

O u v e r t u r e

Un fluide est un milieu composé de particules qui peuvent se mouvoir librement les unes par rapport aux autres. De façon courante, cette appellation désigne les états liquide et gazeux. Nous étudierons ici les propriétés des fluides au repos.

Plan du chapitre ?**A. Forces s'exerçant sur un fluide au repos**

1. Forces de pesanteur	2
2. Forces de pression	2

B. Variation de la pression dans le champ de pesanteur

1. Expression différentielle	3
2. Cas des fluides incompressibles	4
3. Évolution de la pression dans l'atmosphère	6

C. Résultante de forces de pression

1. Forces de pression exercées sur une paroi	8
2. Poussée d'Archimède	9

D. Équation locale de la statique des fluides

1. Opérateur gradient	11
2. Équivalent volumique des forces de pression	11
3. Relation fondamentale de la statique des fluides	12

Méthodes	13
-----------------------	----

Exercices	18
------------------------	----

A. Forces s'exerçant sur un fluide au repos

A.1. Forces de pesanteur

1. Dans le système international, la masse volumique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ mais on utilise aussi souvent le $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ ou le $\text{kg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Dans le cas d'un fluide incompressible, la masse volumique ρ est la même en tout point du fluide¹. La masse correspondant à un volume V est donc $m = \rho V$. Sur cette masse s'exerce le poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$$

où \vec{g} est l'accélération de la pesanteur.

Cependant, on rencontre souvent des situations où un fluide ne peut pas être considéré comme incompressible. Sa masse volumique, $\rho(M)$, dépend alors du point M considéré. Pour calculer la masse d'un volume V de fluide, on est donc amené à découper mentalement le fluide en volumes élémentaires dV suffisamment petits pour que la masse volumique puisse y être considérée comme constante. Pour un volume dV autour d'un point M , la masse est donc donnée par

$$dm = \rho(M) dV$$

Pour obtenir la masse de V , on n'a plus qu'à sommer toutes les masses élémentaires dm , c'est-à-dire

$$m = \iiint_V dm = \iiint_V \rho(M) dV$$

Résultat 1

Dans le cas général d'un fluide compressible, le poids d'un volume V est donc

$$\vec{P} = \iiint_V \rho(M) \vec{g} dV$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

Le poids est un exemple de **force volumique**, c'est-à-dire que la force $d\vec{F}$ exercée sur un volume élémentaire dV est proportionnelle à ce volume. On définit la **densité volumique de force**, \vec{f}_v , par $d\vec{F} = \vec{f}_v dV$. Pour le poids, $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$.

A.2. Forces de pression

Dans un fluide, les molécules sont en mouvement incessant. Au niveau macroscopique, ces mouvements se traduisent par une force \vec{F}_p , dite **force de pression**, exercée sur toute surface immergée dans le fluide (cf. cours de thermodynamique). Cette force est orthogonale à la surface considérée et sa norme est proportionnelle à cette surface.

Résultat 2

Sur une surface élémentaire dS autour d'un point M s'exerce la force de pression $d\vec{F}_p$ donnée par

$$d\vec{F}_p = p(M) dS \vec{n}$$

où :

- $p(M)$ est la pression au point M , qui s'exprime en Pascal (symbole Pa, $1\text{Pa} = 1\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$).
- \vec{n} est un vecteur unitaire, orthogonal à dS et dirigé du liquide vers la surface. On note souvent $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

2. La pression s'exprime aussi souvent en bars ($1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$). On trouve aussi parfois d'anciennes unités comme l'atmosphère ($1\text{ atm} = 1,013\text{ bar}$) ou les millimètres de mercure ($1\text{ atm} = 760\text{ mmHg}$).

Un volume quelconque V , délimité par une surface S , immergé dans un fluide subit donc des forces de pression localisées sur la surface S . On parle de **forces surfaciques**.

B. Variation de la pression dans le champ de pesanteur

B.1. Expression différentielle

Dans un fluide en équilibre, on considère un volume élémentaire parallélépipédique dV , de côtés dx , dy et dz . L'axe (Oz) est vertical et orienté vers le haut. Sur ce volume s'exercent :

- les forces de pression sur chacune des faces. Par exemple, la force s'exerçant sur la face supérieure s'écrit $d\vec{F}(z+dz) = -p(x, y, z+dz)dx dy \vec{u}_z$ et celle s'exerçant sur la face inférieure s'écrit $d\vec{F}(z) = +p(x, y, z)dx dy \vec{u}_z$. On note $d\vec{F}_p$ leur résultante.
- le poids $d\vec{P} = dm\vec{g} = -\rho(M)gdV\vec{u}_z$.

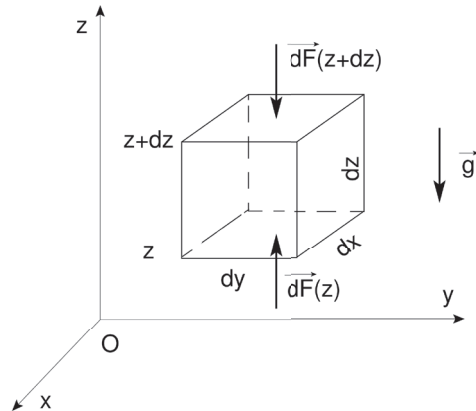


Fig. 1. Un volume élémentaire est soumis aux forces de pression sur chacune de ses faces. Pour plus de clarté, seules les forces s'exerçant sur les faces supérieure et inférieure ont été représentées.

Le volume dV étant en équilibre, on a $d\vec{F}_p + d\vec{P} = \vec{0}$.

En projetant cette relation sur l'axe (Ox) , on a :

$$p(x, y, z) - p(x + dx, y, z) = 0$$

et ce quelle que soit la valeur de x . On en déduit donc que la pression est indépendante de x . On obtient de même en projetant sur (Oy) que la pression est indépendante de y . On a donc $p = p(z)$.

Enfin, en projetant sur l'axe (Oz) , on obtient

$$dx dy p(z) - dx dy p(z + dz) - \rho(M)g dV = 0$$

En notant $p(z + dz) = p(z) + dp$ et en remarquant que $dV = dx dy dz$, on arrive à

$$-dx dy dp - \rho(M)g dx dy dz = 0$$

soit

$$dp = -\rho g dz$$

3. Bien noter le signe “-” lorsque l’axe (Oz) est orienté vers le haut. S’il était orienté vers le bas, on aurait $dp = +\rho g dz$. La variable z exprimerait alors la profondeur et non plus l’altitude.

4. Les liquides sont généralement considérés comme des fluides incompressibles, bien qu’ils soient, en toute rigueur, très faiblement compressibles (cf. exo 10).

Résultat 3

La variation de pression dp correspondant à une variation d’altitude dz est donc donnée par

$$dp = -\rho g dz$$

où

- ρ est la masse volumique du fluide au point considéré,
- g est l’accélération de la pesanteur³.

B.2. Cas des fluides incompressibles

B.2.1. Relation entre pression et altitude

Dans le cas d’un fluide incompressible⁴, la masse volumique ρ est indépendante de la pression et de l’altitude. Il est donc possible d’intégrer directement l’égalité précédente.

Résultat 4

Entre deux points A et B de cotes z_A et z_B , d’un fluide incompressible, on obtient la relation :

$$p_A - p_B = -\rho g(z_A - z_B) = \rho g(z_B - z_A)$$

où p_A et p_B sont les pressions en A et B, ρ la masse volumique du fluide et g l’accélération de la pesanteur.

Dans le champ de pesanteur, la différence de pression entre deux points d’un même fluide incompressible est **proportionnelle** à la dénivellation entre ces points.

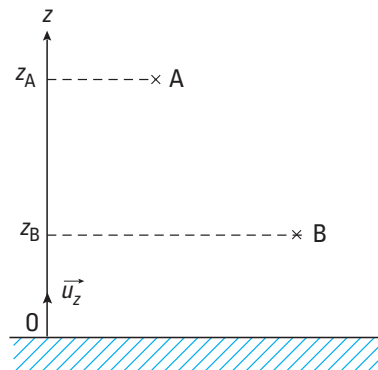


Fig. 2. Les points A et B ont pour cotes respectives z_A et z_B .

Application 1 Pression et plongée sous-marine

La pression atmosphérique à la surface de l’océan est : $p_0 = 1,013$ bar.

Déterminer à quelle profondeur un plongeur sous-marin est soumis à une pression $2p_0$.

Donnée : masse volumique de l’eau, supposée constante $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Solution

En prenant la surface de l’eau comme référence des cotes, il est assez logique de considérer un axe vertical Oz d’origine O à la surface de l’eau et orienté de haut en bas. L’équation locale de la statique des fluides devient $dp = +\rho \cdot g \cdot dz$.

L'eau étant un liquide, quasiment incompressible, en négligeant la variation de l'accélération de la pesanteur g , il vient par intégration entre 0 et z :

$$p(z) - p(0) = p(z) - p_0 = +\rho \cdot g \cdot (z - 0).$$

La profondeur à laquelle la pression est le double de la pression en surface p_0 est telle que⁵:

$$z = \frac{2p_0 - p_0}{\rho \cdot g} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1000 \times 9,81} = 10,33 \text{ m.}$$

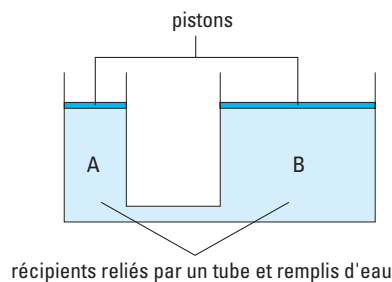
5. Pour éviter tout problème d'unités, exprimer tous les termes dans le Système international, le résultat s'exprimera dans le même système.

La relation $p_A - p_B = \rho g(z_B - z_A)$ permet d'obtenir immédiatement **le théorème de Pascal**: dans un fluide en équilibre, toute variation de pression en un point se transmet intégralement à tous les points du fluide. En effet, si la pression varie de Δp_A au point A, elle variera également de $\Delta p_B = \Delta p_A$ au point B. Les applications sont nombreuses: vérins, presse hydraulique...

Application 2 Presse hydraulique

Deux récipients A et B, de sections respectives S_A et S_B telles que $S_B = 10 S_A$ sont reliés à leur base par un tube et remplis d'eau.

Dans chacun des deux récipients, à la surface du liquide, on place un piston, l'un de surface S_A et l'autre de surface S_B , couissant sans frottements.



On exerce une force verticale \vec{f}_A sur le piston du compartiment A. Déterminer la valeur de la force \vec{f}_B subie par le piston du compartiment B. Conclure.

Solution

Avant tout déplacement, les surfaces de liquide en contact avec les pistons sont dans un même plan horizontal et à la même pression p . Cette pression s'exprime sous la forme:

$$p = \frac{f_A}{S_A} = \frac{f_B}{S_B}$$

On déduit:

$$f_B = \frac{f_A}{S_A} \cdot S_B = 10 f_A.$$

Une presse hydraulique permet ainsi de démultiplier les forces: plus le rapport des surfaces est grand, plus la force à exercer f_A est faible, pour un même résultat.

B.2.2. Application aux mesures de pression

Une mesure de pression est souvent une mesure de dénivellation entre surfaces libres d'un liquide dans un manomètre (fig. 4). Le mercure est utilisé pour sa masse volumique élevée.

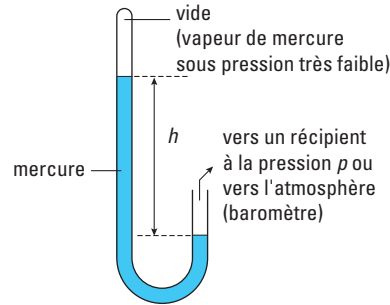


Fig. 3. Manomètre à mercure.

La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit pour le mercure contenu dans le tube :

$$p - 0 = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h.$$

À 0°C, on donne : $\rho_{\text{Hg}} = 13\,595 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,8066 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La pression correspondant à une dénivellation de 1 mm de mercure est donc :

$$p = 13\,595 \times 9,8066 \cdot 10^{-3} = 133,32 \text{ Pa}.$$

Cependant la correspondance la plus pratique entre les millimètres de mercure et les autres unités est :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$$

B.3. Évolution de la pression dans l'atmosphère

B.3.1. Modèle de l'atmosphère isotherme

L'air constituant l'atmosphère ne peut être considéré comme un fluide incompressible. En effet, sa masse volumique varie fortement avec l'altitude. L'intégration de la relation $dp = -\rho g dz$ ne peut se faire directement comme dans le cas d'un fluide incompressible puisque ρ dépend de z selon une relation qu'il faut expliciter.

Le modèle le plus simple est de considérer l'atmosphère comme un gaz parfait de masse molaire M et de température constante. On a alors, en considérant un volume V suffisamment petit pour que la pression p puisse y être considérée comme constante, la relation

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

où n et m désignent respectivement la quantité de matière et la masse du gaz présent dans le volume V . R est la constante des gaz parfaits.

On tire :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

puis

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz = -\frac{p \cdot M}{R \cdot T} \cdot g \cdot dz.$$

En séparant les variables p et z , l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz.^6$$

6. Cette équation ne s'intègre directement que si les paramètres g et T sont constants.

En supposant l'atmosphère **isotherme** (T constante) et en désignant par p_0 la pression à l'altitude $z = 0$, l'intégration conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\int_0^z \frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz. \\ \Rightarrow \ln \frac{p(z)}{p_0} &= -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot (z - 0) = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z \end{aligned}$$

On déduit :

$$p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right)$$

B.3.2. Valeurs numériques

• Dans le modèle d'atmosphère isotherme, la pression décroît exponentiellement en fonction de l'altitude avec une loi de la forme :

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

La distance caractéristique ou **hauteur d'échelle** $H = \frac{R \cdot T}{M \cdot g}$ est telle que, à l'altitude H , la pression p_0 est divisée par un facteur $e = 2,718$.

Dans l'air ($M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) à 0°C (273 K), on obtient :

$$H = \frac{R \cdot T}{M \cdot g}$$

$$H = \frac{8,32 \times 273}{29 \cdot 10^{-3} \times 9,81} = 7,98 \cdot 10^3 \text{ m} \approx 8 \text{ km}.$$

• Lorsque le système considéré est de petites dimensions (lors d'expériences en laboratoire, par exemple), la pression atmosphérique varie très peu et **il est justifié de la considérer comme constante**⁷.

Par exemple, si la pression est $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$ à l'altitude $z = 0$, alors à l'altitude $z = 1 \text{ m}$, d'après la relation $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right)$, on peut écrire :

$$p = 101\,325 \cdot \exp\left(-\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,81}{8,32 \times 273} \times 1\right)$$

$$p = 101\,312 \text{ Pa}.$$

La différence de pression est de 13 Pa . La correction porte seulement sur les cinquième et sixième chiffres de l'expression de p , ce qui n'est pas cohérent si l'on observe que les autres données comportent deux ou trois chiffres significatifs.

B.3.3. Validité du modèle

La détermination des caractéristiques réelles de l'atmosphère est en fait beaucoup plus complexe. Le modèle de l'atmosphère isotherme est valable à haute altitude (plus de 11 km). Pour des altitudes plus basses, le modèle le mieux adapté est celui d'une variation linéaire de la température avec l'altitude, de la forme $T(z) = T(0) - az$, où a est une constante (cf. exo 8). Cependant, l'erreur commise en supposant la température constante reste relativement faible malgré l'importance des variations de température (-50°C à 11 km).

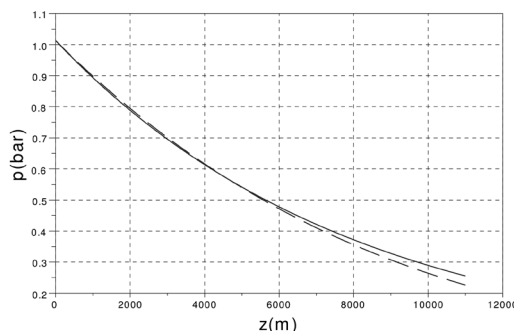


Fig. 4. Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude dans le modèle de l'atmosphère isotherme (courbe en trait plein) et suivant le modèle d'atmosphère standard défini par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (courbe en pointillés).

⁷ Sauf précision contraire, on admettra presque toujours que la pression atmosphérique est constante.

B.3.4. Facteur de Boltzmann

On a vu qu'à l'altitude z , la pression s'exprime sous la forme :

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right).$$

Si chaque molécule de gaz a une masse m , il vient : $M = \mathcal{N} \cdot m$, \mathcal{N} étant le nombre d'Avogadro.

En introduisant la constante de Boltzmann k et en utilisant $R = k \cdot \mathcal{N}$, on déduit :

$$p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot z}{k \cdot T}\right).$$

Cette expression fait apparaître l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule de gaz $E_p = m \cdot g \cdot z$ et la relation peut alors s'écrire :

$$p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_p}{k \cdot T}\right).$$

À température fixée, la pression est proportionnelle au nombre de molécules par unité de volume à l'altitude z , noté $N_V(z)$.

On déduit :

$$N_V(z) = N_{V(z=0)} \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot z}{k \cdot T}\right)$$
$$N_V(z) = N_{V(z=0)} \cdot \exp\left(-\frac{E_p}{k \cdot T}\right).$$

Le résultat précédent montre que les molécules se répartissent selon leur énergie. Le nombre de molécules correspondant à une énergie donnée E_p est proportionnel à la quantité $\exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right)$, appelée **facteur de Boltzmann**⁸. On

admettra la généralisation de ce résultat à n'importe quel système en équilibre thermique constitué de particules dont l'énergie peut prendre différentes valeurs E .

⁸ Ludwig Boltzmann (1844-1906). Physicien autrichien, pionnier de la physique statistique. On lui doit entre autres la formule fondamentale $S = k \ln \Omega$ reliant l'entropie au désordre.

Résultat 5

Loi de Boltzmann

Lorsqu'un système constitué d'un grand nombre de particules est à l'équilibre à la température T , la probabilité pour une particule d'occuper un état d'énergie E est de la forme :

$$p(E) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

où $k = 1,3810^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et A est une constante telle que la somme des probabilités sur tous les états soit égale à 1.

C. Résultante de forces de pression

C.1. Forces de pression exercées sur une paroi

On cherche ici à calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur une paroi de surface S en contact avec un fluide, par exemple sur un barrage. Comme la pression varie avec la profondeur, on ne peut pas simplement multiplier la pression par S mais il faut décomposer cette surface en surfaces élémentaires sur lesquelles la pression peut être considérée comme constante.

La force s'exerçant sur une surface élémentaire dS , autour d'un point M , s'écrit :

$$d\vec{F}(M) = p(M)dS\vec{n}$$

avec les notations du paragraphe (A.2). La résultante \vec{F} est donc donnée par :

$$\vec{F} = \iint_S p(M) d\vec{S}$$

Dans cette intégrale, on trouve deux grandeurs variables :

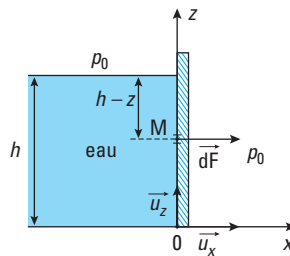
- la direction du vecteur \vec{n} ,
- la valeur de $p(M)$.

Les calculs sont généralement compliqués. On se limitera ici à des cas simples, où la direction de \vec{F} peut souvent être déterminée par des considérations de symétrie, indépendamment du calcul. Des exemples sont développés dans l'application ci-dessous et dans les exercices.

Application 3

Le mur d'un barrage, supposé plan, de largeur L , retient un lac artificiel. La hauteur d'eau est h . Déterminer la résultante des forces de pression sur le mur du barrage.

Solution



La pression de l'eau ne dépend que de la profondeur. On choisit donc comme surface élémentaire dS une bande horizontale, d'épaisseur dz et de largeur L , située à une profondeur $h - z$. Comme $p(z) - p(h) = \rho g(h - z)$ et que la force de pression de pression exercée par l'eau sur dS s'écrit $d\vec{F}_{eau} = p(z)dS\vec{u}_x$, on a :

$$d\vec{F}_{eau} = (p_0 + \rho g(h - z))dS\vec{u}_x$$

Cependant, l'air exerce aussi une force sur le barrage, opposée à $d\vec{F}_{eau}$ et de norme égale à $p_0 dS$. On rappelle que, d'après le cours (B.3.2), la pression atmosphérique peut être considérée comme constante sur le barrage.

La résultante des forces de pression exercées sur dS s'écrit donc :

$$d\vec{F} = \rho g(h - z)dS\vec{u}_x = \rho g(h - z)Ldz\vec{u}_x$$

La force s'exerçant sur la totalité du barrage est donc :

$$\vec{F} = \int_{barrage} d\vec{F} = \rho gL\vec{u}_x \int_{z=0}^h (h - z)dz = \rho gL \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \vec{u}_x$$

On obtient donc :

$$\vec{F} = \rho gL \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

C.2. Poussée d'Archimède

Dans le cas d'un solide immergé dans un fluide, la résultante des forces de pression se calcule très simplement. C'est ce que l'on appelle couramment la poussée d'Archimède, notée $\vec{\Pi}_a$.

Considérons un solide immergé dans un fluide. Les forces subies sont :

- son poids \vec{P} ;
- les forces de pression exercées par le fluide sur sa surface, de résultante $\vec{\Pi}_a$.

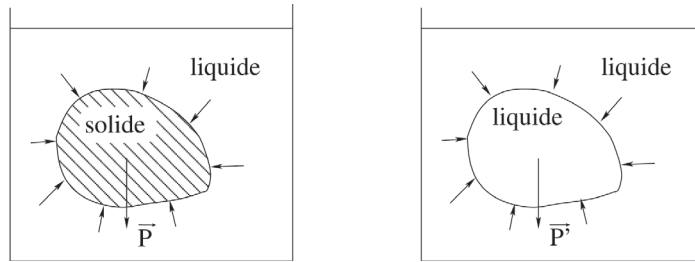


Fig. 5. La résultante des forces de pression s'exerçant sur un solide immergé est la même que celle qui s'exercerait sur un volume de fluide mis à la place du solide.

Remplaçons par la pensée le solide par le même volume V de fluide. Les forces subies par le volume de fluide V sont :

- son poids \vec{P}' ;
- les forces de pression exercées par le fluide sur la surface délimitant le volume V .

Or, les forces de pression exercées sur le volume V ne dépendent pas de ce que renferme ce volume. Elles sont donc les mêmes pour le solide et pour le volume de fluide qui le remplace.

D'autre part, lorsque le volume V renferme le même fluide que celui qui l'entoure, il est à l'équilibre. On a donc

$$\vec{P}' + \vec{\Pi}_a = \vec{0}$$

Enfin, la nullité de la somme des moments en tout point du poids \vec{P}' et des forces de pression permet d'affirmer que $\vec{\Pi}_a$ s'exerce au même point que \vec{P}' , c'est-à-dire au centre de masse du fluide occupant le volume V .

On en déduit le théorème d'Archimède.

Résultat 6

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre subit une force égale et opposée au poids du fluide déplacé. Cette force, appelée poussée d'Archimède, s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

Ce résultat se généralise dans le cas où un solide est immergé dans plusieurs fluides. On ajoute alors les poussées d'Archimède dues aux différents fluides.

Dans le cas fréquent où un solide est immergé dans deux fluides de masses volumiques très différentes, la poussée d'Archimède due au fluide le plus léger est négligeable devant celle due au fluide le plus lourd. C'est par exemple le cas des bateaux, où la seule poussée d'Archimède à prendre en compte est celle de l'eau, égale en norme au poids de l'eau déplacée par la coque.

Application 4 Boule immergée

Une boule, de rayon $R = 3 \text{ cm}$ est totalement immergée dans l'eau, de masse volumique $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Cette boule est réalisée en aluminium, de masse volumique $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Déterminer la résultante des forces exercées sur cette sphère.

Solution

La boule est soumise à :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = \rho_{\text{Al}} \cdot V \cdot \vec{g}$,
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_a = -\rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot \vec{g}$.

Le volume de la boule est calculé par $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

On déduit la force résultante \vec{F} :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} = (\rho_{Al} - \rho_{eau}) \cdot V \cdot \vec{g}.$$

Application numérique :

$$F = (2,7 - 1,0) \times 10^3 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (3 \cdot 10^{-2})^3 \times 9,81 = 1,9 \text{ N}.$$

D. Équation locale de la statique des fluides

D.1. Opérateur gradient

9. C'est-à-dire que l'image de M est un nombre, et pas un vecteur

Soit $f(M)$ une fonction scalaire⁹ dépendant des 3 coordonnées de l'espace x , y et z . Lorsque l'on passe du point M à un point M' infiniment voisin, la variation de position correspond au vecteur $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (dx, dy, dz) . La valeur de la fonction f varie alors de df .

Définition 1

On définit le **gradient** de f par :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Cette définition est indépendante du système de coordonnées considéré. Elle constitue en quelque sorte une généralisation de la notion de dérivée pour une fonction de plusieurs variables.

En coordonnées cartésiennes,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz$$

Résultat 7

On a donc, en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

Le gradient est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que, si f et g sont deux fonctions et a et b deux constantes, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(af + bg) = a \overrightarrow{\text{grad}} f + b \overrightarrow{\text{grad}} g$$

D.2. Équivalent volumique des forces de pression

On considère le même volume élémentaire de fluide dV qu'au paragraphe B.1. On ne fait cette fois-ci aucune hypothèse sur les autres forces auxquelles est soumis dV . La pression dépendra donc de x , y et z .

La résultante $d\vec{F}_p$ des forces de pression s'exerçant sur dV va donc s'écrire :

$$d\vec{F}_p = dF_x \overrightarrow{u_x} + dF_y \overrightarrow{u_y} + dF_z \overrightarrow{u_z}$$

avec, comme précédemment

$$dF_x = (p(x, y, z) - p(x + dx, y, z)) dy dz \overrightarrow{u_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

On a des expressions similaires pour dF_y et dF_z , ce qui donne :

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y} \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z} \overrightarrow{u_z} \right) dV = -\overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

10. Dans le cas d'une surface fermée, le vecteur surface $d\vec{S}$ est, par convention, toujours orienté vers l'extérieur.

Résultat 8

Les forces de pression sont donc équivalentes, formellement, à des forces volumiques, dont la densité volumique \vec{f}_v s'écrit

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

c'est-à-dire que la force de pression \vec{F}_p s'exerçant sur un volume V , délimité par une surface S , s'écrit :

$$\vec{F}_p = -\iint_S p d\vec{S} \stackrel{10}{=} -\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

D.3. Relation fondamentale de la statique des fluides

Soit un volume élémentaire de fluide dV en équilibre sous l'action des forces de pression et de forces volumiques extérieures de densité $\vec{f}_{v,ext}$. La condition d'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$, s'écrit ici :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p dV + \vec{f}_{v,ext} dV = 0$$

Résultat 9

La relation locale traduisant l'équilibre d'un fluide, aussi appelée relation fondamentale de la statique des fluides, est donc

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{f}_{v,ext}$$

Dans le cas où le poids est la seule force extérieure, on a $\vec{f}_{v,ext} = \rho \vec{g}$. Donc, seule la composante verticale de $\overrightarrow{\text{grad}} p$ est non nulle et on retrouve

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

L'essentiel

- Dans un fluide incompressible, la masse volumique ρ a la même valeur en tout point M. Ce n'est pas le cas dans un fluide compressible. Le poids d'un volume V de fluide quelconque est donc donné par :

$$\vec{P} = \iiint_V \rho(M) \vec{g} dV$$

- La pression p exercée par un fluide sur une surface S est indépendante de l'orientation de cette surface. Pour un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} , la pression varie selon la relation :

$$dp = -\rho g dz$$

- Pour un fluide soumis à des forces volumiques de densité $\overline{f_{v,ext}}$, c'est-à-dire qu'un volume dV est soumis à la force $d\vec{F}_{ext} = \overline{f_{v,ext}} dV$, l'expression précédente se généralise en :

$$\overline{\text{grad}} p = \overline{f_{v,ext}}$$

où le gradient est défini pour une fonction quelconque de (x, y, z) par :

$$df = \overline{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM}$$

- En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En considérant l'atmosphère comme un gaz parfait de masse molaire M et de température T constante, l'intégration de $dp = -\rho g dz$ conduit à :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right) = p_0 \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right)$$

où k est la constante de Boltzmann.

- On en déduit entre autres que, pour un système de petite dimension (de l'ordre du mètre ou de la dizaine de mètres), on peut considérer la pression atmosphérique comme constante en tout point du système.

- Le facteur $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ est appelé facteur de Boltzmann. Dans un système à la température T constitué d'un grand nombre de particules, la probabilité pour qu'une particule occupe un état d'énergie E est proportionnelle au facteur de Boltzmann.

- La résultante des forces de pression exercées par un fluide sur une surface S s'écrit :

$$\vec{F}_p = \iint_S p \vec{n} dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire orthogonal à dS et dirigé du fluide vers la surface.

- Pour une surface S fermée délimitant un volume V, la résultante des forces de pression peut aussi s'écrire :

$$\vec{F}_p = -\iiint_V \overline{\text{grad}} p dV$$

- La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression s'appliquant sur un corps immergé dans un fluide. Elle est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment utiliser l'équation locale de la statique pour calculer une différence de pression ?

Dans un fluide en équilibre, on considère deux points de cotes différentes dans le champ de pesanteur. On cherche la différence de pression entre ces deux points.

→ Savoir faire

- ❶ Choisir un axe Oz vertical. L'équation locale de la statique des fluides ne s'écrit sous la forme $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ que si l'axe est orienté vers le haut. Dans le cas contraire, il faut considérer $dp = +\rho \cdot g \cdot dz$.
- ❷ Pour chacun des termes de la relation précédente, déterminer s'il est constant ou non, suivant la nature du fluide considéré. Ainsi, la masse volumique d'un gaz dépend de la pression et de la température. L'intensité de la pesanteur g varie avec l'altitude z mais peut souvent être considérée comme constante.
- ❸ Séparer les variables (*a priori* p et z).
- ❹ Intégrer chaque membre de l'équation obtenue en vérifiant la correspondance des bornes.
- ❺ Dédurre le résultat demandé.

→ Application

Déterminer la différence de pression entre un point O situé au niveau de la mer et un point M séparé du précédent par une dénivellation de 30 m dans les deux cas suivants :

- a) M est dans la mer, assimilée à un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- b) M est dans l'air, considéré comme un gaz parfait (de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) et on néglige la variation de température pour une telle dénivellation.

Données :

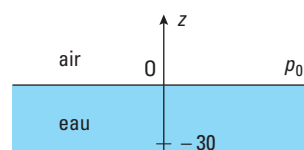
- au niveau de la mer : $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$; $T = 293 \text{ K}$;
- l'intensité de la pesanteur est considérée comme une constante de valeur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution

- a) ❶ Considérons l'axe Oz orienté vers le haut. L'équation locale de la statique des fluides s'écrit :
- $$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

et les ordonnées des deux points considérés, O et M, sont respectivement $z = 0$ et $z = -30 \text{ m}$.

- ❷ Dans l'eau, un fluide incompressible, la masse volumique ρ est constante, et g , l'intensité de la pesanteur, varie peu sur une dénivellation aussi faible.



- ❸ Les variables, p et z , sont déjà séparées : $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$.
- ❹ On intègre la relation précédente :

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = -\rho \cdot g \cdot \int_0^z dz \Rightarrow p(z) - p_0 = -\rho \cdot g \cdot (z - 0) \\ = \rho \cdot g \cdot z$$

⑤ *Application numérique :*

$$\Delta p = p(z) - p_0 = -1\,000 \times 9,81 \times (-30) = +2,94 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \mathbf{2,94 \text{ bar}}.$$

b) ① l'axe Oz étant toujours orienté vers le haut, on a : $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ et les ordonnées des deux points considérés, O et M, sont respectivement $z = 0$ et $z = +30 \text{ m}$.

② Dans l'air, un fluide compressible considéré comme un gaz parfait, la masse volumique ρ varie en fonction de la pression et de la température suivant :

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}.$$

(M étant la masse molaire de l'air). La température T et la pesanteur g sont supposées constantes.

③ En séparant les variables p et z, il vient :

$$dp = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \cdot g \cdot dz \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot g \cdot dz.$$

④ L'intégration de cette relation conduit à :

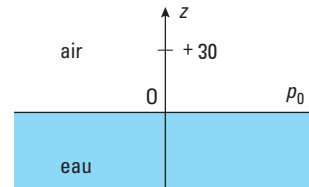
$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot \int_0^z dz \Rightarrow \ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot (z - 0).$$

⑤ Finalement : $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}\right)$

$$\text{et } \Delta p = p(z) - p_0 = p_0 \cdot \left[\exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}\right) - 1 \right]$$

$$\text{Application numérique : } \Delta p = 101\,325 \times \left[\exp\left(-\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,81 \times 30}{8,32 \times 293}\right) - 1 \right] \\ \Delta p = \mathbf{-354 \text{ Pa}}.$$

Cette différence est évidemment négative puisque la pression diminue lorsque l'altitude augmente.



Méthode n°2

Comment calculer la résultante des forces de pression sur une surface ?

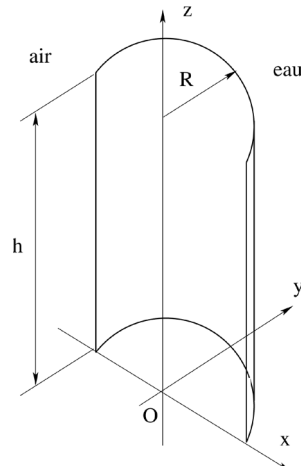
Soit une surface S en contact avec un ou plusieurs fluides. Ceux-ci exercent sur S des forces de pression de résultante \vec{F}_p , que l'on cherche à calculer.

→ Savoir faire

- ① Choisir le système de coordonnées approprié au problème et exprimer la surface élémentaire dS en fonction de ces coordonnées.
- ② Exprimer la pression en fonction de la position (en général de la profondeur).
- ③ Écrire l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_p$ exercée sur dS.
- ④ Déterminer si possible la direction de \vec{F}_p par des considérations de symétrie.
- ⑤ Déterminer \vec{F}_p par intégration de la composante de $d\vec{F}_p$ parallèle à la direction déterminée précédemment, ou par intégration séparée de toutes les composantes si la direction n'est pas connue.

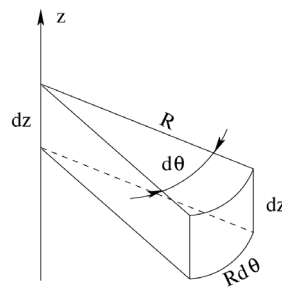
→ Application

Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur un barrage hémicylindrique de rayon R , rempli d'eau sur une hauteur h .



❶ Les coordonnées cylindriques sont ici les plus appropriées. Comme indiqué sur la figure ci-dessous, une surface élémentaire dS sur le barrage, engendrée par une variation dz de z et $d\theta$ de θ est égale à :

$$dS = R d\theta dz$$



❷ L'eau du barrage constitue un fluide incompressible soumis au seul champ de pesanteur \vec{g} . On a donc, en désignant par p_0 la pression atmosphérique et par ρ la masse volumique de l'eau :

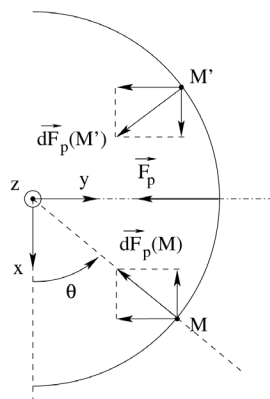
$$p_{\text{eau}}(z) = p_{\text{eau}}(h) + \rho g(h - z) = p_0 + \rho g(h - z)$$

D'autre part, le barrage est aussi soumis à la pression de l'air, p_0 , qui s'exerce sur la paroi opposée à l'eau. Donc, la pression totale subie par un point du barrage situé à la hauteur z par rapport à sa base est :

$$p(z) = \rho g(h - z)$$

❸ Sachant que la force de pression s'exerçant sur une surface dS autour d'un point M s'écrit $d\vec{F}_p = p(M) \vec{n} dS$, on en déduit que :

$$d\vec{F}_p = \rho g(h - z) \vec{n} dz R d\theta$$



④ Considérons deux points M et M' symétriques par rapport au plan xOz sur le barrage. Ces deux points étant situés à la même profondeur, $p(M) = p(M')$. Les forces exercées sur deux surfaces dS et dS' de même aire situées autour de M et M' sont donc de même intensité et symétriques par rapport au plan yOz . Leurs composantes suivant Ox sont donc opposées et s'annulent. On en déduit donc que la résultante des forces de pression, \vec{F}_p , est dirigée suivant Oy .

⑤ On a donc :

$$\vec{F}_p = \int_{z=0}^h \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dF_y \vec{u}_y = \int_{z=0}^h \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\rho g(h-z) \cos \theta dz R d\theta \vec{u}_y$$

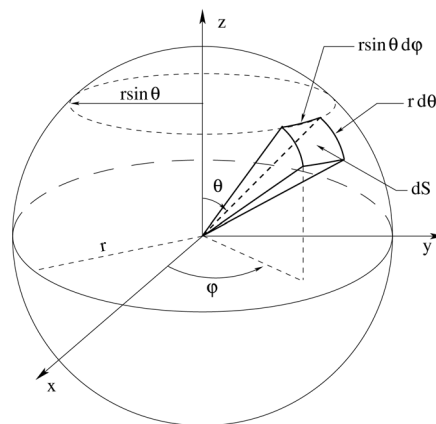
soit,

$$\vec{F}_p = -2\rho g R \left[hz - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^h \vec{u}_y = -\rho g R h^2 \vec{u}_y$$

Complément : surface élémentaire en coordonnées sphériques.

Comme indiqué sur la figure ci-dessous, la surface élémentaire en coordonnées sphériques (r, θ, φ) engendrée par une variation $d\theta$ de θ et $d\varphi$ de φ s'écrit :

$$dS = r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$



Pour couvrir la surface d'une sphère, il faut faire varier θ de 0 à π et φ de 0 à 2π .

Exercices

Données numériques utiles pour les applications numériques :

- constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- pression atmosphérique : $p_0 = 1 \text{ bar}$.

VRAI / FAUX

Ex. 1 On considère la relation

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

représentant l'influence de l'altitude sur la pression au sein d'un fluide, dans le champ de pesanteur d'intensité g .

- 1) Cette relation est valable quel que soit le fluide considéré.
- 2) L'axe Oz envisagé est nécessairement orienté vers le haut.
- 3) Entre deux points A et B du fluide, on peut déduire la relation $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$ quel que soit le fluide considéré.
- 4) Pour un gaz parfait de masse molaire M , cette relation conduit nécessairement à :

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right).$$

Niveau 1

Ex. 2 Un verre d'eau rempli à ras-bord contient un glaçon. Le verre déborde-t-il lors de la fonte du glaçon ?

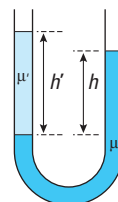
Ex. 3 Gradient en coordonnées cylindriques

Donner l'expression du déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ en coordonnées cylindriques et en déduire l'expression du gradient dans ce système de coordonnées.

Ex. 4 Hydrostatique dans un tube en U

Soit un tube en U dans lequel se trouvent deux liquides de masses volumiques respectives μ et μ' . On note respectivement h et h' les dénivellations entre les surfaces libres des liquides et leur interface (voir le schéma ci-après).

Exprimer le rapport des dénivellations en fonction des masses volumiques des deux liquides.



Ex. 5 Décollage d'une montgolfière

Une montgolfière de volume $V = 500 \text{ m}^3$ est remplie d'hélium, à la température $T = 298 \text{ K}$. L'enveloppe du ballon et la nacelle ont une masse totale m et un volume négligeable par rapport à V .

La pression atmosphérique et la pression de l'hélium sont supposées toutes deux égales à $p_0 = 1,013 \text{ bar}$.

- 1) Calculer les masses volumiques respectives de l'air et de l'hélium, supposés gaz parfaits.
- 2) Déterminer la valeur maximale de m pour que la montgolfière puisse décoller.

Données :

Masses molaires :

- de l'hélium $M_{\text{He}} = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- de l'air $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Ex. 6 Équilibre d'un bouchon de liège

Un bouchon de liège cylindrique de hauteur $H = 5 \text{ cm}$ et de section $s = 2 \text{ cm}^2$ est placé verticalement dans une éprouvette graduée également cylindrique, de diamètre légèrement supérieur. Les frottements sur les parois sont négligés. L'éprouvette contient une quantité d'eau suffisante pour que le bouchon flotte sans toucher le fond.

- 1) Déterminer la hauteur de liège immergée.
- 2) On pose sur le bouchon une pièce de monnaie de masse $m = 6 \text{ g}$. Quelle est la nouvelle hauteur immergée ?
- 3) On remplace le bouchon par un glaçon cylindrique de même forme. Quelle est la hauteur de glace immergée ?

Données :

Masses volumiques :

- $\rho(\text{eau}) = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- $\rho(\text{liège}) = 0,24 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- $\rho(\text{glace}) = 0,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Niveau 2

Ex. 7 Équilibre dans un tube en U

Un tube en U de section constante $s = 1 \text{ cm}^2$, ouvert aux deux extrémités, contient de l'eau.

1) On ajoute dans une des branches un volume $V = 6 \text{ cm}^3$ d'huile. Déterminer la dénivellation entre la surface libre de l'eau et la surface de séparation eau-huile.

2) À partir de l'état d'équilibre précédent, on ajoute dans l'autre branche du tube en U un volume $V' = 10 \text{ cm}^3$ d'acétone.

Déterminer la dénivellation entre les deux interfaces eau-huile et eau-acétone ainsi que la dénivellation entre les deux surfaces libres.

Données :

Masses volumiques :

$\rho(\text{eau}) = 1,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;

$\rho(\text{huile}) = 0,90 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;

$\rho(\text{acétone}) = 0,79 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Ex. 8 Pression atmosphérique en altitude

Calculer la pression atmosphérique au sommet du Mont Blanc (4807 m) dans les deux cas suivants.

1) On suppose que la température de l'atmosphère est constante et égale à T_0 .

2) On suppose que la température absolue varie avec l'altitude suivant la loi :

$$T = T_0 - A \cdot z$$

avec $A = 6,45 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$.

Données :

– température à l'altitude $z = 0$: $T_0 = 290 \text{ K}$;

– pression à l'altitude $z = 0$: $p_0 = 1,013 \text{ bar}$;

– masse molaire de l'air : $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Ex. 9 Variation de g avec l'altitude

Dans le modèle d'atmosphère isotherme, à la température T , on considère ici que l'accélération de la pesanteur g varie avec l'altitude suivant la relation :

$$g(z) = g_0 \cdot \left(\frac{R_t}{R_t + z} \right)^2, \quad R_t \text{ représentant le rayon de la Terre.}$$

Au niveau du sol ($z = 0$), on note g_0 l'accélération de la pesanteur et p_0 la pression.

Déterminer la loi de variation $p(z)$ dans ces conditions.

Ex. 10 Pression abyssale

On suppose que l'eau de mer est à une température constante $T = 280 \text{ K}$ et que sa masse volumique ρ varie avec la pression suivant la relation :

$$\rho(p) = \rho_0 \exp(\chi_T(p - p_0))$$

où $\chi_T = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$ et $\rho(0) = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. p_0 et $\rho(0)$ sont respectivement la pression et la masse volumique à la surface.

1) Déterminer l'expression de la pression en fonction de la profondeur h .

2) Faire l'application numérique pour $h = 10 \text{ km}$ et en déduire l'erreur relative commise si on considère l'eau comme un fluide incompressible.

Ex. 11 Mouvement d'une montgolfière

Une montgolfière se trouve dans l'air à une altitude où la masse volumique de l'air est $\rho = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le volume de la nacelle est négligé devant celui de l'enveloppe et on admet ainsi que l'on peut assimiler la montgolfière à une sphère de rayon $R = 4 \text{ m}$.

La masse totale de la montgolfière est $m = 300 \text{ kg}$.

1) Le mouvement de la montgolfière est-il ascendant ou descendant ?

Quelle est la valeur de son accélération lors de ce mouvement ?

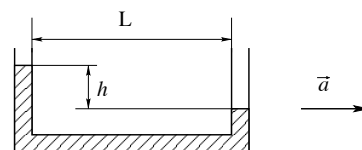
2) À partir de cette même altitude, on veut que la montgolfière monte avec une accélération de valeur $a' = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Quelle masse de lest faut-il lâcher ?

Ex. 12 Accéléromètre

Une automobile sur une route horizontale a une accélération constante \vec{a} et accélère de 25 km/h à 80 km/h en 13 s . On utilise comme accéléromètre un tube en U, dont les deux branches verticales sont distantes de $L = 60 \text{ cm}$ et qui est partiellement rempli d'eau. Calculer la différence de niveau h entre les deux tubes.

On suppose qu'aucune des deux branches ne se vide complètement et que la partie horizontale du tube en U est suffisamment fine pour que l'on puisse négliger la variation de la pression avec l'altitude dans cette partie.

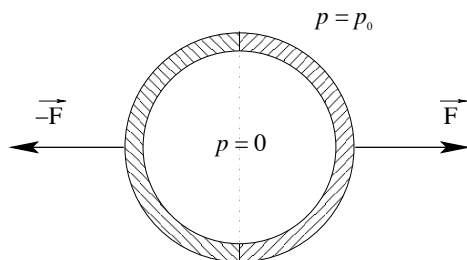


Niveau 3

Ex. 13 Hémisphères de Magdebourg

Au XVII^e siècle, afin de démontrer la réalité de la pression atmosphérique, Otto Von Guericke réalisa le vide entre deux hémisphères jointifs. La force exercée sur ces hémisphères par la pression atmosphérique était tellement importante que deux attelages de huit chevaux ne parvinrent pas à les séparer. Déterminer la force minimale $\|\vec{F}\|$ qu'il faut exercer sur chacun des deux hémisphères pour les séparer.

A.N : rayon des hémisphères $R = 28 \text{ cm}$



Ex. 14 Miroir liquide

Afin de réaliser des miroirs de forme parabolique pour des observations astronomiques, il a été proposé d'utiliser un récipient en rotation rempli de mercure. Le but de cet exercice est de montrer que la surface du liquide est alors un paraboléoïde de révolution.

On considère un récipient cylindrique de rayon R , rempli d'un liquide de masse volumique ρ sur une hauteur h . Ce récipient tourne autour de son axe vertical Oz avec une vitesse angulaire ω constante. On se place suffisamment longtemps après la mise en rotation du cylindre pour que le liquide soit immobile par rapport au récipient et on suppose que le fond du

récipient reste recouvert par le liquide. On utilisera les coordonnées cylindriques d'axe Oz .

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

1) Écrire la relation caractérisant l'équilibre d'un volume élémentaire dV du fluide, situé à une distance r de l'axe, dans un référentiel lié au cylindre. En plus du poids et des forces de pression, on admettra que, dans ce référentiel, le fluide occupant le volume dV est soumis à la force centrifuge d'expression :

$$d\vec{F} = \rho dV \omega^2 r \vec{u}_r$$

En déduire que la pression p ne dépend que de r et de z .

2) Exprimer $\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$. En déduire $p(r, z)$ en fonction de ρ , ω , g et d'une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer, puis montrer que la surface libre, définie par $p(r, z) = p_0$ a pour équation $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0$ où z_0 est une constante que l'on déterminera à la question suivante.

3) En écrivant la conservation du volume du liquide, déterminer la constante z_0 .

Indications

Ex 4

Deux points d'un même liquide, situés à la même altitude, sont à la même pression.

Ex 5

2) Comparer le poids total et la poussée d'Archimède.

Ex 6

Faire un bilan des forces et projeter sur un axe vertical.

Ex 8

Considérer l'air comme un gaz parfait pour lequel $\rho = \frac{pM}{RT}$.

Ex 9

L'air étant supposé se comporter comme un gaz parfait, à température constante, il faut tenir compte de la variation de g avec l'altitude avant d'intégrer.

Ex 11

Faire un bilan des forces et appliquer la relation fondamentale de la dynamique pour déterminer le sens du vecteur accélération.

Ex 12

Appliquer la relation fondamentale de la dynamique en projection sur un axe horizontal au liquide situé dans la partie horizontale du tube.

Ex 13

La force cherchée correspond à l'opposée de la composante suivant l'axe de traction des forces de pression exercées sur un hémisphère.

Ex 14

1) Utiliser $\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{f}_{v,ext}$.

2) Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables. Si on connaît $\frac{\partial f}{\partial x}$, alors $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'une primitive de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x plus une fonction de y seul. On peut déterminer cette dernière si on connaît $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3) Le volume élémentaire en coordonnées cylindriques s'écrit $dV = r dr d\theta dz$.

Solutions des exercices

Exercices de VRAI / FAUX

Exercice 1

- 1) Vrai. La relation $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ est valable quelle que soit la nature du fluide, lorsque l'axe Oz est orienté vers le haut.
- 2) Vrai. Dans le champ de pesanteur, le signe « - » correspond à une orientation de l'axe Oz vers le haut.
- 3) Faux. L'intégration de $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ en $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$ n'est correcte que si les termes ρ et g sont constants : fluide incompressible, et variation de g avec l'altitude faible.
- 4) Faux. L'intégration de $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ en $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right)$ pour un gaz parfait n'est correcte que si g est supposée constante et si la température T est constante.

Exercices de niveau 1

Exercice 2

La fonte du glaçon ne modifie en rien le niveau de l'eau. En effet, le glaçon est en équilibre sous l'effet de son poids et de la pression d'Archimède, c'est-à-dire que la masse de la glace est égale à celle du volume d'eau déplacée. Donc, une fois que le glaçon aura fondu, le volume d'eau résultant de la fonte sera exactement égal à celui de l'eau déplacée, puisque les masses sont égales. Le volume occupé par l'eau de fonte sera donc le même que celui occupé par la partie immergée du glaçon.

Exercice 3

On a en coordonnées cylindriques :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

En notant

$$\vec{\text{grad}} f = A\vec{u}_r + B\vec{u}_\theta + C\vec{u}_z$$

on a :

$$df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM} = A dr + B r d\theta + C dz$$

Comme

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

On en déduit par identification :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Exercice 4

- Les points A et B sont à la même pression ($p_A = p_B$) car ils font partie du même fluide et se trouvent dans un même plan horizontal.



Il est nécessaire que le fluide considéré soit continu de A à B.

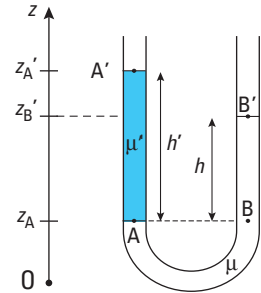
- De plus $p_{A'} = p_{B'} = p_0$ (pression atmosphérique).
- Enfin, on écrit la relation fondamentale de la statique entre A et A' et entre B et B' :

$$p_A - p_{A'} = \mu' \cdot g \cdot (z_{A'} - z_A) = \mu' \cdot g \cdot h'$$

$$p_B - p_{B'} = \mu \cdot g \cdot (z_{B'} - z_B) = \mu \cdot g \cdot h.$$

On déduit : $p_A - p_{A'} = p_B - p_{B'} \Rightarrow \mu' \cdot g \cdot h' = \mu \cdot g \cdot h.$

Finalement : $\frac{h'}{h} = \frac{\mu}{\mu'}$



Exercice 5

- Pour un gaz parfait d'équation d'état $p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$, la masse volumique s'exprime par :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}.$$

Application numérique :

– pour l'hélium, $\rho_{\text{He}} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 4 \cdot 10^{-3}}{8,32 \times 298} = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

– pour l'air, $\rho_{\text{air}} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8,32 \times 298} = 1,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$

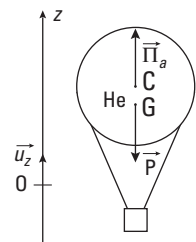


Pour obtenir une masse volumique exprimée dans le Système international, il est indispensable d'exprimer toutes les grandeurs dans ce système.

- Le ballon est soumis à :
 - son poids \vec{P} (nacelle, enveloppe et hélium) ;
 - la poussée d'Archimède de l'air $\vec{\Pi}_a$.



Faire un schéma afin de représenter les différentes forces avant de projeter les vecteurs sur l'axe Oz.



$$\begin{cases} P = m \cdot g + \rho_{\text{He}} \cdot V \cdot g & (\text{force verticale, dirigée vers le bas}) \\ \Pi_a = \rho_{\text{air}} \cdot V \cdot g & (\text{force verticale, dirigée vers le haut}) \end{cases}$$

La montgolfière peut décoller si $\Pi_a > P$ donc si :

$$\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot g > mg + \rho_{\text{He}} \cdot V \cdot g \Rightarrow (\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}) \cdot V > m.$$

D'où la valeur maximale de m permettant le décollage :

$$m_{\text{max}} = (\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}) \cdot V = (1,18 - 0,16) \times 500 = 510 \text{ kg}.$$

Exercice 6

- Le système considéré est le bouchon, soumis à son poids et à la poussée d'Archimède. On envisage un axe Oz vertical, orienté de bas en haut.

À l'équilibre, la poussée d'Archimède est égale au poids du bouchon :

$$\Pi_a = \rho_e \cdot (h \cdot s) \cdot g = P = \rho_l \cdot (H \cdot s) \cdot g.$$

On déduit :

$$h = \frac{\rho_l}{\rho_e} \cdot H = \frac{0,24 \times 5}{1} = 1,2 \text{ cm}.$$

2) Dans ce cas, la poussée d'Archimède, qui correspond à une hauteur immergée h' , est égale, à l'équilibre, au poids du bouchon, plus le poids de la pièce.

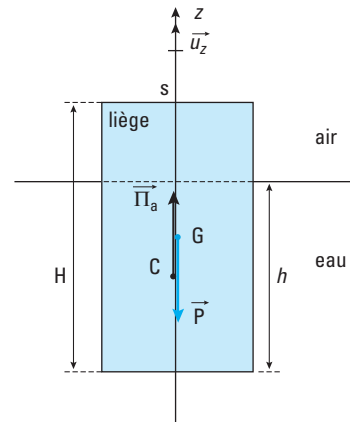
$$\Pi_a = \rho_e \cdot (h' \cdot s) \cdot g = P' = \rho_l \cdot (H \cdot s) \cdot g + m \cdot g.$$

On déduit :

$$\frac{\rho_l \cdot H \cdot s + m}{\rho_e \cdot s} = \frac{0,24 \times 5 \times 2 + 6}{1 \times 2} = 4,2 \text{ cm}.$$

3) Dans le cas d'un glaçon cylindrique, le raisonnement est identique à celui de la première question, en remplaçant ρ_l par ρ_g .

Il vient : $h'' = \frac{\rho_g}{\rho_e} \cdot H = \frac{0,92 \times 5}{1} = 4,6 \text{ cm}.$



Exercices de niveau 2

Exercice 7

- 1)  Calculer la hauteur d'huile $h' = \frac{V}{s}$ pour pouvoir utiliser le principe de l'hydrostatique.

A et B sont deux points situés dans l'eau et dans un même plan horizontal donc $p_A = p_B$. De plus $p_{A'} = p_{B'} = p_0$.

Le principe de l'hydrostatique conduit à écrire :

$$p_A = p_0 = \rho_e \cdot g \cdot h = p_B - p_0 = \rho_h \cdot g \cdot h' \text{ avec } h' = \frac{V}{s} = 6 \text{ cm}.$$

$$h = h' \cdot \frac{\rho_h}{\rho_e} = 6 \times \frac{0,90}{1,00} = 5,4 \text{ cm}.$$

- 2) La hauteur de la colonne d'acétone est :

$$h'' = \frac{V''}{s} = 10 \text{ cm}.$$

Les points A et B de l'eau sont dans un même plan horizontal $\Rightarrow p_A = p_B$.

D'autre part $p_{A'} = p_{C'} = p_0$.

Le principe de l'hydrostatique permet d'écrire :

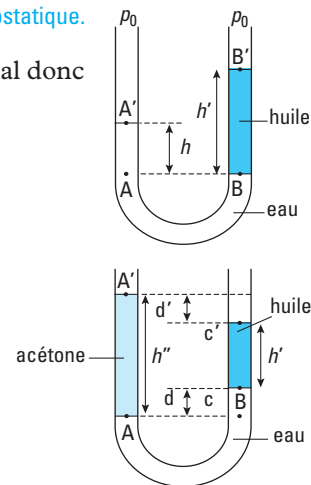
$$p_A - p_{A'} = \rho_a \cdot g \cdot h'' = p_B - p_{C'} = (p_B - p_C) + (p_C - p_{C'}) = (\rho_e \cdot g \cdot d + \rho_h \cdot g \cdot h').$$

On tire :

$$d = \frac{\rho_a \cdot h'' - \rho_h \cdot h'}{\rho_e} = \frac{0,79 \times 10 - 0,90 \times 6}{1,00} = 2,5 \text{ cm}.$$

On déduit la dénivellation entre les surfaces libres des deux branches :

$$d' = h'' - h' - d = 10 - 6 - 2,5 = 1,5 \text{ cm}.$$



Exercice 8

Dans tous les cas, $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ dans le champ de pesanteur, l'axe Oz étant orienté vers le haut.

Pour un gaz parfait :

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz.$$

1) Lorsque la température est constante et égale à T_0 :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T_0} \cdot dz \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T_0} \cdot (z - 0)$$

ou, d'une autre façon : $p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g}{R \cdot T_0} \cdot z\right)$

$$\text{Application numérique : } p = 1,013 \cdot 10^5 \times \exp\left(-\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,81 \times 4\,807}{8,32 \times 290}\right)$$

$$p = 0,575 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,575 \text{ bar.}$$

2)  Remplacer T par son expression en fonction de z avant d'intégrer.

Lorsque la température varie avec l'altitude :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 - A \cdot z}$$

Par intégration : $\ln\frac{p}{p_0} = +\frac{M \cdot g}{A \cdot R} \cdot \ln\left(\frac{T_0 - A \cdot z}{T_0}\right)$

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{A \cdot z}{T_0}\right)^{\frac{M \cdot g}{A \cdot R}}$$

$$\text{Application numérique : } p = 1,013 \cdot 10^5 \times \left(1 - \frac{6,45 \cdot 10^{-3} \times 4\,807}{290}\right)^{\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,8}{6,45 \cdot 10^{-3} \times 8}}$$

$$p = 0,557 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,557 \text{ bar.}$$

Exercice 9

L'axe Oz étant orienté vers le haut : $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$.

L'air est considéré comme gaz parfait, d'où $\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$ et l'intensité de la pesanteur est :

$$g = g_0 \cdot \left(\frac{R_t}{R_t + z}\right)^2.$$

En reportant dans l'équation locale de la statique des fluides :

$$\left(dp = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \cdot g_0 \cdot \frac{R_t^2}{(R_t + z)^2} \cdot dz\right) \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g_0 \cdot R_t^2}{R \cdot T} \cdot \frac{dz}{(R_t + z)^2}$$

La température étant constante, l'expression $\frac{M \cdot g_0 \cdot R_t^2}{R \cdot T}$ est constante, et, en intégrant entre les altitudes O et z :

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g_0 \cdot R_t^2}{R \cdot T} \cdot \int_0^z \frac{dz}{(R_t + z)^2} \Rightarrow \ln\frac{p(z)}{p_0} = -\frac{M \cdot g_0 \cdot R_t^2}{R \cdot T} \cdot \left[\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t + z}\right]$$

Exercice 10

1) L'eau de mer est un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. On a donc la relation $dp = -\rho g dz$ où Oz est un axe vertical orienté vers le haut. Or, l'énoncé demande l'expression de la pression en fonction de la profondeur. Il faut donc utiliser un axe vertical orienté vers le bas, Oh , et la relation précédente devient :

$$dp = +\rho g dh$$

En remplaçant ρ par l'expression donnée dans l'énoncé et en séparant les variables, on obtient :

$$\exp(-\chi_T(p(h) - p_0)) dp = \rho_0 g dh$$

Soit, après intégration :

$$-\frac{1}{\chi_T} \exp(-\chi_T(p(h) - p_0)) = \rho_0 g h + K$$

où K est une constante que l'on détermine en écrivant que la pression à la surface ($h = 0$) est égale à p_0 , soit :

$$-\frac{1}{\chi_T} = K$$

On a donc :

$$\exp(-\chi_T(p(h) - p_0)) = -\chi_T \rho_0 g h + 1$$

D'où

$$p(h) = p_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g h)$$

2) Pour $h = 10$ km, on calcule $p(10 \text{ km}) = 1\,007$ bar.

Dans le cas d'un fluide incompressible, on a, d'après le cours, $p(h) = p_0 + \rho_0 g h = 982$ bars.

L'erreur relative est donc de $\frac{1\,007 - 982}{1\,007} = 0,025$ soit 2,5 %.

Exercice 11

1) Le poids de la montgolfière est $P = m \cdot g = 300 \times 9,81 = 2\,943$ N.

La poussée d'Archimède de l'air a pour valeur $\Pi_a = (\rho \cdot V) \cdot g$ avec $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ le volume de la sphère. Il vient :

$$\Pi_a = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g = 1,0 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 \times 9,81 = 2\,630 \text{ N.}$$

Dans la mesure où $P > \Pi_a$, la montgolfière n'est pas à l'équilibre. Elle est animée d'un **mouvement descendant**.

La relation de la dynamique permet d'écrire : $m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi}_a$ et en projection sur un axe Oz vertical orienté de bas en haut : $m \cdot a = -m \cdot g + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g = -P + \Pi_a$.

Il vient :

$$a = \frac{-P + \Pi_a}{m} = -1,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



On retrouve bien que l'accélération, négative, correspond à un vecteur \vec{a} dirigé vers le bas.

2) La relation de la dynamique s'écrit :

$$m' \cdot \vec{a}' = \vec{P}' + \vec{\Pi}_a$$

en notant m' la masse permettant d'avoir une accélération dirigée vers le haut, de valeur $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

En projection sur Oz :

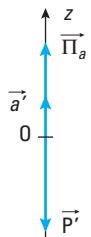
$$m' \cdot a' = -m' \cdot g + \Pi_a.$$

La poussée d'Archimède a même valeur que dans la question précédente. On déduit :

$$m' = \frac{\Pi_a}{g + a'} = \frac{2\,630}{9,81 + 0,80} = 248 \text{ kg.}$$

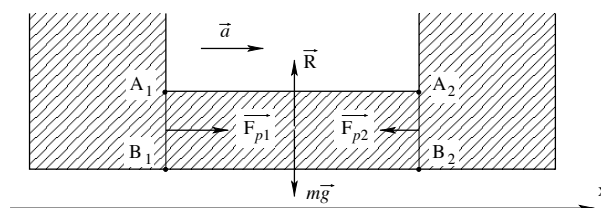
Il est donc nécessaire de lâcher une masse de lest Δm telle que :

$$\Delta m = m - m' = 300 - 248 = 52 \text{ kg.}$$



Exercice 12

On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen à la masse de fluide délimitée par les points A_1B_1 et A_2B_2 , dans la partie horizontale du tube en U.



Cette masse est soumise aux forces suivantes :

- son poids $m\vec{g}$ et la réaction du tube \vec{R} , toutes deux verticales ;
- les forces de pression \vec{F}_{p1} et \vec{F}_{p2} exercées sur les surfaces A_1B_1 et A_2B_2 , qui sont orthogonales à ces surfaces et donc horizontales.

En projection sur l'axe horizontal Ox , on a donc :

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = m\vec{a}$$

Soit S la section de la partie horizontale du tube. En désignant par p_1 (resp. p_2) la pression supposée constante au niveau de A_1B_1 (resp. A_2B_2), l'équation précédente devient :

$$(p_1 - p_2)S\vec{u}_x = m\vec{a}$$

Or, en notant h_1 la hauteur de liquide dans le tube de gauche et h_2 celle dans le tube de droite, on a :

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1 \text{ et } p_2 = p_0 + \rho gh_2 \text{ et donc } p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho gh.$$

Comme $m = \rho SL$, on obtient :

$$\rho ghS = \rho SLa$$

et donc

$$h = \frac{La}{g}$$

$$\text{A.N. : } a = \frac{(80 - 25)}{13} \cdot \frac{1\,000}{3\,600} = 1,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } h = \frac{0,6 \cdot 1,17}{9,81} = 7,2 \text{ cm}.$$

Remarque : il n'est pas indispensable de supposer la pression constante sur A_1B_1 et A_2B_2 pour obtenir le résultat. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut isoler dans le volume $A_1B_1B_2A_2$ une tranche horizontale suffisamment fine pour que le raisonnement précédent soit applicable.

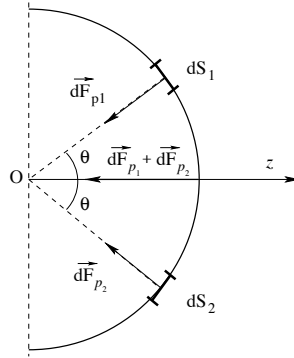
Exercices de niveau 3

Exercice 13

La force \vec{F} cherchée est l'opposée de la résultante des forces de pression atmosphérique s'exerçant sur un hémisphère. On se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe l'axe de l'hémisphère, Oz . La force de pression élémentaire subie par une surface $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ s'écrit donc :

$$d\vec{F}_p = -p_0 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

D'après le cours, la pression atmosphérique est constante sur un hémisphère. D'autre part, la somme de deux forces élémentaires correspondant à deux surfaces dS symétriques par rapport à Oz est portée par Oz .



Pour calculer la résultante des forces de pression, il suffit donc de calculer la somme des composantes suivant Oz de ces forces. On a donc

$$\|\vec{F}\| = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} p_0 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \cos\theta = 2\pi R^2 p_0 \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

D'où finalement

$$\|\vec{F}\| = p_0 \pi R^2$$

Remarque : On pouvait obtenir le résultat sans calcul en remarquant que la projection de la force élémentaire sur Oz , $dF_p \cos\theta$, est égale à p_0 multiplié par la projection de dS sur le plan délimitant la demi-sphère. Sommer toutes les forces élémentaires revient donc à sommer toutes les surfaces projetées, ce qui donne la surface du cercle délimitant la demi-sphère, πR^2 , et à multiplier le résultat par p_0 .

A.N : $\|\vec{F}\| = 24,6 \text{ kN}$.

Exercice 14

1) Soit une masse dm de fluide, correspondant à un volume dV à une distance r de l'axe, en équilibre dans le référentiel lié au récipient tournant. La relation $\text{grad } p = \vec{f}_{v,ext}$ donne ici :

$$\frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z = -\rho g \vec{u}_z + \rho \omega^2 r \vec{u}_r$$

La projection sur \vec{u}_θ donne $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$. La pression ne dépend donc que de r et de z .

2) En projetant sur \vec{u}_r , on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$$

et donc

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + f(z)$$

où $f(z)$ est une fonction de z seul que l'on détermine en utilisant la projection sur \vec{u}_z :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = f'(z)$$

soit

$$f(z) = -\rho g z + K$$

où K est une constante. On a donc

$$f(z) = -\rho g z + K$$

2) La surface libre est définie par $p(r, z) = p_0$, donc ici par

$$z = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - p_0 + K \right) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0$$

où z_0 est une constante. La surface libre a donc bien une forme parabolique.

Remarque : on aurait pu aller plus vite en remarquant que $-\rho g \overline{u_z} = -\overline{\text{grad}}(\rho g z)$ et que $\rho \omega^2 r^2 \overline{u_r} = \overline{\text{grad}}\left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2\right)$. La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + K$$

et donc

$$p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = K$$

3) Pour déterminer la constante z_0 , on écrit que le volume de fluide n'a pas été modifié par la mise en rotation du récipient.

Initialement, le volume de fluide s'écrit $V = \pi R^2 h$.

Quand le récipient est en rotation, on a : $V = \iiint_{\text{fluide}} dV$ où dV est le volume engendré par une variation dr de r , $d\theta$ de θ et dz de z .

On a donc :

$$dV = r d\theta dr dz$$

et

$$V = \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{z(r)} \int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta dr dz = 2\pi \int_{r=0}^R \left(\frac{\omega^2 r^3}{2g} + z_0 r \right) dr = \frac{\pi \omega^2 R^2}{4g} + \pi R^2 z_0$$

En égalant les deux expressions de V , avant et après mise en rotation, on obtient :

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

L'expression de la surface libre est donc finalement :

$$z = h - \frac{\omega^2}{4g} (R^2 - 2r^2)$$