

Puissance et énergie en référentiel galiléen

Introduction

L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique. Sa conservation permet d'aboutir à une équation scalaire, elle permet de résoudre certains problèmes de la mécanique, que l'on peut trouver à l'aide de l'équation vectorielle obtenue à partir de la deuxième loi de Newton. Elle permet aussi de mettre en relation plusieurs domaines de la physique (notamment la thermodynamique), puisque l'énergie perdue par un système mécanique doit se retrouver sous une forme différente.

Plan du chapitre 11

A. Puissance et travail d'une force – Énergie cinétique d'un point matériel	x
1. Puissance d'une force dans un référentiel	x
2. Travail d'une force dans un référentiel	x
3. Énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel	x
B. Théorèmes énergétiques	
1. Théorème de la puissance cinétique (TPC)	x
2. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)	x
C. Une application des théorèmes énergétiques	
1. Présentation du problème	x
2. Équation du mouvement	x
3. Vitesse au passage de la verticale	x
D. Mouvement à un degré de liberté	
1. Énergie potentielle, force conservative	x
2. Exemples de forces conservatives	x
3. Forces non conservatives	x
4. Énergie mécanique d'un point matériel et théorème de l'énergie mécanique (TEM)	x
5. Utilisations des courbes d'énergie potentielle	x
Méthodes	x
Exercices	x

A. Puissance et travail d'une force – Énergie cinétique d'un point matériel

A.1. Puissance d'une force dans un référentiel

Définition 1

La puissance $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}$ d'une force \vec{F} , appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} , est¹ :

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance en watts² (W)

\vec{F} force (N)

$\vec{v}(M)$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il n'est pas nécessaire de conserver l'écriture $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ (ou $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}$) tout au long des calculs : on écrit alors simplement \vec{v} (ou $\mathcal{P}(\vec{F})$).

2. $1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

Propriétés

- Seule la composante de \vec{F} parallèle à la vitesse (projection de \vec{F} sur \vec{v}) est utile dans la puissance $\mathcal{P}(\vec{F})$ (fig. 1).

- En notant α l'angle (\vec{F}, \vec{v}) on a l'égalité :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

$\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance (W)

$\|\vec{F}\|$ norme de \vec{F} (N)

$\|\vec{v}\|$ norme de \vec{v} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

α angle orienté

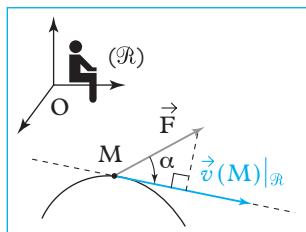


Fig. 1. Puissance d'une force.



Si $\vec{F} \perp \vec{v}$ alors $\mathcal{P}(\vec{F}) = 0$; c'est le cas pour la puissance de la réaction du support en l'absence de frottement et pour la puissance du poids (\vec{g} étant constant) lors d'un déplacement horizontal.

- Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} > 0$, on dit que \vec{F} est une force motrice ;
si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} < 0$, on dit que \vec{F} est une force résistante ;
si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = 0$, on dit que \vec{F} ne travaille pas.

- Si plusieurs forces \vec{F}_i de résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ s'appliquent au point M, alors :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{v}) = \sum_i \mathcal{P}_i.$$

- $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}$ dépend du référentiel car $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ en dépend (mais \vec{F} n'en dépend pas).

Application 1 Déplacement d'un point matériel sur un plan incliné

Un point matériel M(m) se déplace sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On suppose que le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme ($\vec{g} = \text{cte}$ en tout point).

On se place dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g (O ; \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z).

La vitesse de M dans \mathcal{R}_g est $\vec{v} = v \vec{e}_x$ ($v > 0$).

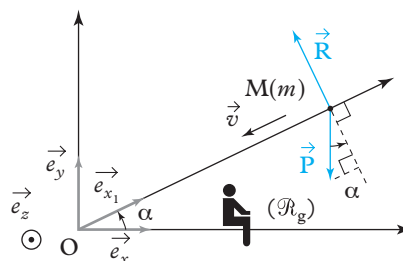
Déterminer les puissances des forces appliquées au point M.

Solution

$$\mathcal{P}(\vec{R})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{R} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \|\vec{R}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{R}, \vec{v}) = \|\vec{R}\| \cdot v \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \|\vec{P}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = mgv \sin(\alpha) > 0 \text{ W}.$$

On constate que $\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g}$ est positive, ce qui est normal car \vec{P} entraîne M dans le sens du mouvement : \vec{P} est une force motrice.



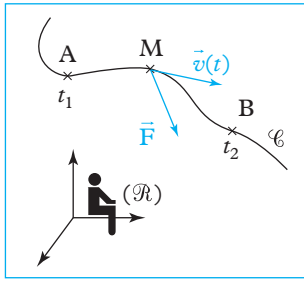


Fig. 2. Travail d'une force.

3. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra simplifier l'écriture du travail : $W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = W(\vec{F})$.

4. $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

5. On peut écrire $W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ en remarquant que $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} dt = d\vec{OM}$.

Remarque : Le vecteur $d\vec{OM}$ correspond au vecteur déplacement élémentaire du point M entre les instants t et $t + dt$, si on note $\vec{OM} = \vec{OM}(t)$ et $\vec{OM}' = \vec{OM}(t + dt)$ les deux vecteurs position aux deux instants t et $t + dt$, alors on peut écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{OM}' - \vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{MM}'}{dt},$$

soit : $d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$. On le note parfois $d\vec{\ell}$.

Ce vecteur $d\vec{OM}$ est colinéaire au vecteur vitesse en chaque point de la trajectoire du point M (donc tangent à la trajectoire).

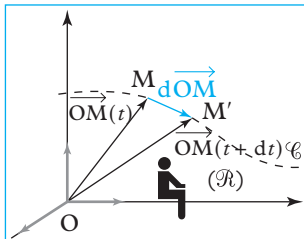


Fig. 3. Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$.

6. C'est le cas de la réaction du support lors d'un mouvement sans frottement.

A.2. Travail d'une force dans un référentiel

On considère que le point matériel $M(m)$ décrit une trajectoire \mathcal{C} dans le référentiel \mathcal{R} , qu'il passe en A à l'instant t_1 et en B à l'instant t_2 . Il est soumis à plusieurs forces dont \vec{F} (fig. 2). Sa vitesse est $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ à l'instant t .

Définition 2

Dans le référentiel \mathcal{R} , le travail de la force \vec{F} appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 , en suivant la courbe \mathcal{C} est :

$$W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} dt^{3,4,5} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} dt$$

$W(\vec{F})^3$ travail en joule ⁴ (J) $\mathcal{P}(\vec{F})$ puissance (W) \vec{F} force (N) $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de M à l'instant t ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
--

Propriétés

- Le travail dépend *a priori* du chemin suivi (courbe \mathcal{C}) pour aller de A vers B.
- Si la force \vec{F} est constamment perpendiculaire à la trajectoire (au vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$), alors $\vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = 0$ en chaque point et donc :

$$W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} dt = 0$$

(exemples identiques⁶ du cas de la puissance $\mathcal{P}(\vec{F}) = 0$).

- Si $W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} > 0$, on dit que la force \vec{F} est **motrice** ; si $W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} < 0$, on dit que la force \vec{F} est **résistante** ; si $W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = 0$, on dit que la force \vec{F} **ne travaille pas**.

- Si la force \vec{F} est constante, alors on peut écrire :

$$W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \int_{A(\mathcal{C})}^B d\vec{OM} = \vec{F} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}.$$

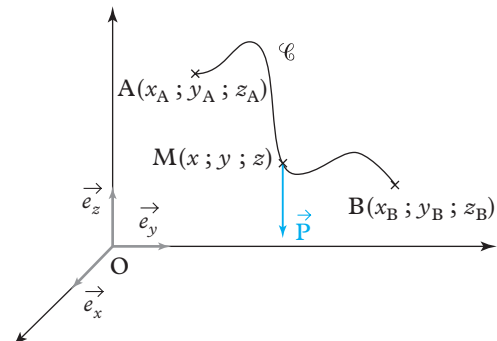
On constate que ce travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller du point initial A au point final B.

- On a comme pour la puissance : $W\left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \sum_i W(\vec{F}_i)$.
- Le travail dépend du référentiel.

Application 2 Travail du poids

Considérons un point matériel $M(m)$ se déplaçant sur une courbe \mathcal{C} allant de A vers B et soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (\vec{g} champ de pesanteur supposé uniforme). M est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} dont l'axe ($O ; \vec{e}_z$) est la verticale ascendante.

Déterminer l'expression du travail du poids \vec{P} entre les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$.



Solution

\vec{g} étant supposé uniforme, on se trouve dans le cas d'une force constante ($\vec{P} = m\vec{g}$), donc $W(\vec{P})_{/\mathcal{R}} = \vec{P} \cdot \overline{AB}$.
 $W(\vec{P})_{/\mathcal{R}} = -mg\vec{e}_z \cdot ((x_B - x_A)\vec{e}_x + (y_B - y_A)\vec{e}_y + (z_B - z_A)\vec{e}_z) = mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$
 si $z_A > z_B$ (cas de la figure), alors $W(\vec{P})_{/\mathcal{R}} > 0$.

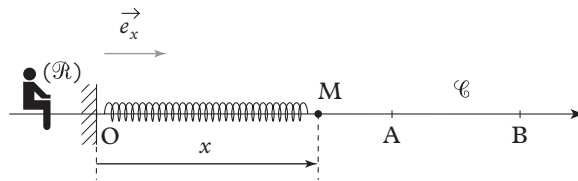


Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi dans le référentiel \mathcal{R} (verticale ascendante). On a considéré ici que le champ de pesanteur était uniforme !

Application 3 Travail de la force de rappel élastique d'un ressort

Un point matériel $M(m)$ peut se déplacer sans frottement le long d'un axe (O, \vec{e}_x) horizontal lié au référentiel \mathcal{R} .

Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est fixe (point O).



Déterminer l'expression du travail de la force de rappel élastique \vec{F} exercée par le ressort lors d'un déplacement allant de $A(x_A)$ vers $B(x_B)$ le long de \mathcal{C} .

Solution

La force de rappel élastique exercée par le ressort est :

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x.$$

Le travail de cette force pour le trajet allant de A vers B s'écrit :

$$W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\overline{OM}.$$

Sachant que $d\overline{OM} = dx \cdot \vec{e}_x$, on va :

$$\begin{aligned} W(\vec{F})_{/\mathcal{R}} &= \int_{A(\mathcal{C})}^B -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = -k \int_{A(\mathcal{C})}^B (x - \ell_0) dx \\ &= -k \left[\frac{(x - \ell_0)^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = -k \left[\frac{(x_B - \ell_0)^2}{2} - \frac{(x_A - \ell_0)^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

On remarque que le travail ne dépend que des positions initiale $A(x_A)$ et finale $B(x_B)$.

A.3. Énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel

Définition 3

L'énergie cinétique du point matériel $M(m)$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

7. Pour calculer une énergie cinétique, on utilise la relation : $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

$$\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(M)_{/\mathcal{R}}$$

\mathcal{E}_c énergie cinétique⁷ (J)
 m masse (kg)
 $\vec{v}(M)$ vitesse ($m \cdot s^{-1}$)



\mathcal{E}_c étant une fonction du point M et/ou du temps t , on notera indifféremment : $\mathcal{E}_c(t)_{/\mathcal{R}}$ ou $\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}}$.

B. Théorèmes énergétiques

B.1. Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Théorème 1

TPC

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces appliquées au point matériel $M(m)$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point M^8 :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g}.$$

8. Ce théorème permet notamment d'écrire des équations de mouvement ou de calculer des puissances.

Démonstration

Le PFD appliqué au point M dans \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = m \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right).$$

En multipliant scalairement cette relation par $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$, on obtient :

$$\vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = m \left(\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} \right) \text{ soit } \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(M)_{/\mathcal{R}_g} \right)$$

d'où le résultat :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

B.2. Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Théorème 2

TEC

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ entre deux instants t_1 et t_2 (ou deux positions M_1 et M_2) est égale à la somme des travaux des forces appliquées à M entre ces deux instants (ou ces deux positions)⁹.

$$\Delta \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c \text{ énergie cinétique en joule}^{10} \text{ (J)} \\ \mathcal{W}(\vec{F}) \text{ travail (J)} \end{array} \right.$$

$$= \mathcal{W}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$$

9. Ce théorème sert à comparer deux états, deux positions du point matériel.

10. $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Démonstration

On intègre le TPC entre t_1 et t_2 après avoir multiplié l'expression par dt :

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g} dt,$$

soit¹¹ $\mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} dt = \mathcal{W}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g}$.

11. Un point matériel possède de l'énergie cinétique s'il peut fournir du travail par modification de sa vitesse.

C. Une application des théorèmes énergétiques

C.1. Présentation du problème

On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible sans masse de longueur $\ell = OM$, suspendu en O , point fixe du référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen et d'une masse m assimilée à un point matériel $M(m)$. On repère la position du point M à l'aide des coordonnées polaires (d'axe $(O; \vec{e}_r)$) (fig. 4).

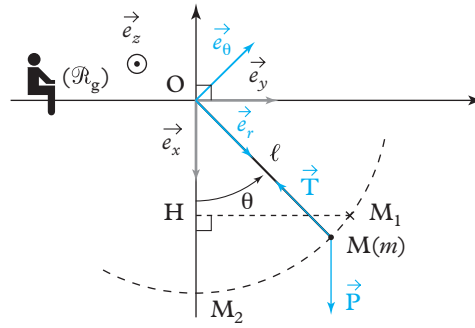


Fig. 4. Le pendule simple

On écarte la masse m d'un angle θ_0 et on la lâche, sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On cherche à déterminer l'équation différentielle du mouvement, ainsi que la vitesse au passage à la verticale.

On néglige tout frottement; \vec{g} est supposé constant.

C.2. Équation du mouvement

Afin de déterminer l'équation différentielle du mouvement, nous allons appliquer le TPC, dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , au point $M(m)$.

1) Bilan des forces appliquées au point M :

- poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$;
- tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

2) Puissances des forces appliquées au point M :

$$\bullet \mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$$

$$\text{or } \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et ainsi } \mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = mg\vec{e}_x \cdot \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = mg\ell \dot{\theta} \cos(\vec{e}_x, \vec{e}_\theta) = mg\ell \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta$$

$$\bullet \mathcal{P}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{T} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = 0 \text{ car } \vec{T} \perp \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$$

3) Énergie cinétique du point $M(m)$:

$$\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\theta}^2.$$

Appliquons alors le TPC :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g} \text{ soit } \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\theta}^2\right) = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta,$$

ce qui donne : $m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\ell \dot{\theta} \sin\theta$ et en simplifiant par $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} = 0$ étant la solution pour laquelle le pendule est immobile vertical vers le bas et qui ne nous intéresse pas) :

$$m\ell \ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0 \text{ soit } \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

C.3. Vitesse au passage de la verticale

Afin de déterminer la vitesse du point M au passage à la verticale, on va appliquer le TEC¹² entre l'instant initial $t = t_1 = 0$ (position M_1 , $\theta = \theta_0$) et l'instant final $t = t_2$ (position M_2 , $\theta = 0$ rad).

Travail des forces appliquées en M pour aller de M_1 (instant t_1) vers M_2 (instant t_2).

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{W}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{P} \cdot \overline{M_1 M_2} \quad (\text{car } \vec{P} = \text{cte}) \\ &= mg\vec{e}_x \cdot (\overline{M_1 H} + \overline{H M_2}) = mg\vec{e}_x \cdot (-\ell \sin\theta_0 \vec{e}_y + (\ell - \ell \cos\theta_0) \vec{e}_x) \\ &= mg\ell(1 - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

12. On aurait pu utiliser le TPC !

- $\mathcal{W}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g} = 0$ car $\vec{T} \perp \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$ à chaque instant.

Énergies cinétiques initiale et finale du point $M(m)$

$$\mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2(M)(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = 0 \text{ car } v(M_1)_{/\mathcal{R}_g} = 0$$

$$\mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2(M)(t_2)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Appliquons alors le TEC :

$$\mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{W}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{W}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g} \text{ soit } \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = mg\ell(1 - \cos\theta_0).$$

On obtient ainsi directement la vitesse au passage à la verticale :

$$v_2 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.^{13}$$

13. L'unité de $\sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}$ est $(m \cdot s^{-2} \cdot m)^{1/2} = m \cdot s^{-1}$, ce qui est homogène à la vitesse v_2 .

D. Mouvement à un degré de liberté

Dans tout ce paragraphe, seuls les mouvements de points matériels déterminés à l'aide d'un **unique** paramètre (degré de liberté) seront étudiés, ce paramètre peut être une position x pour un point matériel en mouvement sur un axe (Ox) , un angle θ repérant la position angulaire d'un point M se déplaçant sur une trajectoire connue, une distance r à un point O , etc.

D.1. Énergie potentielle, force conservative

Définition 4

Une force appliquée en un point M est conservative si son travail, dans un référentiel \mathcal{R} , entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux positions et pas du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2 .

En particulier, dans le cas d'un trajet fermé allant de M_1 vers M_1 , ce travail est nul.

Définition 5

Si la force \vec{F} est conservative, alors il existe une fonction $\mathcal{E}_p(M)_{/\mathcal{R}}$ du point M appelée énergie potentielle dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force \vec{F} entre M_1 et M_2 :

$$\Delta\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_p(M_2)_{/\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_1)_{/\mathcal{R}} = -\mathcal{W}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{E}_p(M)$ énergie
potentielle en joule (J)
 $\mathcal{W}(\vec{F})$ travail en joule
(J)

14. $\mathcal{E}_p(M)_{/\mathcal{R}}$ est une fonction indépendante du temps.

15. On dit que \vec{F} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p .

16. Un système possède de l'énergie potentielle s'il peut fournir du travail par variation de sa position.

17. Dans le cas où le paramètre est un angle θ , on a :

$$F = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}}}{d\theta}.$$

$\mathcal{E}_p(M)$ n'est fonction que des coordonnées de position du point M , c'est-à-dire ne dépend que de la position de M .¹⁴

Comme le mouvement du point M est repéré uniquement à l'aide du paramètre x (paramètre de position en mètre), on peut écrire^{15, 16, 17} :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)_{/\mathcal{R}_g}}{dx}$$

$$\text{En effet } \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_{p/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_p(M_1)_{/\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_2)_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{ainsi on retrouve : } \mathcal{E}_p(M_2)_{/\mathcal{R}} - \mathcal{E}_p(M_1)_{/\mathcal{R}} = -\int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\mathcal{W}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}.$$

D.2. Exemples de forces conservatives

D.2.1. Poids dans un champ de pesanteur uniforme

Nous avons montré que le travail du poids entre deux positions ne dépendait pas du chemin suivi, mais seulement des positions initiales et finales. Le poids (fig. 5) est donc une force conservative et il dérive d'une énergie potentielle,

dite énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}(\mathbf{M})$ définie par $-mg = \frac{d\mathcal{E}_{pp}(\mathbf{M})}{dz}$ soit :

$$\mathcal{E}_{pp} = mgz + \text{cte} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_{pp} \text{ énergie potentielle de pesanteur (J)} \\ m \text{ masse (kg)} \\ g \text{ intensité de pesanteur (m} \cdot \text{s}^{-2}) \\ z \text{ altitude (m)} \end{array} \right.$$

Le poids a comme composante $-mg\vec{e}_z$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} .



Si l'axe vertical était dirigé vers le bas, alors l'énergie potentielle s'écrirait :

$$\mathcal{E}_{pp} = -mgz + \text{cte}.$$

Il apparaît une constante qui est définie arbitrairement en choisissant une position d'origine des énergies potentielles, c'est-à-dire un point M_0 pour lequel $\mathcal{E}_{pp}(M_0) = 0$; par exemple, si on choisit cette référence à l'altitude $z = 0$, alors $\mathcal{E}_{pp} = mgz$. Le choix de cette constante n'a aucune importance car c'est la différence d'énergie potentielle qui est utile (la constante disparaît alors)¹⁸.

D.2.2. Force de rappel élastique d'un ressort

Nous avons montré que le travail de la force de rappel élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , ne dépendait pas du chemin suivi, mais seulement des positions initiales et finales ; c'est donc une force conservative qui dérive donc d'une énergie potentielle, dite énergie potentielle élastique \mathcal{E}_{pe} définie par (fig. 6) :

$$-\frac{d\mathcal{E}_{pe}}{dx} = -k(x - \ell_0) \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}.$$

La force de rappel élastique a comme composante $-k(x - \ell_0)\vec{e}_x$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel \mathcal{R} .

En posant $\mathcal{E}_{pe}(x = \ell_0) = 0$, on a : $\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.

Si on appelle $X = x - \ell_0$ (l'origine de l'axe est choisie en O_1 , extrémité du ressort à vide), on a :

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}kX^2 \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_{pe} \text{ énergie potentielle élastique (J)} \\ X \text{ allongement du ressort (m)} \\ k \text{ raideur du ressort (N} \cdot \text{m}^{-1}) \end{array} \right.$$

D.2.3. Force d'interaction gravitationnelle

Supposons que se trouve en O un point matériel de masse m_0 et en M un point matériel de masse m .

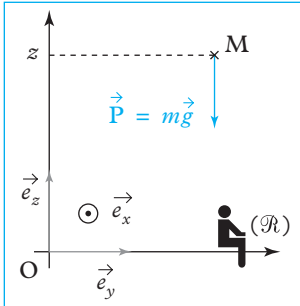


Fig. 5. Énergie potentielle de pesanteur.

18. Pour trouver le signe $\pm mgz$, on peut vérifier que \mathcal{E}_{pp} doit être positive au-dessus (au sens habituel du terme) de la référence d'énergie potentielle choisie, et négative au-dessous.

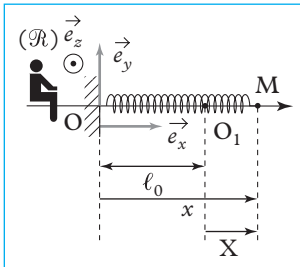


Fig. 6. Énergie potentielle élastique.

19. On parle aussi d'interaction newtonienne.

M est soumis à la **force d'interaction gravitationnelle**¹⁹ :

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

20. En faisant apparaître le champ de gravitation créé par O(m_0) en M

$$\vec{g}(M) = -\frac{G m_0}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_g \text{ s'écrit : } \vec{F}_g = m \vec{g}(M).$$

La masse m apparaissant ici s'appelle masse gravitationnelle du point matériel M : c'est la caractéristique du point matériel M vis-à-vis de la gravitation.

21. Il est remarquable que la masse gravitationnelle se confonde avec la masse inerte, caractéristique du point matériel M vis-à-vis de l'inertie, c'est-à-dire de la facilité avec laquelle la vitesse de M peut varier (la masse inerte apparaît dans l'expression

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

22. Cette relation porte le nom de loi de Coulomb ; on parle aussi d'interaction coulombienne.

23. En faisant apparaître le champ électrostatique créé par O(q_0) en M :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{e}_r$$

\vec{F}_e s'écrit :

$$\vec{F}_e = q \vec{E}(M).$$

F_g force (N)

G constante de gravitation universelle

($G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

m_0 et m ^{20, 21} masses (kg)

r distance OM (m)

Cette force est constamment dirigée vers O (elle est attractive).

Elle est de plus conservative :

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$$

\mathcal{E}_p énergie potentielle (J)

m et m_0 masses (kg)

r distance (m)

G constante de gravitation universelle

($G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

si on choisit la référence d'énergie potentielle à l'infini : $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$;

en effet :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F(r) = G \frac{m_0 m}{r^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r} + \text{cte.}$$

Comme on souhaite avoir $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$; il faut choisir cte = 0.

D.2.4. Force d'interaction électrostatique

Supposons que se trouve en O une charge électrique ponctuelle q_0 et en M une charge électrique q .

M est soumis à la **force d'interaction électrostatique**²² :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

F_e force (N)

ϵ_0 permittivité du vide

($\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)

q_0 et q charges²³ électriques (C)

r distance (m)

Cette force est constamment dirigée vers O (elle est attractive si q et q_0 sont de signe opposé : $qq_0 < 0$ et elle est répulsive si q et q_0 sont de même signe : $qq_0 > 0$).

Elle est de plus conservative.

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est :

$$\mathcal{E}_p(r) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

\mathcal{E}_p énergie potentielle (J)

ϵ_0 constante ($\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$)

q_0 et q charges électriques (C)

r distance (m)

Si on choisit la référence d'énergie potentielle à l'infini : $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$; en effet :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_p(r) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} + \text{cte.}$$

Comme on souhaite avoir $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$, il faut choisir cte = 0.

Remarques :

1) On constate une analogie entre les deux forces précédentes, toutes deux variant en $\frac{1}{r^2}$; on peut écrire, pour ces deux forces :

$$\begin{cases} \vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \\ \text{et} \\ \mathcal{E}_p(r) = \frac{K}{r} \end{cases} \quad \text{avec } K = -Gm_0m \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_0q.$$

2) Comparons l'ordre de grandeur de la norme de ces deux forces dans le cas de deux particules élémentaires de masse $m \approx 10^{-30}$ kg, de charge $|e| = 1,6 \times 10^{-19}$ C et distantes de $r = 10^{-10}$ m :

$$F_g = G \frac{m^2}{r^2} \approx 6,7 \times 10^{-51} \text{ N} \quad \text{et} \quad F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \approx 23 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

Soit $\frac{F_e}{F_g} \approx 3 \times 10^{42}$.

À l'échelle atomique, l'interaction électrostatique est prépondérante : il n'est pas nécessaire de prendre en compte l'interaction gravitationnelle.

À l'échelle des planètes, les masses mises en jeu étant considérables et les charges électriques quasi nulles, l'interaction gravitationnelle est dans ce cas la seule à prendre en compte.

D.3. Forces non conservatives

Toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. C'est le cas des forces de frottements qui sont des forces **dissipatives**

- **Interprétation de l'énergie potentielle**

Considérons un point matériel M soumis uniquement à des forces dérivant d'une énergie potentielle. La résultante \vec{F} de ces forces dérive donc d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p .

D.4. Énergie mécanique d'un point matériel et théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Définition 6

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(M)_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R} est, à chaque instant, la somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)_{/\mathcal{R}}$ du point M et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)_{/\mathcal{R}}$ des forces conservatives appliquées au point M :

$$\mathcal{E}_m(\mathbf{M}, t)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}.$$

L'énergie mécanique dépend, tout comme $\mathcal{E}_c(t)_{/\mathcal{R}}$ et $\mathcal{E}_p(M)_{/\mathcal{R}}$ du référentiel d'étude : $\Delta \mathcal{E}_m_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(M_2, t_2)_{/\mathcal{R}} - \mathcal{E}_m(M_1, t_1)_{/\mathcal{R}}$.

Théorème 3

TEM

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel M(m) entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au point M.

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_m_{/\mathcal{R}_g} &= \mathcal{E}_m(M_2, t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_m(M_1, t_1)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= W(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}_g} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_m(M_2, t_2)$ énergie mécanique finale (J)

$\mathcal{E}_m(M_1, t_1)$ énergie mécanique initiale (J)

$W(\vec{F}_{nc})$ travail des forces non conservatives (J)

On peut aussi énoncer le théorème de la puissance mécanique (TPM) :

$$\frac{d\mathcal{E}_m(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}_g}$$

Démonstration

24. Le TEM n'est qu'une réécriture du TEC.

En appliquant le TEC²⁴, on a :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} = W(\vec{F}_{cons})_{/\mathcal{R}_g} + W(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}_g}.$$

$$\text{Or } W(\vec{F}_{cons})_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_p(M_1)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_p(M_2)_{/\mathcal{R}_g};$$

d'où le résultat :

$$(\mathcal{E}_c(t_2)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_p(M_2)_{/\mathcal{R}_g}) - (\mathcal{E}_c(t_1)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_p(M_1)_{/\mathcal{R}_g}) = W(\vec{F}_{nc})_{/\mathcal{R}_g}.$$

25. ... ou à des forces non conservatives qui ne travaillent pas.

• Si le point matériel $M(m)$ n'est soumis qu'à des forces conservatives²⁵, alors :

$$\mathcal{E}_m(M, t)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte }^{26},$$

26. L'équation $\mathcal{E}_m(M, t)_{/\mathcal{R}_g}$ est une intégrale première du mouvement : elle relie x et \dot{x} .

et l'énergie mécanique du point matériel $M(m)$ se conserve au cours du temps. Les forces conservatives conservent l'énergie sous forme mécanique.

On dit que le système étudié (le point matériel) est un **système conservatif**.

• Si le point matériel $M(m)$ est soumis à des forces non conservatives **dissipatives** alors l'énergie mécanique ne se conserve pas : elle diminue au cours du temps. L'énergie ne reste pas sous forme mécanique ; elle est perdue et se retrouve par exemple sous forme d'énergie thermique (échauffement).

Il existe des forces non conservatives non dissipatives dont le travail est positif : dans ce cas l'énergie mécanique augmente au cours du temps. Ce travail peut être utilisé pour entretenir les oscillations d'un système mécanique en compensant les frottements.

D.5. Utilisations des courbes d'énergie potentielle d'un système conservatif à un degré de liberté

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au mouvement d'un point matériel $M(m)$ décrit par un paramètre x unique dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; il est soumis à un ensemble de forces conservatives dont la résultante $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$

dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ (on a la relation : $F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}$).

Le système étudié étant conservatif (le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives), son énergie mécanique \mathcal{E}_m se conserve au cours du temps. Nous ferons l'étude à partir du tracé de la courbe : $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$.

D.5.1. Détermination des positions d'équilibre ; étude de leur stabilité

Définition 7

Le point matériel $M(m)$ est à l'équilibre en x_0 si déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.

Sa vitesse doit être nulle à tout instant, son accélération aussi, et, d'après le PFD : $F(x_0) = 0$. Ainsi la condition d'équilibre en x_0 est²⁷ :

27. Dans le cas où le paramètre est un angle θ , on a :

$$F(\theta_0) = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta_0) = 0$$

$$\text{soit } \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(\theta_0) = 0.$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) = 0$$

Définition 8

Une position d'équilibre x_0 est stable si le point matériel a tendance à revenir vers la position d'équilibre x_0 s'il en est écarté.

À proximité de x_0 , il doit être soumis à une force de rappel :

$$\begin{cases} F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} > 0 \text{ si } x < x_0 ; \\ F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} < 0 \text{ si } x > x_0 . \end{cases}$$

Ainsi la position d'équilibre x_0 est stable si :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) > 0 .$$

x_0 est une position d'équilibre stable si la courbe $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$ présente un minimum en x_0 .

Voici les différents profils de courbe d'énergie potentielle que l'on peut rencontrer (fig. 7).

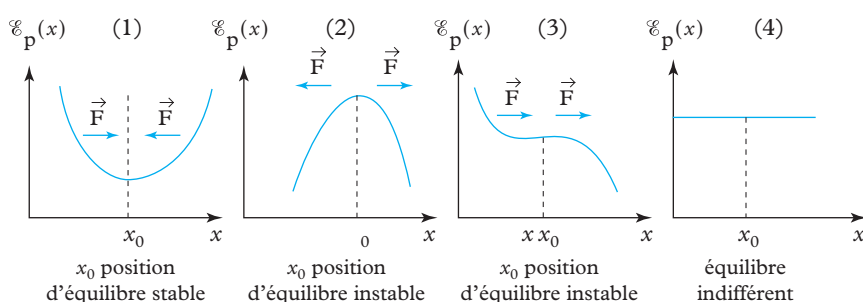


Fig. 7. Profils des courbes d'énergie potentielle.



La courbe (4) de la figure 7 correspond à un équilibre indifférent (toutes les positions peuvent être des positions d'équilibre).

Conseil

Pour retenir ces notions, il suffit d'imaginer une bille se déplaçant, sous l'action de son poids (\vec{g} uniforme), dans une cuvette ayant le profil $\mathcal{E}_p(z)$:

- si la bille est déposée au fond de la cuvette, sans frottement (courbe (1)), elle y reste et si elle est écartée du fond, elle tend à y revenir ;
- si la bille est déposée sur une bosse, elle y reste mais si elle est écartée du sommet, elle s'éloigne de ce sommet (courbe (2)).

D.5.2. Étude du mouvement autour d'une position d'équilibre stable (petites variations)

Posons $x = x_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll |x_0|$) ; écrivons la conservation de l'énergie mécanique (ε représente l'écart entre la position x du point M et sa position d'équilibre x_0) :

$$\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2 .$$

Effectuons un développement limité de la fonction $x \rightarrow \mathcal{E}_p(x)$ autour de x_0 ²⁸ :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + (x - x_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) + \dots$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) = 0$$

car x_0 est une position d'équilibre

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) = k > 0$$

car la position d'équilibre est stable²⁹

²⁸ Si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0) = 0$, il faut

poursuivre le développement limité à un ordre plus élevé.

²⁹ k est homogène à la raideur d'un ressort ($N \cdot m^{-1}$).

ainsi :
$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \times k ;$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{k}{2} \varepsilon^2 = \text{cte} ;$$

en dérivant par rapport au temps cette relation, on a : $m \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} + k \dot{\varepsilon} \varepsilon = 0 ;$

en éliminant la solution $\dot{\varepsilon} = 0$, on obtient : $\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon = 0 ;$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}(x_0)$ on trouve l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 ;$$

dont la solution est sinusoïdale de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

D.5.3. Caractérisation du mouvement

• Comme $\mathcal{E}_c(x) > 0$ ($\dot{x}^2 > 0$) les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels :

$$\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_m(x) = \mathcal{E}_0$$

• Ainsi dans le cas de la (fig. 8) le point matériel ne peut jamais atteindre l'intervalle $]x_1 ; x_2[$ ²⁵ ; s'il se trouve à une position $x \leq x_1$, il ne peut pas passer à une position $x \geq x_2$: il y a une **barrière de potentiel**. De plus le mouvement n'est pas borné : le point matériel (s'il se trouve à une position $x \leq x_1$) peut aller jusqu'à x_1 (où il a une vitesse nulle) mais repartira vers les $x \rightarrow -\infty$ ²⁶.

• Dans le cas de la (fig. 9), le point matériel ne peut pas sortir de l'intervalle $[x_1 ; x_2]$: il se trouve dans un **puits de potentiel**.

De plus, le mouvement est borné et périodique²⁷ entre les positions x_1 et x_2 .

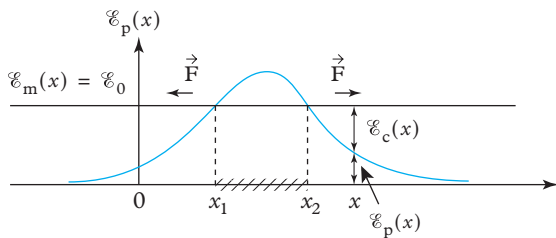


Fig. 8. Barrière de potentiel.

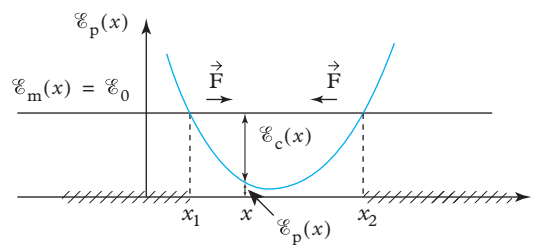


Fig. 9. Puits de potentiel.

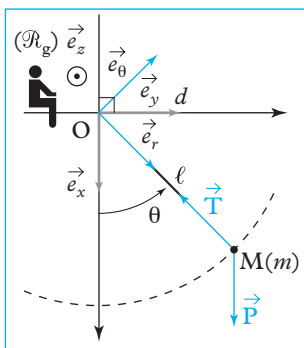


Fig. 10. Le pendule simple.

• Exemple : le pendule simple

Reprenons l'exemple précédent de ce chapitre.

L'énergie potentielle du point M(m) (suspendu au bout du pendule) est (fig. 10) :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

(référence en $\theta = 0$), en effet, il n'y a que le poids qui travaille et il s'agit d'une force conservative dérivant d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(x) = -mgx + \text{cte}, \text{ (ici } x = l \cos \theta \text{)}.$$

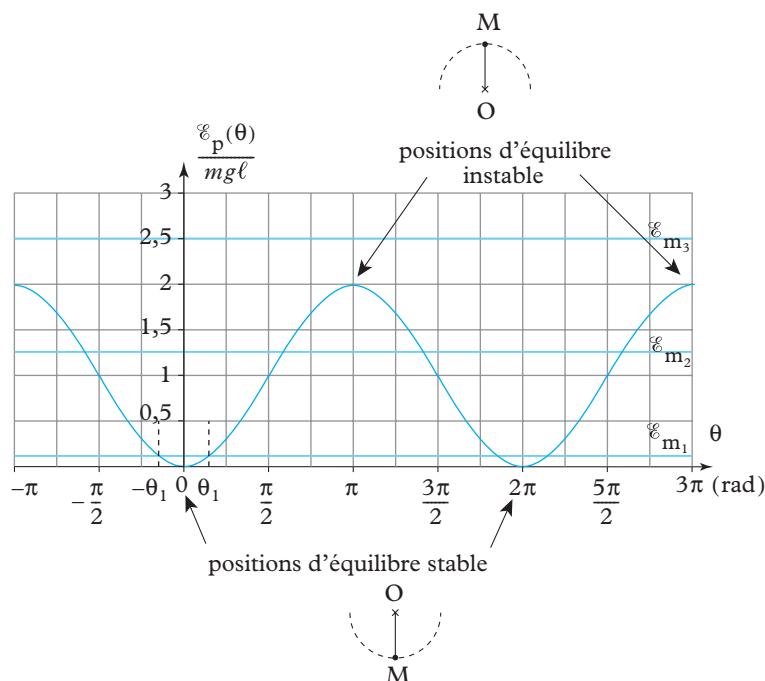


Fig. 11. Énergie potentielle du pendule simple.

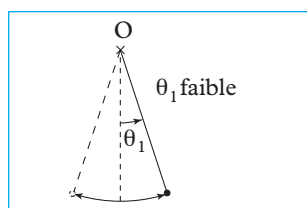


Fig. 12. Mouvement de petites amplitudes du pendule simple.

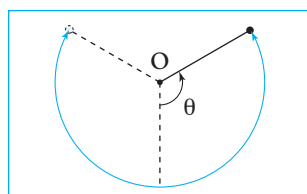


Fig. 13. Mouvement de grandes amplitudes du pendule simple.

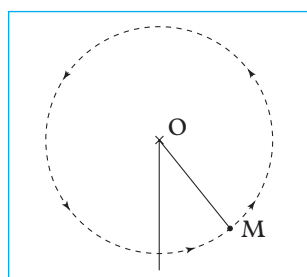


Fig. 14. Mouvement de révolution du pendule simple.

L'analyse de la courbe d'énergie potentielle (fig. 11) permet de repérer les positions d'équilibre stable (minimum d' \mathcal{E}_p) en $\theta = \dots, 0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}, \dots$ les positions d'équilibre instable $\theta = \dots, -\pi \text{ rad}, +\pi \text{ rad}, +3\pi \text{ rad}, \dots$

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_1}$ et si $\theta(t=0) \in [-\pi; \pi] \text{ rad}$, alors le pendule va osciller autour de la position $\theta = 0 \text{ rad}$ de façon quasi-sinusoïdale, avec une période $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$; il

faut remarquer que les mouvements sont d'amplitudes faibles autour de $\theta = 0$ (fig. 12).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_2}$ et si $\theta(t=0) \in [-\pi; \pi] \text{ rad}$, alors le pendule va osciller autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0 \text{ rad}$ de façon non sinusoïdale (fig. 13).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_3}$ la vitesse ne s'annule jamais et le mouvement est révolutif de type fronde (fig. 14).

D.5.4. Portrait de phase

Le point matériel $M(m)$ dont la position est décrite à l'aide du paramètre x , possède une vitesse \dot{x} ; ces deux informations x et \dot{x} sont suffisantes pour connaître l'état du point matériel M à chaque instant.

On utilise une représentation graphique dans le **plan de phase** ($x ; \dot{x}$) d'un point $P(x ; \dot{x})$ représentant l'état du point M à un instant donné. Ce point P appartient à une courbe appelée **trajectoire de phase** dépendant des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ ³³ et représentant l'évolution du point P au cours du temps. L'ensemble des trajectoires de phase pour diverses conditions initiales constitue le **portrait de phase**.

La fig. 15 regroupe les courbes d'énergie potentielle et de portrait de phase du pendule simple (en l'absence de frottement).

³³ Les conditions initiales doivent être réalisables.

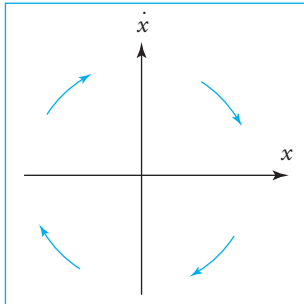


Fig. 16. Sens parcouru dans le plan de phase.

34. Les positions d'équilibre stable sont: $\theta = -2\pi; 0; 2\pi; \dots$ rad.

35. Dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$ cette trajectoire serait une ellipse.

36. $0 < \mathcal{E}_{m_1} \ll 2mg\ell$.

37. $0 < \mathcal{E}_{m_2} < 2mg\ell$.

38. $\mathcal{E}_{m_2} > 2mg\ell$.

39. $\mathcal{E}_m = 2mg\ell$.

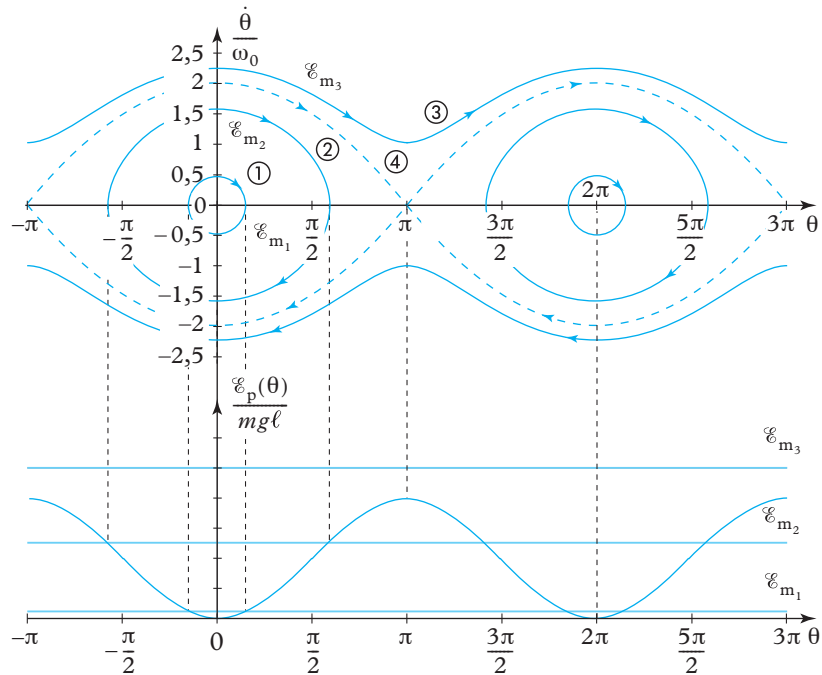


Fig. 15. Portrait de phase et courbe d'énergie potentielle du pendule simple.

- Les trajectoires de phase sont toutes parcourues dans le même sens, en effet lorsque $x > 0$, x augmente et lorsque $x < 0$, x diminue (fig. 16).

- Les trajectoires de phase fermées correspondent à des mouvements périodiques: c'est le cas des trajectoires ① et ②. Ces deux mouvements sont périodiques autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ ³⁴.

La trajectoire ①, dans le plan $(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$, est un cercle³⁵ caractéristique d'un oscillateur harmonique (θ varie sinusoidalement au cours du temps).

En effet, on peut remarquer que pour un point $P(\theta; \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$ appartenant à cette trajectoire ①, on a:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta) = \mathcal{E}_{m_1}^{36} = \text{cte.}$$

Or sur cette trajectoire θ est petit donc $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, ainsi:

$$\frac{m\ell g}{2} \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \theta^2 \right] = \mathcal{E}_{m_1}.$$

On a: $\mathcal{E}_{m_1} = k \cdot OP^2$ ($OP = \text{cte}$, donc P décrit un cercle).

La trajectoire de phase ② correspond à un mouvement d'énergie \mathcal{E}_{m_2} ³⁷ (amplitude supérieure à celle de ①); la courbe n'est plus un cercle ce qui atteste du caractère non sinusoidal des oscillations.

- La trajectoire ③ correspond à une énergie mécanique \mathcal{E}_{m_3} ³⁸; $\dot{\theta}$ conserve un signe constant (mouvement de fronde, révolutif du pendule).

- La trajectoire ④ est une limite entre les deux types de mouvements précédents: c'est une **séparatrice**³⁹. Elle relie les **points d'équilibre instable** et correspond à des mouvements d'amplitude π rad.

Remarque: en l'absence de frottement ($\mathcal{E}_m = \text{cte}$), les trajectoires sont fermées:

- si $\mathcal{E}_m \gg 2mg\ell$, alors $\mathcal{E}_c \gg \mathcal{E}_p$ et on a alors un mouvement à vitesse angulaire quasi constante:

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \approx \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m,$$

soit :

$$\frac{1}{2} m \ell g \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 = \mathcal{E}_m$$

$$\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{2 \mathcal{E}_m}{m g \ell}} = \text{cte.}$$

40. Les positions d'équilibre (stables ou non) font parties de l'ensemble des points singuliers pour lesquels $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ (ils sont donc sur l'axe horizontal).

- les positions d'équilibre stable sont repérables : les trajectoires de phase tournent autour d'elles⁴⁰.

Remarque : en présence de frottements, l'énergie mécanique diminue et les trajectoires de phase se terminent en des points d'équilibre stable (sur l'axe horizontal) ; ces points sont des **attracteurs** (voir (fig. 17)).

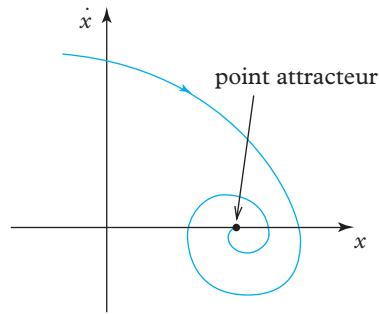


Fig. 17. Attracteur dans le plan de phase.

L'essentiel

✓ Puissance d'une force $\mathcal{P}(\vec{F})_{/R}$

La puissance $\mathcal{P}(\vec{F})_{/R}$ d'une force \vec{F} , appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$ par rapport au référentiel R , est :

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/R} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/R} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(\vec{F}) \text{ puissance en watts (W)} \\ \vec{F} \text{ force (N)} \\ \vec{v}(M) \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

Propriétés

- Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/R} = 0$ (par exemple si $\vec{F} \perp \vec{v}$), la force \vec{F} ne travaille pas.
- Si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/R} > 0$ la force \vec{F} est motrice ; si $\mathcal{P}(\vec{F})_{/R} < 0$ la force \vec{F} est résistante.

✓ Travail d'une force $W(\vec{F})_{/R}$

Dans le référentiel R , le travail de la force \vec{F} appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 , en suivant la courbe \mathcal{C} est :

$$\begin{aligned} W(\vec{F})_{/R} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F})_{/R} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/R} dt \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} W(\vec{F}) \text{ travail en joule (J)} \\ \mathcal{P}(\vec{F}) \text{ puissance (W)} \\ \vec{F} \text{ force (N)} \\ \vec{v}(M)_{/R} \text{ vitesse de M à l'instant } t \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

Propriétés

- Si $W(\vec{F})_{/R} = 0$ (par exemple, si $\vec{F} \perp \vec{v}$), la force ne travaille pas.
- Si $W(\vec{F})_{/R} > 0$, la force \vec{F} est motrice ; si $W(\vec{F})_{/R} < 0$, la force \vec{F} est résistante.

✓ Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique du point matériel M(m) en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$ par rapport au référentiel R est :

$$\mathcal{E}_c(M)_{/R} = \frac{1}{2} m v^2(M)_{/R} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c \text{ énergie cinétique en joule (J)} \\ m \text{ masse (kg)} \\ \vec{v}(M) \text{ vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$

✓ Force conservatives et énergie potentielle d'un point matériel

Une force appliquée en un point M est conservative si son travail, dans un référentiel R , entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux positions et pas du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2 .

Si la force \vec{F} est conservative, alors il existe une fonction $\mathcal{E}_p(M)_{/R}$ appelée énergie potentielle dont la variation est égale à l'opposé du travail de la force \vec{F} entre M_1 et M_2 :

$$\Delta \mathcal{E}_{p/R} = \mathcal{E}_p(M_2)_{/R} - \mathcal{E}_p(M_1)_{/R} = -W(\vec{F})_{/R} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_p(M) \text{ énergie potentielle en joule (J)} \\ W(\vec{F}) \text{ travail (J)} \end{array} \right.$$

Propriétés

- $\mathcal{E}_p(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ n'est fonction que des coordonnées de M.
- Soit x le paramètre de position de M, on a :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}}{dx}.$$

- L'énergie potentielle de pesanteur d'un point M s'écrit :

$$\mathcal{E}_{pp}(\mathbf{M}) = mgz + \text{cte},$$

si l'axe vertical (O ; \vec{e}_z) est dirigé vers le haut.

- L'énergie potentielle élastique dans le cas d'un ressort s'écrit :

$$\mathcal{E}_{pe}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}.$$

- L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle s'écrit :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{Gm_0m}{r} + \text{cte}.$$

- L'énergie potentielle d'interaction électrostatique s'écrit :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{r} + \text{cte}.$$

✓ Énergie mécanique d'un point matériel

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ d'un point matériel M(m) dans le référentiel est \mathcal{R} est, à chaque instant, la somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)_{/\mathcal{R}}$ du point M et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ des forces conservatives appliquées au point M :

$$\mathcal{E}_m = (\mathbf{M}, t)_{/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}.$$

✓ Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces appliquées au point matériel M(m) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point M :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{\mathbf{F}})_{/\mathcal{R}_g}.$$

✓ Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel M(m) entre deux instants t_1 et t_2 (en deux positions \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2) est égale à la somme des travaux des forces appliquées à M entre ces deux instants (en ces deux positions).

$$\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_1)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{W}(\vec{\mathbf{F}})_{/\mathcal{R}_g} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c(\mathbf{M}) \text{ énergie cinétique (J)} \\ \mathcal{W}(\vec{\mathbf{F}}) \text{ travail des forces (J)} \end{array} \right.$$

✓ Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel M(m) entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au point M.

$$\Delta\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_m(\mathbf{M}_2, t_2)_{/\mathcal{R}_g} - \mathcal{E}_m(\mathbf{M}_1, t_1)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{W}(\vec{\mathbf{F}}_{nc})_{/\mathcal{R}_g} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_m(\mathbf{M}_2, t_2) \text{ énergie mécanique} \\ \text{finale (J)} \\ \mathcal{E}_m(\mathbf{M}_1, t_1) \text{ énergie mécanique} \\ \text{initiale (J)} \\ \mathcal{W}(\vec{\mathbf{F}}_{nc}) \text{ travail des forces} \\ \text{non conservatives (J)} \end{array} \right.$$

✓ Théorème de la puissance mécanique (TPM)

$$\frac{d\mathcal{E}_m(\mathbf{M})_{/R_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})_{/R_g} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_m(\mathbf{M}) \text{ énergie mécanique (J)} \\ \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) \text{ puissance des forces non conservatives (W)} \end{array} \right.$$

Propriétés

- Si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives et/ou à des forces qui ne travaillent pas alors :

$$\mathcal{E}_m(\mathbf{M}, t)_{/R_g} = \text{cte}$$

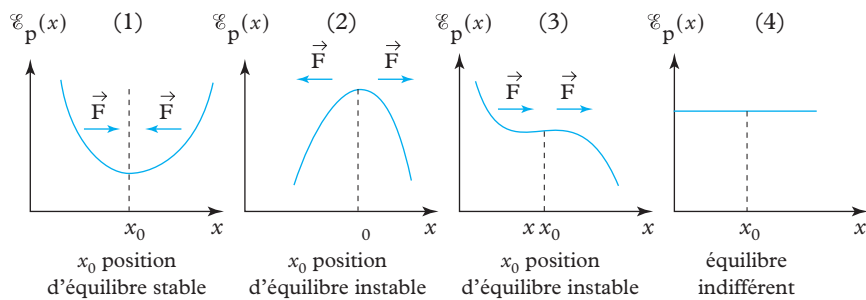
L'énergie mécanique du point M se conserve au cours du temps (le système étudié est conservatif).

- Si le point matériel est soumis à des forces dissipatives (frottement), l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

✓ Mouvement conservatif à un degré de liberté

- Le point matériel M(m) est à l'équilibre en x_0 si, déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.
- Une position d'équilibre x_0 est stable si le point matériel a tendance à revenir vers la position d'équilibre x_0 s'il en est écarté.
- x_0 est une position d'équilibre stable si la courbe présente un minimum en x_0 .

Les maxima de \mathcal{E}_p correspondent aux positions d'équilibre instables et les minima aux positions d'équilibre stable.



Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TPC?

Soit M un point matériel de masse m en mouvement à un degré de liberté dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TPC.

→ Savoir faire

- ❶ Faire le bilan des forces appliquées au système étudié (point matériel M).
- ❷ Exprimer les puissances des forces connues.
- ❸ Appliquer le TPC afin de déterminer une équation différentielle du mouvement. Si des forces inconnues (forces de liaison, réaction, tension...) sont perpendiculaires au mouvement, elles n'apparaissent pas dans l'équation.

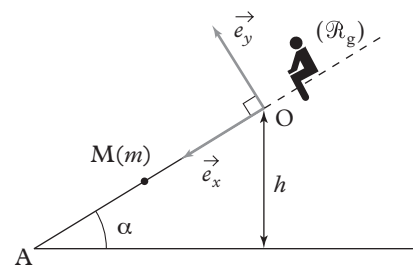
→ Application

Un point matériel $M(m)$ glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il démarre du point O sans vitesse initiale. On travaille dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ supposé galiléen.

La position du point M est repérée par la variable x :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x.$$

Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement.



Solution

Système étudié : point matériel $M(m)$.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

❶ Les forces appliquées au système sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ vertical et vers le bas ;
- la réaction du plan incliné, normale au support en l'absence de frottement, $\vec{N} = N\vec{e}_y$.

❷ La vitesse de M est $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$. Ainsi :

- puissance du poids : $\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = mg\dot{x}\sin\alpha$;
- puissance de la réaction : $\mathcal{P}(\vec{N}) = 0$.



\vec{N} étant normale au support, elle ne travaille pas.

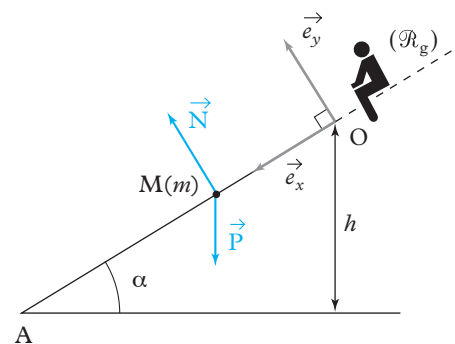
❸ On applique le TPC au point matériel $M(m)$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} \text{ (TPC)} ;$$

ce qui donne : $m\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x}\sin\alpha$.

En éliminant la solution parasite $\ddot{x} = 0$ et en simplifiant par m , on obtient :

$$\ddot{x} = g\sin\alpha.$$



Méthode n°2

Comment déterminer la vitesse en un point de la trajectoire à l'aide du TEC/TEM?

Soit M un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . À partir de la connaissance de la vitesse en un point de la trajectoire, on souhaite déterminer la vitesse en un autre point de cette trajectoire.

→ Savoir faire

- ❶ Faire le bilan des forces appliquées au système (point matériel M) étudié.
- ❷ Exprimer les énergies potentielles des forces dérivant d'une énergie potentielle et les travaux des autres forces.
- ❸ Appliquer le TEC/TEM afin de déterminer la vitesse inconnue.



Le TEM n'est qu'une réécriture du TEC dans laquelle les travaux des forces conservatives apparaissent sous la forme d'une variation d'énergie potentielle.

→ Application

On lance depuis le point A un point matériel $M(m)$ avec une vitesse initiale v_0 selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il glisse sans frottement sur ce plan. On travaille dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On repère la position du point M à l'aide de :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x.$$

Déterminer en utilisant le TEM la vitesse du point matériel $M(m)$ en un point quelconque de sa trajectoire.

Solution

Système étudié : point matériel $M(m)$.

Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

- ❶ Bilan des forces appliquées au système :
 - le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ vertical et dirigé vers le bas ;
 - la réaction du plan incliné, normale au support en l'absence de frottement $\vec{N} = N\vec{e}_y$.
- ❷ – Énergie potentielle des forces : le poids dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{pp} = mgH = mg(h - x\sin\alpha)$, en notant H l'altitude de M au-dessus de A .
- Travaux des autres forces : la réaction \vec{N} étant perpendiculaire au support, elle ne travaille pas lors du mouvement.
- ❸ On applique le TEM au point matériel $M(m)$ dans \mathcal{R}_g , d'où :

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{W}(\vec{F}_{nc}) = 0 \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_m(t) = \text{cte.}$$

$$\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \mathcal{E}_c(t=0) + \mathcal{E}_p(t=0) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - x\sin\alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0.$$

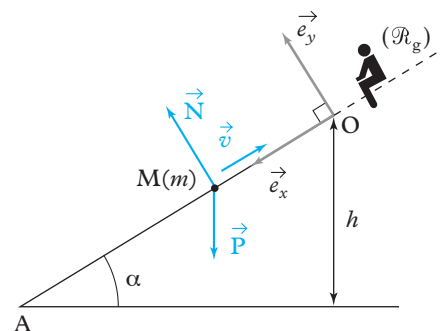
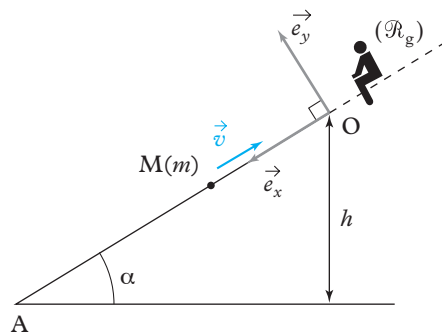


$\mathcal{E}_p(t=0) = 0$ car la référence d'énergie potentielle a été choisie au niveau du point A de départ.



À l'aide du TEC, on aurait écrit : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(h - x\sin\alpha)$.

$$\text{On a donc : } v = \sqrt{v_0^2 - 2g(h - x\sin\alpha)}.$$



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Unités

Déterminer les unités des expressions suivantes :

- $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$;
- $mgv\cos\theta$;
- $mg\ell\sin\theta$;
- $\frac{1}{2}k(x-\ell)^2$;
- $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

m est une masse ; r , x et ℓ sont des distances ; g est le champ de pesanteur terrestre ; θ est un angle ; ω est une vitesse angulaire ; k est la raideur d'un ressort ; \mathcal{E} est une énergie ; v est une vitesse.

Ex. 2 Travail d'une force (cas 1)

On amène une charge $q_1 = e$ depuis une distance $r \rightarrow +\infty$ jusqu'à une distance $r_0 = 10^{-9}$ m d'une charge $q_2 = -e$, en ligne droite.

- 1) Exprimer et calculer le travail de la force d'interaction électrostatique lors de ce trajet.
- 2) Cette force \vec{F} est-elle motrice ?
- 3) Retrouver ce résultat en utilisant l'énergie potentielle.

Ex. 3 Travail d'une force (cas 2)

On considère un point matériel $M(m)$ pouvant se déplacer le long de l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x)$; il est soumis à une force $-F_0\vec{e}_x$ (constante) s'il se déplace dans le sens des x croissants et à une force $F_0\vec{e}_x$ s'il se déplace dans le sens des x décroissants.

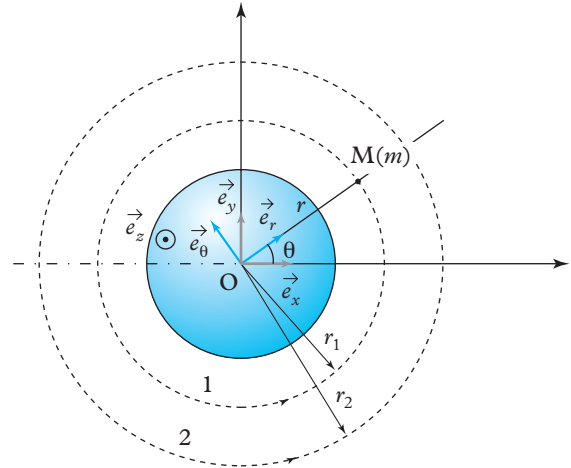
- 1) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller directement du point A($x = 1$) au point B($x = 3$) en suivant l'axe $(O ; \vec{e}_x)$.
- 2) Déterminer le travail de la force \vec{F} pour aller du point A($x = 1$) au point B($x = 3$) en passant par le point C($x = 4$) tout en restant sur l'axe $(O ; \vec{e}_x)$.
- 3) La force \vec{F} est-elle conservative ? Si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

Niveau 2

Ex. 4 Un satellite

Un satellite assimilé à un point matériel M de masse $m = 1\,000$ kg est en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la Terre. On suppose qu'à une distance r du centre

de la Terre, un satellite subit une force d'interaction gravitationnelle $F = \frac{GM_T m}{r^2}$ constamment dirigée vers O. On suppose que le référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



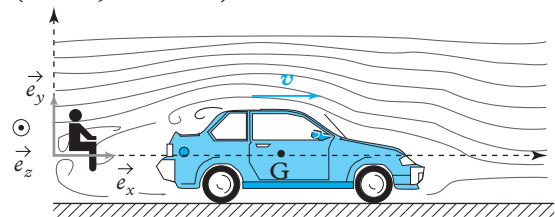
- 1) À l'aide du PFD, calculer la vitesse v_1 (respectivement v_2) que doit posséder le satellite pour être sur l'orbite de rayon r_1 (respectivement r_2).
- 2) Donner l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force d'interaction gravitationnelle F (on prendra la référence d'énergie potentielle à l'infini).
- 3) Calculer la valeur de l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite de rayon r_1 puis sur celle de rayon r_2 .
- 4) Calculer la variation d'énergie mécanique entre les 2 orbites de rayon r_1 et r_2 . Que devra-t-on faire si on veut transférer le satellite sur l'orbite plus haute ($r = r_2$) ? Quel théorème nous permet de l'affirmer ?

Données :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} ; \quad r_1 = 6\,500 \text{ km} ; \\ M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; \quad r_2 = 42\,000 \text{ km}.$$

Ex. 5 Accélération d'une voiture

Une voiture assimilée à un point matériel G de masse $m = 1\,300$ kg accélère depuis l'arrêt sur une route horizontale. Cette voiture est propulsée par un moteur qui développe une puissance $\mathcal{P} = 2(60 - v)v^2$ (\mathcal{P} en W, vitesse v de la voiture en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Elle est aussi soumise à une force de frottement horizontale $F = 450 + 0,4v^2$ (F en N, v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).



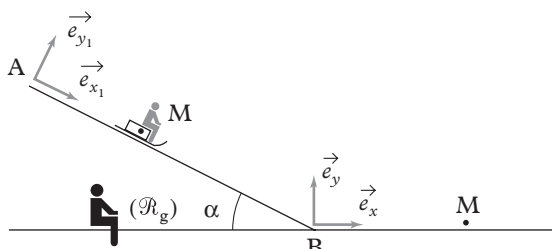
Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

$$\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = v\vec{e}_x$$

- 1) Calculer la puissance maximum du moteur.
Indiquer (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) la vitesse associée.
- 2) À l'aide du TPC, calculer (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) la vitesse maximum atteinte par ce véhicule sur route horizontale.
- 3) À l'aide de TPC, calculer (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) l'accélération maximum du véhicule.
Indiquer la vitesse (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) à laquelle cela se produit.

Ex. 6 L'enfant et sa luge

Un enfant et sa luge, système assimilé à un point matériel M de masse m , glissent sans frottement sur une piste (plan incliné de longueur L faisant un angle α avec l'horizontale). Arrivés en bas, ils continuent leur trajet sur un plan horizontal où ils sont freinés par une force de frottements solide (coefficient f).



L'enfant démarre avec une vitesse nulle en A.

On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}_g(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ supposé galiléen. La position de M est repérée lors de la première phase, par la variable x_1 :

$$\overrightarrow{AM} = x_1 \vec{e}_{x_1}$$

et lors de la seconde phase, par la variable x :

$$\overrightarrow{BM} = x \vec{e}_x$$

- 1) Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de glissement sur le plan incliné (phase 1). Déterminer la vitesse en B ainsi que la durée de cette phase.
- 2) Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de freinage sur le plan horizontal (phase 2).
Déterminer la distance d'arrêt D.
- 3) Déterminer la durée totale du mouvement.

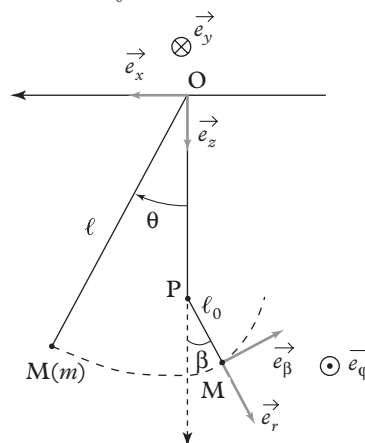
Niveau 3

Ex. 7 Un pendule

On considère un pendule simple (masse m , longueur ℓ) suspendu au point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen. On l'écarte à $t = 0$

d'un angle θ_0 du côté gauche (à gauche de OP) et on le lâche sans vitesse initiale (le fil est inextensible, sans masse et est tendu). Arrivé à la verticale, un clou planté au niveau du point P modifie la longueur du pendule, elle devient ℓ_0 .

- 1) Exprimer la vitesse v_0 de passage à la verticale.
- 2) Exprimer l'angle maximum β_{\max} atteint par le pendule du côté droit (à droite de OP); l'exprimer en fonction de θ_0 et $r = \frac{\ell}{\ell_0}$.
- 3) Tracer la courbe représentative $r \mapsto \beta_{\max}(r)$ en tenant compte des valeurs numériques.
Commenter.
- 4) Déterminer l'expression de la tension du fil pour la position extrême de la masse m du côté droit (à droite de OP). Préciser pour quel angle β_{\max} elle s'annule.
Comment choisir ℓ_0 pour que ceci ne se produise jamais?

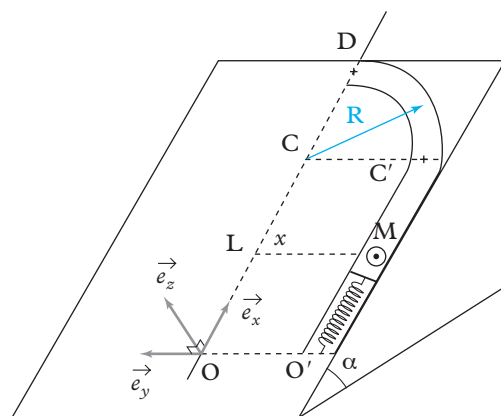


Données :

$$\ell = 1 \text{ m}; \quad m = 0,1 \text{ kg}; \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ.$$

Ex. 8 La bille du flipper

Une bille de flipper de masse m , assimilée à un point matériel M est lancée par un ressort et se déplace sans frottement à l'intérieur d'un guide rectiligne se terminant en arc de cercle. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen; le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) fait un angle α avec l'horizontale.



Le ressort possède une raideur k et une longueur à vide ℓ_0 ; la position O' , origine des x , correspond à l'extrémité fixe du ressort. La bille repose sur l'extrémité du ressort et à $t = 0$, on comprime le ressort jusqu'à ce que sa longueur soit x_0 , puis on le laisse évoluer (sans vitesse initiale), il se détend alors et met en mouvement la bille (on suppose qu'elle quitte le ressort lorsque la longueur du ressort est ℓ_0).

- 1) En utilisant le TEM exprimer la position x_1 de la bille M au moment où sa vitesse s'annule.
- 2) Tracer la courbe $x_0 \mapsto x_1(x_0)$. Donner la longueur de compression minimum nécessaire pour que la bille sorte du guide en D.

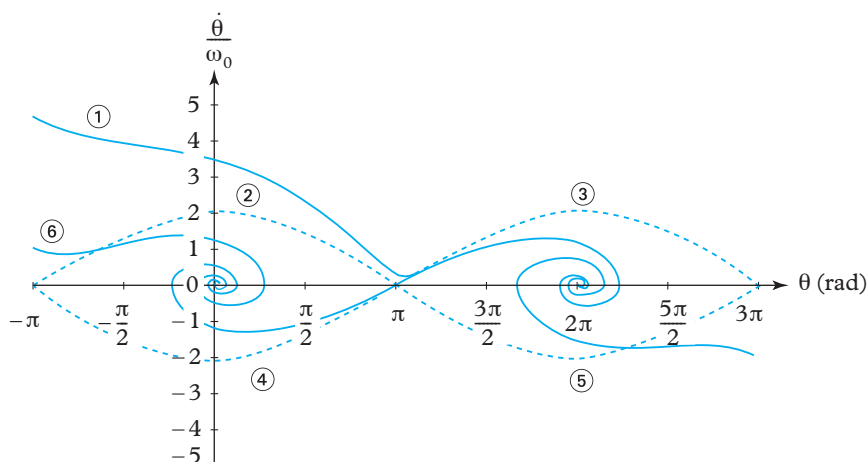
Données : $m = 100 \text{ g}$; $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $L = 80 \text{ cm}$; $R = 20 \text{ cm}$; $\alpha = 10^\circ$; $\ell_0 = 12 \text{ cm}$.

Ex. 9 Portrait de phase

On considère un pendule simple se déplaçant en présence de frottement; son mouvement vérifie l'équation différentielle $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

Son portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous.

- 1) À quoi voit-on qu'il y a du frottement?
- 2) Indiquer les positions d'équilibres stables, instables.



- 3) Commenter l'allure des différentes courbes.

Données : $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 0,5 \text{ s}^{-1}$.

Ex. 10 Mouvement des atomes

Une molécule HCl est modélisée par deux atomes H et Cl, séparés par une distance r sur un axe fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; l'atome de Cl est supposé fixe et pris comme origine du référentiel. L'atome H, assimilé à un point matériel de masse m est en mouvement dans \mathcal{R}_g , sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}.$$

- 1) Déterminer graphiquement, puis par le calcul la position d'équilibre r_0 . Discuter la stabilité de la position d'équilibre r_0 .
- 2) Déterminer et calculer l'énergie de dissociation de la molécule HCl.
- 3) Déterminer la fréquence des petites oscillations de la molécule.

Données :

$m = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$; $C = 1,06 \times 10^{-138} \text{ J} \cdot \text{m}^{12}$;

$K = 92,16 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}$.

Indications

Ex 2

Remarquer que $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r$, soit $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r$.

Ex 3

Même remarque que pour l'exercice 2.

Ex 4

- 1) Penser à écrire l'accélération sous la forme :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r.$$

Ex 8

- 1) Utiliser le TEM /TEC.
- 4) Utiliser le PFD.

Ex 9

- 1) On peut décomposer le mouvement en plusieurs phases : la première lorsque la bille est en contact avec le ressort et la deuxième lorsqu'elle ne l'est plus.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- Unité de $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$: $\text{kg} \times \text{m}^2 \times \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $mgv\cos\theta$: $\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{W}$.
- Unité de $mg\ell\sin\theta$: $\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $\frac{1}{2}k(x-\ell)^2$: $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^{-1} \times \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$.
- Unité de $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$: $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{W}$.

Exercice 2

1) La force d'interaction électrostatique entre q_1 et q_2 est :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



Son travail entre $r \rightarrow +\infty$ et r_0 est :

$$\begin{aligned} \overline{W}(\vec{F}) &= \int_{r \rightarrow +\infty}^{r_0} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_{r \rightarrow +\infty}^{r_0} \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \frac{dr}{dt} \vec{e}_r dt \quad \text{car } \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r \\ &= \int_{r \rightarrow +\infty}^{r_0} \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{r \rightarrow +\infty}^{r_0} \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. } \overline{W}(\vec{F}) &= \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{10^{-9}} \\ &= 2,3 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,44 \text{ eV.} \end{aligned}$$

2) $\overline{W}(\vec{F}) > 0$: \vec{F} est une force motrice.

3) Dans le cours, on a vu l'expression de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique :

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le travail fourni par \vec{F} lors de ce déplacement peut s'écrire :

$$\begin{aligned} W(\vec{F}) &= -\Delta\mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(r=r_0) - \mathcal{E}_p(r \rightarrow +\infty)) \\ &= +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} - 0 \end{aligned}$$

On retrouve la même expression.

Exercice 3

1) Le travail de \vec{F} pour aller de A à B en suivant l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ (courbe \mathcal{C}_1) est :

$$W(\vec{F}) = \int_{A(\mathcal{C}_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F_0 dx = -F_0 [x]_{x=1}^{x=3} = -F_0 \times 2 = -2F_0.$$

2) En passant par C (courbe \mathcal{C}_2) :

$$\begin{aligned} W(\vec{F}) &= \int_{A(\mathcal{C}_2)}^C \vec{F} \cdot d\vec{OM} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_A^C -F_0 dx + \int_C^B F_0 dx \\ &= -F_0 [x]_{x=1}^{x=4} + F_0 [x]_{x=4}^{x=3} = -F_0 \times 3 + F_0 \times (-1) = -4F_0. \end{aligned}$$

3) \vec{F} n'est donc pas conservative puisque son travail pour aller de A à B dépend du chemin suivi ; elle ne dérive donc pas d'une énergie potentielle.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) Appliquons le PFD.

• **Système étudié :** le satellite $M(m)$.

• **Référentiel galiléen d'étude :** $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

• **Force(s) appliquée(s) :** force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = -F\vec{e}_r$ avec $F = \frac{GM_T m}{r^2}$.

• Le PFD s'obtient avec :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta \quad (r = \text{cte car trajectoire circulaire}) ;$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r.$$

$$\text{Le PFD s'écrit donc : } m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}, \text{ soit } m\left(-\frac{v^2}{r}\right)\vec{e}_r = -F\vec{e}_r.$$

$$\text{En projection sur } \vec{e}_r : -m\frac{v^2}{r} = -F \quad \text{soit} \quad m\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}, \text{ d'où :}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$



Unités : sachant que v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, G en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$, M_T en kg et r en m , l'expression est homogène ; en effet :

$$\sqrt{\frac{\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{kg}}{\text{m}}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{A.N.} \quad v_1 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,500 \times 10^3}} \approx 7,83 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{42\,000 \times 10^3}} \approx 3,08 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) Si \vec{F} dérive d'une énergie potentielle, on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}(r) &= -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r \\ -\frac{GM_T m}{r^2} &= -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \\ \mathcal{E}_p &= -\frac{GM_T m}{r} + \text{cte.} \end{aligned}$$

Or $\mathcal{E}_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, donc cte = 0.

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GM_T m}{r}.$$

$$3) \mathcal{E}_m(M) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E}_m(M) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r};$$

- sur l'orbite circulaire de rayon r_1 :

$$\mathcal{E}_{m_1} = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 1\,000}{2 \times 6\,500 \times 10^3}$$

$$\mathcal{E}_{m_1} \approx -3,06 \cdot 10^{10} \text{ J};$$

- sur l'orbite circulaire de rayon r_2 :

$$\mathcal{E}_{m_2} \approx -4,74 \cdot 10^9 \text{ J};$$

4) En passant d'une orbite à l'autre, la variation d'énergie mécanique vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_2} - \mathcal{E}_{m_1} \approx 2,59 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

D'après le TEM, il va donc falloir fournir de l'énergie au satellite si on veut le transférer sur une orbite ($r = r_2$) plus haute.

Exercice 5

1) La puissance motrice s'écrit donc :

$$\mathcal{P} = 2(60 - v)v^2.$$

On cherche la puissance maximum et la vitesse associée ; on calcule donc :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dv} = 0 \Rightarrow 2[-v^2 + (60 - v) \times 2v] = 0$$

$$\Rightarrow 2[-3v + 120]v = 0$$

ce qui donne $v = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $v \approx 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,

à cette vitesse la puissance (maximum) du véhicule est :

$$\mathcal{P}_{\max} = 2(60 - 40) \times 40^2, \text{ soit } \mathcal{P}_{\max} = 64\,000 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}_{\max} = 64 \text{ kW}.$$

Remarque : cette puissance correspond en ch à :

$$\mathcal{P}_{\max} \approx \frac{64}{0,737} \approx 86,8 \text{ ch}.$$

2) Appliquons le TPC.

- **Système étudié :** point matériel $G(m)$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = v\vec{e}_x$.

- **Référentiel galiléen d'étude :** $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

- **Forces appliquées :**

– poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$;

– réaction du sol $\vec{N} = N\vec{e}_y$;

– force motrice $\vec{T} = T\vec{e}_x$;

– force de frottement $\vec{F} = -F\vec{e}_x$.

- Expression des puissances :

$$\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = 0 \quad (\vec{P} \perp \vec{v})$$

$$\mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} = 0 \quad (\vec{N} \perp \vec{v})$$

$$\mathcal{P}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{T} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = 2 \times (60 - v)v^2$$

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}_g} = -(450 + 0,4v^2)v.$$

- Le TPC s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 2(60 - v)v^2 - (450 + 0,4v^2)v.$$

On cherche la vitesse maximum c'est-à-dire quand $\frac{dv}{dt} = 0$.

L'équation du TPC s'écrit :

$$0 = \frac{1}{2} m \times 2v \frac{dv}{dt} = [2(60 - v)v - 450 - 0,4v^2]v \quad \text{soit} \quad 120v - 2v^2 - 450 = 0,4v^2.$$

$$2,4v^2 - 120v + 450 = 0 \quad \text{soit} \quad v \approx 45,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(en ne conservant que la plus grande des deux valeurs possibles)

ou encore :

$$v \approx 165,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

3) On cherche désormais l'accélération maximum, on a alors : $\frac{da}{dt} = 0$, soit $\frac{d^2v}{dt^2} = 0$.

Or d'après l'équation du TPC, on a :

$$mv \frac{dv}{dt} = (-2,4v^2 + 120v - 450)v \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(-2,4v^2 + 120v - 450)$$

$$\text{en dérivant} \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{m} \left(-4,8v \frac{dv}{dt} + 120 \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{m} \frac{dv}{dt} (-4,8v + 120) = 0,$$

$$\text{soit} \quad -4,8v + 120 = 0, \quad \text{d'où} \quad v \approx 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$v \approx 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

On en déduit alors l'accélération maximum :

$$a_{\max} = \frac{1}{m}(-2,4v^2 + 120v - 450) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ m = 1\,300 \text{ kg} \end{cases}$$

$$a_{\max} \approx 0,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Exercice 6

1) Phase 1 : plan incliné

On va appliquer le TPC au point M dans le référentiel \mathcal{R}_g .

- **Système étudié :** l'enfant et sa luge assimilés au point matériel M(m).

- **Référentiel galiléen d'étude :** (B ; \vec{e}_x, \vec{e}_y)

- **Bilan des forces appliquées au point M :**

– poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

– réaction de la piste $\vec{N} = N\vec{e}_{y_1}$

($\vec{N} \perp$ piste car il n'y a aucun frottement).

- **Puissances de forces**

Comme on a posé : $\vec{AM} = x_1 \vec{e}_{x_1}$, on obtient la vitesse de M pendant cette phase :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}_1 \vec{e}_{x_1}.$$

Ainsi :

– puissance du poids : $\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = mg \dot{x}_1 \sin \alpha$;

– puissance de la réaction : $\mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{N} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = 0$.

Appliquons le TPC au point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g .

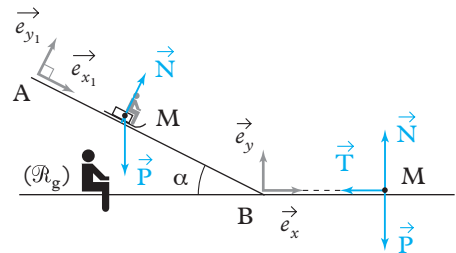
L'énergie cinétique de M est : $\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$.

Le TPC donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} \quad \text{soit} \quad m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 = mg \dot{x}_1 \sin \alpha,$$

en éliminant la solution parasite $\dot{x}_1 = 0$ et en simplifiant par m , on obtient :

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha.$$



Afin de déterminer la vitesse en B et la durée de cette phase, il est nécessaire d'intégrer deux fois l'équation différentielle précédente : $\dot{x}_1 = g \sin \alpha t + \dot{x}_1(0)$.

$$x_1 = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + \dot{x}_1(0) t$$

La durée t_1 de cette phase est donc obtenue en résolvant l'équation :

$$L = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_1^2 \quad \text{soit} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}$$

La vitesse en B est : $v = \dot{x}_1(t_1) = g \sin \alpha t_1$

$$v = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}} = \sqrt{2Lg \sin \alpha}$$

Unité de $\sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}$: $(m \times m^{-1} \cdot s^{-2})^{1/2} = s$ (homogène à un temps) ;

unité de $\sqrt{2Lg \sin \alpha}$: $(m \times m \cdot s^{-2})^{1/2} = m \cdot s^{-1}$ (homogène à une vitesse).

2) Phase 2 : partie horizontale

On va encore appliquer le TPC au point M dans le référentiel \mathcal{R}_g .

- **Système étudié :** point matériel M(m).
- **Référentiel galiléen d'étude :** $\mathcal{R}_g(B; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
- **Bilan des forces appliquées au point M :**

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$;
- réaction normale de la piste $\vec{N} = N\vec{e}_y$;
- réaction tangentielle de la piste (force de frottement) $\vec{T} = -T\vec{e}_x$ ($T > 0$ car la vitesse de M est dirigée selon \vec{e}_x) :

avec $\begin{cases} T = fN & \text{s'il y a glissement} \\ T < fN & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme il n'y a pas de mouvement selon \vec{e}_y , le PFD projeté sur \vec{e}_y donne :

$$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad N = mg.$$

Ainsi $\vec{T} = -fmg\vec{e}_x$ pendant toute la phase de freinage.

• Puissance des forces

La vitesse de M s'écrit $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \dot{x}\vec{e}_x$ ainsi :

- la puissance du poids est $\mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} = 0$;
- la puissance de la réaction normale est $\mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} = 0$;
- la puissance de la réaction tangentielle est :

$$\mathcal{P}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{T} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -fmg\dot{x}.$$

L'énergie cinétique du point M pendant cette phase est : $\mathcal{E}_c(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$;

- le TPC appliqué au point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}_g donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{N})_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}(\vec{T})_{/\mathcal{R}_g}$$

ainsi : $m\dot{x}\ddot{x} = -fmg\dot{x}$;

en éliminant la solution parasite $\dot{x} = 0$ et en simplifiant par m , on obtient : $\dot{x} = -fg$.

Ainsi, si on suppose que cette 2^e phase a débuté à $t = 0$ (changement d'origine des temps),

$$\dot{x} = -fgt + \dot{x}(0)$$

et

$$\mathbf{x} = -f\mathbf{g}\frac{t^2}{2} + \mathbf{v}t + \mathbf{x}(0)$$

\parallel
0

La vitesse $\dot{\mathbf{x}}(t)$ s'annule au bout d'un temps t_2 vérifiant: $0 = -ft_2 + v$

$$t_2 = \frac{v}{fg} = \frac{\sqrt{2Lg\sin\alpha}}{fg} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}.$$

💡 Unité de $\frac{v}{fg}$: $(m \cdot s^{-1}) \times (m \cdot s^{-2})^{-1} = s$ (homogène à t_2).

La distance d'arrêt est:

$$D = x(t_2) = -\frac{fg}{2} \times \frac{2L\sin\alpha}{f^2g} + \sqrt{2Lg\sin\alpha} \times \frac{1}{f} \times \sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}$$

$$D = \frac{L\sin\alpha}{f}.$$

3) La durée totale (des 2 phases) est:

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}} + \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) Pour déterminer la vitesse au passage à la verticale, nous allons utiliser le théorème de l'énergie mécanique (TEM).

• **Système étudié:** bille assimilée à un point matériel M de masse m .

• **Référentiel galiléen d'étude:** $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au point matériel M(m):**

– poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

– tension du fil \vec{T} .

Travaux et énergie potentielle des forces appliquées:

• $\mathcal{E}_{pp} = mg\ell(1 - \cos\theta)$ pour le poids;

• la tension du fil \vec{T} ne travaille pas puisqu'elle est toujours perpendiculaire au déplacement.

• TEM: $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ (il n'y a que des forces conservatives ou qui ne travaillent pas)

donc $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t=0)$, d'où $\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_{pp}(t) = \mathcal{E}_c(t=0) + \mathcal{E}_{pp}(t=0)$

et :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = 0 + mg\ell(1 - \cos\theta_0),$$

au passage à la verticale: $\theta = 0$; ainsi:

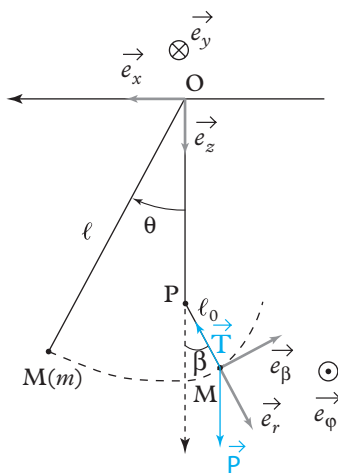
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.$$

2) Dans cette seconde phase, le pendule se trouve du côté droit; nous allons appliquer à nouveau le TEM au même système, dans le même référentiel.

Le système est toujours conservatif (les forces sont toujours les mêmes), ainsi:

$$\mathcal{E}_m(t) = \text{cte}$$

$$\mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_{pp}(t) = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mg\ell_0(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$



L'angle β_{\max} est atteint lorsque $v = 0$:

$$mg\ell_0(1 - \cos\beta_{\max}) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{soit} \quad \cos\beta_{\max} = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell_0},$$

soit en remplaçant v_0 par son expression :

$$\cos\beta_{\max} = 1 - \frac{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}{2g\ell_0} = 1 - \frac{\ell}{\ell_0}(1 - \cos\theta_0)$$

ou encore :

$$\beta_{\max} = \arccos[1 - r(1 - \cos\theta_0)]$$

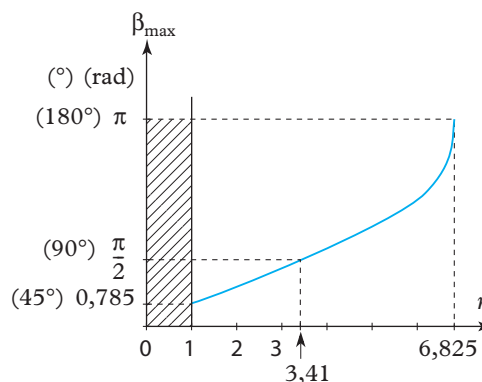
3) La courbe représentative de $r \rightarrow \beta_{\max}(r)$ a l'allure suivante :

🌀 On peut remarquer que l'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\ell_0(1 - \cos\beta_{\max}) = \ell(1 - \cos\theta_0).$$

Ce qui montre que la bille remonte à la même hauteur que sa hauteur initiale.

Par exemple, lorsque $r = 1$, c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell_0$, le pendule remonte à une position angulaire 45° , exactement à la même altitude que celle initiale. On ne peut pas dépasser $r = 6,828$ car sinon, il n'y a plus assez de fil pour réaliser la condition précédente (ℓ_0 trop petit). La valeur limite vérifie l'équation : $2\ell_0 = \ell(1 - \cos\theta_0)$.



4) Afin de déterminer la tension du fil, appliquons le PFD au point matériel $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Or dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\varphi)$, on a :

$$\vec{PM} = \ell_0 \vec{e}_r, \quad \vec{v} = (M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell_0 \dot{\beta} \vec{e}_\beta \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell_0 \ddot{\beta} \vec{e}_\beta - \ell_0 \dot{\beta}^2 \vec{e}_r.$$

Ainsi le PFD s'écrit :

$$m(\ell_0 \ddot{\beta} \vec{e}_\beta - \ell_0 \dot{\beta}^2 \vec{e}_r) = mg \cos\beta \vec{e}_\beta - mg \sin\beta \vec{e}_\beta - T \vec{e}_r,$$

en projection sur \vec{e}_r :

$$-m\ell_0 \dot{\beta}^2 = mg \cos\beta - T.$$

Au passage à la position extrême, la vitesse de M est nulle soit $\ell_0 \dot{\beta} = 0$ c'est-à-dire $\dot{\beta} = 0$

et

$$T = mg \cos\beta.$$

T s'annule donc si $\beta_{\max} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$; de plus $T < 0$ si $\beta_{\max} > \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Ainsi les seules positions pour lesquelles le fil reste tendu sont celles pour lesquelles $x < 3,41$

soit $\frac{\ell}{\ell_0} < 3,41$ soit encore :

$$\ell_0 > 29,3 \text{ cm}.$$

Exercice 8

1) Le mouvement se décompose en deux phases : la première pendant laquelle la bille est en contact avec le ressort (qui l'accélère), la seconde pendant laquelle la bille suit le guide (sans frottement), sous l'action de son poids seul.

Déterminons dans un premier temps, la vitesse de la bille au moment où le contact se rompt avec le ressort (lorsque la longueur du ressort est ℓ_0).

- **Système étudié :** bille assimilée à un point matériel $M(m)$.

- **Référentiel galiléen d'étude :** $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- **Bilan des forces appliquées :**

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

- réaction du support \vec{N} (\perp support) ;

- force de rappel élastique du ressort \vec{F}_ℓ .

La réaction du support ne travaille pas car on a négligé les frottements. Le poids dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_p} = mgh = mgx \sin \alpha$ (h altitude de M au-dessus de O). La force de rappel élastique \vec{F}_ℓ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_\ell} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$ (x est la longueur du ressort).

- TEM :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p_p} + \mathcal{E}_{p_\ell} = \text{cte} = \mathcal{E}_m(t=0)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 = 0 + mgx_0 \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2,$$

lorsque $x = \ell_0$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 \sin \alpha = +mgx_0 \sin \alpha + \frac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2$$

soit

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2 + 2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha}.$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2 + 2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha} \text{ a comme unité } \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{kg}} \times \text{m}^2 + \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ homogène à } v_0.$$

Exprimons alors la position x_1 de la bille au moment où sa vitesse s'annule :
identique à la phase précédente.

- **Forces appliquées :**

- poids \vec{P} ;

- réaction du support \vec{N} .

- $W(\vec{N}) = 0$ et $\mathcal{E}_{p_p} = mgx \sin \alpha$.

- TEM : $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p_p} = \text{cte}$, d'où $\frac{1}{2}mv^2 + mgx \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 \sin \alpha$.

- Lorsque $v = 0$, $x = x_1$ donc : $x_1 g \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2} + g\ell_0 \sin \alpha$

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} + \ell_0.$$

soit en tenant compte de l'expression de v_0 :

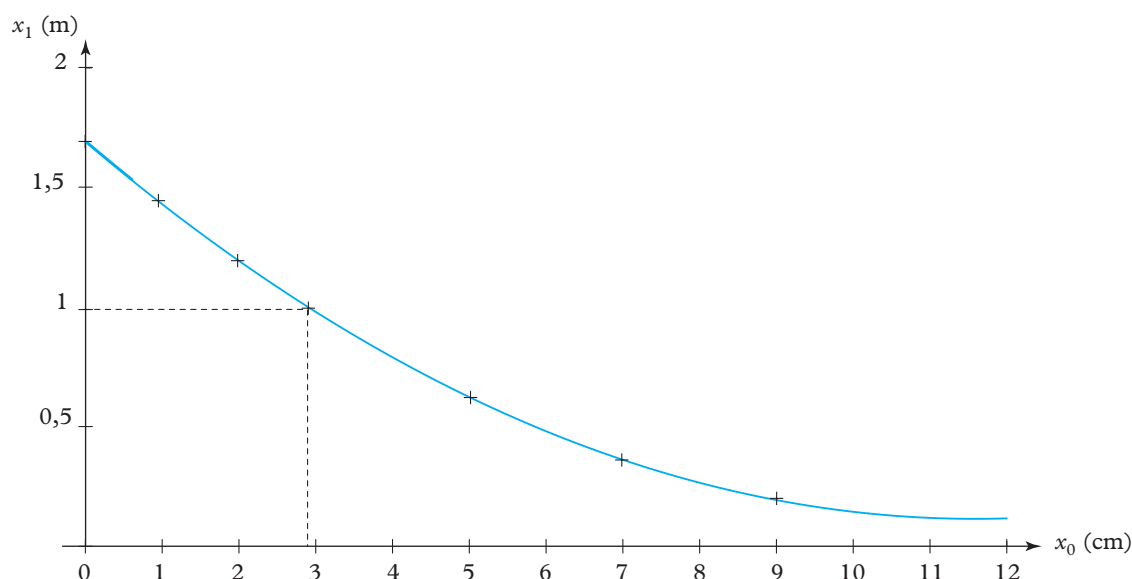
$$x_1 = \frac{2g(x_0 - \ell_0) \sin \alpha + \frac{k}{m}(x_0 - \ell_0)^2}{2g \sin \alpha} + \ell_0 = x_0 - \ell_0 + \frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha} + \ell_0$$

soit :

$$x_1 = x_0 + \frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2mg \sin \alpha}} \text{ a comme unité } \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \times \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} \times \frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \text{ ce qui est homogène à } x_0 \text{ et } x_1.$$

2) La courbe représentative est :



Par lecture graphique, on lit que pour avoir $x_1 = 1$ m (sommet du guide), il faut $x_0 = 2,9$ cm.

🔍 On aurait pu résoudre l'équation du second degré donnant x_0 .

Exercice 9

1) Les différentes trajectoires de phase se rapprochent de l'axe horizontal (sauf pour les séparatrices) : la vitesse angulaire finit par s'annuler ; il y a donc des frottements qui entraînent une diminution de l'énergie mécanique du système au cours du temps.



Le sens de parcours est :

- de gauche à droite pour $\dot{\theta} > 0$;
- de droite à gauche pour $\dot{\theta} < 0$.

2) Les trajectoires de phase (exceptées les séparatrices) se terminent toutes sur une position d'équilibre stable : $\theta = \dots, 0, 2\pi, \dots$ rad sont les positions d'équilibre stable ; les points $\dots, (0, 0), (2\pi, 0), \dots$ sont des points attracteurs.

Les points $(-\pi, 0)$; $(\pi, 0)$; \dots sont les points d'équilibre instable.

3) La trajectoire ① montre la présence d'une révolution complète du pendule, avant d'osciller et de se stabiliser (θ part de $-\pi$ rad et se stabilise à $\theta = 2\pi$ rad).

La trajectoire ⑥ ne montre aucune révolution.

Les séparatrices sont les courbes ②, ③, ④ et ⑤ : une fois une trajectoire de phase entrée dans « l'œil » limité par les séparatrices ② et ④, elle n'en sort plus et se stabilise sur la seule position d'équilibre stable se trouvant à l'intérieur ($\theta = 0$ rad).



Ces séparatrices ont été tracées dans le cas où il n'y a pas de frottement ; c'est pour cela que des trajectoires de phase semblent se couper, ce qui est contraire au principe d'évolution unique d'un système (à CI fixées).

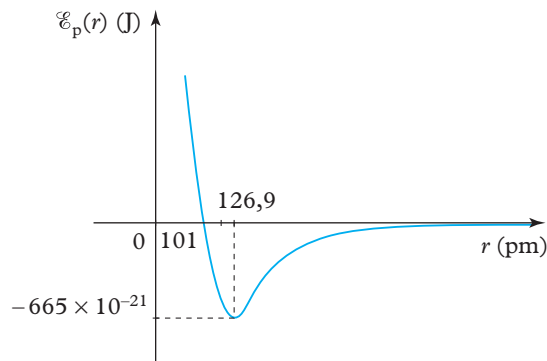
Exercice 10

1) Position d'équilibre

- **Système étudié :** atome M assimilé à un point matériel de masse m .
- **Référentiel galiléen d'étude :** \mathcal{R}_g .
- **Forces dérivant d'une énergie potentielle :**

$$\mathcal{E}_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}.$$

Pour déterminer les positions d'équilibre, on trace la courbe $r \mapsto \mathcal{E}_p(r)$.



La courbe présente un minimum en $r_0 = 126,9 \times 10^{-12} \text{ m}$.

Il s'agit d'une position d'équilibre stable.

Par le calcul, on cherche les extremas d'énergie potentielle en résolvant l'équation : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) = 0$.

Or $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -\frac{12C}{r^{13}} + \frac{K}{r^2}$ donc $-\frac{12C}{r_0^{13}} = -\frac{K}{r_0^2} \Rightarrow r_0^{11} = \frac{12C}{K}$, soit :

$$r_0 = \left(\frac{12C}{K}\right)^{\frac{1}{11}}$$

🌀 Unité de $\left(\frac{12C}{K}\right)^{\frac{1}{11}} : \left(\frac{\text{J} \cdot \text{m}^{12}}{\text{J} \cdot \text{m}}\right)^{\frac{1}{11}} = \text{m}$ homogène à r_0 .

A.N. $r_0 \approx 126,9 \times 10^{-12} \text{ m}$.

Pour savoir si cette position d'équilibre est stable, on cherche $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}\right)(r_0)$:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2} = \frac{12 \times 13C}{r^{14}} - \frac{2K}{r^3} \quad \text{donc} \quad \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0) \approx 495,5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} > 0.$$

Comme $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0)$ est positif, la position d'équilibre est stable.

2) L'énergie de dissociation est l'énergie qu'il faut fournir à la molécule HCl pour que l'atome H parte à l'infini, soit :

$$\mathcal{E}_d = -\mathcal{E}_p(r_0) \approx 665 \times 10^{-21} \text{ J}$$

soit encore :

$$\mathcal{E}_d \approx 4,16 \text{ eV}.$$

3) En posant $r = r_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll r_0$), on effectue un développement limité de la fonction $\mathcal{E}_p(r)$ autour de r_0 afin de ne considérer que les mouvements de faible amplitude (ε) autour de r_0 :

$$\mathcal{E}_p(r) \approx \mathcal{E}_p(r_0) + (r - r_0) \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0) \approx \mathcal{E}_p(r_0) + \frac{k}{2} \varepsilon^2.$$

En effet : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}(r_0) = 0$ (on pose : $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}(r_0)$).

On a :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(r_0) + \frac{k}{2}\varepsilon^2.$$

On a : $v = \dot{r} = \dot{\varepsilon}$.

Or $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$, soit $m\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + k\varepsilon\dot{\varepsilon} = 0$.

En éliminant la solution parasite et en divisant par m , on obtient : $\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0$.

On obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (oscillation sinusoïdale) dont la pulsation est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0.$$

La fréquence des oscillations est donc :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A.N. $f_0 \approx 87 \times 10^{12} \text{ Hz}$.



Cette fréquence correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 3,45 \text{ }\mu\text{m}$ ce qui correspond au domaine de l'infrarouge.