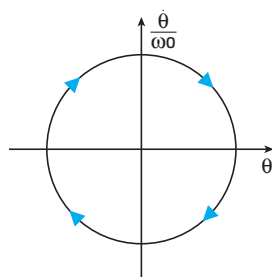
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = \text{cste}$$

soit  $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = \text{cste}.$

 Cette équation constitue ce qu'on appelle « une intégrale première du mouvement ».

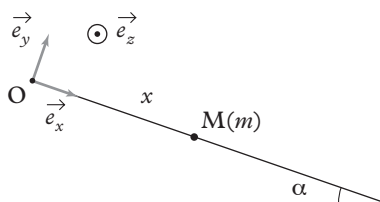
En divisant par  $\omega_0^2$ , on obtient l'équation du portrait de phase, qui est un cercle dans le plan  $\left(\theta ; \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)$  :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + \theta^2 = \text{cste}$$



### Application 6 Frottement sur un plan incliné

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse avec frottement (coefficient  $f$ ) sur un plan incliné. Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



1) Déterminer l'angle  $\alpha$  minimum pour que le mouvement soit possible (c'est-à-dire pour qu'il y ait glissement).

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement (quand les conditions d'inclinaison sont remplies).

### Solution

1) On va se placer dans le cas où le glissement est impossible. On va donc appliquer le PFS au point  $M(m)$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  :

- forces appliquées au système :
  - poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  (vertical vers le bas) ;
  - réaction du plan incliné :  $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ .

Le PFS donne  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

soit  $m\vec{g} - T\vec{e}_x + N\vec{e}_y = \vec{0}$ .

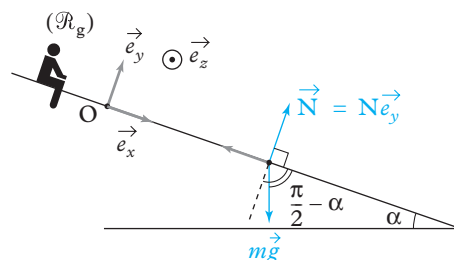
Pour déterminer les conditions de non-glissement, il nous faut  $T$  et  $N$ . Nous allons donc projeter l'équation vectorielle ci-dessous sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  :

- projection sur  $\vec{e}_x$  :  $m\vec{g} \cdot \vec{e}_x - T \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} + N \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} = 0$

soit  $mg \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_{\text{angle entre } \vec{g} \text{ et } \vec{e}_x}\right) - T = 0$ .

On obtient :

$$T = mg \sin \alpha.$$



- projection sur  $\vec{e}_y$  :  $m\vec{g} \cdot \vec{e}_x - T \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} + N \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} = 0$

$$\text{soit } mg \cos \left( \underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha}_{\substack{\text{angle entre} \\ g \text{ et } e_y}} \right) + N = 0$$

$$\text{soit } mg \cos(\pi - \alpha) + N = 0$$

On obtient :

$$\mathbf{N} = mg \cos \alpha$$

Il n'y a pas de glissement (donc de mouvement), tant que  $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ .

$$\text{Ici } \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) mg \sin \alpha < f mg \cos \alpha$$

soit

$$\tan \alpha < f$$

Ainsi tant que l'angle  $\alpha$  respectera la condition  $\tan \alpha < f$ , il n'y aura pas de glissement, donc pas de mouvement.



Ainsi, pour un coefficient de frottement  $f$  donné, il faudra augmenter suffisamment l'angle  $\alpha$  pour que le mouvement (le glissement) soit possible.

2) Pour écrire l'équation du mouvement (quand les conditions d'inclinaison sont remplies), on applique le PFD au point M ( $m$ ) dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x \quad \text{donc} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x.$$

$$\text{Le PFD s'écrit : } m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$

$$\text{soit } m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} - T\vec{e}_x + N\vec{e}_y \quad (1)$$

Par ailleurs, quand il y a glissement, on a :

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|, \quad \text{soit ici : } T = fN.$$

On projette l'équation (1) sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  :

$$- \text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_x - T$$

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T \quad (2)$$

$$- \text{sur } \vec{e}_y : m\ddot{x} \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y}_{=0} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_y - T \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y}_{=0} + N$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N$$

$$N = mg \cos \alpha$$



Comme le mouvement se développe uniquement sur  $\vec{e}_x$ , la réaction N est la même qu'il y ait mouvement (glissement) ou non.

$$\text{Comme } T = fN$$

$$\text{on a donc : } T = f mg \cos \alpha.$$

En reprenant l'équation (2) et en remplaçant T par son expression, on obtient l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha$$

soit en simplifiant par  $m$  :

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \left( 1 - \frac{f}{\tan \alpha} \right)$$



On retrouve la condition de la position 1) : en effet il y a mouvement si  $\ddot{x} > 0$  c'est-à-dire  $1 - \frac{f}{\tan \alpha} > 0$  soit  $\tan \alpha > f \dots$



Si on prend  $f = 0$  (pas de frottement), on retrouve  $\ddot{x} = g \sin \alpha$  qui est l'équation du mouvement sur un plan incliné sans frottement (voir Méthode 1).

# L'essentiel

## ✓ Lois de Newton

### • Loi 1 : principe d'inertie

Il existe des référentiels galiléens  $\mathcal{R}_g$  dans lesquels tout point matériel isolé, est en mouvement rectiligne uniforme ( $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$ ) (ou au repos si  $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ ).

### • Loi 2 : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , un point matériel M de masse  $m$ , soumis à un ensemble de forces dont la somme est  $\vec{F}$  vérifie :

$$m\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

$m$ masse (kg)
$\vec{a}(\text{M})$ accélération ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
$\vec{F}$ force (N)

### • Principe fondamental de la statique (PFS)

Si un point matériel est en équilibre dans  $\mathcal{R}_g$ , c'est-à-dire  $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ , alors  $\vec{F} = \vec{0}$ .

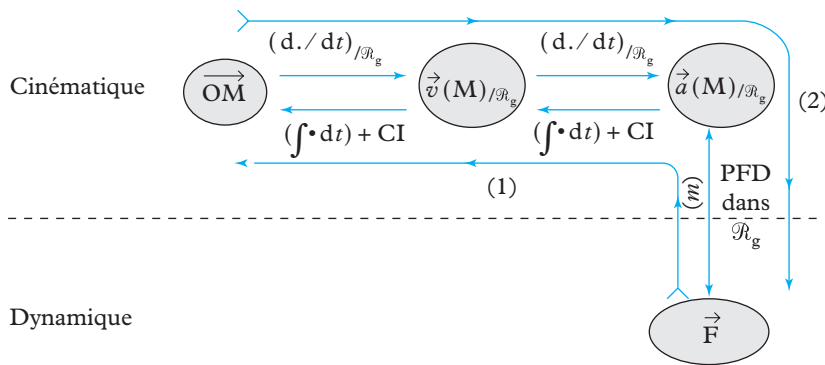


La réciproque n'est pas vraie : si  $\vec{F} = \vec{0}$ , le point matériel peut avoir un mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}_g$  (principe d'inertie) et n'est en équilibre que si sa vitesse est nulle à un instant quelconque (donc à tout instant).

### • Loi 3 : principe des actions réciproques

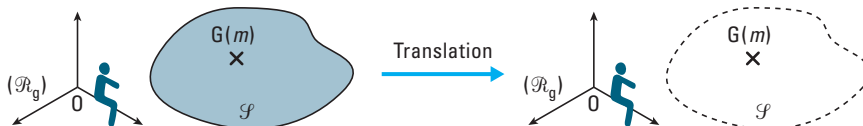
Si le point matériel A exerce sur le point matériel B une force  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  alors B exerce sur A une force  $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$  ; ces deux forces sont portées par la droite (AB).

## ✓ Bilan



## ✓ Solide en translation dans $\mathcal{R}_g$

L'étude d'un solide ( $\mathcal{S}$ ) de centre d'inertie G et de masse  $m$  en translation dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  se réduit à l'étude d'un **point matériel fictif G de masse  $m$** .



# Mise en œuvre

## Méthode n°1

### Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement (respectivement une force inconnue) à l'aide du PFD ?

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  et  $\mathcal{R}_g$  un référentiel galiléen. On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement du point  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  (respectivement une force inconnue) à l'aide du PFD.

#### → Savoir faire

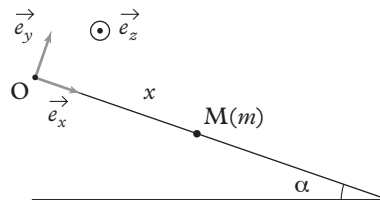
- ❶ Définir le système étudié.
- ❷ Définir le référentiel galiléen d'étude.
- ❸ Faire le bilan des forces appliquées au système.  
Définir leur direction. Réaliser éventuellement un dessin.
- ❹ Écrire le PFD : pour cela exprimer le vecteur accélération à l'aide du vecteur position puis du vecteur vitesse.
- ❺ Projeter la relation vectorielle : sur une direction faisant disparaître la force inconnue afin de trouver l'équation différentielle (respectivement sur la direction de la force inconnue afin de trouver cette force).



Pour faire disparaître une force par la projection, il suffit de projeter sur une direction perpendiculaire à cette force.

#### → Application

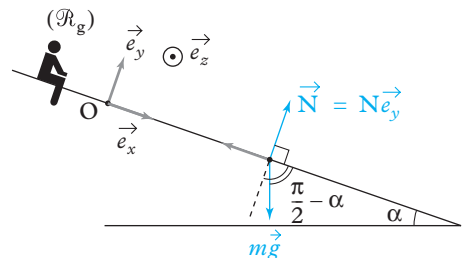
Un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse sans frottement sur un plan incliné. Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



Déterminer l'équation différentielle du mouvement (respectivement la réaction du plan incliné).

#### Solution

- ❶ **Système étudié :** le point matériel  $M(m)$ .
- ❷ **Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- ❸ **Forces appliquées au système :**
  - poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  (vertical vers le bas) ;
  - réaction du support  $\vec{N} = N\vec{e}_y$  (perpendiculaire au support car pas de frottement).



④ Le PFD donne :  $\vec{m}\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + \vec{0}$ .

⚙️  $\vec{e}_x$  est fixe dans  $\mathcal{R}_g$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$ .

Le PFD s'écrit donc :  $m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} + N\vec{e}_y$ .

⑤ Pour trouver l'équation différentielle, comme  $\vec{N}$  est inconnue, on projette sur  $\vec{e}_x$  pour faire disparaître  $\vec{N} = N\vec{e}_y$ ; on a :

$$\vec{e}_x \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_x \cdot (m\vec{g} + N\vec{e}_y), \text{ soit } m\ddot{x} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_x + 0$$

⚙️  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ , car les axes du repère sont orthogonaux.

$$m\ddot{x} = mg \times 1 \times \cos(\vec{g} \cdot \vec{e}_x) = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha.$$

⚙️ Comme  $\ddot{x}$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , l'expression est homogène.

• Pour trouver  $\vec{N}$ , on projette l'équation vectorielle issue du PFD sur la direction de  $\vec{N}$  c'est-à-dire  $\vec{e}_y$  :

$$\vec{e}_y \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_y \cdot (m\vec{g} + N\vec{e}_y) \text{ soit } 0 = m\vec{g} \cdot \vec{e}_y + N.$$

Ainsi :  $0 = mg(\vec{g}, \vec{e}_y) + N$ , soit  $0 = mg \cos(\pi - \alpha)$ , soit encore  $0 = mg \cos \alpha + N$ .

La réaction du sol inconnue s'écrit :

$$N = mg \cos \alpha.$$

⚙️ Comme la réaction  $N$  est en  $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $m$  en  $\text{kg}$ ,  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , cette expression est homogène.

⚙️ Vérification : quand  $\alpha = 0$  (plan horizontal)  $N = mg$ , et quand  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (plan vertical)  $N = 0$ , ce qui est logique.



# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Unité d'une grandeur

1) Déterminer l'unité de  $C_x$  dans l'équation :

$$F = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2.$$

$F$  est une force,  $\rho$  une masse volumique,  $S$  une surface et  $v$  une vitesse.

2) Déterminer l'unité de  $\eta$  dans l'équation :

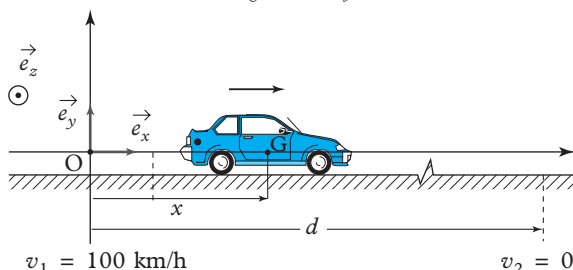
$$F = 6\pi\eta r v.$$

$F$  est une force,  $r$  une distance et  $v$  une vitesse.

### Ex. 2 Test de freinage

Lors d'un test de freinage, une voiture, assimilée à un point matériel  $G$  de masse  $m = 1\,300$  kg, roule sur une route horizontale et freine alors que sa vitesse est  $v_1 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est  $T = 7$  s. On suppose que la décélération est constante et que le référentiel  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est galiléen.



1) Déterminer la force de freinage  $F_0$  et la distance d'arrêt  $d$ .

2) On suppose que la force de freinage reste la même ( $F_0$ ) mais on teste plusieurs vitesses de départ :  $0 \leq v_1 \leq 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Tracer la courbe  $d = f(v_1)$ .

Que peut-on en conclure quant au respect des limitations de vitesses sur route ?

## Niveau 2

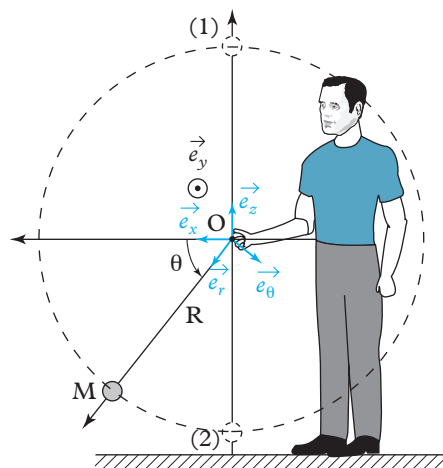
### Ex. 3 Trajectoire circulaire

Un homme fait tourner une balle (assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m = 100$  g), attachée à un fil de longueur  $R = OM = 1$  m et de masse négligeable.

La trajectoire de la balle est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  qui se fait dans le plan vertical est vertical

( $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ ),  $\vec{e}_z$  vers le haut. On néglige les éventuels petits mouvements de la main de l'homme, ainsi :  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.

On néglige tous les frottements.



1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la balle.

2) Déterminer l'expression de la tension du fil.

3) Déterminer la vitesse minimum  $v_{\min}$  que doit avoir la balle dans la position (1).

4) On suppose que la balle passe dans la position (1) avec la vitesse  $v_{\min}$ . Indiquer dans quelle position la tension du fil est maximum.

### Ex. 4 Choc frontal

On cherche à modéliser le comportement d'un véhicule de tourisme, lors d'un choc frontal. Pour cela, on assimile la voiture à un point matériel  $G$  de masse  $m = 1\,300$  kg.

L'avant du véhicule (qui va se déformer) est modélisé par un ressort de masse négligeable de longueur à vide  $\ell_0 = 2$  m (longueur au début du choc) et de raideur  $k$ .

Au début du choc, la voiture arrive avec une vitesse  $v_0 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

La vitesse du véhicule s'annule lorsque le ressort s'est comprimé de  $\frac{\ell_0}{2}$ .

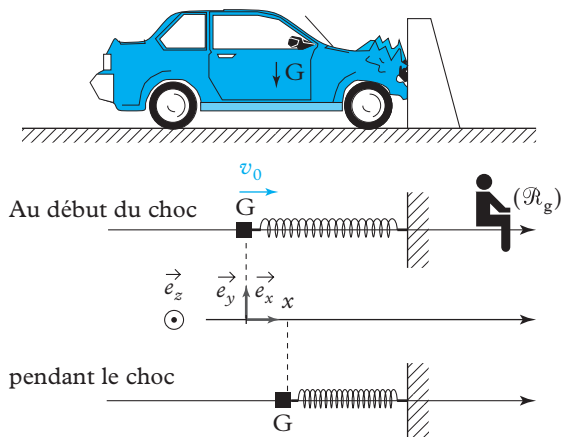
Pendant le choc, on repère le point  $G$  par son abscisse  $x$  depuis le début du choc.

On suppose  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  galiléen.

On néglige tous les frottements.

1) Écrire l'équation différentielle du mouvement.

2) Donner l'expression puis la valeur numérique de  $k$ .



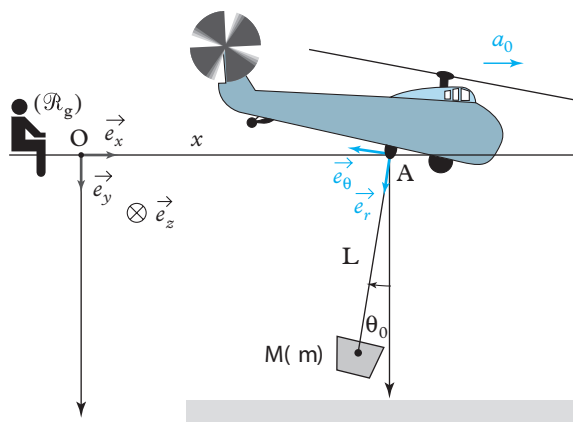
3) Donner les expressions puis les valeurs numériques de :

- la durée du choc ;
- l'accélération maximum subie par le véhicule.

Conclure sur les effets de ce choc sur le conducteur.

### Ex. 5 Hélicoptage

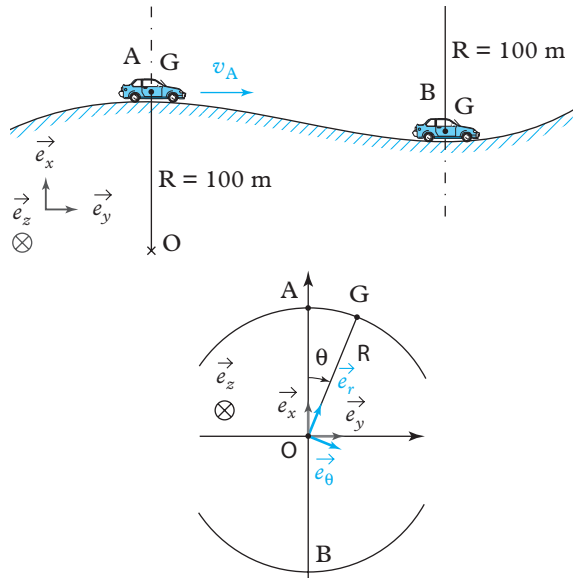
Un hélicoptère de lutte contre les incendies transporte un réservoir d'eau modélisable par une masse ponctuelle  $m = 1$  tonne au point M. Ce réservoir est attaché à l'hélicoptère par un câble de masse négligeable de longueur  $L = AM = 8$  m incliné d'un angle constant  $\theta_0$ . L'hélicoptère se déplace à l'horizontal (selon  $\vec{e}_x$ ) avec une accélération constante  $a_0 > 0$ . Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



- Déterminer l'angle  $\theta_0$  en fonction de  $a_0$ . Que se passe-t-il quand  $a_0$  augmente ?
- Déterminer la tension du câble en fonction de  $a_0$ . Que se passe-t-il quand  $a_0$  augmente ? Commentaire.

### Ex. 6 Route bosselée

Une voiture, assimilée à un point matériel G de masse  $m = 1500$  kg, roule sur une route bosselée, modélisée par une succession de demi-cercles de rayon



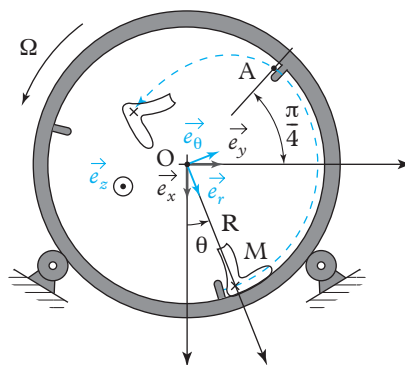
$OG = R = 100$  m. On suppose que le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est galiléen et on néglige tous les frottements.

Sachant que la voiture passe au sommet de la bosse avec une vitesse  $v_A = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , déterminer la vitesse  $v_B$  de la voiture au fond du creux, qui correspond à un doublement de la réaction du sol.

### Ex. 7 Dans un sèche-linge

On étudie le mouvement d'un vêtement à l'intérieur d'un tambour de sèche-linge tournant à la vitesse angulaire constante  $\Omega = \dot{\theta}$ . Ce vêtement est modélisable par un point matériel M de masse  $m$  qui se déplace sur un cercle de rayon  $R = 300$  mm (tant qu'il reste en contact avec le tambour). On néglige tous les frottements.

Les trois petites butées évitent le glissement du vêtement jusqu'à la perte du contact entre le vêtement et le tambour (en A). Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



Déterminer la vitesse  $\Omega$  du tambour qui permet une perte de contact (en A) par un angle  $\theta = \theta_0 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ . Faire l'application numérique.

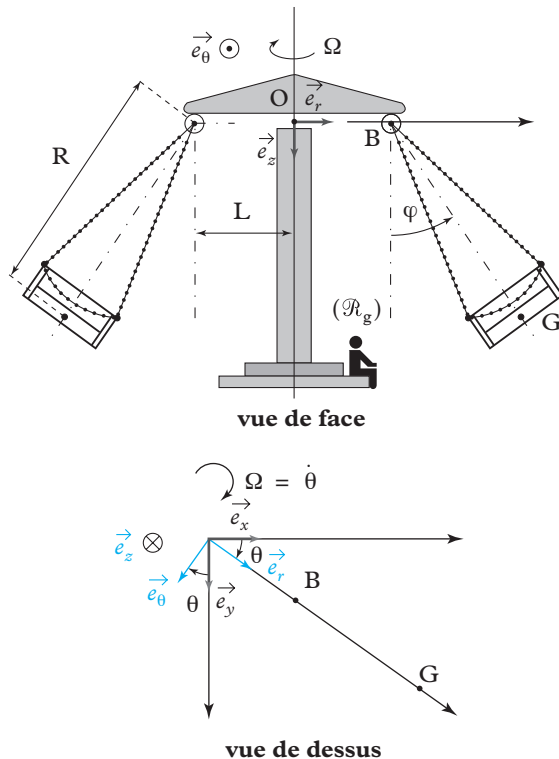
## Niveau 3

### Ex. 8 La balancelle

On étudie le mouvement d'une balancelle assimilée à un point matériel G de masse  $m$  reliée au manège (qui tourne autour de l'axe vertical  $(O; \vec{e}_z)$  à la vitesse angulaire constante  $\Omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ ) par l'intermédiaire d'un câble de masse négligeable, dont l'action est modélisée par une tension  $\vec{T}$  de G vers B, appliquée en G. L'angle d'inclinaison  $\varphi$  est constant.

On suppose que  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est galiléen.

Données:  $L = 3 \text{ m}$  et  $R = 7 \text{ m}$ .



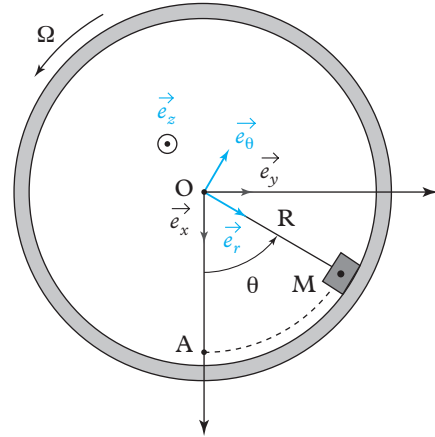
- 1) Établir une relation entre  $\varphi$ ,  $\Omega$ ,  $L$  et  $R$ .
- 2) Tracer  $\Omega$  en fonction de  $\varphi$ . Faire un commentaire quant à l'utilisation du manège.

### Ex. 9 Dans un tambour

Un palet, modélisable par un point matériel M de masse  $m$ , est inséré en A dans un tambour de rayon  $R = OM = 0,35 \text{ m}$  tournant à vitesse constante  $\Omega = \dot{\theta} = 70 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . En A, le palet possède une vitesse  $R\Omega$  (à ce moment-là, il ne glisse pas, car il a la même vitesse que le tambour). Par la suite, il commence à glisser dès qu'il ne possède plus cette vitesse  $R\Omega$ .

Le coefficient de frottement entre le palet et le tambour est  $f$ .

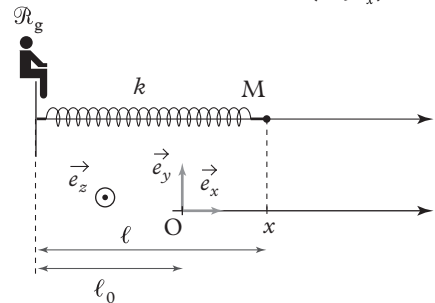
Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



- 1) Déterminer le coefficient de frottement  $f_0$  qui correspond à une stabilisation du palet M dans une position  $\theta = \theta_0$ . Tracer  $f_0$  en fonction de  $\theta_0$  pour:  $0 \leq \theta_0 < \pi \text{ rad}$ .
- 2) Déterminer le coefficient de frottement  $f_1$  qui correspond à un début de glissement quand  $\theta = \theta_1$  (quand M s'éloigne de A). Tracer cette fonction pour  $0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad}$ .
- 3) En déduire le coefficient de frottement minimum  $f = f_{\min}$  qui permet au palet de faire un tour sans qu'il y ait de glissement.

### Ex. 10 Ressort horizontal

Un petit anneau de masse  $m$ , lié à un ressort élastique de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  se déplace sans frottements sur un axe horizontal  $(O; \vec{e}_x)$ .



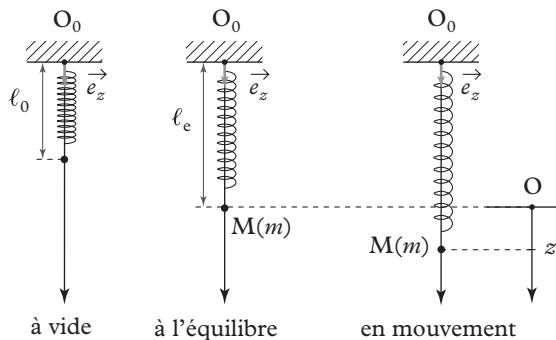
Le référentiel  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.

L'origine O de l'axe  $(O; \vec{e}_x)$  étant confondue avec la position d'équilibre du système, la force élastique de rappel s'écrit  $F = kx = k(\ell - \ell_0)$ .

- 1) Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau.
- 2) L'anneau est abandonné sans vitesse initiale d'une abscisse Déterminer son mouvement ultérieur.

### Ex. 11 Ressort vertical

On accroche une masse  $m$  à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  et de masse négligeable. Le référentiel  $(O; \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



1) Déterminer la position d'équilibre (c'est-à-dire la longueur  $\ell_e$  du ressort à l'équilibre).

2) On écarte maintenant la masse d'une distance  $a$  par rapport à la position d'équilibre précédente et on l'abandonne sans vitesse initiale :

a) écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse ;

b) déterminer son mouvement ultérieur.

## Indications

### Ex 4

2) On intègre l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

- à  $t = 0$ ,  $v = v_0$  ;
- le choc comprime le ressort de  $\frac{\ell_0}{2}$ .

### Ex 5

- 1) Utiliser le PFD projeté sur  $\vec{e}_\theta$ .
- 2) Utiliser le PFD projeté sur  $\vec{e}_r$ .

### Ex 6

Ne pas oublier la force motrice.

### Ex 7

Calculer la réaction du tambour à l'aide du PFD et écrire la condition qui annule cette réaction.

### Ex 9

- 1) Appliquer le PFS. Calculer T et N à l'équilibre.
  - 2) Appliquer le PFD. Calculer T et N lors du mouvement tant qu'il n'y a pas de glissement.
- Utiliser la condition correspondant au début du glissement.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

1) L'unité de  $C_x$  est :

$$\frac{\text{N}}{(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})(\text{m}^2)(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \times \text{m}^{-2} \times \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \\ = \text{kg}^0 \times \text{m}^0 \times \text{s}^0$$

$C_x$  est un coefficient sans unité.

2) L'unité de  $\eta$  est :

$$\frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} \\ = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### Exercice 2

1) Pour trouver la force de freinage, on va appliquer le PFD.

**Système étudié :** la voiture de masse  $m$  assimilée au point matériel G.

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$  ;
- réaction du sol  $\vec{N} = N\vec{e}_y$  ;
- la force de freinage  $\vec{F} = -F\vec{e}_x$ .

Le PFD donne :  $m\vec{a}(\text{G})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$  ; vecteur vitesse :  $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$  ; vecteur accélération :  $\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$ .

L'équation vectorielle issue du PFD s'écrit donc :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - F\vec{e}_x.$$

- Comme on veut calculer  $F$  et que l'on ne connaît pas  $N$ , on va projeter cette relation sur  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{e}_x \cdot [m\ddot{x}\vec{e}_x] = \vec{e}_x \cdot [-mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - F\vec{e}_x], \quad \text{d'où} \quad m\ddot{x} = 0 + 0 - F \\ m\ddot{x} = -F.$$



Comme  $m$  est en kg,  $\ddot{x}$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $F$  en N, cette expression est homogène.

- Comme  $\ddot{x}$  est une constante,  $F$  l'est aussi ; on peut donc intégrer une fois l'équation différentielle précédente :

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m}, \quad \text{puis} \quad \dot{x} = -\frac{F}{m}t + \text{cte.}$$

- $t = 0$ ,  $\dot{x}(t = 0) = v_1$ , donc cte  $= v_1$ , donc  $\dot{x} = -\frac{F}{m}t + v_1$ .

- $t = T$ ,  $\dot{x}(t = T) = 0$ , donc  $0 = -\frac{F}{m}T + v_1$ , soit :

$$F_0 = \frac{mv_1}{T}.$$

☀ : Comme  $F$  est en N,  $m$  en kg,  $v_1$  en  $m \cdot s^{-1}$  et  $T$  en s cette relation est homogène :  $\frac{kg \cdot m \cdot s^{-1}}{s} = kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$ .

**A.N.**  $F = \frac{1\,300 \times \frac{100}{3,6}}{7} \approx 5\,159 \text{ N}.$

Pour déterminer la distance d'arrêt, il faut intégrer une deuxième fois par rapport au temps l'équation différentielle du mouvement :

$$x = -\frac{F_0}{m} \frac{t^2}{2} + v_1 t + \text{cte}.$$

- $t = 0$ ,  $x(t = 0) = 0$  donc cte  $= 0$ , d'où  $x = -\frac{F_0}{m} \frac{t^2}{2} + v_1 t$ .

- $t = T$ ,  $x = d$  donc  $d = -\frac{F_0}{m} \frac{T^2}{2} + v_1 T$

$$d = v_1 \times \frac{mv_1}{F_0} - \frac{F_0}{m} \times \frac{1}{2} \times \left( \frac{mv_1}{F_0} \right)^2$$

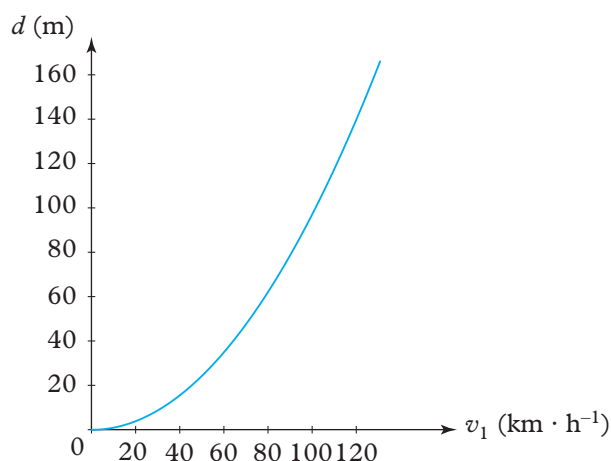
$$= \frac{mv_1^2}{F_0} - \frac{1}{2} \frac{mv_1^2}{F_0}$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{mv_1^2}{F_0}.$$

☀ : Comme  $d$  est en m,  $m$  est en kg,  $v_1$  en  $m \cdot s^{-1}$  et  $F_0$  en N, cette expression est homogène :

$$\frac{kg \times (m \cdot s^{-1})^2}{N} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{kg \cdot m \cdot s^{-2}} = m.$$

2) Courbe  $d = f(v_1)$



La distance varie avec le carré de la vitesse d'où l'importance des limitations de vitesse (en ville comme sur autoroute).

## Exercices de niveau 2

### Exercice 3

1) On cherche à écrire l'équation différentielle du mouvement; on va donc appliquer le PFD (voir méthode).

**Système étudié :** la balle M de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

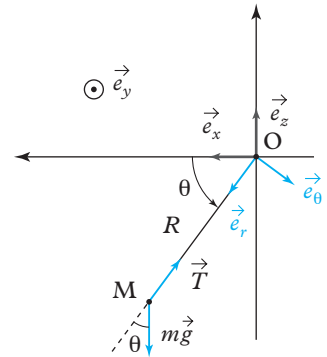
**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ ;
- tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ .

Le PFD donne :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ ; vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = +R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

⚙️  $R = \text{cte et } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .



Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

L'équation vectorielle issue du PFD est :  $m(-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = -mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r$ .

- Comme  $\vec{T}$  est inconnue et que l'on cherche l'équation différentielle du mouvement, on a va projeter la relation vectorielle précédente sur  $\vec{e}_\theta$  :

$$\vec{e}_\theta \cdot [-mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta] = \vec{e}_\theta \cdot [-mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r], \text{ d'où } -mR\ddot{\theta} = -mg(-\cos\theta) + 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta.$$

⚙️ Comme  $\ddot{\theta}$  est en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $R$  en  $\text{m}$ , cette expression est homogène (rad est une unité sans dimension).

2) Pour déterminer l'expression de la tension du fil, on reprend l'équation vectorielle du PFD que l'on projette sur  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{e}_r \cdot [-mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta] = \vec{e}_r \cdot [-mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r], \text{ soit } -mR\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T$$

$$T = mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2.$$

⚙️ Comme  $T$  est en  $\text{N}$ ,  $m$  en  $\text{kg}$ ,  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $R$  en  $\text{m}$  et  $\dot{\theta}$  en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , cette expression est homogène :  
 $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + \text{kg} \cdot \text{m} \cdot (\text{s}^{-1})^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}.$

3) Pour que la balle puisse passer dans la position (1) en restant sur le cercle de rayon  $R$ , il faut que le fil ne se détende pas, c'est-à-dire qu'il faut que  $T \geq 0$  soit avec  $mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2 \geq 0$ , avec  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  rad. Or  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = +R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ . Aussi :

$$mg(-1) + m\frac{v^2}{R} \geq 0, \text{ donc } v^2 \geq Rg \text{ d'où } v \geq \sqrt{Rg}$$

$$v_{\min} = \sqrt{Rg}.$$

⚙️ Comme  $v$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R$  en  $\text{m}$  et  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  cette formule est homogène  $\sqrt{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$

4) En reprenant l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta,$$

on voit que comme  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  rad,  $0 \leq \cos\theta \leq 1$ , donc  $\ddot{\theta} \geq 0$ .



En outre, la balle possède la vitesse  $v_{\min}$  dans la position (1), aussi la balle accélère quand  $\theta$  passe de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  ((1)  $\rightarrow$  (2)).

Inversement elle décélère quand  $\theta$  passe de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{3\pi}{2}$  ((2)  $\rightarrow$  (1)).

Aussi  $\dot{\theta}$  est maximum quand  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad (position (2)).

De plus  $\sin \theta = 1$  quand  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad.

Et comme  $T = mg \sin \theta + mR\dot{\theta}^2$  alors **T est maximal en position (2)**.

## Exercice 4

1) On applique le PFD pour trouver l'équation différentielle.

**Système étudié :** le point matériel G de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$  ;
- réaction du sol  $\vec{N} = N\vec{e}_y$  (pas de frottement) ;
- force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ .



Sur le dessin  $x > 0$  quand on comprime le ressort.

Dans cette configuration,  $\vec{F}$  est orienté vers  $-\vec{e}_x$  d'où le signe « - » et l'expression de  $\vec{F}$  :

( $kx > 0$ ) donc ( $-kx < 0$ ).

Le PFD donne :  $m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$ .



$\vec{e}_x$  est fixe dans  $\mathcal{R}_g$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$ .

Le PFD s'écrit (sous forme vectorielle).

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + N\vec{e}_y - kx\vec{e}_x.$$

– Pour trouver l'équation différentielle du mouvement, il faut projeter sur une direction qui fait disparaître  $\vec{N} = N\vec{e}_y$  : la direction  $\vec{e}_x$ .

En projection sur  $\vec{e}_x$  :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = -mg\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + N\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - kx\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$$

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

2) On va résoudre l'équation différentielle en utilisant les conditions initiales et les caractéristiques du mouvement.

La solution générale s'écrit :  $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$  avec  $\omega_0 = \frac{k}{M}$ .

Donc  $\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$ .

- À  $t = 0$  (au début de choc) :  $x(t = 0) = 0 = A$ , d'où  $A = 0$  ;

$$\dot{x}(t = 0) = B\omega_0 = v_0, \quad \text{d'où} \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

- À  $t = T$  (T durée du choc) :  $x(t = T) = \frac{t_0}{2}$  ;

$$\dot{x}(t = T) = 0.$$

- $\dot{x}(t) = B\omega_0 \cos \omega_0 t$

$$\dot{x}(t=T)=0 \quad \text{donc} \quad \omega_0 T = \frac{\pi}{2}, \quad \text{soit: } T = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- $x(t=T) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) = \frac{\ell_0}{2}$

$$\frac{v_0}{\omega_0} = \frac{\ell_0}{2} \quad \text{d'où} \quad v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\ell_0}{2} \quad \text{soit: } k = \frac{4mv_0^2}{\ell_0^2}.$$

☼ Comme  $k$  est en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $m$  en  $\text{kg}$ ,  $v_0$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\ell_0$  en  $\text{m}$ , cette expression est homogène :

$$\frac{\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}. \quad \text{et } \text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{A.N. } k = \frac{4 \times 1\,300 \times \left(\frac{36}{3,6}\right)^2}{2^2} = 130\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

⚠  $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{1 \times 1\,000}{3\,600} = \frac{1}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

3) a) La durée du choc  $T$  vérifie  $\omega_0 T = \frac{\pi}{2}$ , soit  $\sqrt{\frac{k}{m}} T = \frac{\pi}{2}$ ;

en reportant l'expression de  $k$  trouvée à la question précédente :

$$T = \frac{\pi}{2} \frac{\ell_0}{2v_0}, \quad \text{soit } T = \frac{\pi \ell_0}{4v_0}.$$

☼ Comme  $T$  est en  $\text{s}$ ,  $\ell_0$  en  $\text{m}$  et  $v_0$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , cette expression est homogène :  $\frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{s}.$

$$\text{A.N. } \text{On a } T = \frac{\pi \times 2}{4 \times \frac{36}{3,6}} \approx 0,16 \text{ s}.$$

b) L'accélération est obtenue en dérivant l'expression de la vitesse :

$$\dot{x} = v_0 \cos \omega_0 t, \quad \text{donc } \ddot{x} = -v_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

$$\text{Alors: } \ddot{x}_{\max} = -v_0 \omega_0 = -v_0 \frac{2v_0}{\ell_0} \quad \text{soit } \ddot{x}_{\max} = -2 \times \frac{v_0^2}{\ell_0}.$$

☼ Comme  $\ddot{x}_{\max}$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $v_0$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\ell_0$  en  $\text{m}$  cette expression est homogène :

$$\frac{(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{m}} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$\text{A.N. } \ddot{x}_{\max} = -2 \times \frac{\left(\frac{36}{3,6}\right)^2}{2} = -100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Commentaire : le temps de choc est très court. L'accélération maximum dépasse 10 fois l'accélération de la pesanteur ( $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). On imagine très bien les effets nocifs d'un tel choc sur un conducteur.

## Exercice 5

1) On va appliquer le PFD pour trouver  $\theta_0$  en fonction de  $a_0$ .

☼ Voir méthode.

**Système étudié :** le réservoir d'eau assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$

### Forces appliquées au système :

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_y$  ;
- tension du mobile  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ .

Le PFD donne :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = x\vec{e}_x + L\vec{e}_r$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + L\dot{\vec{e}}_r + L\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$ .

🔧 :  $\vec{e}_x$  est constant dans  $\mathcal{R}_g$  ;  $L = \text{cte}$  donc  $\dot{L} = 0$ .

$\vec{e}_r$  est ici constant dans  $\mathcal{R}_g$  car  $\theta_0 = \text{cte}$  ( $\dot{\theta}_0 = 0$ ) ; en effet  $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0}$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x = a_0\vec{e}_x$ .

Le PFD s'écrit :  $ma_0\vec{e}_x = mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r$ .

- On cherche une relation entre  $\theta_0$  et  $a_0$ . Il faut faire disparaître  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$  dans la projection.

On projette donc sur  $\vec{e}_\theta$  (car  $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$ ).

$$\vec{e}_\theta \cdot (ma_0\vec{e}_x) = \vec{e}_\theta \cdot (mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r)$$

$$ma_0 \cos(\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x) = mg \cos(\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y) - 0.$$

🔧 :  $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$  donc  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$ .

$$\text{Soit } ma_0 \cos(\pi - \theta_0) = mg \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)\right)$$

$$-ma_0 \cdot \cos(\theta_0) = -mg \sin \theta_0$$

$$\tan \theta_0 = \frac{a_0}{g}$$

Quand  $a_0$  augmente,  $\theta_0$  augmente.

🔧 : Comme  $a_0$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , cette expression est homogène.

🔧 : Vérification : quand  $a_0 = 0$  (à vitesse constante ou à l'arrêt), on a  $\tan \theta_0 = 0$  soit  $\theta_0 = 0$ , ce qui est exact.

2) On cherche désormais la tension du câble, on reprend l'équation vectorielle issue du PFD :

$$ma_0\vec{e}_x = mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r.$$

Il suffit de projeter cette relation sur :

$$\vec{e}_r \cdot (ma_0\vec{e}_x) = \vec{e}_r \cdot (mg\vec{e}_y - T\vec{e}_r)$$

$$ma_0 \cos(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x) = mg \cos(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y) - T$$

$$ma_0 \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)\right) = mg \cos(-\theta_0) - T$$

$$ma_0(-\sin \theta_0) = mg \cos \theta_0 - T$$

$$T = mg \cos \theta_0 + ma_0 \sin \theta_0$$

Soit en remplaçant  $a_0$  par son expression :

$$T = mg \left( \cos \theta_0 + \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \quad \text{et donc} \quad T = \frac{mg}{\cos \theta_0}.$$

🔧 :  $\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 1$ .

De plus  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ , pour  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ; donc :  $T = mg \sqrt{1 + \left(\frac{a_0}{g}\right)^2}$ .

- ☀️ Comme  $T$  est en  $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ ,  $m$  en  $kg$ ,  $g$  en  $m \cdot s^{-2}$  et  $a_0$  en  $m \cdot s^{-2}$ , cette expression est homogène.
- ☀️ On sait que  $T = mg$  quand  $a_0 = 0$ .
- ☀️ Quand  $a_0$  augmente,  $T$  augmente. Une trop grande accélération pourrait entraîner une rupture de câble.

## Exercice 6

1) Il va falloir déterminer la réaction du sol en A (puis en B). On va appliquer le PFD.

**Système étudié :** point matériel G de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_x$  ;
- réaction du sol  $\vec{N} = N\vec{e}_r$  ;
- force motrice  $\vec{F} = F\vec{e}_\theta$ .

Le PFD donne :  $m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$ .

Vecteur position :  $\vec{OG} = R\vec{e}_r$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ .

L'équation vectorielle issue du PFD est donc :

$$m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = -mg\vec{e}_x + N\vec{e}_r + F\vec{e}_\theta.$$

- On cherche à déterminer  $N$  donc on projette sur  $\vec{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot [m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r)] &= [-mg\vec{e}_x + N\vec{e}_r + F\vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_r \\ -mR\dot{\theta}^2 &= -mg \cos \theta + N \\ N &= mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2, \text{ soit } N = mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

- ☀️ On voit que  $F$  n'intervient pas dans l'expression de  $N$ , du moins directement. En fait  $F$  permet d'augmenter  $v$  (par l'intermédiaire de  $\ddot{\theta}$ ), pour s'en rendre compte, il suffit de projeter sur  $\vec{e}_\theta$  :

$$mR\ddot{\theta} = +mg \sin \theta + F.$$

- ☀️ Comme la réaction  $N$  est en newton,  $m$  en  $kg$ ,  $g$  en  $m \cdot s^{-2}$ ,  $v$  en  $m \cdot s^{-1}$  et  $R$  en  $m$ , cette expression est homogène.

La réaction en A correspond à  $\theta = 0$ , donc :

$$N_A = mg - m \frac{v_A^2}{R} \geq 0.$$

Pour trouver la réaction en B, il suffit de prendre  $\theta = \pi$  rad et l'on a :

$$N_B = -mg - m \frac{v_A^2}{R} = -\left(mg + m \frac{v_B^2}{R}\right) \leq 0.$$

- ☀️  $N_B$  est négatif car le sens positif défini par  $\vec{N}$  est  $N\vec{e}_r$ .

Or quand  $\theta = \pi$  rad,  $\vec{e}_r$  est vertical vers le bas alors que la réaction du sol est bien évidemment dirigée vers le haut, d'où le signe « - ».

On veut  $v_B$  telle que  $|N_B| = 2|N_A|$ . C'est équivalent à :

$$mg + m \frac{v_B^2}{R} = 2 \left( mg - \frac{v_A^2}{R} \right), \text{ soit } v_B^2 = gR - 2v_A^2$$

$$v_B = \sqrt{gR - 2v_A^2}.$$

☼ Comme  $v_B$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $R$  en  $\text{m}$  et  $v_A$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , cette expression est homogène.

**A.N.**  $v_B = \sqrt{9,8 \times 100 - 2 \times \left( \frac{50}{3,6} \right)^2} \approx 24,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 87,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

## Exercice 7

On va calculer la réaction du tambour sur le vêtement à l'aide du PFD.

**Système étudié :** le vêtement assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen :**  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$  ;
- réaction du tambour  $\vec{R}_1 = -R_1\vec{e}_r$  (perpendiculaire au tambour car pas de frottement) ;
- réaction de la butée  $\vec{R}_2 = R_2\vec{e}_\theta$  (perpendiculaire à la butée car pas de frottement).

Le PFD donne :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

☼  $R = \text{cte}$  donc  $\dot{R} = 0$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -R\Omega^2\vec{e}_r$ .

☼  $\Omega = \text{cte}$  donc  $\ddot{\theta} = \dot{\Omega} = 0$ .

Le PFD s'écrit :  $m(-R\Omega^2)\vec{e}_r = mg\vec{e}_x - R_1\vec{e}_r + R_2\vec{e}_\theta$ .

- On veut déterminer  $R_1$  sachant que  $R_2$  est inconnue : deux bonnes raisons pour projeter sur  $\vec{e}_r$ .  
 $\vec{e}_r \cdot (-mR\Omega^2\vec{e}_r) = \vec{e}_r \cdot (mg\vec{e}_x - R_1\vec{e}_r + R_2\vec{e}_\theta)$ , soit  $-mR\Omega^2 = mg \cos(\theta) - R_1 + 0$  ;

$$R_1 = mg \cos \theta + mR\Omega^2$$

On cherche  $\Omega$  tel que  $R_1$  s'annule quand  $\theta = \theta_0 = \frac{3\pi}{4}$  ; la relation précédente s'écrit :

$0 = mg \cos \theta_0 + mR\Omega^2$  soit :

$$\Omega = \sqrt{\frac{-g}{R} \cos \theta_0}$$

☼  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'existe que si  $x > 0$ . Ici  $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\cos \theta_0 < 0$  donc  $-\frac{g}{R} \cos \theta_0 > 0$ .

☼  $\Omega$  est en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (le radian est une unité sans dimension),  $g$  est en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $R$  en  $\text{m}$ , donc l'expression est homogène.

**A.N.**  $\Omega = \sqrt{-\frac{9,8}{0,3} \cos \frac{3\pi}{4}} \approx 4,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $\Omega \approx 45,9 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$

## Exercices de niveau 3

### Exercice 8

1) Appliquons le PFD à la balancelle.

**Système étudié :** la balancelle assimilée à un point matériel G de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen :**  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$  ;
- action du câble  $\vec{T} = -T \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|}$ .

 La direction de BG n'est pas repérée par un vecteur unitaire.

$\vec{u} = \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|}$  définit un vecteur unitaire de (BG) qui s'exprime en fonction de  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$ .

$$\vec{T} = -T(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r)$$

Le PFD s'écrit :  $m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}$ .

Vecteur position :  $\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{BG} = L\vec{e}_r + R(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r)$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = L\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + R\cos\varphi\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + R\sin\varphi\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}$ .

 L, R et  $\varphi$  sont des constantes.

Comme  $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et  $\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ , on a :  $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = (L + R\sin\varphi)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

 L + R sin  $\varphi$  représente le rayon de la trajectoire (cercle) décrite par G.

Vecteur accélération :  $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_g} = -(L + R\sin\varphi)\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ .

  $\Omega = \dot{\theta} = \text{cte}$  donc  $\dot{\Omega} = \ddot{\theta} = 0$ .

L'équation vectorielle du PFD s'écrit :

$$-m(L + R\sin\varphi)\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg\vec{e}_z - T(\cos\varphi\vec{e}_z + \sin\varphi\vec{e}_r).$$

- On projette cette relation sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$  :

$$-m(L + R\sin\varphi)\Omega^2 = 0 - 0 - T\sin\varphi, \text{ soit } T\sin\varphi = m(L + R\sin\varphi)\Omega^2 \quad (1)$$


$$0 = mg - T\cos\varphi + 0, \text{ soit } T\cos\varphi = mg \quad (2)$$

On élimine T (force inconnue) en divisant membre à membre les deux équations (1) et (2) :

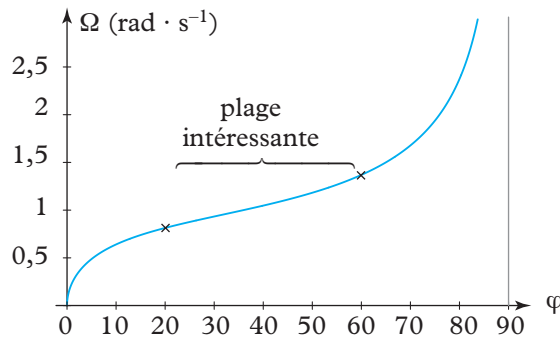
$$\frac{T\sin\varphi}{T\cos\varphi} = \frac{m(L + R\sin\varphi)\Omega^2}{mg} \text{ pour } \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{L + R\sin\varphi}{g}\Omega^2.$$

 On aurait pu trouver cette relation plus rapidement en projetant la relation vectorielle de PFD sur une direction perpendiculaire à  $\vec{T}$  donc à  $\vec{u}$  si celle-ci avait été définie.

 Comme L, R sont en m, g en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\Omega$  en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (radian : unité sans dimension), l'expression est homogène.  
Vérification : si  $\Omega = 0$ ,  $\tan\varphi = 0$ , donc  $\varphi = 0$  : le résultat est correct.

2) La courbe est la suivante.



On voit que sur la plage allant de  $\Omega = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $\Omega = 1,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  de  $\Omega$ ,  $\varphi$  varie beaucoup. Cette zone de sensibilité de  $\varphi$  à  $\Omega$  permet de donner de grandes sensations à l'utilisateur sans pour autant avoir besoin d'une variation de vitesse importante.

### Exercice 9

1) On cherche le coefficient de frottement  $f_0$  qui permet au palet de se stabiliser (équilibre) à  $\theta = \theta_0$ .  
On applique le PFS.

**Système étudié :** le palet matérialisé par un point matériel M de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$  ;
- réaction du tambour  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$ .

☀️  $\vec{N}$  est la réaction normale (qui existe avec ou sans frottements) ;  $\vec{T}$  est la réaction tangentielle qui existe car il y a frottement.

Le PFS s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}, \text{ soit } \vec{0} = mg\vec{e}_x + \vec{N} + \vec{T} \text{ ou encore } \vec{0} = mg\vec{e}_x - N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta.$$

- On projette sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  pour déterminer N et T :

En projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$0 = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = mg \cos \theta - N + 0 \text{ soit } \mathbf{N = mg \cos \theta}.$$

En projection sur  $\vec{e}_\theta$  :

$$0 = mg\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta - N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta + T\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = mg \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) - 0 + T \text{ soit } \mathbf{T = mg \sin \theta}.$$

- Comme le palet est stabilisé il glisse sur le tambour, donc :

$$\|\vec{T}\| = f_0 \|\vec{N}\| \text{ soit } \|T\vec{e}_\theta\| = f_0 \| -N\vec{e}_r \|, \text{ et donc } |T| = f_0 |N|.$$

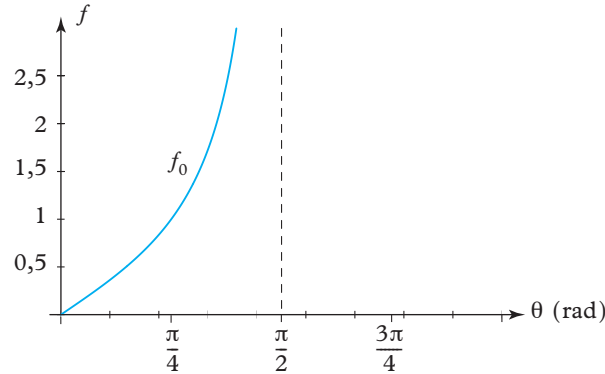
$$T = mg \sin \theta_0 \geq 0 \text{ pour } 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

$$N = mg \cos \theta_0 > 0 \text{ pour } 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Donc on a  $mg \sin \theta_0 = f_0 mg \cos \theta_0$  et quand  $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  :

$$\mathbf{f_0 = \tan \theta_0}.$$

Si  $\theta_0 \geq \frac{\pi}{2}$ ,  $N \leq 0$  ! Il n'y a plus de contact, donc plus de stabilisation possible.



2) On étudie cette fois-ci le palet en mouvement avant que le glissement commence : il possède donc une vitesse constante  $R\Omega$ . Appliquons le PFD.

Voir méthode.

**Système étudié :** le palet.

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g$ .

**Forces appliquées au système :**  $\vec{P}$  et  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$  ;

Le PFD donne :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\Omega\vec{e}_\theta$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta = -R\Omega^2\vec{e}_r$ .

$\Omega = \text{cte}$  donc  $\dot{\Omega} = \ddot{\theta} = 0$ .

Le PFD s'écrit donc :

$$-mR\Omega^2\vec{e}_r = mg\vec{e}_x - N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta.$$

- On projette respectivement sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  pour trouver N et T :

$$-mR\Omega^2 = mg \cos \theta - N, \quad \text{soit} \quad N = mg \cos \theta + mR\Omega^2$$

$$0 = -mg \sin \theta + 0 + T \quad \text{soit} \quad T = mg \sin \theta.$$

Quand le palet commence à glisser :

$$\|\vec{T}\| = f_1 \|\vec{N}\|$$

$$\|T\vec{e}_\theta\| = f_1 \|N\vec{e}_r\|$$

$$|T| = f_1 |N|$$

$$T = mg \sin \theta_1 \geq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad};$$

$$N = mg \cos \theta_1 + mR\Omega^2 > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta_1 < \pi \text{ rad}.$$

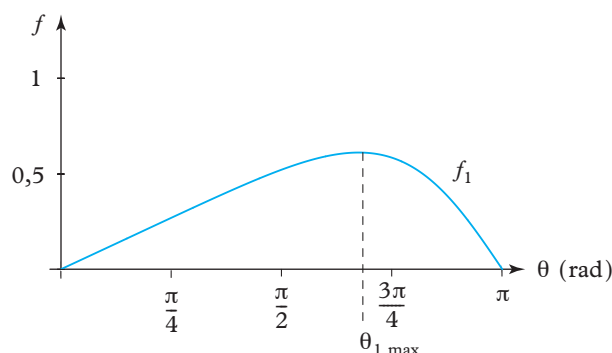
Pour  $\theta_1 = \pi \text{ rad}$ ,  $N = m \left( 9,8 \cos(\pi) + 0,35 \times \left( \frac{70 \times 2\pi}{60} \right)^2 \right) \approx m \times 9,0 > 0$ .

$1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 1 \times \frac{60}{2\pi} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Donc  $mg \sin \theta_1 = f_1 (mg \cos \theta_1 + mR\Omega^2)$  et par suite :

$$f_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \frac{R\Omega^2}{g}}.$$





3)  $f = f_{\min}$  correspond au coefficient de frottement nécessaire pour qu'il n'y ait jamais glissement pour  $\theta_1$  compris entre 0 et  $180^\circ$ . Il s'agit donc du maximum de la courbe tracée à la question 2).

$$f_{\min} \approx 0,61.$$

## Exercice 10

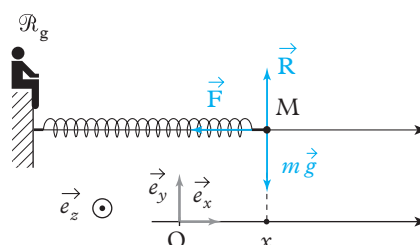
1) Appliquons le PFD au point matériel M afin de trouver l'équation différentielle du mouvement.

**Système étudié :** l'anneau M de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

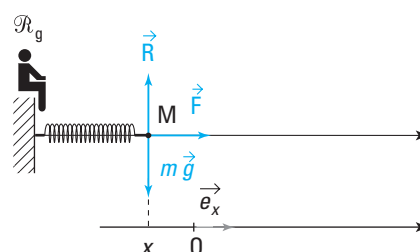
- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$ ;
- réaction de l'axe  $\vec{R} = R\vec{e}_y$   
(perpendiculaire à l'axe car pas de frottement);
- force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ .



⚠ Il s'agit d'une force de rappel. Sur la figure, on a  $x > 0$  (ressort tendu). Or cette force tend à ramener la masse vers la longueur à vide du ressort ( $\ell = \ell_0$  soit  $x = 0$ ), elle est donc dirigée selon  $-\vec{e}_x$  d'où le signe « - » dans l'expression de  $\vec{F}$  ( $kx > 0$ ).

⚠ Si on avait fait le dessin avec  $x < 0$  (ressort comprimé), la force de rappel aurait eu tendance à ramener la masse vers la longueur à vide du ressort ( $\ell = \ell_0$  soit  $x = 0$ ), elle aurait été dirigée vers  $+\vec{e}_x$  mais l'expression serait restée :  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$  car  $kx < 0$  et  $-kx > 0$ .

💡 Dans ce cas, la position d'équilibre était évidente (longueur à vide du ressort). Elle n'a pas nécessité de calculs supplémentaires.



Le PFD s'écrit :  $m\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ .

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$ .

💡  $\vec{e}_x$  est fixe dans  $\mathcal{R}_g$  donc  $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{0}$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{x}\vec{e}_x$ .

D'où :

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + R\vec{e}_y - kx\vec{e}_x.$$

- On projette cette relation vectorielle sur  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{e}_x \cdot (m\ddot{x}\vec{e}_x) = \vec{e}_x \cdot (-mg\vec{e}_y + R\vec{e}_y - kx\vec{e}_x), \text{ soit } m\ddot{x} = -kx.$$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

🔧 En projetant sur  $\vec{e}_x$ , on fait disparaître  $\vec{R} = R\vec{e}_y$  qui était une force inconnue.

2) Pour trouver le mouvement de l'anneau, il faut résoudre l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ d'où } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Les solutions de cette équation différentielle s'écrivent sous la forme :  $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ .

Pour trouver la solution à notre problème, on va utiliser les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) = a \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Or  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et  $x(t=0) = A = a$ .

De plus  $\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $\dot{x}(t=0) = B \omega_0 = 0$  donc  $B = 0$ .

La solution est donc :  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

## Exercice 11

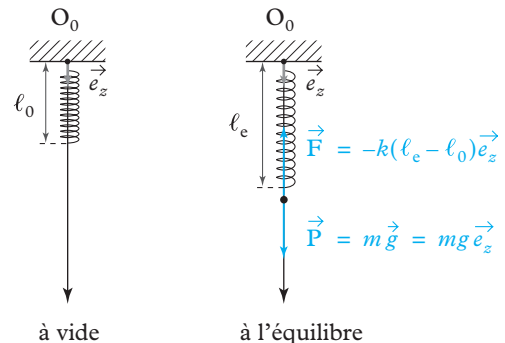
1) Pour déterminer la position d'équilibre (masse arrêtée), on utilise le PFS.

**Système étudié :** M de masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(O_0; \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$  ;
- force de rappel élastique  $\vec{F} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{e}_z$ .



⚠ Sur le dessin  $\ell_e > \ell_0$  donc  $\ell_e - \ell_0 > 0$  et la force de rappel élastique a tendance à ramener la masse vers la longueur à vide, c'est-à-dire que  $\vec{F}$  est dirigée vers  $-\vec{e}_z$  d'où le signe « - » de l'expression de  $\vec{F}$  ; en effet  $k(\ell_e - \ell_0) > 0$  donc  $-k(\ell_e - \ell_0) < 0$ .

Le PFS donne :  $0 = \vec{P} + \vec{F}$ .

En projection sur  $\vec{e}_z$  :  $0 = mg\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - k(\ell_e - \ell_0)\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$  et donc :

$$0 = mg - k(\ell_e - \ell_0) \text{ soit } \ell_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

2) a) On utilise le PFD pour écrire l'équation différentielle.

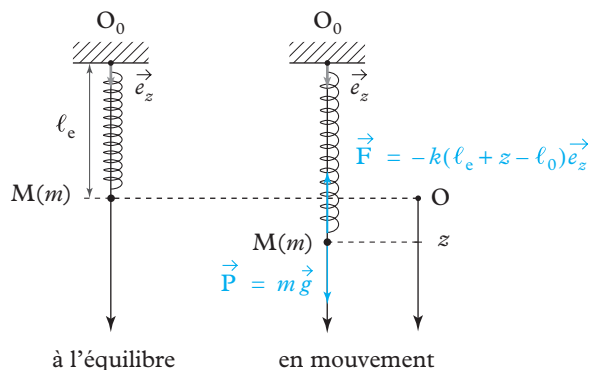
**Système étudié :** masse  $m$ .

**Référentiel galiléen d'étude :**  $\mathcal{R}_g(O_0; \vec{e}_z)$ .

**Forces appliquées au système :**

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$  ;

- force de rappel élastique  $\vec{F} = -k(\ell_e + z - \ell_0)\vec{e}_z$ .



⚠ Sur le dessin  $\ell_e + z > \ell_0$  (ressort tendu) ; la force de rappel a tendance à ramener la masse vers la longueur à vide c'est-à-dire que  $\vec{F}$  est dirigée vers  $-\vec{e}_z$  d'où le signe « - » dans l'expression de  $\vec{F}$ , en effet  $k(\ell_e + z - \ell_0) > 0$  donc  $-k(\ell_e + z - \ell_0) < 0$ .

💡 On voit que l'on fait le même raisonnement pour trouver la position d'équilibre (PFS) et pour trouver l'équation différentielle du mouvement (PFD).

💡  $z$  repère la masse  $M$  par rapport à la position d'équilibre. L'intérêt de ce paramétrage est de simplifier l'équation différentielle du mouvement (voir ci-après).

Le PFD donne :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{F}$ .

Vecteur position :  $\vec{OM} = z\vec{e}_z$  ( $O$  est fixe dans  $\mathcal{R}_g$ ).

Vecteur vitesse :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{z}\vec{e}_z$ .

Vecteur accélération :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ddot{z}\vec{e}_z$ .

Le PFD s'écrit donc :

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - k(\ell_e + z - \ell_0)\vec{e}_z,$$

soit en projection sur  $\vec{e}_z$  :

$$m\ddot{z} = mg - k(\ell_e + z - \ell_0), \text{ soit } m\ddot{z} + kz = mg - k(\ell_e - \ell_0).$$

En utilisant la valeur de  $\ell_e$  (position d'équilibre), on en déduit l'équation différentielle (simple, sans second membre) :

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

**b)** On résout l'équation différentielle à l'aide des conditions initiales :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{donc} \quad \dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t).$$

$$\begin{cases} z(t=0) = a & z(t=0) = A = a \\ \dot{z}(t=0) = 0 & \dot{z}(t=0) = B\omega_0 = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \end{cases}$$

donc

$$z(t) = a\cos(\omega_0 t).$$