

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les résultats de l'électrocinétique aux circuits électriques afin d'obtenir la réponse à une excitation. Les circuits électriques sont utilisés dans un régime de fonctionnement linéaire. Nous verrons en outre que tout signal périodique est décomposable en une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales, d'où l'importance de l'étude du régime sinusoïdal permanent. Ce chapitre est commun aux enseignements de PCSI, MPSI, PTSI.

Plan du chapitre 8

A. Description des signaux sinusoïdaux	x
1. Écriture d'un signal sinusoïdal	x
2. Analyse de Fourier d'un signal périodique	x
3. Principe du filtrage	x
B. Fonction de transfert d'un quadripôle	
1. Dipôles et quadripôles	x
2. Fonction de transfert	x
3. Le diagramme de Bode	x
4. Ordre d'un filtre. Bande-passante	x
5. Filtres actifs – Filtres passifs	x
C. Filtres du premier ordre	
1. Nature du filtre	x
2. Étude du filtre passe-bas	x
3. Filtre passe-haut	x
4. Gabarit d'un filtre	x
D. Filtres du deuxième ordre	
1. Expression de la fonction de transfert	x
2. Filtre passe-bas	x
3. Filtre passe-bande	x
Méthodes	x
Exercices	x

A. Description des signaux sinusoïdaux

A.1. Écriture d'un signal sinusoïdal

• Considérons la charge du condensateur d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E étudiée au chapitre 7. En régime pseudopériodique, la tension u_C aux bornes du condensateur a pour expression :

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{\lambda t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\},$$

Où les termes λ et ω dépendent de l'amortissement (présence d'une résistance) dans le circuit. Si cet amortissement est nul, alors les oscillations du circuit ne sont pas amorties et on a :

$$u_C(t) = E \{ 1 - \cos(\omega_0 t) \}, \text{ avec } \omega_0 : \text{ pulsation propre.}$$

La tension u_C aux bornes du condensateur s'écrit alors comme la différence de deux termes :

– une tension continue E ;

– une tension sinusoïdale $E \cos(\omega_0 t)$.

• Rappelons qu'un signal électrique $S(t)$ (tension ou intensité) est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

avec S_0 : amplitude du signal et φ : phase à l'origine des temps (exprimée en radian et comprise entre $-\pi$ et $+\pi$).

• Rappelons que pour un signal périodique, la période T , la fréquence f et la pulsation ω , sont liées par les relations :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Définition 1

On définit la valeur moyenne S_{moy} et la valeur efficace S_{eff} d'un signal périodique $S(t)$ par les relations suivantes :

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt$$

Exemple d'un signal sinusoïdal de pulsation ω : $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$

– valeur moyenne¹ :

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) dt = 0$$

– valeur efficace² :

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{S_0^2}{2T} \int_0^T \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T} t + 2\varphi\right) \right) dt = \frac{S_0^2}{2},$$

D'où le résultat important suivant :

Propriété 1

La valeur efficace S_{eff} d'un signal sinusoïdal $S(t)$ d'amplitude S_0 vaut :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}.$$

1. Il est facile de vérifier que l'intégrale sur une période des fonctions cos et sin est nulle.

2. $\cos(x) = 1/2(1 + \cos(2x))$.

A.2. Analyse de Fourier d'un signal périodique

- L'étude des signaux sinusoïdaux revêt un grand intérêt, car un signal périodique quelconque de fréquence f_0 peut toujours être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de fréquences f_n (n est un entier naturel), appelée série de Fourier.

Dans ce développement :

- la fréquence $f_1 = f_0$ correspond au fondamental ($n = 1$) ;
- la fréquence $f_n = nf_0$ correspond à l'harmonique d'ordre n ($n > 1$).

- Mathématiquement on peut écrire le signal $S(t)$, de période T sous la forme d'une série :

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)].$$

Cette relation peut également s'inverser pour trouver les expressions des coefficients de la série³ :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\omega t) dt.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\omega t) dt.$$

3. Plus généralement les bornes d'intégration sont t_0 et $t_0 + T$.

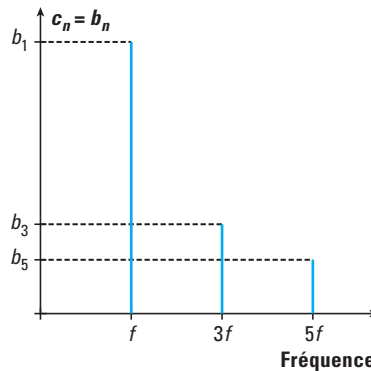
4. Attention de ne pas confondre l'amplitude et la composante continue qui correspond à la valeur moyenne du signal. Dans cet exemple, la valeur moyenne est clairement nulle si le créneau est choisi symétrique.

5. En fait on représente l'amplitude totale : $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en fonction de n ou de nf .

- Exemple : un signal carré de période T_0 , d'amplitude⁴ S_0 et impair par rapport à $(S(-t) = -S(t))$ peut être décomposé de la façon suivante :

- fondamental : fréquence $f_1 = f_0 = 1/T_0$; amplitude $b_1 = 4/\pi S_0$;
- harmoniques impaires ($n = 2p + 1$) : fréquences $f_n = nf_0$; amplitudes $b_n = A_1/n$;
- harmoniques paires ($n = 2p$) : fréquences $f_n = nf_0$; amplitudes $a_n = 0$.

- On a déjà utilisé dans le chapitre 2 la notion de spectre de Fourier, représentant les amplitudes⁵ de la série en fonction de n ou de nf (ou $n\omega$ de manière équivalente). Exemple : dans le cas du signal carré précédent on obtiendrait le spectre suivant :



Propriété 2

On démontre qu'il existe une relation simple entre le carré de la valeur efficace d'un signal périodique, S_{eff}^2 , et les carrés des coefficients de la série de Fourier du signal⁶ :

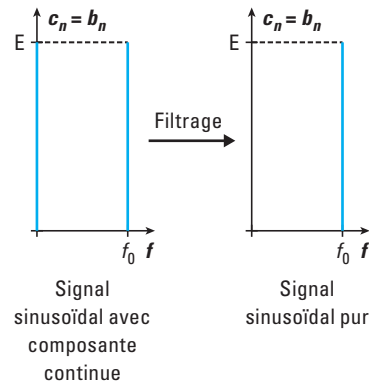
$$S_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2].$$

6. Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Parseval.

Le facteur 1/2 provient de la valeur moyenne des fonctions $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$.

A.3. Principe du filtrage

- Il est possible de modifier un signal en supprimant ou en atténuant certaines composantes de son spectre en fréquence.



Un exemple simple : reprenons le cas de l'oscillateur harmonique (circuit LC sans amortissement). Le signal d'entrée choisi est la tension aux bornes du condensateur, donnée par la relation :

$$u_e(t) = E \{1 - \cos(\omega_0 t)\}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Le spectre de ce signal est très simple : un pic de hauteur E en $f = 0$, un pic de hauteur E pour $f = f_0$.

Si un circuit adapté (filtre) permet de supprimer le premier pic (c'est-à-dire la composante continue), le spectre du signal de sortie ne comportera plus qu'un seul pic, de hauteur E pour $f = f_0$.

Le signal en sortie, après filtrage, peut donc s'écrire simplement :

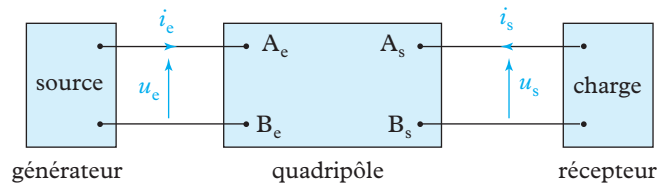
$$u_s(t) = -E \cos(\omega_0 t).$$

- Dans l'exemple précédent, on a utilisé une fonction de suppression d'une composante continue (soit une composante de fréquence nulle). De manière générale les filtres agissent sur une ou plusieurs plages (gammes) de fréquences. On peut illustrer ce comportement grâce à l'analogie électro-acoustique de l'égaliseur qui permet de supprimer ou d'atténuer certaines fréquences (correspondant aux composantes aiguës ou graves) du spectre.

Nous allons donc caractériser les filtres suivant leur type d'action : passe-bas, passe-haut, passe-bande et les paramètres qui permettent de quantifier cette action : fréquence de coupure, bande passante etc.

B. Fonction de transfert d'un quadripôle

B.1. Dipôles et quadripôles



- Un dipôle est un composant ou un circuit caractérisé par deux bornes. La caractéristique du dipôle relie l'intensité i circulant dans celui-ci à la tension u à ses bornes.

- Un quadripôle est une portion de réseau reliée à l'extérieur par quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Il est caractérisé par quatre variables : la tension u_e et le courant i_e d'entrée, ainsi que la tension u_s

et le courant i_s de sortie. Le montage le plus simple consiste à relier les bornes d'entrée A et B à un générateur (ou source) et les bornes de sortie A et B à un récepteur (ou charge).

- Un quadripôle est constitué de dipôles. Les caractéristiques de ces dipôles définissent les relations liant entre elles les grandeurs instantanées d'entrée u_e et i_e et les grandeurs instantanées de sortie u_s et i_s . Lorsque les relations ainsi obtenues sont linéaires, le quadripôle est dit linéaire.

Si les dipôles constituant le quadripôle sont utilisés en fonctionnement linéaire, le quadripôle est linéaire.

B.2. Fonction de transfert

Définition 2

On appelle fonction de transfert H d'un quadripôle le rapport de la valeur d'une grandeur de sortie G_s à la valeur d'une grandeur d'entrée G_e .

- De manière générale la relation entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie est une équation différentielle reliant les dérivées de l'une (à un ordre donné) aux dérivées de l'autre (à un ordre *a priori* différent).

Lorsque la source délivre une tension sinusoïdale de fréquence f (ou de pulsation ω), les grandeurs d'entrée et de sortie du quadripôle sont sinusoïdales (régime harmonique) et elles peuvent être représentées en notations complexes. Les opérations de dérivation font apparaître des puissances de $j\omega$ comme dans le cas des circuits RC, RL et RLC étudiés. L'équation différentielle est donc remplacée par une équation polynomiale.

- En régime harmonique, la fonction de transfert complexe H d'un quadripôle est donc fonction de la pulsation ω de la source. Elle s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\text{amplitude complexe de la grandeur de sortie}}{\text{amplitude complexe de la grandeur d'entrée}}$$

Application 1 Fonction de transfert d'un filtre RC

Un réseau constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal délivrant la tension :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t).$$

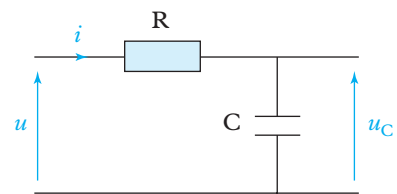
On définit un quadripôle dont les variables sont : en entrée, la tension $u(t)$ du générateur ; en sortie, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Déterminer la fonction de transfert du montage en notations complexes : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)}$.

Solution

- L'impédance complexe du montage est : $\underline{Z} = R + 1/jC\omega$, d'où : $\underline{u}(t) = \underline{Z} i(t)$ ou $\underline{U}_0 = \underline{Z} \underline{I}_0$. \underline{U}_0 est l'amplitude complexe de la tension appliquée et \underline{I}_0 celle du courant circulant dans le circuit.
- L'impédance complexe du condensateur vaut : $\underline{Z}_C = 1/jC\omega$, d'où : $\underline{u}_C(t) = \underline{Z}_C i(t)$ ou $\underline{U}_{C0} = \underline{Z}_C \underline{I}_0$. \underline{U}_{C0} est l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur.
- On obtient en reportant : $\underline{U}_{C0} = (\underline{Z}_C / \underline{Z}) \underline{U}_0$, soit : $\underline{U}_{C0} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_0$.
- Cette relation permet d'écrire la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{C0}}{\underline{U}_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$



Définition 3

En régime harmonique, on utilise différentes dénominations suivant la fonction réalisée par le montage et donc la dimension de la fonction de transfert :

- $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)}$: amplification⁷ en tension complexe (sans dimension),
- $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{I}_s(j\omega)}{\underline{I}_e(j\omega)}$: amplification en courant complexe (sans dimension),
- $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{I}_e(j\omega)}$: transimpédance complexe,
- $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{I}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)}$: transadmittance complexe.

7. Le terme « amplification » ne signifie pas que l'amplitude du signal de sortie est plus grande que celle du signal d'entrée. En revanche, il est utilisé chaque fois que la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie sont de même nature.

B.3. Diagramme de Bode

• Dans la suite nous nous intéresserons essentiellement à l'amplification en tension. La représentation d'une fonction de transfert se fait en traçant deux graphes, l'un relatif au module et l'autre à la phase :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

où $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ est le module ou **gain** et $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est la phase de la fonction de transfert.

• Usuellement, on représente le graphe du module en utilisant la fonction logarithme⁸ en base 10. On peut aussi utiliser le logarithme sur l'échelle des pulsations et donc représenter $G(\log \omega)$ et $\varphi(\log \omega)$.

• Utilisation du **Bel** (B) et de ses sous-unités (la plus courante étant le **décibel**, dB). Cette unité sans dimension mesure le rapport de deux puissances. L'écart entre les puissances P_1 et P_2 est défini par :

$$x_B = \log \frac{P_1}{P_2} \text{ en Bel et } x_{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \text{ en décibels.}$$

8. En base 10, on a :

$$\log(10n) = n \log 10 = n.$$

La quantité calculée augmente de 1 chaque fois qu'on multiplie par 10.

9. Au sein d'un conducteur ohmique de résistance R la puissance dissipée vaut : $P = RI^2 = U^2/R$.

Dans un montage électrique les puissances sont quadratiques⁹ par rapport aux tensions ou aux intensités. Il en résulte que le rapport en dB entre deux tensions par exemple s'écrit :

$$x_{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log \frac{kU_1^2}{kU_2^2} = 20 \log \frac{U_1}{U_2}.$$

Définition 4

Le diagramme de Bode est constitué par deux courbes :

– le gain G de la fonction de transfert (en dB) en fonction du logarithme de la fréquence f (en Hz) (ou de la pulsation ω ¹⁰ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), soit :

$$G_{dB} = 20 \log G = f(\log \omega);$$

– la phase φ de la fonction de transfert (en rad) en fonction du logarithme de la fréquence f (en Hz) (ou de la pulsation ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), soit :

$$\varphi = g(\log \omega).$$

10. On a : $\log(\omega) = \log(f) + \log(2\pi)$ puisque $\omega = 2\pi f$. L'utilisation de l'échelle en pulsation donne le même graphe, mais subissant une translation de 2π suivant l'axe des abscisses.

11. En effet, on a en abscisses : $\log(10f) - \log(f) = \log(10) = 1$.

• **Décade** et **octave**. La décade correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence $10f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité¹¹).

12. En effet, on a en abscisses :
 $\log(2f) - \log(f) = \log(2)$.

L'octave correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence double $2f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur $\log(2)$ ¹².

- Pente d'une droite. Dans la représentation du gain en tension G en fonction de $\log(f)$, la pente d'une droite est calculée en dB/décade.

B.4. Ordre d'un filtre. Bande-passante

- La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de deux polynômes¹³ en $(j\omega)$: $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$.

Définition 5

On appelle ordre du filtre le degré du polynôme situé au dénominateur $\underline{D}(j\omega)$ de la fonction de transfert complexe \underline{H} .

13. Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme $\underline{N}(j\omega)$ au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ au dénominateur.

Application 2 Ordre d'un filtre RC

Déterminer l'ordre du filtre RC étudié à l'application 1.

Solution

- La fonction de transfert de ce filtre s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.
- Le dénominateur de la fonction de transfert est donc : $\underline{D}(j\omega) = 1 + jRC\omega$.
- C'est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: le filtre est donc un filtre du premier ordre.

14. On a en effet : $-10 \log(2) \approx -3$.

- On considère un filtre quelconque et on note G_{\max} la valeur maximale (dont on suppose l'existence) de son gain ($G_{\text{dB max}}$ en dB). La pulsation de coupure ω_c d'un filtre est définie par¹⁴ :

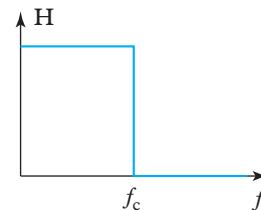
$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB max}} - 3 \text{ (en dB).}$$

À cette pulsation de coupure ω_c correspond une fréquence de coupure f_c telle que $\omega_c = 2\pi f_c$. On note également qu'il peut exister plusieurs fréquences de coupure.

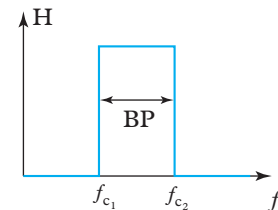
- La bande-passante d'un filtre correspond à l'intervalle de pulsations tel que :

$$\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{\max}, \text{ soit } G_{\text{dB max}} - 3 \leq G_{\text{dB}}(\omega) \leq G_{\text{dB max}}.$$

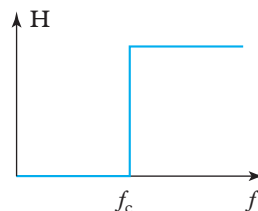
La figure ci-dessous illustre les différents types de filtre que l'on peut rencontrer : filtres à une seule fréquence de coupure (passe-bas et passe-haut) ou à deux fréquences de coupure (passe-bande ou réjecteur de fréquences).



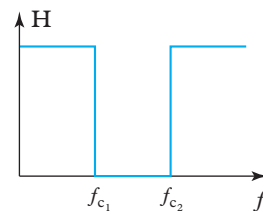
a. filtre passe-bas



b. filtre passe-bande



c. filtre passe-haut



d. filtre réjecteur

- Dans le cas d'un filtre passe-bas, la bande passante est : $f \in [0, f_c]$.
- Dans le cas d'un filtre passe-haut, la bande passante est : $f \in [f_c, +\infty]$.
- Dans le cas du filtre passe-bande, la bande passante correspond à l'intervalle $f \in [f_{c_1}, f_{c_2}]$.
- Dans le cas du filtre réjecteur de fréquences, la bande-passante correspond à l'intervalle :

$$f \in [0, f_{c_1}] \cup [f_{c_2}, +\infty]$$

Physiquement la bande-passante représente l'intervalle de fréquences qui seront amplifiées (ou à défaut, qui ne seront pas atténuées) par le filtre.

Application 3 Bande passante d'un filtre RC

Déterminer la (les) fréquence(s) de coupure et la bande passante du filtre RC étudié à l'application 1. Quelle est la nature de ce filtre ?

Solution

- La fonction de transfert de ce filtre s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.
- L'amplification en tension vaut donc : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$. C'est une fonction décroissante

de ω , qui est maximale à l'origine, soit : $G(0) = G_{\max} = 1$.

- Pour déterminer la ou les pulsations de coupure, on doit résoudre :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}}, \text{ soit } 1 + (RC\omega_c)^2 = 2 \text{ et finalement : } \omega_c = \frac{1}{RC}.$$

- Comme la fonction $H(\omega)$ est une fonction décroissante de la pulsation ω , le filtre étudié est un filtre passe-bas du premier ordre de bande passante :

$$BP(f) = f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

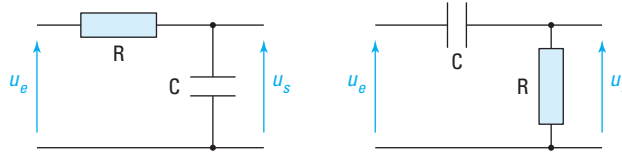
B.5. Filtres passifs – Filtres actifs

- Dans un quadripôle, il y a toujours un transfert de puissance entre l'entrée (puissance P_e fournie par la source au quadripôle) et la sortie (puissance P_s reçue par la charge du quadripôle).
- Un quadripôle actif est un quadripôle comportant des sources « internes » d'énergie (c'est-à-dire des sources indépendantes du signal d'entrée), obtenues grâce à l'alimentation du quadripôle.
 - Si la puissance d'entrée P_e est inférieure à la puissance de sortie P_s , le quadripôle est actif et amplificateur. Des sources internes fournissent l'énergie permettant d'amplifier la puissance.
 - Si la puissance d'entrée P_e est supérieure à la puissance de sortie P_s , le quadripôle est atténuateur. Deux cas se présentent. si le quadripôle ne comporte que des composants passifs (conducteurs ohmiques, condensateur, bobines), il est passif. Si le quadripôle possède des sources internes, l'apport d'énergie correspondant est insuffisant pour amplifier la puissance. Le quadripôle est actif et atténuateur.

C. Filtres du premier ordre

C.1. Nature du filtre

- Considérons deux associations RC série différentes :



Pour déterminer la nature du filtre *a priori*, sans calculer la fonction de transfert, on étudie le comportement asymptotique du filtre, c'est-à-dire les fonctions qu'il réalise aux limites des très basses et des très hautes fréquences.

Pour les dipôles fondamentaux (condensateurs, bobines) les comportements asymptotiques sont déterminés comme suit :

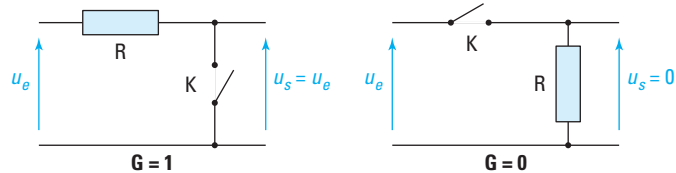
- L'impédance d'un condensateur vaut : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ donc $|\underline{Z}_C|$ varie comme $\frac{1}{\omega}$: quand $\omega \rightarrow 0$, $|\underline{Z}_C| \rightarrow +\infty$ (circuit-ouvert) et quand $\omega \rightarrow +\infty$, $|\underline{Z}_C| \rightarrow 0$ (fil).

Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).

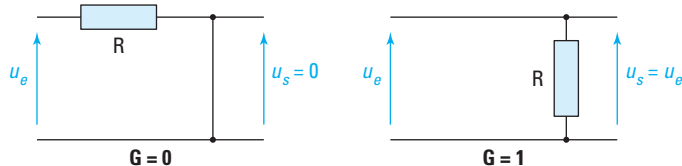
- L'impédance d'une inductance est : $\underline{Z}_L = jL\omega$ donc $|\underline{Z}_L|$ varie comme ω : quand $\omega \rightarrow 0$, $|\underline{Z}_L| \rightarrow 0$ (fil) et quand $\omega \rightarrow +\infty$, $|\underline{Z}_L| \rightarrow +\infty$ (circuit-ouvert).

Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

- Aux basses fréquences les deux circuits sont équivalents à :



- Aux hautes fréquences les deux circuits sont équivalents à :



- L'analyse préliminaire montre clairement que le circuit de gauche est un filtre passe-bas (gain nul à hautes fréquences) alors que le circuit de droite est un filtre passe-haut (gain nul à basses fréquences).

C.2. Étude du filtre passe-bas

- **Fonction de transfert.** Le filtre passe-bas a été étudié en détail dans les applications précédentes. On a établi que sa fonction de transfert valait :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ soit}$$

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \text{ et } \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arctan(RC\omega).$$

• **Pulsation de coupure et bande-passante.** Nous avons établi dans l'application 3 que : $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et $BP(f) = f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.

• **Comportement asymptotique à hautes fréquences.** Nous avons vu que le gain tend vers zéro lorsque la fréquence (ou la pulsation) augmente. On peut caractériser plus finement cet effet en cherchant l'expression d'un équivalent de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1+jRC\omega} \sim \frac{1}{jRC\omega}, \text{ pour } \omega \gg \omega_c, \text{ soit encore : } \underline{U}_s \sim \frac{1}{jRC\omega} \underline{U}_e.$$

Le montage réalise une opération de division par $j\omega$ du signal d'entrée. Ceci correspond à une opération d'intégration par rapport au temps. En explicitant à nouveau les fonctions réelles, on peut dire que la réponse du montage, à la limite des hautes fréquences, se traduit par l'équation différentielle :

$$u_s(t) \sim \frac{1}{RC} \int u_e(t) dt.$$

C'est un montage **intégrateur**.

• **Diagramme de Bode.** On utilise en général la pulsation réduite adimensionnée : $x = \frac{\omega}{\omega_c}$. Le gain en dB et la phase s'écrivent :

$$G_{dB}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log(1+x^2) \text{ et } \varphi(x) = -\arctan(x).$$

Comportements asymptotiques :

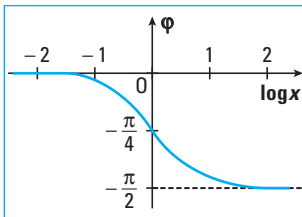
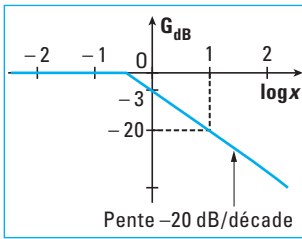
$$x \rightarrow 0^+, \log x \rightarrow -\infty, G_{dB}(x) \rightarrow 0, \varphi(x) \rightarrow 0.$$

$$x \rightarrow +\infty, \log x \rightarrow +\infty, G_{dB}(x) \rightarrow -\infty, \varphi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

On a vu plus haut le caractère intégrateur du filtre à hautes fréquences. Cela se traduit par une pente d'atténuation (en dB/décade) sur la réponse en gain :

$$G_{dB}(x) = -10 \log(1+x^2) \approx -10 \log x^2 = -20 \log x, \text{ pour } x \gg 1.$$

La pente de l'atténuation est donc de -20 dB/décade.



C.3. Étude du filtre passe-haut

• **Fonction de transfert.** On considère maintenant l'association complémentaire des dipôles R et C. En appliquant la même méthode que pour l'application 1, on trouve, en vertu de la loi de division de la tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}.$$

Ce filtre est bien d'ordre 1 (degré du polynôme en $j\omega$ au dénominateur).

Le gain et la phase¹⁵ s'écrivent respectivement :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \text{ et } \varphi(\omega) = \arg(|\underline{H}(j\omega)|) = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega).$$

• **Pulsation de coupure. Bande-passante.** La fonction $G(\omega)$ est une fonction croissante de la pulsation et sa valeur maximale est la valeur asymptotique : $G(\omega \rightarrow +\infty) \rightarrow G_{\max} = 1$.

La pulsation de coupure est la pulsation solution de l'équation :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}, \text{ soit } 1+(RC\omega_c)^2 = 2(RC\omega_c)^2$$

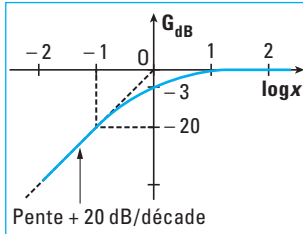
$$\text{et } \omega_c = \frac{1}{RC}.$$

15. On utilise le fait que :
 $\arg[z_1/z_2] = \arg[z_1] - \arg[z_2]$
 et $\arg[jRC\omega] = \pi/2$.

- **Diagramme de Bode.** En fonction de la pulsation réduite adimensionnée :

$x = \frac{\omega}{\omega_c}$, le gain en dB et la phase s'écrivent :

$$G_{dB}(x) = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ et } \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$



On représente sur la figure ci-contre le diagramme de la réponse en gain, puisque celui de la phase est identique au cas du filtre passe-bas après translation suivant l'axe des ordonnées de $\pi/2$.

- Comportement asymptotique à basses fréquences. Nous avons vu que le gain tend vers zéro lorsque la fréquence (ou la pulsation) diminue. On peut caractériser plus finement cet effet en cherchant l'expression d'un équivalent de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} \sim jRC\omega, \text{ pour } \omega \ll \omega_c, \text{ soit encore : } \underline{U}_s \sim jRC\omega \underline{U}_e.$$

Le montage réalise une opération de multiplication par $j\omega$ du signal d'entrée. Ceci correspond à une opération de dérivation par rapport au temps. En explicitant à nouveau les fonctions réelles, on peut dire que la réponse du montage, à la limite des basses fréquences, se traduit par l'équation différentielle :

$$u_s(t) \sim RC \frac{du_e(t)}{dt}.$$

C'est un montage **dérivateur**. Sur le diagramme de Bode ceci se traduit par le comportement asymptotique suivant :

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \simeq -10 \log \left(\frac{1}{x^2} \right) = +20 \log(x),$$

soit une pente de +20 dB/décade.

C.4. Gabarit d'un filtre

Les exemples de filtres rencontrés jusqu'ici ont permis de mettre en évidence leurs diverses fonctions possibles. Pour une application donnée nécessitant la synthèse d'un filtre, il est nécessaire de pouvoir calculer les coefficients du filtre pour répondre à une spécification précise. On définit pour cela le gabarit du filtre, qui représente les valeurs attendues du gain dans diverses bandes de fréquences¹⁶ ainsi que les limites de tolérance des différentes caractéristiques du filtre (pulsations de coupure, bande passante, atténuation dans la bande coupée etc).

On distingue en général trois zones : la bande passante, les bandes affaiblies et les bandes de transition.

La bande passante a déjà été définie. C'est la région de gain extrême et on caractérise les variations tolérées de ce dernier.

La bande affaiblie (idéalement avec un gain nul), est caractérisée par le gain maximum admissible. On y définit également l'atténuation (en spécifiant par exemple la pente de variation du gain en dB/décade).

Les bandes de transition sont définies par leurs largeurs spectrales (domaine de pulsations entre une bande affaiblie et la bande passante par exemple).

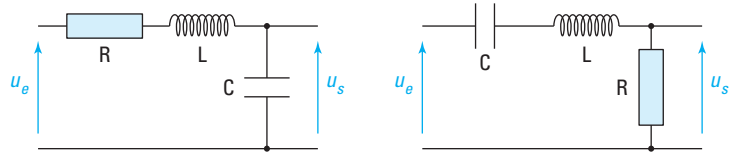
Une fois l'ensemble de ces données collectées, des techniques permettent de générer le schéma correspondant du filtre.

¹⁶ Le gabarit ainsi défini ne précise rien sur le déphasage.

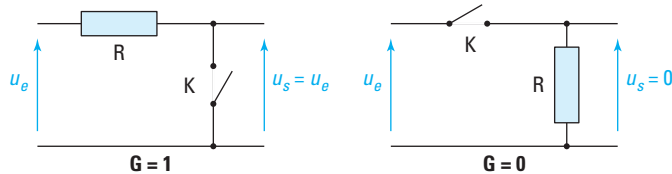
D. Filtrés du deuxième ordre

D.1. Nature du filtre

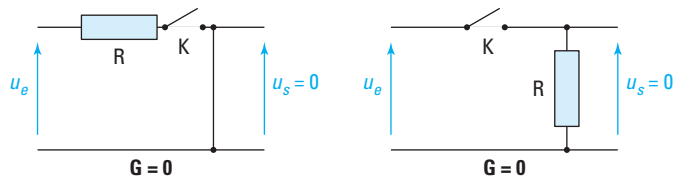
- Considérons deux associations RLC série différentes :



- Comportement asymptotique aux basses fréquences : les deux circuits sont équivalents à :



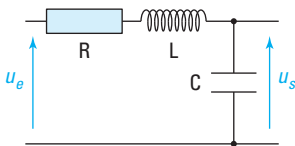
- Comportement asymptotique aux hautes fréquences les deux circuits sont équivalents à :



- L'analyse préliminaire montre clairement que le circuit de gauche est un filtre passe-bas (gain nul à hautes fréquences) alors que le circuit de droite atténue les deux gammes de fréquences (basses et hautes). On a probablement un filtre passe bande, ce que confirmera une analyse plus poussée.

D.2. Étude du filtre passe-bas d'ordre 2

- **Fonction de transfert.** En vertu de la loi de division de la tension on obtient, pour le circuit représenté sur la figure ci-contre :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Ce filtre est bien d'ordre 2 (degré du polynôme en $j\omega$ au dénominateur).

- **Écriture sous forme canonique.** On introduit des variables adimensionnelles : la pulsation réduite, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du

circuit et le facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$. Ceci permet d'exprimer la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

Le gain et la phase¹⁷ s'écrivent respectivement :

$$G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arctan\left(\frac{-x}{Q(1-x^2)}\right)$$

17. Pour déterminer complètement la phase il faut aussi déterminer dans quel quadrant se situe φ . Ici $\cos \varphi$ est du signe de $1 - x^2$. On a donc : φ compris entre $-\pi/2$ et 0 si $x < 1$ et entre $-\pi$ et $-\pi/2$ si $x \geq 1$.

- **Diagramme de Bode.** Le gain en dB vaut :

$$G_{dB}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = -10 \log \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right).$$

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right).$$

On a déjà discuté lors de l'étude du circuit RLC série que la tension aux bornes du condensateur pouvait connaître un phénomène de surtension (on parle de résonance de charge) si le facteur de qualité est supérieur à la valeur critique : $Q_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas la valeur maximale est atteinte pour la pulsa-

tion réduite : $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, et vaut :

$$G_{dB \max} = 20 \log Q - 10 \log \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right).$$

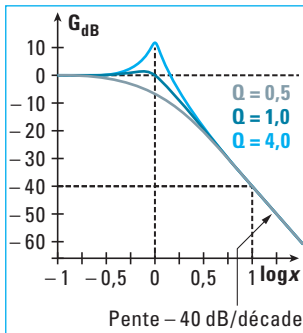
Dans le cas contraire ($Q \leq Q_c$) la fonction est décroissante et le maximum vaut $G_{dB \max} = 0$ pour $x = 0$.

Le diagramme de Bode obtenu pour différentes valeurs du facteur de qualité est tracé dans la figure ci-contre. Le diagramme de la phase a été étudié en détail dans le chapitre précédent.

- Comportement asymptotique à hautes fréquences. On cherche un équivalent pour la réponse en gain lorsque la fréquence augmente (à la limite $x \rightarrow 1$) :

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right) \sim -10 \log(x^4) = -40 \log(x),$$

soit une pente de -40 dB/décade.



D.3. Étude du filtre passe-bande d'ordre 2

- **Fonction de transfert.** En vertu de la loi de division de la tension on obtient, pour le circuit représenté sur la figure ci-contre :

$$\underline{H}(jx) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R + Z_L} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Ce filtre est bien d'ordre 2 (degré du polynôme en $j\omega$ au dénominateur).

- **Écriture sous forme canonique.** On considère les mêmes variables adimensionnées que précédemment : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$, et on exprime la fonction de transfert sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H}(jx) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Le gain et la phase s'écrivent respectivement :

$$G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \text{ d'une part et :}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right), \text{ d'autre part}^{18}.$$

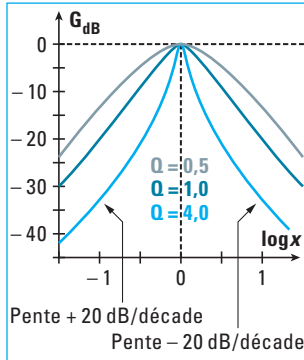
18. On remarque une fois de plus que la phase de ce circuit passe-bande est translatée de $+\pi/2$ par rapport à celle du circuit passe-bas d'ordre 2 du paragraphe précédent.

- **Diagramme de Bode.** Le gain en dB vaut :

$$G_{dB}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right).$$

On retrouve le fait que, quelle que soit la valeur du facteur de qualité, il existe une valeur maximale $G_{dB \max} = 0$, atteinte pour la pulsation réduite : $x_r = 1$. C'est la résonance d'intensité.

Le diagramme de Bode obtenu pour différentes valeurs du facteur de qualité est tracé dans la figure ci-contre.



- Comportement asymptotique à hautes fréquences. On cherche un équivalent pour la réponse en gain lorsque la fréquence augmente (à la limite) :

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right) \simeq -10 \log(Q^2 x^2) = -20 \log(x),$$

soit une pente de -20 dB/décade.

- Comportement asymptotique à basses fréquences. On cherche un équivalent pour la réponse en gain lorsque la fréquence diminue (à la limite $x \gg 1$) :

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right) \simeq -10 \log \left(\frac{Q^2}{x^2} \right) = +20 \log(x),$$

soit une pente de +20 dB/décade.

- La sélectivité du filtre dépend du facteur de qualité comme le met clairement en évidence le diagramme de Bode précédent. Le filtre de facteur de qualité le plus élevé a la bande passante la plus faible¹⁹ et est donc le plus sélectif autour de la fréquence propre du circuit.

¹⁹ On rappelle que la bande passante en pulsation réduite s'écrit :

$$\Delta x = \frac{1}{Q}.$$

L'essentiel

✓ Description des signaux sinusoïdaux

- Un signal électrique $S(t)$ est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme : $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, avec S_0 : amplitude du signal et φ : phase (en rad) à l'origine des temps (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$).
- Valeur moyenne S_{moy} de $S(t)$: $S_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$.
- Valeur efficace S_{eff} de $S(t)$: $S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt}$.
- Cas d'un signal purement sinusoïdal : $S_{\text{moy}} = 0$, $S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$.

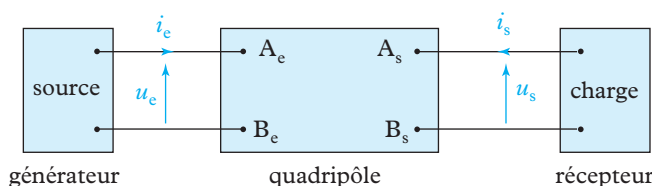
✓ Analyse de Fourier d'un signal périodique

- On peut décomposer tout signal $S(t)$, périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sous la forme d'une série de Fourier :

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)].$$

- Les coefficients de la série sont calculables à partir d'intégrales définies.
- Les composantes de la série sont ordonnées par fréquences croissantes :
 - la plus basse fréquence, $f_1 = f_0$ correspond au fondamental ($n = 1$) ;
 - les fréquences supérieures $f_n = nf_0$ correspondent aux harmoniques d'ordre n ($n > 1$) ; ce sont des multiples de la fréquence fondamentale.
- La représentation des composantes $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en fonction de n ou de nf constitue le spectre de Fourier du signal.
- Principe du filtrage : modifier le spectre de Fourier d'un signal en entrée d'un circuit électrique de manière à amplifier ou atténuer certaines fréquences ou gammes de fréquences.

✓ Fonction de transfert d'un quadripôle



- Un quadripôle est un circuit relié à l'extérieur par deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, caractérisé par quatre variables : tension u_e et courant i_e en entrée, tension u_s et courant i_s en sortie.
- Un quadripôle est linéaire si les relations entre ces variables sont linéaires. S'il est constitué de dipôles linéaires, le quadripôle est linéaire.
- La fonction de transfert est le rapport entre une grandeur complexe de sortie et une grandeur complexe de sortie.
La plus utilisée est l'amplification en tension complexe : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)}$.

✓ Diagramme de Bode d'un système

- Pour l'amplification d'un système on s'intéresse au module et à la phase de la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

- Le Bel (B) est une unité sans dimension mesurant le rapport de deux puissances: $x_B = \log \frac{P_1}{P_2}$ en Bel et $x_{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2}$ en décibels.

- Le diagramme de Bode est constitué par deux courbes :
 - le gain G de la fonction de transfert (en dB) en fonction de $\log f$ ou $\log \omega$:
 $G_{dB} = 20 \log G = f(\log \omega)$;
 - la phase φ de la fonction de transfert (en rad) en fonction de $\log f$ ou $\log \omega$:
 $\varphi = g(\log \omega)$.

- Ordre d'un filtre : degré du polynôme situé au dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$.

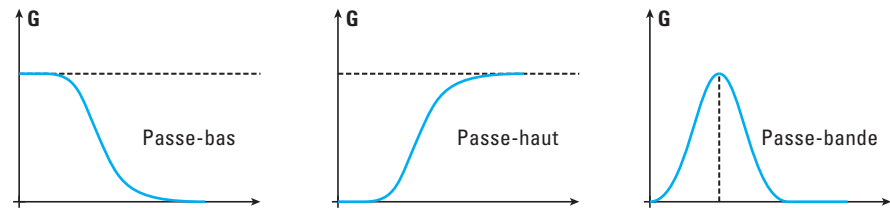
- Pulsation de coupure ω_C d'un filtre :

$$G(\omega_C) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G_{dB}(\omega_C) = G_{dB \max} - 3 \text{ (en dB)}.$$

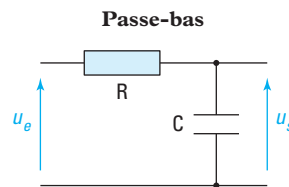
- Bande-passante d'un filtre : intervalle de pulsations tel que :

$$\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{\max}, \text{ soit } G_{dB \max} - 3 \leq G_{dB}(\omega) \leq G_{dB \max}.$$

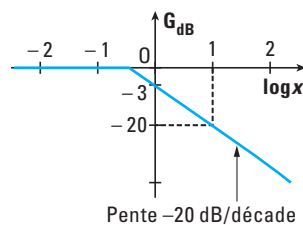
- Nature d'un filtre : les fonctions les plus répandues agissent sur le spectre du signal d'entrée en laissant passer les basses fréquences (passe-bas), les hautes fréquences (passe-haut) ou une bande de fréquence autour d'une valeur centrale ω_r (passe-bande).



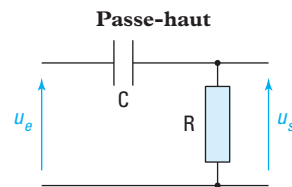
✓ Filtres du premier ordre



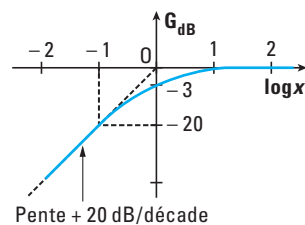
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$



$$G_{db}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log(1+x^2)$$



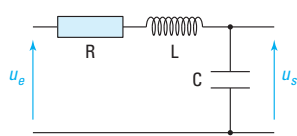
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$



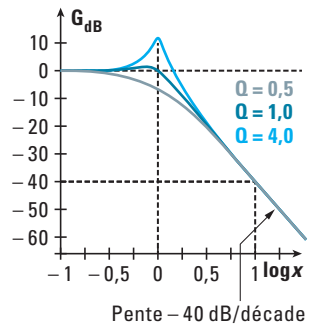
$$G_{db}(x) = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

✓ Filtres du deuxième ordre

Passe-bas

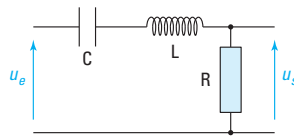


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$$

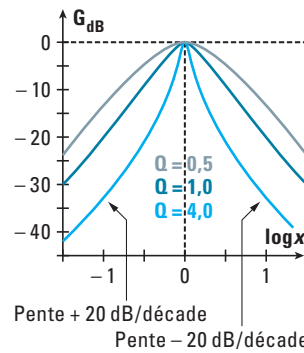


$$G_{db}(x) = -10 \log \left((1 + x^2) + \left(\frac{x}{Q} \right)^2 \right)$$

Passe-haut



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



$$G_{db}(x) = -10 \log \left((1 + Q^2) + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment calculer les coefficients de la série de Fourier d'un signal?

L'étude d'un signal périodique et l'action d'un filtre sur ce dernier passent souvent par l'analyse de son spectre. Nous avons déjà vu au chapitre 2 comment construire un spectre pour un signal dont on sait qu'il est une superposition de plusieurs signaux sinusoïdaux. Il s'agit maintenant de déterminer le spectre d'un signal de forme quelconque.

→ Savoir faire

- ❶ Identifier le caractère périodique du signal. Mesurer la période si l'énoncé ne fournit qu'un oscillogramme par exemple.
- ❷ Déterminer la parité du signal (par l'opération d'inversion de t , soit : $t \rightarrow -t$). En effet, les propriétés de parité du signal annulent certains coefficients de sa série de Fourier :
 - $b_n = 0$ pour un signal pair ;
 - $a_n = 0$ pour un signal impair.

- ❸ Déterminer la valeur moyenne du signal : $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$.

- ❹ Si la forme analytique du signal n'est pas explicitée mais qu'elle est simple à trouver (par exemple fonction affine par morceaux dont on connaît l'oscillogramme), la déterminer.

- ❺ Calculer les coefficients de la série de Fourier par le calcul des intégrales suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\omega t) dt$$

- ❻ (Optionnel). Tracer le spectre de Fourier : graphe $c_n = f(n)$ où $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

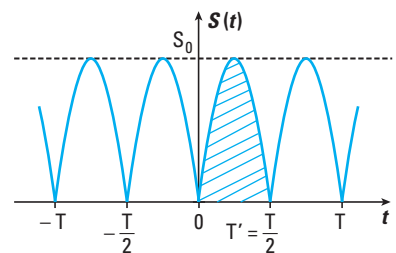
- ❼ (Optionnel). Prévoir l'action d'un filtre dont la fonction de transfert est connue sur ce signal.

→ Application

On considère le signal bi-redressé d'équation : $S(t) = S_0 |\sin(\omega t)|$ représenté ci-contre.

Déterminer les coefficients de Fourier de ce signal.

Comment peut-on isoler (c'est-à-dire sélectionner) la composante continue de ce signal?



Solution

- ❶ Le signal est périodique et sa période vaut $T' = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T}{\omega}$.

- ❷ On voit sur la représentation graphique que le signal est invariant par renversement du temps. On le confirme simplement en constatant que :

$$S(-t) = S_0 |\sin(-\omega t)| = S_0 |-\sin(\omega t)| = S_0 |\sin(\omega t)| = S(t).$$

En tenant compte de cette propriété on peut directement établir que les coefficients de Fourier

b_n sont nuls. La série de Fourier de ce signal s'écrit donc : $S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$, où $\omega' = \frac{2\pi}{T}$.

- ③ La valeur moyenne de ce signal s'écrit : $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$.

Cette intégrale représente l'aire hachurée sur le graphe, comprise entre la courbe du signal et l'axe des abscisses, sur une période complète.

On obtient ainsi :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 |\sin(\omega t)| dt = \frac{S_0}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{S_0}{T} \times \frac{T}{2\pi} \left[-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = \frac{2S_0}{\pi}.$$

- ④ Dans cet exemple la forme du signal est donnée. On remarque que l'énoncé pourrait stipuler que l'on obtient ce signal à partir d'un signal purement sinusoïdal que l'on a redressé, c'est-à-dire que l'on a transformé les demi-arches négatives (sous l'axe des abscisses) en demi-arches positives (au-dessus). Ceci correspond bien à l'opération mathématique de valeur absolue.
- ⑤ La suite des coefficients restant à calculer est :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2S_0}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt.$$

☀ On utilise l'identité trigonométrique : $\sin b \cos a = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$.

$$a_n = \frac{S_0}{T} \int_0^T \left[\sin\left(\frac{(n+1)2\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{(n-1)2\pi t}{T}\right) \right] dt = \frac{2S_0}{T} \times \frac{T}{2\pi} \left[\frac{-\cos\left(\frac{(n+1)2\pi t}{T}\right)}{(n+1)} - \frac{-\cos\left(\frac{(n-1)2\pi t}{T}\right)}{(n-1)} \right]_0^T$$

$$\text{On trouve donc que : } a_n = \frac{S_0}{\pi} \left[\frac{1 - \cos((n+1)\pi)}{(n+1)} - \frac{1 - \cos((n-1)\pi)}{(n-1)} \right].$$

☀ n impair $\Rightarrow n \pm 1$ pair $\Rightarrow \cos(n \pm 1)\pi = 1$; n pair $\Rightarrow n \pm 1$ impair $\Rightarrow \cos(n \pm 1)\pi = -1$.

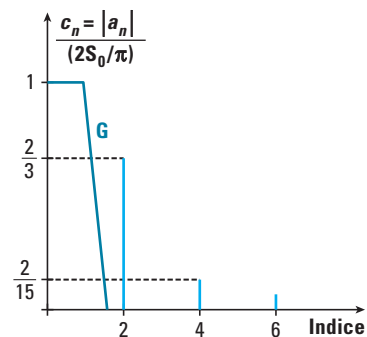
On peut résumer ces résultats sous la forme : $a_n = \frac{S_0}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{(n+1)} - \frac{1 - (-1)^{n-1}}{(n-1)} \right]$. En posant $n = 2p$,

on peut encore simplifier le résultat : $a_{2p} = \frac{S_0}{\pi} \left[\frac{2}{(2p+1)} - \frac{2}{(2p-1)} \right] = \frac{-4S_0}{\pi} \times \frac{1}{(2p+1)(2p-1)}$.

- ⑥ Le spectre de Fourier est tracé ci-contre

(on a considéré : $c_n = \frac{1}{(250/\pi)} \times |a_n|$).

- ⑦ On a surimposé sur le spectre de Fourier la réponse en gain que l'on devrait adopter si on souhaitait ne conserver que la composante continue de ce signal. Il faudrait un filtre passe-bas dont la zone d'atténuation serait assez courte pour pouvoir éliminer la composante $n = 2$ (correspondant à la première harmonique) du signal.



Méthode n°2

Comment tracer le diagramme de Bode d'un filtre passif?

Le diagramme de Bode est la représentation la plus utilisée de la fonction de transfert d'un filtre. On précise ici les étapes pour y aboutir.

→ Savoir faire

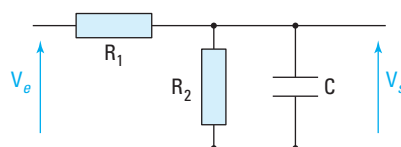
- ① Déterminer la fonction de transfert du filtre en appliquant les diviseurs de tension et des associations d'impédances.

- ② Écrire la fonction de transfert: $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$. Utiliser la pulsation adimensionnée $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}$ où la pulsation de référence représente soit la pulsation de coupure, soit la pulsation propre du circuit.
- ③ Exprimer le gain en décibel et la phase associés à la fonction de transfert:

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \text{ et } \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$$
- ④ Déterminer le comportement asymptotique de ces fonctions aux basses fréquences ($x \rightarrow 0$), puis aux hautes fréquences ($x \rightarrow +\infty$). En déduire les asymptotes correspondantes.
- ⑤ Déterminer les extrema éventuels du gain en décibel.
- ⑥ Tracer les asymptotes du diagramme de Bode, puis le gain G en fonction de $\log(x)$ en prenant en compte la présence d'éventuels extrema.
- ⑦ Déterminer les limites de la phase aux basses fréquences. En déduire les asymptotes correspondantes. Tracer la phase φ en fonction de $\log(x)$.

→ Application

Tracer le diagramme de Bode du filtre schématisé ci-contre :



Solution

- ① La résistance R_2 et le condensateur C sont en parallèle et se ramènent à une admittance unique :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}$$

La loi de division des tensions donne alors :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_{R_1}} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{R_1} \times \underline{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1C\omega}$$

- ② Il n'y a pas de valeur imposée pour la pulsation de référence, et on peut choisir soit $\omega_{\text{ref}} = \frac{1}{R_1C}$, soit $\omega_{\text{ref}} = \frac{1}{R_1C} \times \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}$, ce qui permet de factoriser le dénominateur sous la forme : $1 + jx$. Prenons cette deuxième option. La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{1 + jx}$$

On a un filtre du premier ordre (degré du polynôme au dénominateur).

- ③ Le gain en dB vaut: $G_{\text{dB}}(x) = 20 \log \left(\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = -20 \log \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - 10 \log(1 + x^2)$, et la phase: $\varphi(x) = -\arctan(x)$.



C'est la même expression que pour le filtre RC passe-bas. Son tracé est donné dans le cours.

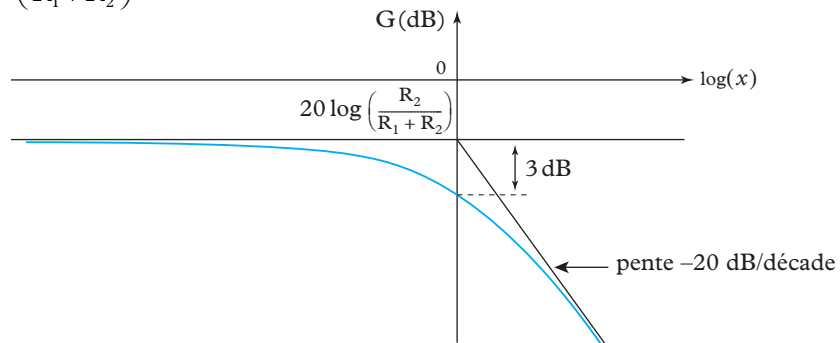
- ④ Le comportement asymptotique de G_{dB} est typique d'un filtre passe-bas :

- quand $x \rightarrow 0$: $G_{\text{dB}}(x) \rightarrow -20 \log \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$, valeur maximale du gain,
- quand $x \rightarrow +\infty$: $G_{\text{dB}}(x) \rightarrow -20 \log(x)$, droite de pente -20dB/décade .

5 On a vu que la valeur maximale du gain en dB est :

$$-20 \log \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right), \text{ la fonction : } -10 \log(1 + x^2) \text{ étant strictement décroissante.}$$

6 Le diagramme de Bode de ce filtre est représenté ci-contre.

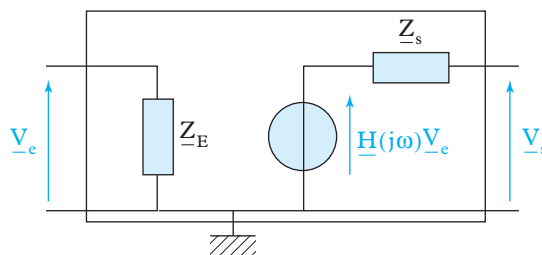


Méthode n°3

Comment déterminer les impédances d'entrée et de sortie d'un filtre?

La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ qui est calculée à vide, ne suffit pas à caractériser un filtre. On peut être amené à caractériser le quadripôle par un modèle équivalent du type représenté sur la figure ci-contre.

Les paramètres importants à déterminer sont l'impédance d'entrée et l'impédance de sortie.



→ Savoir faire

- 1 Calculer l'impédance équivalente au filtre entre la masse et la borne d'entrée en veillant à ce qu'aucun composant ne soit branché en sortie. C'est l'impédance d'entrée \underline{Z}_e .
- 2 Relier la borne d'entrée à la masse, puis calculer l'impédance équivalente au circuit entre la masse et la borne de sortie. Il s'agit de l'impédance de sortie \underline{Z}_s du filtre.
- 3 Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre.
- 4 Rassembler les caractéristiques \underline{Z}_e , \underline{Z}_s , $\underline{H}(j\omega)$ sur le schéma équivalent.

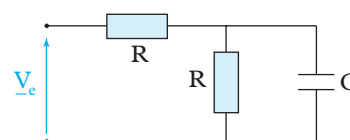
→ Application

Donner les impédances d'entrée/sortie pour le circuit de la méthode n° 2 en prenant $R_1 = R_2 = R$.

Solution

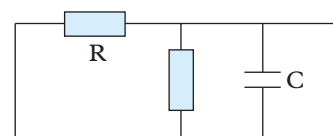
- 1 Pour le calcul de l'impédance d'entrée on supprime toute charge en sortie. Aucun courant ne sort. Le circuit équivalent est donc celui représenté ci-contre. L'impédance totale est :

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R \underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = R + \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$



- 2 On place l'entrée à la masse, ce qui conduit au circuit équivalent de la figure ci-contre. Entre les deux bornes de sortie, les trois dipôles se retrouvent en parallèle. On en déduit donc :

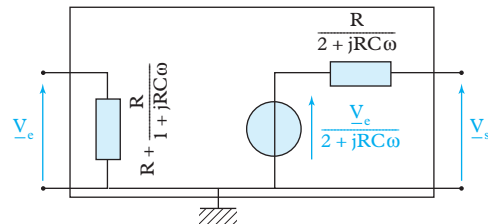
$$\underline{Z}_s = \frac{R \times \frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{R}{2 + jRC\omega}.$$



- ③ La fonction de transfert se calcule immédiatement par application de la loi de division des tensions :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + \frac{R}{1+jRC\omega}} = \frac{1}{2+jRC\omega}.$$

- ④ Finalement on obtient le circuit équivalent représenté sur la figure ci-contre. L'intérêt de ces schémas équivalents apparaît lorsqu'il faut chaîner plusieurs filtres pour obtenir différentes fonctions successives. Pour limiter les pertes de puissance en passant d'un étage à l'autre on doit avoir des filtres de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.

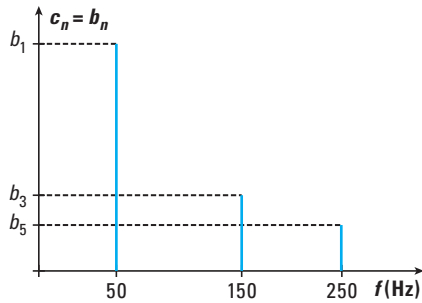


Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Concevoir un filtre

On souhaite filtrer un signal dont le spectre de Fourier est connu et représenté sur la figure suivante.

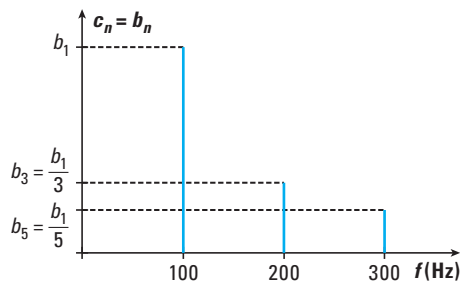


On voudrait pouvoir conserver en sortie de filtre un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 100 et 300Hz.

- 1) Quel type de filtre doit-on utiliser pour obtenir le signal voulu?
- 2) Pourquoi sélectionner la fréquence la plus basse possible?

Ex. 2 Tension créneau

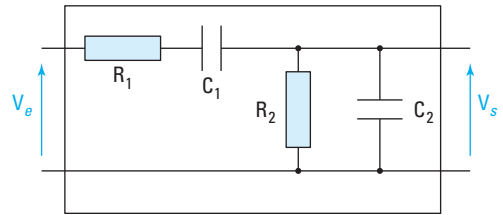
On réalise au moyen d'un analyseur de spectre, le spectre d'une tension créneau. On donne ce spectre sur la figure suivante.



- 1) Quelle(s) caractéristique(s) du signal d'entrée peut-on déduire par analyse de ce spectre?
- 2) Retrouver par le calcul les coefficients de la série de Fourier du signal.

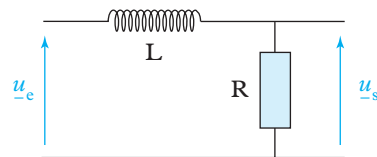
Ex. 3 Nature d'un filtre

On cherche à déterminer la nature d'un filtre à l'aide d'arguments qualitatifs. Sans calculer la fonction de transfert du filtre de Wien représenté sur la figure suivante, en déterminer la nature.



Ex. 4 Filtre à bobine

- 1) Déterminer la nature du filtre suivant et calculer sa fonction de transfert.

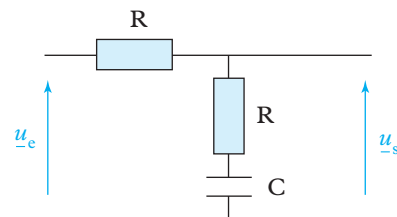


- 2) À partir des deux mêmes dipôles, peut-on réaliser un filtre de nature différente?

Niveau 2

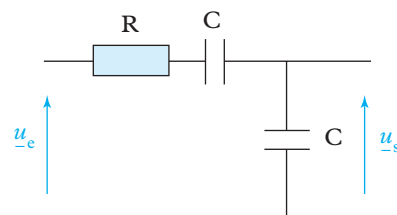
Ex. 5 Filtre R-RC

Déterminer la nature du filtre suivant et calculer sa fonction de transfert.



Ex. 6 Filtre RC-C

Déterminer la nature du filtre suivant et calculer sa fonction de transfert.



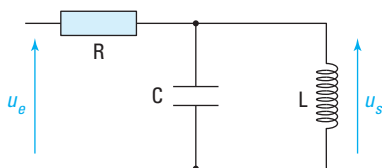
Niveau 3

Ex. 7 Filtre de Wien

- 1) Calculer la fonction de transfert du filtre de Wien de l'exercice 3 en prenant $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C$.
- 2) Tracer le diagramme de Bode de ce circuit.

Ex. 8 Circuit bouchon

Le montage étudié comporte une résistance $R = 100 \Omega$ en série avec une bobine d'inductance $L = 10 \text{ mH}$ placée en parallèle avec un condensateur de capacité $C = 10 \text{ nF}$.



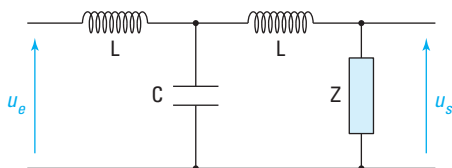
- 1) Déterminer la fonction de transfert du circuit.
- 2) Mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} - \frac{\omega_{\text{réf}}}{\omega} \right)}$$

- 3) Exprimer $\omega_{\text{réf}}$ et Q et calculer numériquement ces grandeurs.
- 4) Déterminer les pulsations de coupure et calculer leurs valeurs.
- 5) Tracer le diagramme de Bode de ce filtre.

Ex. 9 Filtre d'ordre 3

On considère le circuit schématisé ci-dessous et utilisé en régime sinusoïdal.



- 1) Exprimer l'impédance d'entrée du circuit. En déduire l'impédance caractéristique \underline{Z}_c définie par la condition : $\underline{Z}_c = \underline{Z} = \underline{Z}_c$.

- 2) Dans quel domaine de pulsation cette impédance caractéristique est-elle modélisable par une résistance pure R_c ? Donner sa valeur R_{c0} quand $\omega \rightarrow 0$.

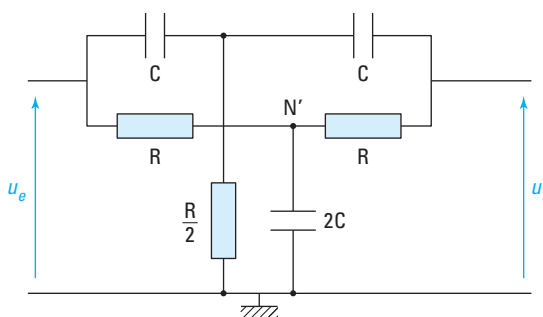
- 3) On considère maintenant que $\underline{Z} = R_{c0}$. Calculer la fonction de transfert du circuit en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ où $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

Quelle est la nature du filtre? Retrouver ce résultat à partir d'arguments qualitatifs.

- 4) Préciser son comportement asymptotique hautes fréquences du filtre.

Ex. 10 Filtre réjecteur

On considère le circuit ci-dessous :



- 1) Écrire la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 4jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

Exprimer $\omega_{\text{réf}}$.

- 2) Déterminer le comportement asymptotique de la fonction de transfert à basses et hautes fréquences. En déduire la nature du filtre.
- 3) Tracer le diagramme de Bode du circuit.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Le spectre de Fourier du signal met en évidence une fréquence fondamentale de 50 Hz. Les harmoniques de rang pair ($n = 2p$, avec n et p entiers) sont nulles et l'amplitude des harmoniques de rang impair décroissent rapidement avec leur rang.

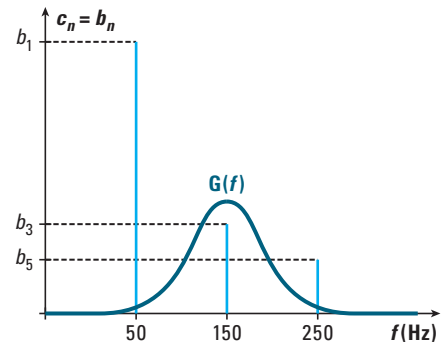
Le spectre d'un signal purement sinusoïdal ne comporte qu'une composante à la fréquence du signal. Il faut donc disposer d'un filtre qui permette de ne sélectionner qu'une seule des fréquences comprises dans l'intervalle voulu, soit 150 Hz ou 250 Hz.

Le filtre pouvant réaliser cette opération est un filtre passe-bande de fréquence propre se rapprochant le plus possible de la fréquence visée (150 Hz ou 250 Hz) pour avoir la meilleure sélection possible. Dans la mesure du possible on choisira un filtre symétrique par rapport à la fréquence propre même si ce n'est pas obligatoire. En revanche on choisira ici un filtre de bande passante étroite et dont les bandes de transition (entre la bande passante et les bandes affaiblies) sont les plus courtes possibles.

L'ordre du filtre va déterminer la pente des bandes affaiblies : plus l'ordre est élevé, plus les pentes sont raides et plus les contributions des fréquences non désirées seront faibles.

Le gain d'un tel filtre est superposé au spectre du signal sur la figure ci-contre.

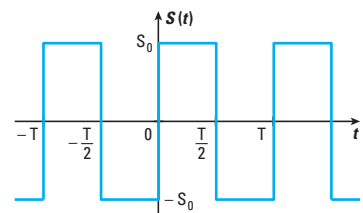
2) On aurait pu choisir de centrer le filtre sur la plus grande des deux fréquences mais visiblement l'amplitude des coefficients de la série de Fourier de ce signal décroissent rapidement avec leur rang. On a donc intérêt à sélectionner la fréquence la plus basse dans l'intervalle voulu pour conserver une partie significative du signal.



Exercice 2

1) Le spectre de Fourier du signal créneau permet de déterminer ses principales caractéristiques.

- Le signal a une fréquence fondamentale $f = 100$ Hz. On en déduit que $T = 1/f = 0,01$ s.
- L'absence de composante continue (pas de composante à $f = 0$ Hz) montre que la valeur moyenne de ce signal est nulle. Il doit donc être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Ensuite on constate que les composantes a_n sont nulles. On en déduit que le signal doit être impair par rapport à un renversement du temps : $S(-t) = -S(t)$.
- Il apparaît que les composantes de rang pair sont nulles également : $b_{2p} = 0$ avec p entier.
- Enfin les composantes de rang impair ont une amplitude qui décroît avec leur rang suivant une loi du type : $b_{2p+1} \propto \frac{1}{2p+1}$.
- Le signal créneau a l'allure schématisée sur la figure ci-contre.



2) Pour calculer les coefficients de la série de Fourier on applique les techniques développées dans la méthode n° 1.

On a établi par des considérations de symétrie que: $A_0 = 0$ et $a_n = 0 \forall n$.

Pour le calcul des coefficients b_n , on applique la formule:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S_0 \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \frac{4S_0}{T} \times \frac{T}{2\pi} \left[\frac{-\cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)}{n} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2S_0}{\pi} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n} \right).$$

La valeur de $\cos n\pi$ dépend de la parité de n :

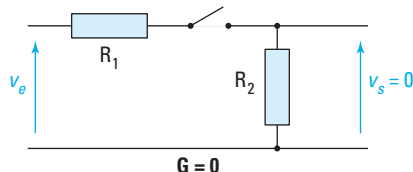
- $n = 2p$: $\cos n\pi = 1$, soit $b_n = 0$.
- $n = 2p + 1$: $\cos n\pi = -1$, soit $b_n = \frac{2S_0}{\pi} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) = \frac{4S_0}{n\pi}$. On retrouve bien la décroissance du spectre en $\frac{1}{n}$ annoncée dans l'énoncé.

Exercice 3

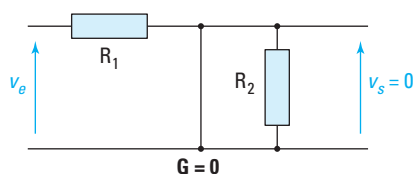
On rappelle que pour les dipôles fondamentaux (condensateurs et bobines) les comportements asymptotiques sont les suivants:

- Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).
- Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

Dans le cas présent, le circuit, à basses fréquences, est équivalent à:



Quant à la limite à hautes fréquences, on peut la déterminer facilement à partir du modèle équivalent:



Dans les deux cas, aucun courant ne circulant dans la résistance R_2 , la tension en sortie est nulle. Il est à noter que les raisons sont différentes: à basses fréquences le circuit est ouvert dans la branche de R_1 , donc aucun courant ne peut circuler. À hautes fréquences, la branche R_2 est court-circuitée et donc la d.d.p. aux bornes de R_2 est nulle.

Le filtre coupant les basses et hautes fréquences, il est passe-bande.

Exercice 4

1) Pour déterminer *a priori* la nature du filtre, on remplace la bobine par son modèle équivalent à basses et hautes fréquences. À basses fréquences on peut la remplacer par un fil et dans ce cas : $\underline{U}_s = \underline{U}_e$, ce qui correspond à un gain unité. À hautes fréquences on peut la remplacer par un interrupteur ouvert et dans ce cas : $\underline{U}_s = 0$, ce qui correspond à un gain nul.

Le filtre est donc *a priori* un filtre passe-bas.

Plus précisément on peut calculer la fonction de transfert à partir de la loi de division de la tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{R}{jL\omega + R} = \frac{1}{1 + jx}, \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = \frac{L\omega}{R}.$$

Le gain en dB est : $G_{\text{dB}}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log(1+x^2)$.

On retrouve bien la fonction d'un filtre passe-bas du premier ordre.

2) En intervertissant les positions de la bobine et de la résistance dans le circuit et en remplaçant la bobine par son modèle équivalent, on trouve alors les caractéristiques d'un filtre passe-haut.

La fonction de transfert se calcule suivant :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} = \frac{jx}{1 + jx}, \text{ avec la même pulsation de référence.}$$

Le gain en dB : $G_{\text{dB}}(x) = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$, correspond bien à celui d'un filtre passe-haut du premier ordre.

Exercices de niveau 2

Exercice 5

Pour déterminer *a priori* la nature du filtre, on remplace le condensateur par son modèle équivalent à basses et hautes fréquences. À basses fréquences on peut le remplacer par un interrupteur ouvert. Aucun courant ne peut circuler dans la branche RC et dans ce cas le lien entre les tensions d'entrée et de sortie est : $\underline{U}_s = \underline{U}_e - R\bar{i}_e$. Il n'y a pas de comportement simple.

À hautes fréquences on peut le remplacer par un fil et dans ce cas : $\underline{U}_s = \frac{R}{R+R} \underline{U}_e = \frac{1}{2} \underline{U}_e$, d'après la loi de division de la tension. Ceci entraîne un gain égal à $\frac{1}{2}$ (non nul). Le filtre ne réalise donc

pas *a priori* de fonction identifiable simplement. Il faut expliciter sa fonction de transfert.

La détermination de cette dernière utilise encore la loi de division de la tension.

L'association série de la résistance et du condensateur est équivalente à un dipôle d'impédance

$$\underline{Z}_{R+C} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = \frac{1}{jC\omega} + R.$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{R+C}}{\underline{Z}_{R+C} + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\frac{1}{jC\omega} + R + R} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}.$$

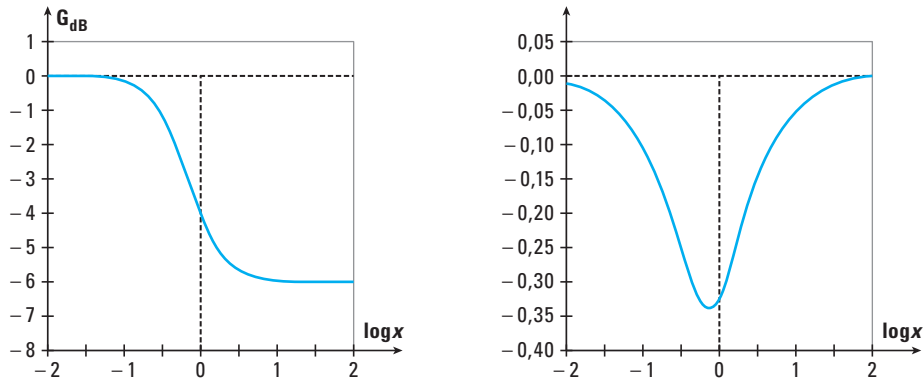
On pose $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ avec $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$. On en déduit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 + jx}{1 + 2jx}, \text{ soit un gain en dB et une phase :}$$

$$G_{dB}(x) = 20 \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+4x^2}} = 10 \log \frac{1+x^2}{1+4x^2}$$

$$\varphi(x) = \arctan(x) - \arctan(2x)$$

Ces deux fonctions sont tracées ci-dessous.



Exercice 6

La détermination de la fonction de transfert utilise la loi de division de la tension.

L'association série de la résistance et du condensateur est équivalente à un dipôle d'impédance :

$$\underline{Z}_{R+C} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = \frac{1}{jC\omega} + R.$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R+C} + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}}, \text{ avec } \omega_{\text{réf}} = \frac{2}{RC}.$$

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$. On en déduit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + jx}, \text{ soit un gain en dB et une phase :}$$

$$G_{dB}(x) = -20 \log 2 - 10 \log(1+x^2),$$

$$\varphi(x) = -\arctan(x).$$

On reconnaît un filtre passe-bas d'ordre 1 et de gain maximal $G_{\text{max}} = 0,5$.

Exercices de niveau 3

Exercice 7

On reconnaît un diviseur de tension appliqué aux bornes des dipôles équivalents suivants :

$$\underline{Z}_{R+C} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = \frac{1}{jC\omega} + R = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} \text{ et } \underline{Z}_{R+C} = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{R}{1 + jRC\omega}, \text{ soit :}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{R+C}}{\underline{Z}_{R+C} + \underline{Z}_{R/C}} = \frac{R}{R + \frac{(1 + jRC\omega)^2}{jC\omega}} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}.$$

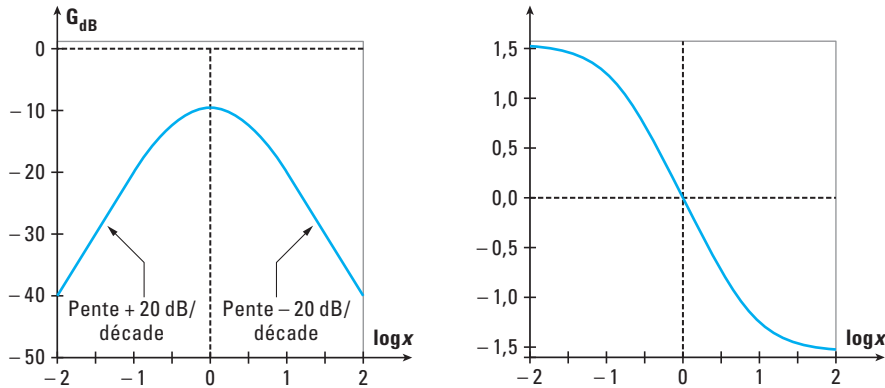
On pose $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ ce qui permet de factoriser la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Le gain (dB) et la phase s'écrivent : $G_{\text{dB}}(x) = -10\log\left(9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)$ et $\varphi(x) = -\arctan\left(\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)}{3}\right)$.

Le comportement asymptotique du filtre se détermine en utilisant le modèle équivalent du condensateur. À basses fréquences le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Aucun courant ne circule dans la branche horizontale. Il n'y a donc pas de courant qui descend dans la résistance aux bornes de laquelle est mesurée \underline{U}_s . La loi d'Ohm indique qu'alors : $\underline{U}_s = 0$. À hautes fréquences le condensateur est équivalent à un fil. La résistance verticale est court-circuitée et la d.d.p. à ses bornes est nulle, donc $\underline{U}_s = 0$. On retrouve le comportement asymptotique d'un filtre passe-bande.

Ces deux fonctions sont tracées ci-dessous.



Exercice 8

1) On reconnaît un diviseur de tension appliqué aux bornes des dipôles équivalents suivants :

$$\underline{Z}_R = R \text{ et } \underline{Z}_{L/C} = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}, \text{ soit :}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{L/C}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L/C}} = \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} = \frac{1}{1 + R \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega}}.$$

2) Pour mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} - \frac{\omega_{\text{réf}}}{\omega} \right)},$$

on doit satisfaire les équations suivantes :

$$\frac{1}{Q\omega_{\text{réf}}} = RC \text{ et } \frac{\omega_{\text{réf}}}{Q} = \frac{R}{L} \text{ d'où } \frac{1}{Q^2} = \frac{R^2 C}{L} \text{ et } \omega_{\text{réf}}^2 = \frac{1}{LC}.$$

3) On calcule les valeurs numériques de ces grandeurs : $\omega_{\text{réf}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q = \frac{L\omega_{\text{réf}}}{R} = 10$.

4) La valeur maximale du gain : $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} - \frac{\omega_{\text{réf}}}{\omega} \right)^2}}$ est $G(\omega = \omega_{\text{réf}}) = 1$.

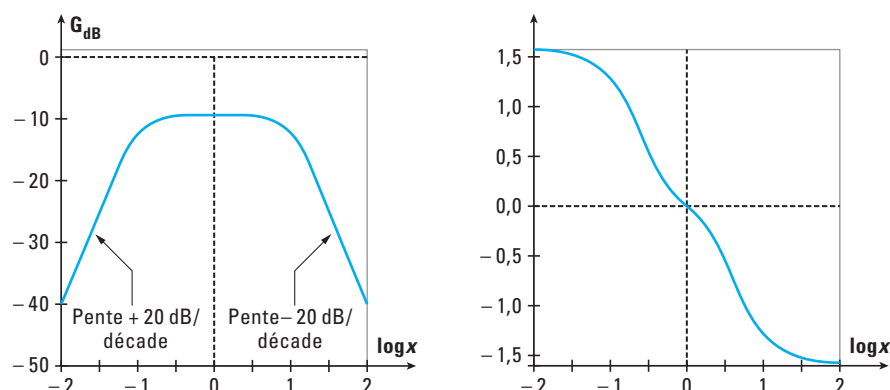
Pour déterminer les pulsations de coupure on doit résoudre le jeu d'équations : $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} - \frac{\omega_{\text{réf}}}{\omega} \right)^2 = 1$.

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, on trouve que les pulsations de coupure doivent être solution des équations :

$$x^2 \pm Qx - 1 = 0, \text{ soit } x_{C1}, x_{C2} = \mp \frac{Q}{2} + \frac{\sqrt{Q^2 + 4}}{2}.$$

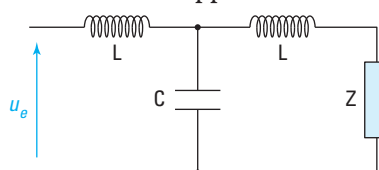
Numériquement on trouve $x_{C1} = 0,1$ et $x_{C2} = 10$.

Le diagramme de Bode est tracé ci-dessous.



Exercice 9

1) Pour déterminer l'impédance d'entrée on supprime toute charge au circuit initial, soit :



On a donc l'ensemble $\underline{Z} + \underline{Z}_L$ en parallèle avec \underline{Z}_C , le tout étant en série avec \underline{Z}_L , soit

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_L + \frac{\underline{Z}_C \times (\underline{Z} + \underline{Z}_L)}{\underline{Z}_C + (\underline{Z} + \underline{Z}_L)} = \frac{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \times (jL\omega + \underline{Z}) + \frac{L}{C}}{\underline{Z} + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}.$$

2) La condition : $\underline{Z}_e = \underline{Z} = \underline{Z}_C$ permet de trouver l'impédance demandée :

$$\underline{Z}_e = \frac{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \times (jL\omega + \underline{Z}) + \frac{L}{C}}{\underline{Z} + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \underline{Z}, \text{ soit } j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \times (jL\omega + \underline{Z}) + \frac{L}{C} = \underline{Z} \times \left(\underline{Z} + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right).$$

Cette dernière équation se simplifie en : $j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \times jL\omega + \frac{L}{C} = \underline{Z}^2$.

Finalement l'impédance vaut :

- $Z = \sqrt{2\frac{L}{C} - L^2\omega^2}$ si $\omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}$,
- $\underline{Z} = j\sqrt{L^2\omega^2 - 2\frac{L}{C}}$ si $\omega > \sqrt{\frac{2}{LC}}$.

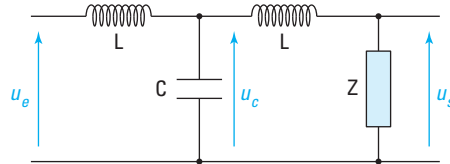
Pour avoir une impédance qui soit de type résistif, il faut donc que l'on soit dans le premier cas,

soit : $\omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}$ et $Z = R_C = \sqrt{2\frac{L}{C} - L^2\omega^2}$.

À la limite où $\omega \rightarrow 0$, on a $Z \rightarrow \sqrt{2\frac{L}{C}} = R_{C0}$.

3) Pour déterminer la fonction de transfert on utilise la loi du diviseur de tension deux fois consécutive. On introduit la tension \underline{U}_C aux bornes du condensateur et on peut écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_C} \times \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_e}.$$



⚡ Attention à bien tenir compte du fait que lorsque la tension \underline{U}_C est prise comme tension de sortie, elle s'applique aux bornes d'un ensemble de dipôles (condensateur en parallèle à l'association série de R_{C0} et de la bobine).

La fonction de transfert évidente est celle qui permet de passer de \underline{U}_C à \underline{U}_S :

$$\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_C} = \frac{R_{C0}}{\underline{Z}_L + R_{C0}} = \frac{1}{1 + jL\omega \times \sqrt{\frac{C}{2L}}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{2\omega_{\text{réf}}}} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{2}}.$$

On note au passage que l'on a les relations suivantes, conséquences de la définition de R_{C0} et de $\omega_{\text{réf}}$:

$$R_{C0} = \sqrt{2\frac{L}{C}} = \frac{1}{C\omega_{\text{réf}}} = 2L\omega_{\text{réf}}.$$

Soit $\underline{Z}_{\text{eq}}$ l'impédance équivalente de l'ensemble constitué du condensateur en parallèle avec l'association série de R_{C0} et de la bobine :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_C \times (R_{C0} + \underline{Z}_L)}{\underline{Z}_C + (R_{C0} + \underline{Z}_L)} = \frac{\frac{1}{jC\omega} \times (R_{C0} + jL\omega)}{\frac{1}{jC\omega} + (R_{C0} + jL\omega)} = \frac{\frac{1}{C\omega_{\text{réf}}} + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + j\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}} = jL\omega \times \frac{1 - \frac{2j}{x}}{1 - \frac{x^2}{2} + jx} = \underline{Z}_L \times \left(\frac{-2j}{x}\right) \times \frac{1 + j\frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{2} + jx}$$

L'expression de la seconde fonction de transfert fait intervenir le pont diviseur de tension suivant :

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_L} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_{\text{eq}}}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{jx}{2} \times \frac{1 - \frac{x^2}{2} + jx}{1 + j\frac{x}{2}}\right)}, \text{ et}$$

En regroupant les différents termes :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_c} \times \frac{\underline{U}_c}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1+j\frac{x}{2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{jx}{2} \times \frac{1-\frac{x^2}{2}+jx}{1+j\frac{x}{2}}\right)} = \frac{1}{1+j\frac{x}{2}+\frac{jx}{2} \times \left(1-\frac{x^2}{2}+jx\right)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+jx-\frac{jx^3}{4}}.$$

On a un filtre d'ordre 3 (degré du polynôme au dénominateur).

Le gain en dB s'écrit :

$$G_{dB}(x) = -20 \log \left(\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2} \right) = -10 \log \left(\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2 \right).$$

À hautes fréquences ($x \rightarrow +\infty$) le comportement asymptotique s'écrit :

$$G_{dB}(x) \rightarrow -10 \log \left(x^2 \times \frac{x^4}{16} \right) = +40 \log 2 - 60 \log x.$$

On a bien une pente à -60 dB/décade comme attendu pour un filtre d'ordre 3.

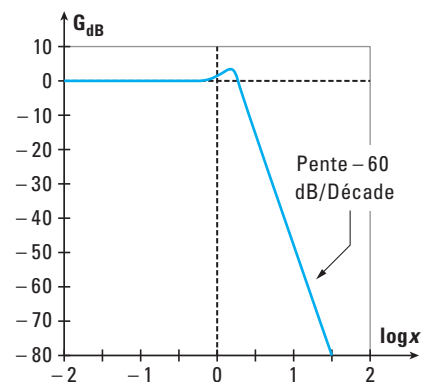
À basses fréquences ($x \rightarrow 0$) le comportement asymptotique s'écrit :

$$G_{dB(x)} \rightarrow 0.$$

On a globalement un filtre passe-bas.

Le diagramme de Bode de ce filtre est représenté ci-contre. Il fait apparaître une résonance (pic de réponse maximale) dont on peut déterminer les caractéristiques en étudiant la fonction :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2.$$



Approche documentaire

À propos du fonctionnement des sismomètres

Source : Musée de Sismologie et Magnétisme Terrestre - Jardins de l'Université - Strasbourg,
<http://musee-sismologie.unistra.fr>

Un sismomètre est un appareil capable de détecter de très petits mouvements du sol et de les enregistrer, analogiquement ou numériquement, en suivant une base de temps très précise. Il fonctionne sur le même principe qu'un oscillateur à masse d'inertie amorti. L'enregistrement du mouvement de la masse en fonction du temps correspond au sismogramme. Il est indispensable d'étudier les mouvements du sol en fonction du temps si l'on veut localiser l'origine d'un séisme. Le sismomètre est en général composé d'un capteur, d'un amplificateur, d'un transducteur et d'un enregistreur. Le mouvement du sol z_{sol} est lié au mouvement de la masse z par l'équation suivante, caractéristique des oscillateurs amortis :

$$\ddot{z} + 2\alpha\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = M\ddot{z}_{\text{sol}},$$

où α est la constante d'amortissement du système, ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et M est l'amplification.

Un sismomètre est le plus souvent protégé par un bâti lié au sol, dans lequel la masse du capteur peut osciller en cas de sollicitation sismique. Lorsque le sol bouge, le bâti qui est solidaire au sol bouge aussi, ce qui provoque un mouvement relatif entre la masse et le bâti qui porte également le système d'enregistrement. Ce mouvement relatif est amplifié par un système mécanique, mécanique-optique ou électronique, puis enregistré.

Un sismomètre moderne comporte, en plus, un système d'amortissement, nécessaire pour obtenir une bonne restitution du mouvement du sol. En effet, sans amortissement, la masse doit en théorie osciller à l'infini. Dans la pratique, ce n'est pas le cas mais la masse peut continuer à osciller même si le champ excitateur (les vibrations dues aux séismes) a disparu. L'amortissement du système permet de remédier à cela. [...]

Les sismomètres sont classés en fonction du contenu fréquentiel auquel ils peuvent être sensibles. En effet, tout oscillateur a une bande passante limitée, liée à sa pulsation propre : il ne peut donc pas réagir à toutes les fréquences que peut contenir un signal. C'est pourquoi on trouve des sismomètres dits « courtes périodes » (de 0,1 à 2 s), qui sont les plus couramment utilisés ou « moyennes et longues périodes » (de 2 s à plusieurs minutes). Aussi, un signal sismique peut comporter des périodes allant de quelques centièmes de seconde à plusieurs minutes. Dans les années 1960, chaque station du réseau américain était équipée de six appareils, trois « courtes périodes » et trois « longues périodes », afin de couvrir une plus grande gamme de fréquences. Depuis, les progrès de l'électronique et l'asservissement de la masse ont donné naissance à de nouveaux sismomètres dits « large bande », qui permettent une étude sur une grande gamme de fréquences (de quelques centièmes de seconde à quelques minutes). Le réseau français GEOSCOPE utilise de tels appareils : les Wielandt-Streckeisen STS-1 et STS-2. [...]

Analyse du document

- 1) Quel est le principe de fonctionnement d'un sismomètre? Quel est le rôle de l'amortissement?
- 2) Quelle est la fonction de transfert associée au système simple décrit dans le document? Quel type de filtrage mécanique est réalisé? Pourquoi?