

Théorème du moment cinétique

Introduction

Le moment cinétique, tout comme la quantité de mouvement et l'énergie, sont trois grandeurs fondamentales de la mécanique. Le moment cinétique joue, pour la rotation, un rôle équivalent à la quantité de mouvement pour la translation ; de plus sa conservation fonde les lois de Kepler, bases de l'étude du mouvement des planètes.

Plan du chapitre 16

A. Rappel: le produit vectoriel	x
1. Définition.....	x
2. Quelques propriétés.....	x
3. Calculs de produits vectoriels utiles.....	x
4. Expression du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes	x
B. Moment d'une force	x
1. Moment d'une force en un point.....	x
2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté.....	x
3. Moments d'un ensemble de forces appliquées à un solide: moment résultant	x
4. Cas particulier: couple	x
5. Liaison pivot parfaite entre deux solides.....	x
C. Moment cinétique d'un point matériel	x
1. Moment cinétique en O d'un point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R}	x
2. Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté dans le référentiel \mathcal{R}	x
3. Moment cinétique d'un système matériel.....	x
4. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	x
D. Théorème du moment cinétique (TMC)	x
1. Théorème du moment cinétique d'un point matériel en un point fixe d'un référentiel galiléen.....	x
2. Théorème du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen	x
3. Cas particulier de conservation du moment cinétique d'un point matériel	x
4. Théorèmes du moment cinétique d'un système matériel	x
5. Théorème du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	x
E. Puissance d'un ensemble de forces appliquées à un système matériel	x
1. Définition.....	x
2. Puissance d'efforts extérieurs particuliers	x
F. Travail d'un ensemble de forces	x
1. Définition.....	x
2. Cas des forces extérieures.....	x
G. Énergie cinétique d'un système matériel	x
1. Définition.....	x
2. Cas du solide en rotation autour d'un axe fixe Δ	x
3. Loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel galiléen \mathcal{R}	x
4. Théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel déformable	
Méthodes	x
Exercices	x

A. Rappel : le produit vectoriel

A.1. Définition

Définition 1

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont :

- la norme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- la direction est perpendiculaire à \vec{u} et à \vec{v} ;
- le sens est donné par la règle des 3 doigts de la main droite (fig. 1).

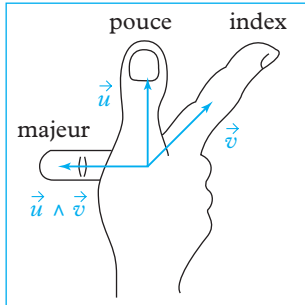


Fig. 1. Règle des trois doigts de la main droite.

Remarques

- 1) On déterminera donc un produit vectoriel en trois étapes : norme, direction et sens.
- 2) L'angle (\vec{u}, \vec{v}) est orienté (signes > 0 ou < 0 , fig. 2).

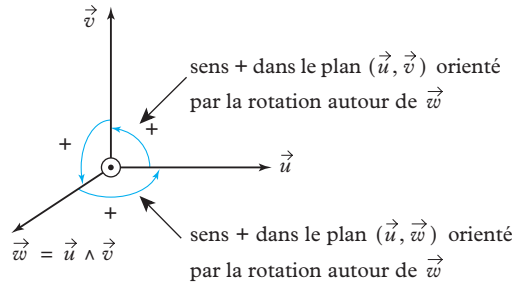


Fig. 2. Orientation de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) .

- 3) Pour utiliser la règle des trois doigts de la main droite, il faut choisir la position des doigts pour laquelle $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ est inférieure à 180° (fig. 3).

angle à ne pas considérer
car $|\alpha'| > 180^\circ$

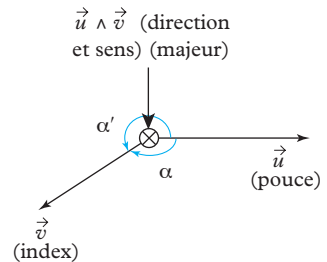
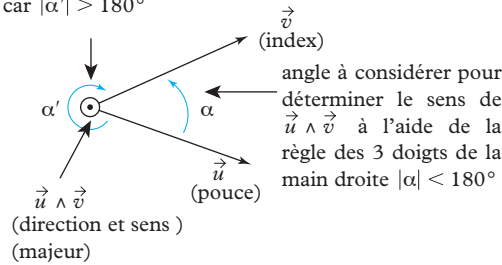


Fig. 3. Utilisation correcte de la règle des trois doigts de la main droite.

A.2. Quelques propriétés

- Le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{u}$ est un vecteur de même norme que $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de même direction que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ mais de sens opposé à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ainsi :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Notamment : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs, on a (distributivité) :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

- L'aire \mathcal{S} du triangle ABC s'écrit : $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|$

en effet $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BC}\| \times |\sin \alpha|$ (fig. 4).

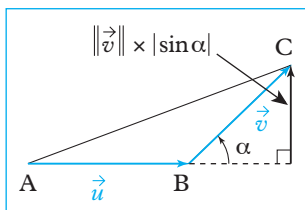


Fig. 4. Aire d'un triangle et produit vectoriel.

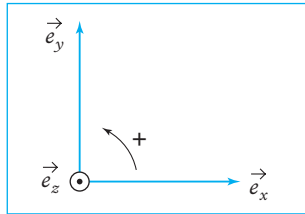


Fig. 5. Dans une base orthonormée directe cartésienne.

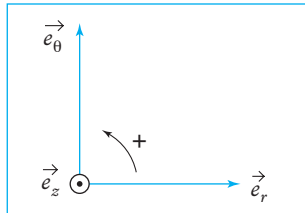


Fig. 6. Dans une base orthonormée cylindrique.

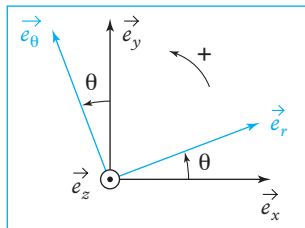


Fig. 7. Produit vectoriel dans des bases cartésienne et cylindrique.

A.3. Calculs de produits vectoriels utiles

- Produits vectoriels entre deux vecteurs d'une base orthonormée directe cartésienne

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = + \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \vec{e}_z = +1 \vec{e}_z = \vec{e}_z.$$

(règle des 3 doigts de la main droite) sens norme direction
 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \frac{\pi}{2} \perp \vec{e}_x$ et $\perp \vec{e}_y$

De même (fig. 5) : $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$
 En revanche $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_x$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

- Dans une base orthonormée cylindrique :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \vec{e}_z = +1 \vec{e}_z = \vec{e}_z.$$

(règle des 3 doigts de la main droite) sens norme direction
 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \frac{\pi}{2} \perp \vec{e}_r$ et $\perp \vec{e}_\theta$

De même (fig. 6) : $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$; $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_z$;
 $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$; $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta$.

- Produits vectoriels entre vecteurs des bases orthonormées directes cartésiennes et cylindriques (fig. 7) :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_r = + \left| \sin \theta \right| \vec{e}_z = \sin \theta \vec{e}_z.$$

(règle des 3 doigts de la main droite) sens norme direction
 $(\vec{e}_x, \vec{e}_r) = \theta \perp \vec{e}_x$ et $\perp \vec{e}_r$
 $|\sin \theta| = \sin \theta$
 car $0 < \theta < \pi/2$ sur le dessin

De même : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_\theta = + \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right| \vec{e}_z = + |\cos \theta| \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_z$

$|\cos \theta| = \cos \theta$ car $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin)

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_r = - \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right| \vec{e}_z = -\cos \theta \vec{e}_z$$

(car $\cos \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin).

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_y = -|\sin(-\theta)| \vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_z$$

(car $\sin \theta > 0$ puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur le dessin).

Remarque : il est préférable de faire un schéma pour lequel on a :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ ainsi } \sin \theta > 0 \text{ et } \cos \theta > 0.$$

Les calculs faits dans ces conditions restent valables dans les autres positions.

A.4. Expression du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{u} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$ et $\vec{v} = a'\vec{e}_x + b'\vec{e}_y + c'\vec{e}_z$,

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z) \wedge (a'\vec{e}_x + b'\vec{e}_y + c'\vec{e}_z)$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{u} \wedge \vec{v} = & aa'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x + ab'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + ac'\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \\ & + ba'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x + bb'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_y + bc'\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\ & + ca'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x + cb'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y + cc'\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - b'c)\vec{e}_x + (ca' - c'a)\vec{e}_y + (ab' - a'b)\vec{e}_z$$

B. Moment d'une force

B.1. Moment d'une force en un point

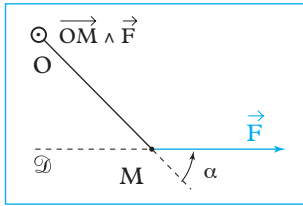


Fig. 8. Moment d'une force \vec{F} en un point O.

Définition 2

Le moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ en un point O d'une force \vec{F} appliquée au point M est défini par le vecteur (fig. 8) :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \text{ moment en O (N} \cdot \text{m)} \\ \vec{F} \text{ force (N)} \end{array} \right.$$

Propriétés :

- La norme (ou valeur) du moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ est :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\| = \|\vec{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times |\sin(\vec{OM}, \vec{F})| = OM \times \|\vec{F}\| \times |\sin \alpha|;$$

- si O appartient à la droite d'action \mathcal{D} de \vec{F} (c'est-à-dire si \vec{OM} est colinéaire à \vec{F}), alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$;

- si plusieurs forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont appliquées au point M, alors, si on appelle $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ la résultante de ces forces, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \\ &= \vec{OM} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_2 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_3 \\ &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_2) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_3). \end{aligned}$$

Remarque : dans les exercices, \vec{OM} et \vec{F} se décomposeront en fonction de vecteurs de bases. Le calcul du moment en O de \vec{F} reviendra donc à un calcul de produit vectoriel entre vecteurs de bases.

Application 1 Cas du pendule simple

Considérons le pendule simple composé d'un fil inextensible sans masse de longueur $\ell = OM$, suspendu en O, point fixe du référentiel terrestre \mathcal{R}_g ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) supposé galiléen et d'une masse m assimilée à un point matériel M repéré à l'aide des coordonnées polaires d'axe \vec{e}_z .

Exprimer le moment en O des forces appliquées au point matériel M.

Solution

- Le point M est soumis à son poids \vec{P} vertical et dirigé vers le bas, de valeur $P = mg$, et à la tension \vec{T} du fil, colinéaire au fil et orientée vers O.

- Le moment en O du poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$ appliqué en M est :

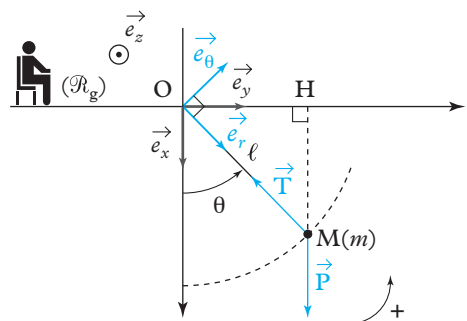
$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \vec{OM} \wedge \vec{P} = \ell \vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_x \\ &= mg\ell \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x \\ &= mg\ell \times \|\vec{e}_r\| \times \|\vec{e}_x\| \times |\sin(\vec{e}_r, \vec{e}_x)| (-\vec{e}_z) \\ &= -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Remarque : $(-\vec{e}_z)$ est obtenu à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite et $|\sin(-\theta)| = \sin\theta$ car $\theta > 0$ sur le schéma.

- Le moment en O de la tension $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ appliquée en M est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \ell \vec{e}_r \wedge (-T\vec{e}_r) = -\ell T \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}.$$

Remarque : on aurait pu conclure directement car \vec{OM} est colinéaire à \vec{T} .



B.2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit Δ un axe passant par O de vecteur unitaire \vec{u} .

Remarque : si $O' \in \Delta$ alors Δ peut être défini indifféremment par O' et \vec{u} .

Définition 3

Le moment de la force \vec{F} appliquée au point M par rapport à l'axe Δ est donné par le nombre scalaire :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \text{ moment par rapport à } \Delta \text{ (N} \cdot \text{m)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \text{ moment en O (N} \cdot \text{m)} \\ \vec{u} \text{ vecteur unitaire de } \Delta. \end{array} \right.$$

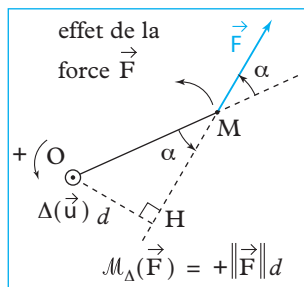


Fig. 9. Moment d'une force \vec{F} ayant tendance à faire tourner le point M dans le sens direct autour de Δ .

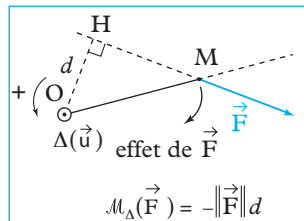


Fig. 10. Moment d'une force \vec{F} ayant tendance à faire tourner le point M dans le sens indirect autour de Δ .

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$ correspond donc simplement à la projection de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur Δ et c'est une grandeur algébrique.

En appelant H le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de la force \vec{F} , on obtient :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = ((\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

(car $\overrightarrow{HM} \parallel \vec{F}$)

Le moment $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$ est défini par l'expression :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \times \|\vec{F}\| \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \text{ moment par rapport à } \Delta \text{ (N} \cdot \text{m)} \\ d \text{ bras de levier (m)} \\ \|\vec{F}\| \text{ norme de la force (N).} \end{array} \right.$$

- Le signe « + » est obtenu si la force \vec{F} a tendance à faire tourner le point matériel M dans le sens direct autour de l'axe Δ (vecteur \vec{u}) (fig. 9) ;
- le signe « - » est obtenu si la force \vec{F} a tendance à faire tourner le point matériel (fig. 10) M dans le sens indirect autour de l'axe Δ .

Propriétés :

- Si \vec{F} est colinéaire à Δ alors $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$;
- si la droite d'action de la force \vec{F} coupe l'axe Δ , alors $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$;
- si plusieurs forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont appliquées au point M, si on appelle $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, on a :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_3).$$

Remarque : le bras de levier est un moyen pratique pour calculer le moment d'une force dans un exercice (si la géométrie n'est pas trop compliquée).

Application 2 Cas du pendule simple (suite)

Calculer les moments des différentes forces appliquées au point M par rapport à l'axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$.

Solution

Le bras de levier du poids \vec{P} par rapport à Δ est :

$$d = OH = \ell \times |\sin \theta| = \ell \sin \theta$$

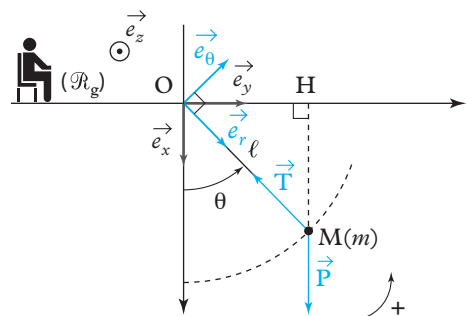
($\theta > 0$ sur le dessin).

Le poids \vec{P} a tendance à faire tourner M dans le sens indirect autour de Δ (orienté par \vec{e}_z).

Ainsi : $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -1 \times d \times \|\vec{P}\| = -mg\ell \sin \theta$.

On multiplie par -1, car \vec{P} fait tourner M dans le sens indirect autour de Δ .

Le bras de levier de la tension \vec{T} est nul donc $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = 0$.



1. Par exemple un solide

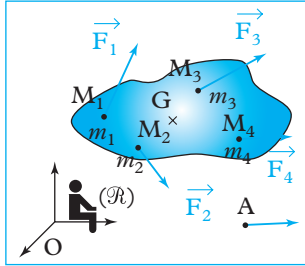


Fig. 11. Ensemble de forces appliquées à un système de points matériels.

B.3. Moments d'un ensemble de forces appliquées à un solide : moment résultant

Un système matériel¹ \mathcal{S} est, de manière générale, soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i appliquées aux points M_i (fig. 11).

On définit alors, afin de caractériser les efforts (ou actions mécaniques) appliqués au système \mathcal{S} :

- la **résultante des forces**, qui est la somme vectorielle des forces appliquées :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \text{ ou } \vec{R} = \iiint_M d\vec{F}(M);$$

- le **moment (résultant) en un point A**, qui est la somme des moments en A des forces appliquées :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i$$

Soit Δ un axe passant par A et de vecteur unitaire \vec{u} ; on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta &= \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{u} \\ &= \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i). \end{aligned}$$

On distingue de manière générale parmi les efforts appliqués à un système matériel fermé :

- les **efforts intérieurs** : exercés par une partie du système sur une autre partie du système, donc par des éléments intérieurs au système étudié ;
- les **efforts extérieurs** : exercés par des éléments ne faisant pas partie du système, donc extérieurs au système étudié.

Ces efforts peuvent résulter d'actions à distance (exemple : poids, force d'interaction électromagnétique) ou d'action de contact (exemple : réaction du support, forces de pression...).

Exemple : poids d'un système matériel \mathcal{S} dans un champ de gravitation \vec{g} uniforme.

Chaque élément de volume $dV(M)$ centré en M, de masse $dm(M)$, est soumis à la force de pesanteur élémentaire : $d\vec{F}(M) = dm(M)\vec{g}$.

La résultante de l'ensemble des forces précédentes est le poids du système matériel :

$$\vec{P} = \iiint_M d\vec{F}(M) = \iiint_M dm(M)\vec{g} = \vec{g} \iiint_M dm(M) = m\vec{g},$$

en notant $m = \iiint_M dm(M)$ la masse du système matériel.

Exprimons le moment de l'ensemble de forces au centre d'inertie G du système matériel :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \iiint_M \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{F}(M) = \iiint_M \overrightarrow{GM} \wedge dm(M)\vec{g} = \left(\iiint_M dm(M)\overrightarrow{GM} \right) \wedge \vec{g}.$$

Par définition du centre d'inertie G du système matériel :

$$\iiint_M dm(M)\overrightarrow{GM} = \vec{0}, \quad \text{donc } \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}.$$

Le poids d'un système matériel est une force appliquée au centre d'inertie G, qui est confondu avec le centre de gravité, car \vec{g} est uniforme.

Les forces de pesanteur appliquées à un système matériel se comportent comme une force unique $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée en G.

En un autre point A : $\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}$.

B.4. Cas particulier : couple

Définition 4

Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle.

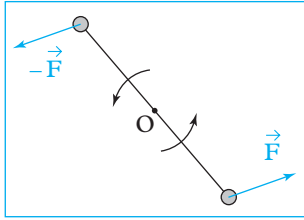


Fig. 12. Couple exercé sur une tige.

Par exemple sur la figure 12, l'ensemble des deux forces s'exerçant sur la tige forme un couple, puisque la résultante est nulle. Un couple est responsable d'une rotation uniquement : on parle par exemple du couple moteur exercé par un moteur sur la partie tournante qu'il entraîne.

On confond souvent le couple et son moment.

B.5. Liaison pivot parfaite entre deux solides

Les liaisons surfaciques entre deux solides (étudiées en SI) permettent d'éliminer des degrés de libertés sur les six qui sont disponibles pour caractériser le mouvement d'un solide par rapport à un autre.

Une **liaison pivot** entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison n'autorisant qu'une rotation de \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses axes Δ , fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 ne possède qu'un unique degré de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1 , fig. 13).

Elle est parfaite si le moment par rapport à l'axe Δ des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul : $M_\Delta = 0$ (autrement dit le moment en un point O de l'axe Δ est perpendiculaire à Δ).

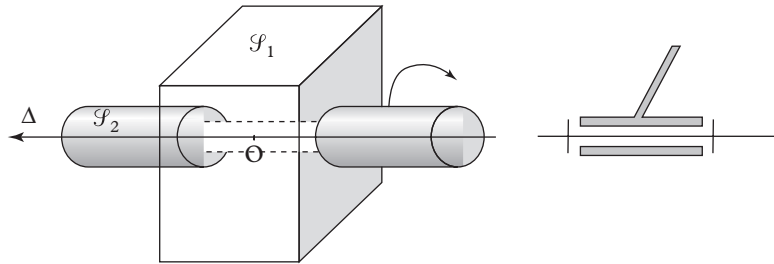


Fig. 13. Liaison pivot entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

Remarques :

- La réaction d'axe, action mécanique exercée par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est quelconque et n'a aucune raison d'être nulle ; de la même manière, les composantes du moment en un point O de l'axe Δ perpendiculaires à Δ n'ont aucune raison d'être nulles.
- Pour mettre en mouvement \mathcal{S}_2 par rapport à \mathcal{S}_1 , il suffit d'exercer un couple dont le moment par rapport à Δ est quasi nul.
- Si le système matériel $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2$ représente un moteur :
 - \mathcal{S}_1 , partie du système permettant de mettre en rotation \mathcal{S}_2 s'appelle le stator (vient de statique, partie « fixe » de référence du moteur),
 - \mathcal{S}_2 , partie du système en rotation autour de l'axe fixe Δ de \mathcal{S}_1 , s'appelle le rotor (vient de rotation).

C. Moment cinétique d'un point matériel

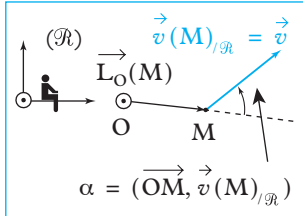


Fig. 14. Moment cinétique.

C.1. Moment cinétique en O d'un point matériel $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R}

Définition 5

Le moment cinétique en O du point matériel $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R} est le moment en O de la quantité de mouvement $\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 14).

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$\vec{L}_O(M)$ moment cinétique
($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
 m masse (kg)
 $\vec{v}(M)$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Remarque : lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel, il n'est pas nécessaire de conserver l'indication $_{/\mathcal{R}}$ tout au long des calculs.

Propriétés :

1. La norme du moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}\| &= \|\vec{OM}\| \times m \|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\| \times |\sin(\angle(\vec{OM}, \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}))| \\ &= mOM \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\alpha)|. \end{aligned}$$

2. Expression en coordonnées polaires :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = r\vec{e}_r \wedge m(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

L'expression $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ indique que si le moment cinétique de M en O est dirigé selon \vec{e}_z , alors le mouvement se fera dans un plan perpendiculaire à \vec{e}_z (c'est-à-dire (\vec{e}_x, \vec{e}_y)).

La mesure algébrique $mr^2\dot{\theta}$ de ce moment cinétique indique le sens de rotation de M autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$: si $mr^2\dot{\theta} > 0$, alors $\dot{\theta} > 0$ et θ augmente au cours du temps.

Si M est en mouvement circulaire, de centre O et de rayon R, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (fig. 15), le moment cinétique de M dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = mR^2\omega\vec{e}_z = mRv\vec{e}_z \quad (\text{avec } v = R\omega).$$

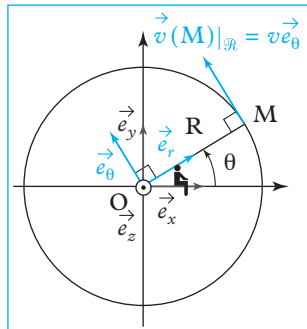
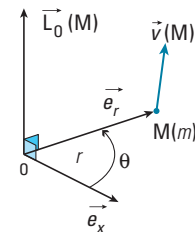


Fig. 15. Moment cinétique en O d'un point M en mouvement circulaire $\dot{\theta} = \omega$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Application 3 Cas du pendule simple (suite)

Calculer l'expression du moment cinétique en O du point $M(m)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Solution

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

$$\text{En effet } \vec{OM} = \ell\vec{e}_r \text{ et } \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \ell\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Remarque : ℓ est constant donc $\dot{\ell} = 0$, il n'est donc pas nécessaire de faire apparaître le terme $\dot{\ell}\vec{e}_r$ dans l'expression du vecteur $\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}$.

C.2. Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté dans le référentiel \mathcal{R}

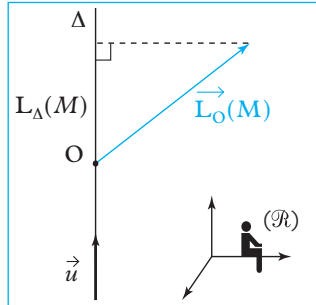


Fig. 16. Moment cinétique du point matériel $M(m)$ par rapport à l'axe Δ dans le référentiel \mathcal{R} .

Définition 6

Le moment cinétique du point matériel $M(m)$ par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) passant par O dans le référentiel \mathcal{R} , est le scalaire $L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}}$ (fig. 16) :

$$\begin{aligned} L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M))_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Remarque :

$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}}$ représente simplement la projection de $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$ sur Δ et c'est une grandeur algébrique.

Application 4 Cas du pendule simple (suite)

Exprimer le moment cinétique du point $M(m)$ par rapport à l'axe $(O; \vec{e}_z)$ dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Solution

$$L_{(O; \vec{e}_z)}(M)_{/\mathcal{R}} = L_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_z = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = m\ell^2 \dot{\theta}.$$

C.3. Moment cinétique d'un système matériel

C.3.1. Moment cinétique en un point A

Définition 7

Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ en A du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des moments cinétiques en A de chacun des points de \mathcal{S} (fig. 17) :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{L}_A(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \vec{AM}_i \wedge \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
m_i	masse (kg)
\vec{AM}_i	(m)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\vec{L}_A(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M dm(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
$dm(\mathbf{M})$	masse (kg)
\vec{AM}	(m)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

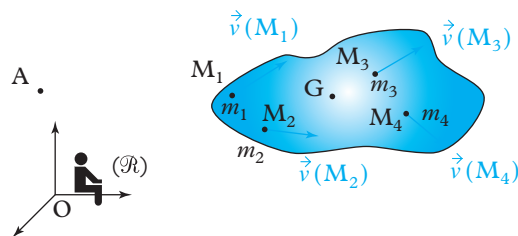


Fig. 17. Ensemble de points matériels et leurs vitesses.

2. Si \mathcal{S} est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), le moment cinétique en A de \mathcal{S} s'obtient par sommation des moments cinétiques en A de chaque sous système.

C.3.2. Moment cinétique par rapport à un axe

Définition 8

Le moment cinétique $L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ par rapport à l'axe Δ (de vecteur unitaire \vec{u}) du système matériel \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} est la projection sur l'axe Δ du moment cinétique en n'importe quel point A de Δ :

$$L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \vec{u} \cdot \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$$

C.4. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

C.4.1. Définition

3. La vitesse de B est nulle dans \mathcal{R} : $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$; il en est de même pour tous les points de l'axe Δ .

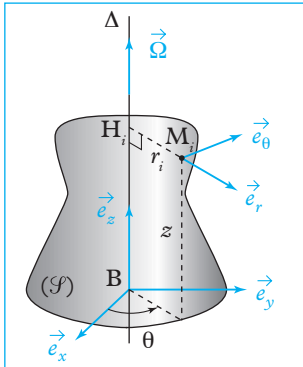


Fig. 18. Solide en rotation autour d'un axe fixe.

On considère un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (orientée) autour de l'axe $\Delta = (B, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel \mathcal{R}^3 (fig. 18).

Si la répartition de masse est discrète : tous les points M_i de masse m_i du solide \mathcal{S} ont une trajectoire circulaire de rayon r_i , parcourue à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.

On peut écrire :

$$L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = J_{\Delta} \cdot \omega$$

$r_i = H_i M_i$ distance entre le point M_i et l'axe Δ , H_i projection orthogonale de M_i sur Δ .

Si la répartition de masse est continue, on remplace la somme discrète (Σ) par une somme continue (\iiint) ; on obtient :

$$L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M H M^2 dm(M) \cdot \omega = J_{\Delta} \cdot \omega$$

Ainsi :

Le moment cinétique d'un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (orientée) autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = J_{\Delta} \omega,$$

où $J_{\Delta} = \iiint_M dm(M) H M^2$ est le moment d'inertie du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

On peut aussi écrire :

$$J_{\Delta} = \iiint_M dm(M) H M^2 = \sum_i m_i r_i^2,$$

avec r_i la distance entre chaque point M_i et l'axe de rotation Δ .

L'expression $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ indique que plus le solide en rotation sera composé de masses importantes situées loin de l'axe de rotation, plus son moment d'inertie sera grand.

C.4.2. Quelques moments d'inertie classiques

Moment d'inertie d'une tige par rapport à sa médiatrice

Soit une tige rectiligne, homogène de masse m , de section négligeable et de longueur a et sa médiatrice Δ (fig. 19) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m a^2.$$

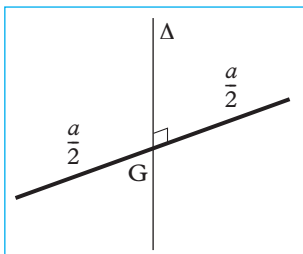


Fig. 19. Tige rectiligne.

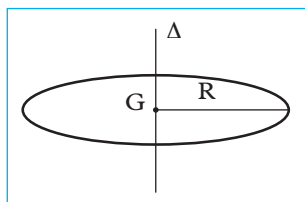


Fig. 20. Cerceau.

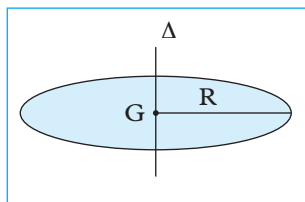


Fig. 21. Disque.

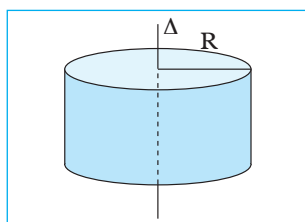


Fig. 22. Cylindre plein.

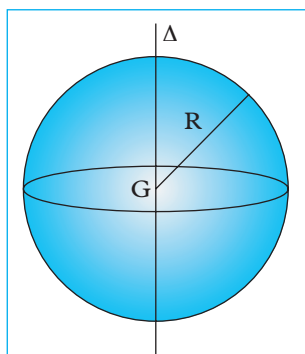


Fig. 23. Sphère.

Moment d'inertie d'un cerceau par rapport à son axe

Soit un cerceau homogène de masse m , de section négligeable de rayon R (fig. 20) et son axe Δ :

$$J_{\Delta} = mR^2.$$

Moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe

Soit un disque homogène de masse m , de rayon R et son axe Δ (fig. 21) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe

Soit un cylindre plein homogène de masse m , de rayon R et son axe Δ (fig. 22) :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres

Soit une sphère homogène de masse m et de rayon R et Δ l'un de ses diamètres (fig. 23) :

- sphère creuse : $J_{\Delta} = \frac{2}{3} mR^2$;
- sphère pleine : $J_{\Delta} = \frac{2}{5} mR^2$.

D. Théorème du moment cinétique (TMC)

D.1. Théorème du moment cinétique d'un point matériel en un point fixe d'un référentiel galiléen

Théorème 1

TMC(O)

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\overline{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ du point matériel $M(m)$ en un point fixe O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g est égale au moment en O des forces appliquées au point M :

$$\left(\frac{d(\overline{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overline{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \quad \left| \begin{array}{ll} \overline{L}_O(M) & \text{moment cinétique} \\ & (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \overline{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) & \text{moment } (\text{N} \cdot \text{m}) \end{array} \right.$$

Démonstration

Le moment cinétique en O du point M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\overline{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} = \overline{OM} \wedge \overline{mv}(M)_{/\mathcal{R}_g}.$$

On dérive cette expression par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d\overline{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \overline{mv}(M)_{/\mathcal{R}_g} + \overline{OM} \wedge m \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Comme O est fixe dans \mathcal{R}_g , $\left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$.

En outre : $\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}$.

Comme \mathcal{R}_g est galiléen, on a, d'après le PFD :

$$m\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F},$$

donc :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\text{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).$$

On notera TMC(O) ce théorème appliqué au point O **fixe** dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Remarques :

- Le TMC(O) fournit une relation vectorielle.
- Le point O peut être remplacé par n'importe quel point fixe dans \mathcal{R}_g .
- Ce théorème n'apporte, pour un point matériel, aucune information supplémentaire par rapport au PFD ; en effet, toutes les forces s'appliquent en un même point. Il permet seulement de résoudre plus facilement certains exercices (en faisant disparaître certaines forces inconnues).

Application 5 Cas du pendule simple (suite)

Appliquer, au pendule simple de l'application 1, le théorème du moment cinétique en O, par rapport à \mathcal{R}_g , afin de déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Solution

D'après les applications 1 et 3, on a trouvé :

$$\vec{L}_O(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z;$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z;$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}.$$

En appliquant le TMC dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen au point O fixe dans le référentiel \mathcal{R}_g , on a :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(\text{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}),$$

soit

$$m\ell^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -mg\ell \sin\theta \vec{e}_z,$$

ce qui donne en projetant sur \vec{e}_z l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

D.2. Théorème du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen

Théorème 2

TMC(Δ)

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $L_\Delta(\text{M})_{/\mathcal{R}_g}$ du point matériel M(m) par rapport à l'axe Δ , fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est égale au moment des forces appliquées au point M par rapport à Δ :

$$\frac{dL_\Delta(\text{M})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \quad \left| \begin{array}{ll} L_\Delta(\text{M}) & \text{moment cinétique} \\ & (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) & \text{moment (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

Démonstration

On suppose que Δ est un axe orienté à l'aide d'un vecteur unitaire \vec{u} passant par le point O et on multiplie scalairement le TMC(O) par \vec{u} :

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{u} \cdot \overline{\mathcal{M}_O(\vec{F})},$$

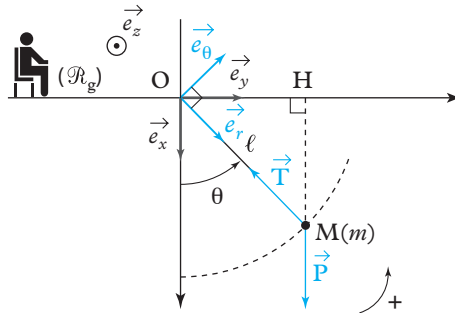
comme $\vec{u} = \overline{e_z}$ dans \mathcal{R}_g : $\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{L}_O(M))}{dt} = \vec{u} \cdot \overline{\mathcal{M}_O(\vec{F})}$ soit $\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$.

Remarques :

- Le TMC(Δ) n'est que la projection du TMC(O) sur Δ avec $O \in \Delta$.
- Le TMC(Δ) fournit une relation scalaire.

Application 6 Cas du pendule simple (suite)

Retrouver l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ du pendule simple en utilisant le TMC(Δ) par rapport à $\Delta = (O; \vec{e_z})$.



Solution

$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$, et l'on obtient : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta + 0$, soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$.

D.3. Cas particulier de conservation du moment cinétique d'un point matériel

D.3.1. Mouvement à force centrale

Définition 9

Le mouvement d'un point matériel M est à force centrale \vec{F} si le point M est soumis à une force \vec{F} dont la droite d'action passe constamment par un point fixe O (fig. 24), appelé centre de force.

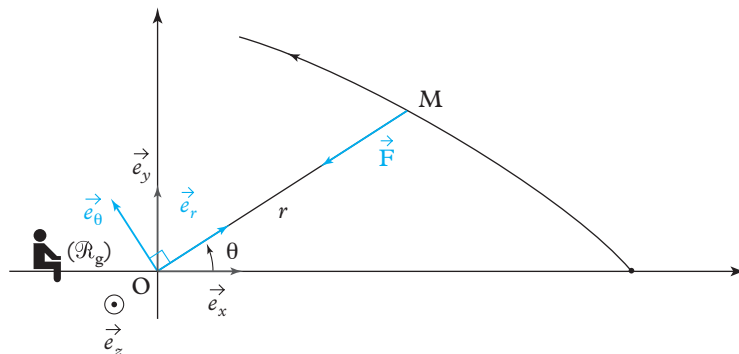


Fig. 24. Mouvement à force centrale.

Remarque : \overline{OM} et \vec{F} sont donc colinéaires.

D.3.2. Conservation du moment cinétique

Appliquons au point M, ayant un mouvement à force centrale \vec{F} , le TMC(O) :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ainsi } \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte.}$$

Le moment cinétique $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ du point M se conserve au cours du mouvement de M.

D.4. Théorèmes du moment cinétique d'un système matériel

On considère un système matériel \mathcal{S} en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . On suppose, pour la démonstration, que le système est composé d'un ensemble de points matériels (si le système est continu, on suppose qu'il est décomposable en un ensemble d'éléments de matière quasi ponctuels de volume $dV(M)$, de masse $m = dm(M)$ au voisinage de M) centrés sur les points M_i et que ces éléments de matière sont assimilables à des points matériels.

Appliquons alors le théorème du moment cinétique en un point A fixe de \mathcal{R}_g à chaque élément quasi ponctuel du système :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_A(\vec{F}_{e \rightarrow i}) + \sum_{j \neq i} \vec{M}_A(\vec{F}_{j \rightarrow i}) \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \end{aligned}$$

en sommant sur tout le système, on a :

$$\sum_i \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Expression dans laquelle :

$$\bullet \sum_i \left(\frac{d\vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}_g} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \quad \text{est la dérivée}$$

par rapport au temps dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g du moment cinétique en A du système matériel \mathcal{S} ;

$$\bullet \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{e \rightarrow i} = \vec{M}_{A, \text{ext}} \quad \text{est le moment résultant en A des actions extérieures au système } \mathcal{S} ;$$

$$\bullet \text{ la somme } \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{M}_{A, \text{int}} \quad \text{est le moment résultant en A des actions intérieures à } \mathcal{S} : \text{ en regroupant par deux les termes de la somme, sous la forme : } \vec{AM}_j \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}, \text{ on a :}$$

$$\vec{AM}_j \wedge (-\vec{F}_{i \rightarrow j}) + \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = (\vec{AM}_i - \vec{AM}_j) \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{M}_i \vec{M}_j \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0}$$

(car la force $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est portée par $M_j M_i$ d'après le principe des actions réciproques (3^e loi de Newton)), et donc :

$$\vec{M}_{A, \text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}. \quad 4 \ 5 \ 6$$

$$\text{On obtient ainsi : } \left(\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}} \quad 7, \text{ qui est la généralisation du théo-}$$

rème du moment cinétique en un point A fixe du référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; comme on a réussi à la démontrer, cette loi est un théorème.

4. On obtient ainsi la propriété suivante : la résultante des actions intérieures à un système fermé est nulle et le moment en un point quelconque des actions intérieures est nul.

5. Considérons que le système \mathcal{S} est constitué de deux sous systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en interaction : on appelle $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ la résultante et le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 , et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$ la résultante et le moment résultant en A des actions de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 . Comme pour le système \mathcal{S} , $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ sont des forces intérieures, on a : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$, soit : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. De la même manière, pour le système \mathcal{S} , $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$ sont des moments de forces intérieures, on a :

$$\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} = \vec{0},$$

soit : $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1}$.

On généralise ainsi le **théorème des actions réciproques**.

6. Si l'élément de matière quasi ponctuel de matière n'est pas assimilable à un point matériel, la force $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ n'est pas forcément portée par $\vec{M}_i \vec{M}_j$!

7. Le moment des actions extérieures peut être le moment d'une force ou alors le moment d'un couple !

Théorème 3

Théorème du moment cinétique d'un système matériel en un point fixe A (TMC(A))

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} en un point A fixe de \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d(\overline{L}_A(\mathcal{S}))}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} \text{ moment cinétique en A (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \text{ moment en A des actions mécaniques extérieures (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

Cas particuliers :

- Dans le cas où $\overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ (système isolé ou pseudo-isolé), le moment cinétique en A du système se conserve au cours du temps.
- Si le système matériel \mathcal{S} est au repos (en équilibre) dans le référentiel d'étude, alors $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ (quel que soit le point fixe A) : ces équations sont celles de la statique des systèmes matériels. La réciproque n'est vraie que si $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} = \vec{0}$ et si, en plus, \mathcal{S} est au repos à un instant t_0 , alors le système est au repos (à chaque instant) dans le référentiel d'étude.

En repartant du TMC(A), si $\Delta = (A, \vec{u})$ est un axe fixe de \mathcal{R}_g (\vec{u} vecteur unitaire), on obtient le théorème du moment cinétique (scalaire) par rapport à cet axe : multiplions scalairement par \vec{u} le TMC(A) :

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{d\overline{L}_A(\mathcal{S})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{u} \cdot \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \quad \text{soit} \quad \frac{d(\vec{u} \cdot \overline{L}_A(\mathcal{S}))}{dt} = \vec{u} \cdot \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}}$$

car \vec{u} est fixe dans \mathcal{R}_g , soit $\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$ (TMC(D)).

Théorème 4

Théorème du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un axe Δ (TMC(Δ))

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments, par rapport à un axe Δ fixe de \mathcal{R}_g , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ :

$$\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} \text{ moment cinétique par rapport à l'axe } \Delta \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \text{ moment par rapport à } \Delta \text{ des actions mécaniques extérieures (N} \cdot \text{m)} \end{array} \right.$$

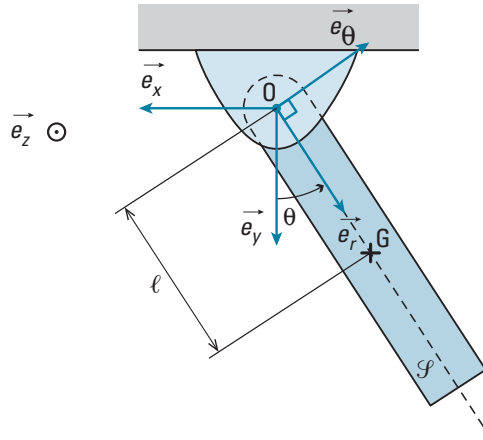
D.5. Théorèmes du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Supposons que l'on étudie le mouvement d'un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A, \vec{u})$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , à la vitesse angulaire instantanée $\omega = \dot{\theta}$.

On peut utiliser le TMC(Δ) :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$$

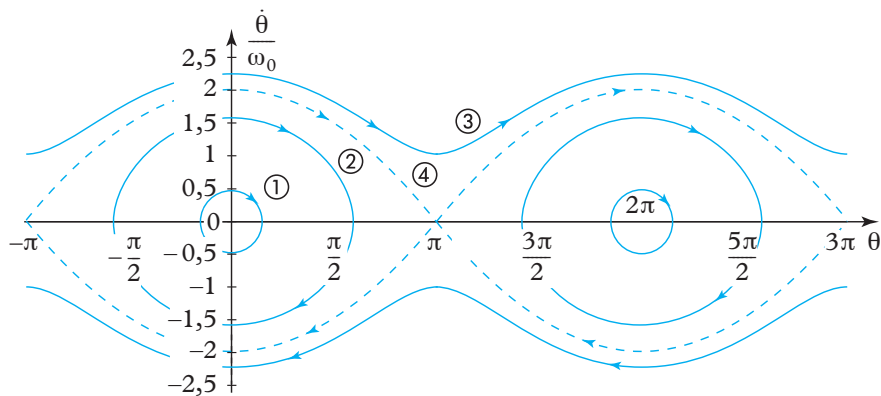
Application 7 On considère un pendule pesant constitué d'un solide \mathcal{S} , de masse m , de centre de masse G et de moment d'inertie J par rapport à l'axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$. Il est mobile autour de l'axe Δ par l'intermédiaire d'une liaison pivot. L'axe Δ est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_y vertical vers le bas.



- 1) Déterminer l'équation du mouvement.
- 2) Dans le cas de mouvements de faible amplitude (θ petit), montrer que l'équation du mouvement est analogue à celle d'un oscillateur harmonique.

Remarque : on pourra poser $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J}$.

- 3) Dans le cas général (θ quelconque), déterminer l'équation du portrait de phase.
- 4) On donne l'allure du portrait de phase dans quatre configurations ①, ②, ③, ④.



Pour chacune des courbes, indiquer s'il s'agit d'un mouvement pendulaire ou de révolution.
Caractériser le cas échéant l'amplitude du mouvement.
Pour la courbe ④, indiquer à quoi correspond le point $\theta = \pi$.

Solution

1) Pour déterminer l'équation (différentielle) du mouvement du pendule en rotation autour de l'axe fixe Δ , on va écrire le TMC(Δ) appliqué à \mathcal{S} dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

- Moments par rapport à Δ des efforts appliqués à \mathcal{S} :

– liaison pivot: $\mathcal{M}_\Delta(\text{pivot}) = 0$

– poids: $\mathcal{M}_\Delta = \underbrace{\vec{P}}_{\substack{\vec{P} \text{ a tendance} \\ \text{à faire tourner} \\ \text{dans le sens} \\ \text{indirect et autour} \\ \text{de } \Delta}} \times \underbrace{\ell \sin \theta}_{\substack{\text{bras de levier} \\ \text{(distance HG)}}$

- TMC(Δ) appliqué à \mathcal{S} dans \mathcal{R}_g :

$$J \times \frac{d\omega}{dt} = 0 - mgl \sin \theta \text{ avec } \omega = \dot{\theta}$$

qui s'écrit $J\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$.

2) Dans le cas de mouvements de faible amplitude (θ faible)

$$\sin \theta \simeq \theta$$

l'équation ci-dessous s'écrit:

$$J\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$\text{soit } \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J} \theta = 0$$

$$\text{soit, en posant } \omega_0^2 = \frac{mgl}{J} : \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Cette équation est **analogue** à celle d'un oscillateur harmonique.



Comme m est en kg, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, ℓ en m et J en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$,

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

3) Dans le cas général, on reprend l'équation de mouvement:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J} \sin \theta = 0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$, elle s'écrit:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

Pour obtenir l'équation des trajectoires de phase, on multiplie par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta \times \dot{\theta} = 0$$

qui donne en intégrant l'équation du portrait de phase:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \theta = \text{cte}$$

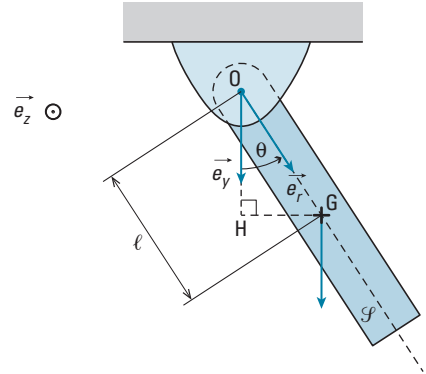
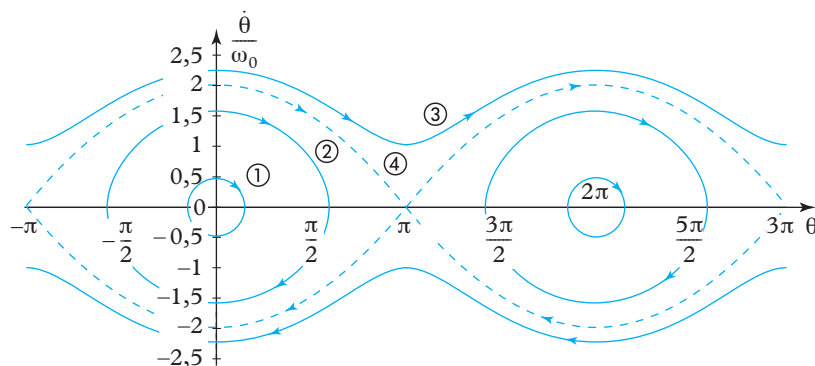
ou

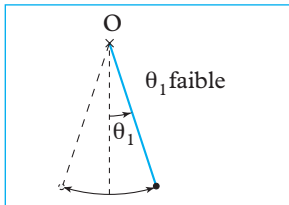
$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 - 2 \cos \theta = \text{cte}$$



Après intégration, l'équation obtenue s'appelle « intégrale première du mouvement ».

4) Interprétation des différents portraits de phase :



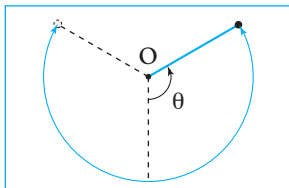


① Mouvement de petites amplitudes du pendule simple.

Courbe ①

La vitesse change de signe donc il s'agit d'un mouvement pendulaire.

La valeur maximum de θ est faible donc le mouvement est de faible amplitude.

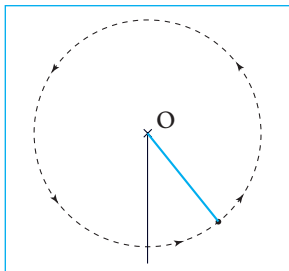


② Mouvement de grandes amplitudes du pendule simple.

Courbe ②

La valeur maximum de θ est plus importante.

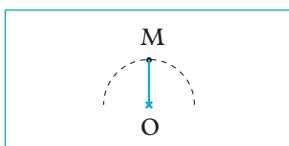
Le mouvement est donc pendulaire avec une plus grande amplitude.



③ Mouvement de révolution du pendule simple.

Courbe ③

La vitesse ne change pas de signe donc il s'agit d'un mouvement de révolution.



④ Positions d'équilibre instables.

Courbe ④

$\theta = \pi$

Sur la courbe ④, la vitesse s'annule pour $\theta = \pi$: il s'agit d'un point d'équilibre (en haut) instable.

Application 8 Pendule de torsion

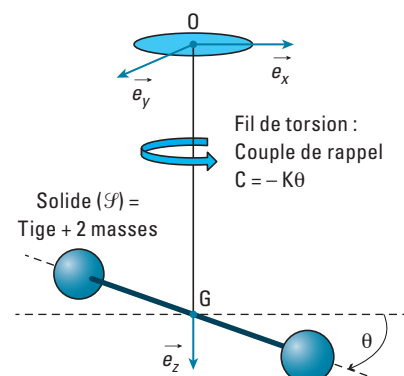
On considère un solide \mathcal{S} , de centre G , constitué d'une tige et de 2 masses, de masse m , de moment d'inertie J par rapport à l'axe vertical $\Delta = (O; \vec{e}_z) = (G; \vec{e}_z)$. Il est accroché à un fil de torsion qui lui applique un couple de rappel $C = -K\theta$ où θ est l'angle repérant la position angulaire de la tige de \mathcal{S} par rapport à $(G; \vec{e}_z)$.

On suppose que le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2) En posant $\omega_0^2 = \frac{K}{J}$, faire l'analogie avec l'équation d'un oscillateur harmonique.

3) Déterminer l'équation du portrait de phase. Tracer l'allure du portrait de phase.



Solution

1) Pour déterminer l'équation différentielle du mouvement du solide \mathcal{S} en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$, nous allons appliquer le TMC(Δ) au solide \mathcal{S} par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

- Moments par rapport à Δ des efforts appliqués à \mathcal{S} :

- poids: $\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) = 0$ (le poids est vertical comme Δ)

- fil de torsion: $\mathcal{M}_\Delta(\text{fil}) = -K\theta$

- Le TMC(Δ) s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} = 0 - K\theta \text{ avec } \omega = \dot{\theta}$$

soit

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0.$$

2) L'équation ci-dessous peut s'écrire en divisant par J :

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = 0$$

en posant $\omega_0^2 = \frac{K}{J}$, elle s'écrit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

Cette équation est **analogue** à celle d'un **oscillateur harmonique**.

3) Pour établir l'équation du portrait de phase, on va multiplier l'équation précédente par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} \times \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta \times \dot{\theta} = 0.$$

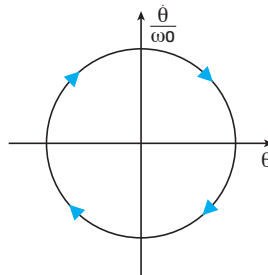
En intégrant, on obtient :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2 \times \frac{\theta^2}{2} = \text{cte}$$

soit

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \theta^2 = \text{cte}.$$

Ceci est une équation du portrait de phase, qui est un cercle dans le plan $\left(\theta ; \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)$:



Après intégration, l'équation obtenue s'appelle « intégrale première du mouvement ».

E. Puissance d'un ensemble de forces appliquées à un système matériel

E.1. Définition

On considère un système matériel \mathcal{S} , soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i appliquées aux différents points M_i (du système \mathcal{S}), se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 25).

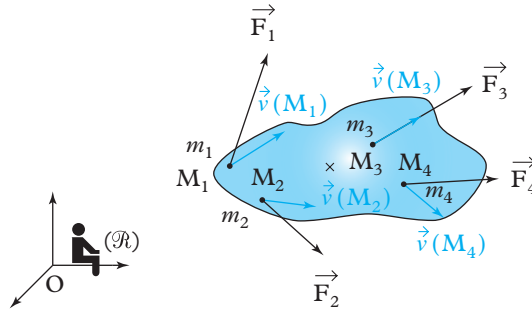


Fig. 25. Ensemble de forces appliquées à un système de points matériels.

Définition 10

La puissance des forces \vec{F}_i appliquées aux points M_i (composant le système matériel \mathcal{S}) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , est la somme des puissances des forces appliquées à chaque point M_i :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	puissance des forces appliquées à \mathcal{S} (W ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)
\vec{F}_i	forces (N)
$\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de M_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

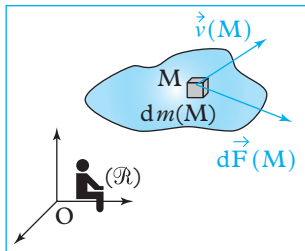


Fig. 26. Force répartie appliquée à un système continu.

Pour un ensemble de forces réparties $d\vec{F}(M)$ appliquées aux différents points M (d'un système matériel continu \mathcal{S}) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , la puissance du système de forces (ou de l'ensemble de forces) est définie par la relation (fig. 26) :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	puissance des forces appliquées à \mathcal{S} (W ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)
$d\vec{F}$	force élémentaire (N)
$\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de M_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Un ensemble de forces est moteur si $\mathcal{P} > 0$.

Un ensemble de forces est résistant si $\mathcal{P} < 0$.

E.2. Puissance d'efforts extérieurs particuliers

E.2.1. Cas d'une force

Si le solide \mathcal{S} est soumis à une force \vec{F} dont le point d'application est A (où A est un point du solide), on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$$

Exemple : le poids d'un système matériel \mathcal{S} (dans un champ de pesanteur \vec{g} uniforme) est équivalent à une force appliquée au centre de masse G du système matériel ; ainsi, on trouve l'expression de la puissance du poids :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(m\vec{g})_{/\mathcal{R}} = m\vec{g} \cdot \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}.$$

E.2.2. Cas d'un couple

Si le solide \mathcal{S} est soumis à un ensemble de forces équivalent à un couple de moment Γ et dont la vitesse angulaire par rapport à un axe fixe Δ de \mathcal{R} est ω , on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\Gamma)_{/\mathcal{R}} = \Gamma \cdot \omega.$$

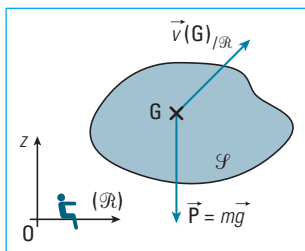


Fig. 27.

On appelle travail infinitésimal δW d'un ensemble de forces $d\vec{F}$ appliquées aux différents points M , calculés entre les instants t et $t + dt$ entre lesquels chaque point M se déplace de $d\vec{OM}$, le scalaire :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \iiint_M d\vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} \\ = \iiint_M d\vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} dt$$

Avec :

δW travail élémentaire
(J ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)

$d\vec{F}$ force élémentaire (N)

$d\vec{OM}$ (m)

$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ vitesse de M par rapport à \mathcal{R} (m/s)

Dans le cas d'un ensemble de points matériels M , soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i , le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt.$$

8. Le travail élémentaire des forces de pesanteur (du poids) est :

$$\delta W = -mg \frac{dz}{dt} dt = -mg dz$$

dans le cas où l'axe vertical ($0; \vec{e}_z$) est orienté vers le haut (z étant l'altitude du centre de masse G du système matériel).

9. Le travail élémentaire des forces de pesanteur est :

$$\delta W = mg dz,$$

dans le cas où l'axe vertical ($0; \vec{e}_z$) est orienté vers le bas (z étant la position du centre de masse G du système matériel).

10. Si on parle des efforts extérieurs, c'est qu'il existe aussi les efforts intérieurs dont la puissance est nulle pour un solide.

F. Travail d'un ensemble de forces

F.1. Définition

Définition 11

On appelle travail $W_{t_1 \rightarrow t_2}$ d'un système de forces réparties $d\vec{F}(M)$ appliquées aux différents points M d'un système matériel, calculé entre les instants t_1 et t_2 , le scalaire :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt.$$

F.2. Cas des forces extérieures

Pour un système à répartition de masse continue, le travail infinitésimal des forces extérieures s'écrit :

$$\delta W_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_M d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot dt$$

Exemple 1 : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur uniforme.

Entre deux instants t_1 et t_2 entre lesquels le point G passe d'une altitude z_1 à z_2 , le travail des forces de pesanteur est :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = -mg[z]_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2) \quad \text{8 9 10},$$

il ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des positions initiales et finales de G (fig. 28).

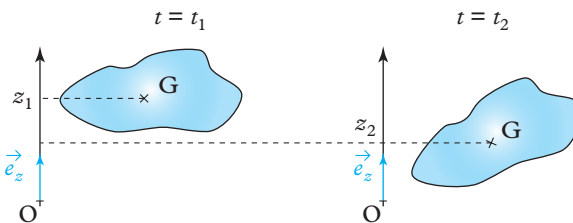


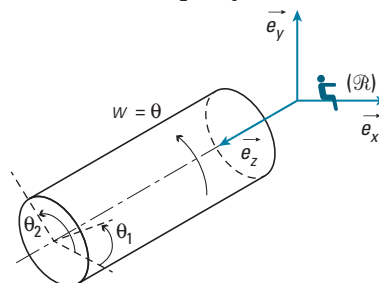
Fig. 28. Travail des forces de pesanteur entre deux instants t_1 et t_2 .

Exemple 2 : cas d'un couple constant Γ appliqué à un solide, en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\text{En partant de } \mathcal{P}_{\text{ext}}(\Gamma) = \Gamma \cdot \omega \\ = \Gamma \cdot \frac{d\theta}{dt} = \Gamma \cdot \dot{\theta}$$

et en intégrant les 2 instants t_1 et t_2 entre lesquels le solide passe de la position angulaire θ_1 à θ_2 , on obtient le travail du couple Γ :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma \frac{d\theta}{dt} dt = \Gamma \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \\ = \Gamma(\theta_2 - \theta_1)$$



G. Énergie cinétique d'un système matériel

G.1. Définition

Définition 12

11. Si \mathcal{S} est composé de plusieurs sous systèmes (par exemple de plusieurs solides), l'énergie cinétique de \mathcal{S} s'obtient par sommation des énergies cinétiques de chaque sous système.

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ ¹¹ du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des énergies cinétiques de chacun des points de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	énergie cinétique (kg · m ² · s ⁻² ou J)
m_i	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M}_i (m · s ⁻¹)

Ou encore :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\mathcal{E}_c(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	énergie cinétique (kg · m ² · s ⁻² ou J)
$dm(\mathbf{M})$	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M} (m · s ⁻¹)

G.2. Cas du solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Dans le cas d'une répartition de masse discrète, chaque point \mathbf{M}_i possède une vitesse $v_i = r_i \dot{\theta}_i = r_i \omega$

$$\begin{aligned}\text{ainsi : } \mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2\end{aligned}$$

Dans le cas d'une répartition de masse continue, on remplace la somme discrète (Σ) par une somme continue (\int)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \iiint_M dm(\mathbf{M}) r^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2\end{aligned}$$

G.3. Loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

12. Les couples sont inclus dans \mathcal{M}_Δ .

Si $\mathcal{M}_\Delta = 0$, alors la vitesse angulaire ω est constante.

En multipliant par ω le TMC(Δ) appliqué au solide \mathcal{S} , on a :

$$\omega \cdot \frac{dL_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \omega \cdot \mathcal{M}_{\Delta, \text{ ext}}$$

soit en utilisant $L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta \cdot \omega$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (J_\Delta \cdot \omega^2) = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ ext}} \cdot \omega$$

soit

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ ext}} \cdot \omega$$
¹²

En posant $\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ ext}} \cdot \omega$ la puissance des actions mécaniques extérieurement (en W), on obtient le TPC pour un solide.

Théorème 5

Théorème de la puissance cinétique (TPC) pour un solide

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces extérieures appliquées à un solide \mathcal{S} est égale à la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système) :

$$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}$$

$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt}$	puissance cinétique (W)
$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$	énergie cinétique (J)
\mathcal{P}_{ext}	puissance des actions mécaniques extérieures (W)

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

À partir du TPC, on obtient :

$$d\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{\text{ext}} dt .$$

Soit, entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_1) = W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} .$$

Théorème 6

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) pour un solide

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un système matériel \mathcal{S} entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} :

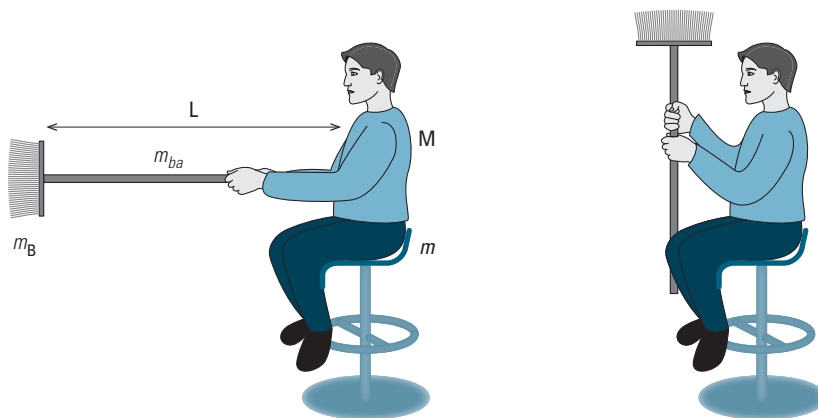
$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_1) \\ &= W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})$	énergie cinétique (J ou le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
W_{ext}	travail des actions mécaniques extérieures (J)

☀ Le TEC permet de comparer 2 états du système à 2 instants différents.

G.4. Théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel déformable

Application 9



On travaille dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_g , supposé galiléen. Une personne de masse $M = 80 \text{ kg}$ et ayant $\ell = 90 \text{ cm}$ de tour de poitrine, serrant, au départ, un balai horizontal (longueur $L = 1,5 \text{ m}$, masse $m_{Ba} = 500 \text{ g}$, brosse $m_B = 500 \text{ g}$) est lancé à la vitesse de rotation initiale $\omega_0 = 0,2 \text{ tr/s}$.

On suppose que la rotation se fait sans frottement.

Le tabouret possède une masse $m = 2 \text{ kg}$ et un rayon $R = 30 \text{ cm}$.

À $t = 0 \text{ s}$, la personne assise sur le tabouret relève le balai et le met verticalement quasiment sur l'axe de rotation.

1) Déterminer la vitesse de rotation du système balai + personne + tabouret après $t = 0$.

2) Établir le bilan d'énergie cinétique. Conclure.

On donne les moments d'inertie : $J_t = \frac{1}{2} m R^2$ pour le tabouret

$$J_p = \frac{1}{2} M \left(\frac{\ell}{2\pi} \right)^2 \text{ pour la personne}$$

$$J_{b_0} = \frac{1}{3} m_{Ba} L^2 + m_B L^2 \text{ pour le balai horizontal}$$

et $J_{b_1} \approx 0$ (le balai est pratiquement sur l'axe de rotation) pour le balai vertical

Solution

1) On applique le TMC(Δ) au système matériel déformable personne + balai + tabouret dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g du laboratoire.

Ce système est en rotation autour de l'axe fixe Δ .

• Moments par rapport à Δ des efforts extérieurs au système :

– poids $\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) = 0$ car poids vertical

– frottements : négligeables

• Le TMC(Δ) s'écrit : $\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})_{\mathcal{R}_g}}{dt} = 0$

soit ici : $L_\Delta(\mathcal{S})_{\mathcal{R}_g} = \text{cste}$

Le moment cinétique du système se conserve au cours du temps.

Au départ : $L_\Delta(\mathcal{S})_{\mathcal{R}_g} = L_0 = (J_p + J_t + J_{b_0}) \omega_0$.

Après $t = 0$, $L_\Delta(\mathcal{S})_{\mathcal{R}_g} = (J_p + J_t + J_{b_1}) \omega_1$

$$\text{soit } \omega_1 = \omega_0 \frac{J_p + J_t + J_{b_0}}{J_p + J_t + J_{b_1}} \approx \omega_0 \frac{J_p + J_t + J_{ba}}{J_p + J_t}$$

$$\text{A.N. } J_p = \frac{1}{2} \times 80 \times \left(\frac{0,9}{2\pi} \right)^2 \approx 0,82 \text{ kg m}^2$$

$$J_t = \frac{1}{2} \times 2 \times 0,3^2 = 0,09 \text{ kg m}^2$$

$$J_{b_0} = \frac{1}{3} \times 0,5 \times 1,5^2 + 0,5 \times 1,5^2 = 1,5 \text{ kg m}^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 \times \frac{0,82 + 0,09 + 1,5}{0,82 + 0,09}$$

$$\approx 0,2 \times 2,65$$

$$\approx 0,53 \text{ tr/s}$$

La vitesse de rotation de la personne augmente d'un facteur 2,65.

2) L'énergie cinétique initiale est :

$$\mathcal{E}_{C_0} = \frac{1}{2} (J_p + J_t + J_{b_0}) \omega_0^2$$

L'énergie cinétique finale est :

$$\mathcal{E}_{C_1} = \frac{1}{2} (J_p + J_t) \omega_1^2.$$

La variation d'énergie cinétique est donc :

$$\Delta \mathcal{E}_C = \mathcal{E}_{C_1} - \mathcal{E}_{C_0}$$

$$= \frac{1}{2} (J_p + J_t) \omega_1^2 - \frac{1}{2} (J_p + J_t + J_{b_0}) \omega_0^2$$

$$\approx 0,08 \text{ J}$$

Comme aucune des forces extérieures au système ne travaille (poids + frottement négligeable) et que l'énergie cinétique du système a augmenté, il existe donc, dans ce cas de système déformable, des actions mécaniques intérieures au système, qui ont apporté de l'énergie (ex : énergie musculaire de la personne).

Remarque : le TEC permet de comparer 2 états d'un système à 2 instants différents).

On peut généraliser le TEC et le TPC appliqué à un solide au cas d'un système matériel quelconque à condition de faire apparaître ces efforts intérieurs.

Théorème 7

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} est égale à la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système) :

$$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt}$	puissance cinétique (W)
$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$	énergie cinétique
\mathcal{P}_{ext}	puissance des actions mécaniques extérieures (W)
\mathcal{P}_{int}	puissance des actions mécaniques intérieures (W)

Remarques

- Il faut prendre garde à ne pas oublier la puissance des efforts mécaniques intérieurs au système étudié !
- Si le système est composé d'un unique solide, alors : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

Théorème de l'énergie cinétique

À partir du TPC, on obtient :

$$d\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{\text{ext}} dt + \mathcal{P}_{\text{int}} dt.$$

Soit, entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_1) = W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int}, t_1 \rightarrow t_2}.$$

Théorème 8

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un système matériel \mathcal{S} entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_1) \\ &= W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int}, t_1 \rightarrow t_2} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})$	énergie cinétique
W_{ext}	travail des actions mécaniques extérieures (J)
W_{int}	travail des actions mécaniques intérieures (J)

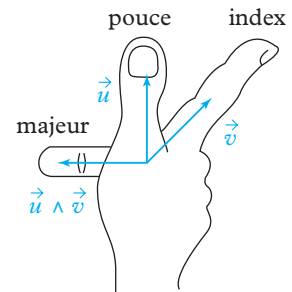
Remarque : si le système est composé d'un unique solide : $W_{\text{int}} = 0$.

L'essentiel

✓ Rappel : produit vectoriel

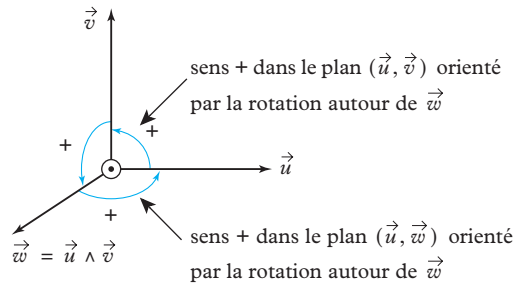
Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est un vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont :

- la norme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- la direction est perpendiculaire à \vec{u} et à \vec{v} ;
- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.



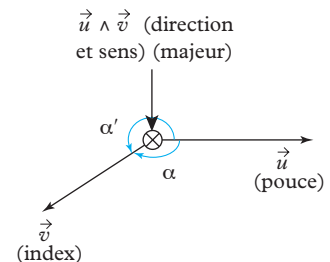
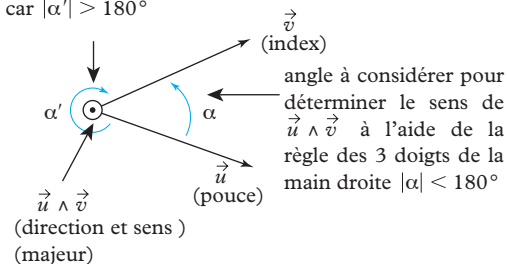
Remarque 1 : on déterminera le produit vectoriel en trois étapes : norme, direction, sens.

Remarque 2 : l'angle (\vec{u}, \vec{v}) est orienté (signes > 0 ou < 0).



Remarque 3 : pour utiliser la règle des trois doigts de la main droite, il faut choisir la position des doigts pour laquelle $|(\vec{u}, \vec{v})|$ est inférieur à 180° .

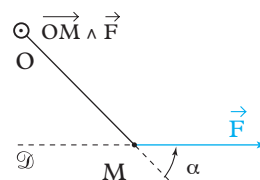
angle à ne pas considérer
car $|\alpha'| > 180^\circ$



✓ Moment d'une force en un point

Le moment $\overline{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ en un point O d'une force \vec{F} appliquée au point M est défini par le vecteur :

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overline{OM} \wedge \vec{F} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \text{ moment (N} \cdot \text{m)} \\ \vec{F} \text{ vecteur force (N)} \end{array} \right.$$



✓ Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment de la force \vec{F} appliquée au point M par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) est donné par le scalaire :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \pm d \|\vec{F}\|$$

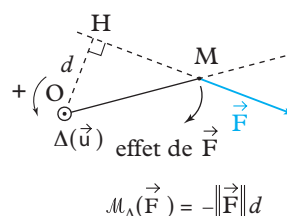
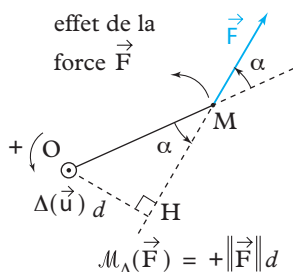
$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ moment par rapport à Δ (N·m)

$\overline{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ moment en O (N·m)

\vec{u} vecteur unitaire de Δ .

d bras de levier (m)

$\|\vec{F}\|$ norme de la force \vec{F} (N)



✓ Efforts ou actions mécaniques

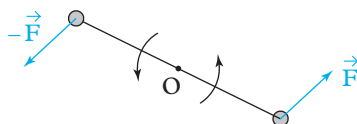
• $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ ou $\vec{R} = \iiint_M d\vec{F}(M)$ est la **résultante des forces**, qui est la somme vectorielle des forces appliquées;

• $\overline{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overline{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \overline{AM}_i \wedge \vec{F}_i$,

ou $\overline{\mathcal{M}}_A = \iiint_M \overline{\mathcal{M}}_A(d\vec{F}(M)) = \iiint_M \overline{AM} \wedge d\vec{F}(M)$ est le **moment (résultant) en un point A**, qui est la somme des moments en A des forces appliquées.

Cas particulier: couple

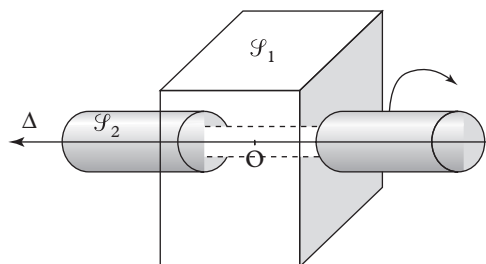
Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle.



✓ Liaison surfacique parfaite entre deux solides → Liaison pivot parfaite

Une liaison pivot entre le solide \mathcal{S}_1 et le solide \mathcal{S}_2 est une liaison n'autorisant qu'une rotation de \mathcal{S}_2 autour de l'un de ses axes Δ , fixe par rapport à \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 ne possède qu'un unique degré de liberté de rotation par rapport à \mathcal{S}_1).

Elle est parfaite si le moment par rapport à l'axe Δ des actions de contact exercé par \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 (ou par \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1) est nul: $\mathcal{M}_\Delta = 0$ (autrement dit le moment en un point O de l'axe Δ est perpendiculaire à Δ).

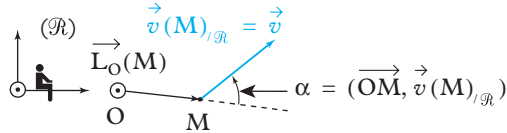


✓ Moment cinétique en un point

Le moment cinétique en O du point matériel M(m) dans le référentiel \mathcal{R} est le moment en O de la quantité de mouvement $\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

$\vec{L}_O(M)$ moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) m masse (kg) $\vec{v}(M)$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
--



✓ Moment cinétique pour un système matériel

• Le moment cinétique $\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ en A du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des moments cinétiques en A de chacun des points de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \sum_i \vec{L}_A(M_i)_{/\mathcal{R}} \\ &= \sum_i m_i \vec{AM}_i \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) m_i masse (kg) \vec{AM}_i (m) $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Ou encore :

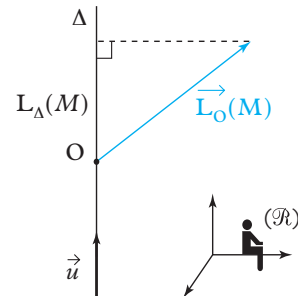
$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} &= \iiint_M d\vec{L}_A(M)_{/\mathcal{R}} \\ &= \iiint_M dm(M) \vec{AM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) $dm(M)$ masse (kg) \vec{AM} (m) $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

✓ Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ (orienté par le vecteur unitaire \vec{u}) passant par O dans le référentiel \mathcal{R} , est le scalaire :

$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u} = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}$$



✓ Moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique d'un solide \mathcal{S} en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = J_\Delta \cdot \omega$$

où $J_\Delta = \iiint_M dm(M) HM^2 = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ .

✓ Théorème de moment cinétique en un point (TMC(O))

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ du point matériel M(m) en un point fixe O dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g est égale au moment en O des forces appliquées au point M.

$$\left(\frac{d(\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

$\vec{L}_O(M)$ moment cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) $\vec{M}_O(\vec{F})$ moment ($\text{N} \cdot \text{m}$)

✓ Théorème du moment cinétique par rapport à un axe (TMC(Δ))

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $L_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}$ du point matériel $M(m)$ par rapport à l'axe Δ , **fixe** dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est égale au moment des forces appliquées au point M par rapport à Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \quad \left| \begin{array}{ll} L_{\Delta}(M) & \text{moment cinétique (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) & \text{moment (N} \cdot \text{m}) \end{array} \right.$$

✓ Théorème du moment cinétique d'un système matériel en un point fixe A (TMC(A))

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} en un point A **fixe** de \mathcal{R}_g :

$$\left(\frac{d(\overline{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{ll} \text{A point fixe de } \mathcal{R}_g \\ \overline{L}_A(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} & \text{moment cinétique en A (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \overline{\mathcal{M}}_{A, \text{ext}} & \text{moment en A des actions mécaniques} \\ & \text{extérieures (N} \cdot \text{m}) \end{array} \right.$$

✓ Théorème du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un axe Δ (TMC(Δ))

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des moments, par rapport à un axe Δ fixe de \mathcal{R}_g , des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel \mathcal{S} est égale à la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R}_g du moment cinétique du système \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad \left| \begin{array}{ll} L_{\Delta}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} & \text{moment cinétique par rapport à l'axe } \Delta \\ & \text{(kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} & \text{moment par rapport à } \Delta \text{ des actions} \\ & \text{mécaniques extérieures (N} \cdot \text{m}) \end{array} \right.$$

✓ Solide en rotation autour d'un axe fixe

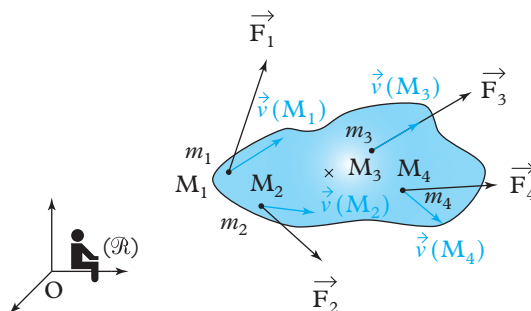
Le solide \mathcal{S} est en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (A, \vec{u})$ (vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$) dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

On peut utiliser le TMC(Δ) : $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$.

✓ Puissance d'un ensemble de forces appliquées à un système matériel

• La puissance des forces \vec{F}_i appliquées aux points M_i (composant le système matériel \mathcal{S} se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , est la somme des puissances des forces appliquées à chaque point M_i :

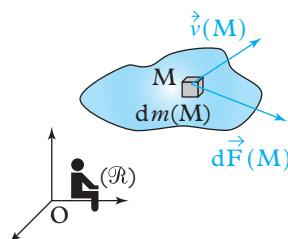
$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} \quad \left| \begin{array}{ll} \mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} & \text{puissance des forces appliquées} \\ & \text{à } \mathcal{S} (\text{W ou kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}) \\ \vec{F}_i & \text{forces (N)} \\ \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} & \text{vitesse de } M_i (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{array} \right.$$



- Pour un ensemble de forces réparties $d\vec{F}(\mathbf{M})$ appliquées aux différents points \mathbf{M} (d'un système matériel continu \mathcal{S}) se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} , la puissance du système de forces (ou de l'ensemble de forces) est :

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{M}} d\vec{F}(\mathbf{M}) \cdot \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	puissance des forces appliquées à \mathcal{S} (\mathcal{W} ou $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$)
$d\vec{F}$	force élémentaire (N)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M}_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)



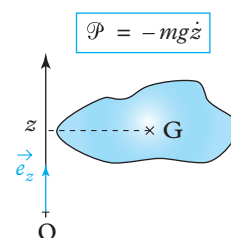
Un ensemble de forces est : moteur si $\mathcal{P} > 0$; résistant si $\mathcal{P} < 0$.

• Puissance des forces extérieures

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{M}} d\vec{F}_{\text{ext}}(\mathbf{M}) \cdot \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{ou } \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} \cdot \vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$$

Exemple : cas du poids (résultante des forces de pesanteur) d'un système matériel \mathcal{S} de masse m dans un champ de pesanteur **uniforme** : $\mathcal{P} = -mg\dot{z}$ dans le cas où l'axe vertical (\mathbf{O} ; \vec{e}_z) est orienté vers le haut.



• Puissance d'efforts particuliers

- 1) Si le solide \mathcal{S} est soumis à une force \vec{F} de point d'application \mathbf{A} , on a : $\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(\mathbf{A})_{/\mathcal{R}}$.
- 2) Si le solide \mathcal{S} est soumis à un ensemble de forces équivalent à un **couple** de moment Γ , et est en station autour de l'axe fixe Δ de \mathcal{R} à la vitesse angulaire $\omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$, on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \Gamma \cdot \omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

✓ Travail d'un ensemble de forces

On appelle travail $\mathcal{W}_{t_1 \rightarrow t_2}$ d'un système de forces réparties $d\vec{F}(\mathbf{M})$ appliquées aux différents points \mathbf{M} d'un système matériel, calculé entre les instants t_1 et t_2 , le scalaire :

$$\mathcal{W}_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt.$$

✓ Énergie cinétique d'un système matériel

- L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$ du système matériel \mathcal{S} en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} est la somme des énergies cinétiques de chacun des points de \mathcal{S} :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{E}_c(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	énergie cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ou J)
m_i	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M}_i ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(\mathbf{M}_i)_{/\mathcal{R}}$$

Ou encore :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{M}} d\mathcal{E}_c(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$$

$\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}}$	énergie cinétique ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ou J)
$dm(\mathbf{M})$	masse (kg)
$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$	vitesse de \mathbf{M} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$= \iiint_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} dm(\mathbf{M}) v^2(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ , on a : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$.

✓ Théorèmes énergétiques

• Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la somme des puissances des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} est égale à la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système) :

$$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

$\frac{d\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt}$	puissance cinétique (W)
$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$	énergie cinétique (J)
\mathcal{P}_{ext}	puissance des actions mécaniques extérieures (W)
\mathcal{P}_{int}	puissance des actions mécaniques intérieures (W)

Pour un solide : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

✓ Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation d'énergie cinétique d'un système matériel \mathcal{S} entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures appliquées au système matériel \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_C(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_2) - \mathcal{E}_C(\mathcal{S})(t_1) \\ &= W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int}, t_1 \rightarrow t_2} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_C(\mathcal{S})$	énergie cinétique (J ou le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
W_{ext}	travail des actions mécaniques extérieures (J)
W_{int}	travail des actions mécaniques intérieures (J)

Pour un solide : $W_{\text{int}} = 0$.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TMC ?

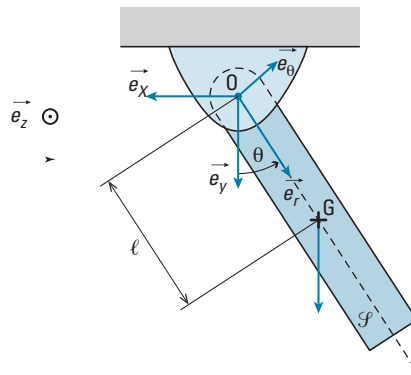
Soit \mathcal{S} un solide de masse m et \mathcal{R}_g un référentiel galiléen. On souhaite déterminer l'équation différentielle du mouvement de \mathcal{S} dans \mathcal{R}_g à l'aide du TMC(Δ).

→ Savoir faire

- ❶ Définir précisément le solide étudié et le référentiel galiléen d'étude.
- ❷ Faire le bilan des efforts qui s'appliquent au solide \mathcal{S} .
- ❸ Définir l'axe Δ pour le calcul des moments qui doit être fixe par rapport au référentiel galiléen d'étude \mathcal{R}_g .
- ❹ Calculer les moments $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$, moments des efforts par rapport à l'axe Δ .
- ❺ Calculer le moment cinétique $L_\Delta(\mathcal{S})_{\mathcal{R}_g}$ par rapport à l'axe Δ .
- ❻ Écrire dans le référentiel galiléen le TMC par rapport à l'axe Δ afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement. Vérifier alors la cohérence et l'homogénéité des résultats.

→ Application

On considère un pendule pesant constitué d'un solide \mathcal{S} , de masse m , de centre de masse G et de moment d'inertie J par rapport à l'axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$. Il est mobile autour de l'axe Δ par l'intermédiaire d'une liaison pivot. L'axe Δ est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_y vertical vers le bas.



Déterminer l'équation (différentielle) du mouvement.

Solution

- ❶ **Système étudié :** le pendule (\mathcal{S}) de centre de masse G , de masse m .
Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- ❷ **Bilan des efforts appliqués au système :**
 - le poids \vec{P} , vertical vers le bas $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_y$;
 - la liaison pivot en O .
- ❸ **Axe :** $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ fixe dans \mathcal{R}_g .

4 Moments des efforts par rapport à Δ :

- du poids \vec{P} : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \underbrace{\vec{P}}_{\substack{\text{Sur le dessin} \\ \vec{P} \text{ a tendance à faire} \\ \text{tourner dans le sens} \\ \text{indirect autour de } \Delta.}} \times \underbrace{mg}_{\substack{\text{force}}} \times \underbrace{\ell \sin \theta}_{\substack{\text{bras de levier} \\ \text{(distance HG)} \\ > 0 \text{ sur le dessin} \\ \text{car } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}}}$

- de la liaison pivot supposée parfaite : $\mathcal{M}_\Delta(\text{pivot}) = 0$.

5 $L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = J\dot{\theta}$.

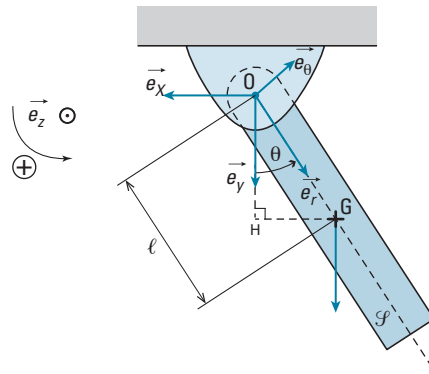
6 Application du TMC(Δ) à \mathcal{S} dans \mathcal{R}_g :

$$J \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mg\ell \sin \theta + 0$$

$$J\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta$$

soit
$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J} \sin \theta = 0$$

⚙ Comme $\ddot{\theta}$ est en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, m en kg , g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, ℓ en m et J en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, l'expression trouvée est bien homogène.



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéités, unités

ℓ et a sont des longueurs, α est un angle, F est une force, m est une masse, v est une vitesse et L_A est un moment cinétique.

Déterminer les unités des expressions suivantes :

- $\ell F \sin(\alpha)$;
- $mva \cos(\alpha)$;
- $\frac{dL_A}{dt}$

À quelles grandeurs ces expressions sont-elles homogènes ?

Ex. 2 Ordre de grandeur

On suppose qu'un électron a une trajectoire circulaire de rayon $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m autour du noyau qu'il parcourt à vitesse constante à la fréquence :

$$f = 6,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz.}$$

La masse de l'électron est $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

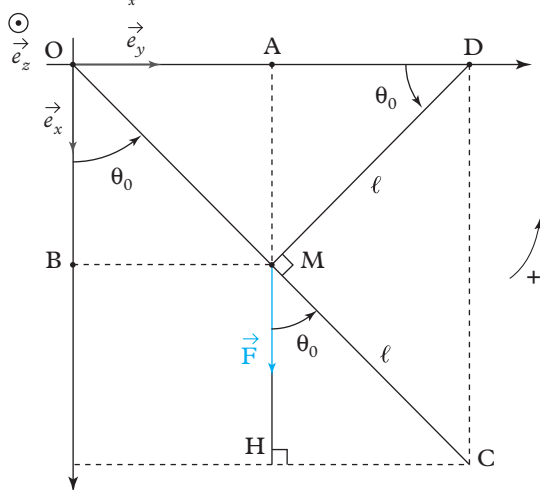
On suppose aussi que la Lune a un mouvement circulaire uniforme de rayon $d = 3,8 \cdot 10^5$ km autour de la Terre, de période de révolution $T = 27,3$ jours.

La masse de la Lune est $m_L = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg.

Calculer la valeur du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre du noyau, puis la valeur du moment cinétique L_L de la Lune (assimilée à son centre d'inertie par rapport au centre de la Terre).

Ex. 3 Calcul de moments

On considère un point matériel $M(m)$ soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$ constante.



Exprimer et calculer les moments de la force \vec{F} suivants :

$$\mathcal{M}_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F}) ; \quad \mathcal{M}_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F}) ; \quad \mathcal{M}_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F}).$$

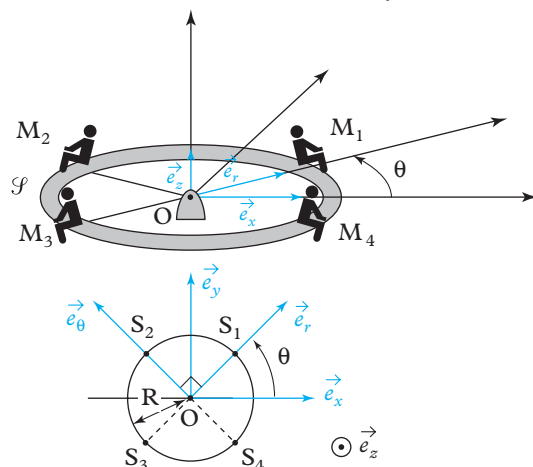
Données :

$$F = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} ; \quad \ell = 1,0 \text{ m} ; \quad \theta_0 = 45^\circ.$$

Ex. 4 Le tourniquet

Un tourniquet \mathcal{S} est modélisé par une portion de disque de centre de masse O , de masse M et de moment d'inertie, par rapport à son axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ $J = MR^2$ et quatre enfants, assimilés à des points matériels M_1, M_2, M_3 et M_4 , et de masse m sont régulièrement placés autour du tourniquet. La vitesse angulaire du tourniquet est $\dot{\theta}$.

Le référentiel d'étude est $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



1) Déterminer le moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à Δ en fonction de J , m et R puis en fonction de m , M et R .

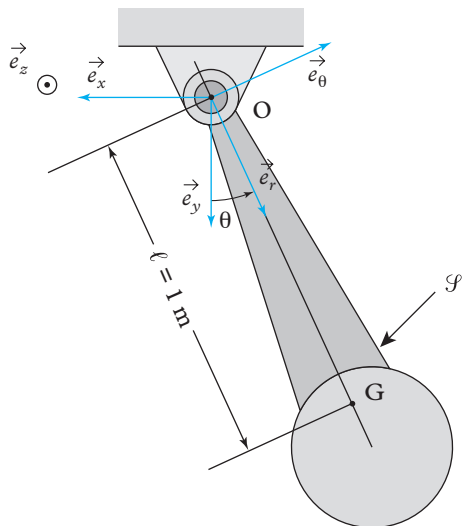
2) Déterminer l'expression de $L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$.

3) Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}$.

Niveau 2

Ex. 5 Balancier d'horloge

Un balancier d'horloge est composé d'un solide \mathcal{S} , de masse m , de centre de masse G et de moment d'inertie $J = km\ell^2$ par rapport à l'axe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$. Il est mobile autour de l'axe Δ par l'intermédiaire d'une liaison pivot parfaite. L'axe Δ est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



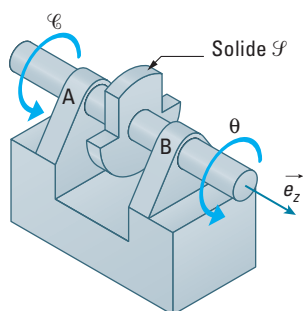
- 1) Écrire l'équation différentielle du mouvement du balancier.
- 2) Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.
- 3) Comment faut-il modifier k si :
 - l'horloge avance ?
 - l'horloge retarde ?

Ex. 6 Machine de test

Une machine de test est constituée d'un axe lié à 2 liaisons pivot en A et B ; elle permet de tester le solide \mathcal{S} qui est solidaire de l'axe.

Un couple moteur constant $\mathcal{C} = 1,5 \text{ Nm}$ est appliqué à l'axe et permet d'atteindre une vitesse de 1 200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt).

À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer le moment d'inertie J du solide \mathcal{S} par rapport à l'axe $\Delta = (A; \vec{e}_z)$.



Ex. 7 Le volant d'inertie

On étudie le mouvement d'un solide \mathcal{S} constitué d'un vilebrequin de masse m_1 , de moment d'inertie $I_1 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ par rapport à l'axe $(O; \vec{e}_y)$ et d'un volant d'inertie de masse m_2 et de moment d'inertie

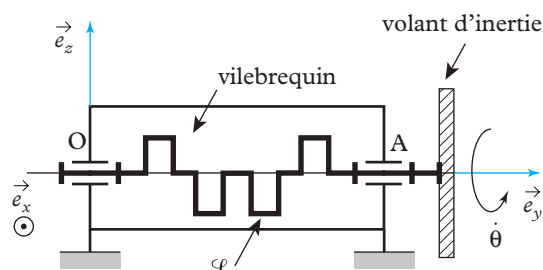
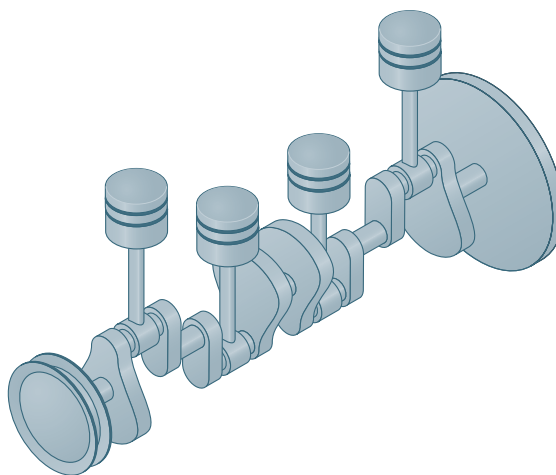
I_2 par rapport à l'axe $(O; \vec{e}_y)$. À vide, le solide \mathcal{S} est soumis à un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$ avec :

$$\Gamma = -\lambda \dot{\theta}^2 \sin 2\theta.$$

On néglige tous les frottements.

On suppose que $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

On indique que G, le centre de masse de \mathcal{S} , se trouve sur l'axe $(O; \vec{e}_y)$. On simplifiera les expressions dans l'hypothèse $\frac{\lambda}{I_1 + I_2} \ll 1$.



Donnée : $\lambda = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- 1) Établir l'équation différentielle du mouvement de \mathcal{S} (en θ).
- 2) Déterminer l'expression de $\dot{\theta}(\theta)$, puis tracer la courbe sachant que la vitesse angulaire de \mathcal{S} est $\dot{\theta}_0$ quand $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Commentaire. Que représente en fait $\dot{\theta}_0$?
- 3) Déterminer l'expression du coefficient de régularité :

$$k = \frac{\dot{\theta}_{\max} - \dot{\theta}_{\min}}{\dot{\theta}_0},$$

en fonction de λ , I_1 et I_2 (et sont les vitesses angulaires minimum et maximum de \mathcal{S}).

Que mesure k ? Comment peut-on faire pour diminuer k ?

- 4) Déterminer la masse m_2 du volant d'inertie de rayon R pour :

$$I_2 = m_2 \frac{R^2}{2}, \text{ avec } r = 125 \text{ mm et } k = 0,02.$$

Conclure sur l'utilité d'un volant d'inertie.

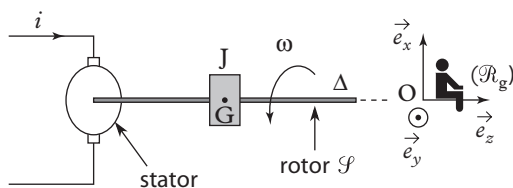
Niveau 3

Ex. 8 Mise en rotation d'un moteur de robotique

On étudie la phase de mise en rotation du rotor \mathcal{S} , (partie tournante) d'un moteur de robotique dans le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

Le rotor (\mathcal{S}), de moment d'inertie $J = 10,7 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, est soumis à un couple moteur \vec{C}_m , dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator du moteur (partie fixe) :

$$\vec{C}_m = k i \vec{e}_z \quad \text{avec } k = 22 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{mA}^{-1}.$$



On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe Δ .

1) On néglige tous les frottements. Le courant i est constant : $i = I_0 = 0,1 \text{ A}$.

a) En utilisant le TMC(Δ) ($\Delta = (O; \vec{e}_z)$), écrire l'équation différentielle donnant la vitesse angulaire $\omega(t)$ de \mathcal{S} .

b) La résoudre en supposant qu'au départ, (\mathcal{S}) est au repos.

c) Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1\,800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2) En réalité, le rotor \mathcal{S} est soumis à un couple de frottement sec $C_s = 400 \mu\text{N} \cdot \text{m}$ et à un couple de frottement fluide $C_f = \lambda \omega$ ($\lambda = 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$), tous deux s'opposant au mouvement. On a toujours :

$$i = I_0 = 0,1 \text{ A}.$$

a) En utilisant le TMC(Δ), écrire l'équation différentielle donnant la vitesse angulaire $\omega(t)$ de \mathcal{S} .

b) La résoudre en supposant qu'au départ \mathcal{S} est au repos.

c) Déterminer et calculer le temps T_1 mis pour atteindre le régime permanent (à 5 %). Conclusion.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- L'unité de l'expression $\ell F \sin(\alpha)$ est : $m \times N = \mathbf{N \cdot m}$ (homogène à un **moment**).

💡 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ sont sans dimension.

- L'unité de l'expression $mva \cos \alpha$ est :

$$\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{m} = \mathbf{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$$
 (homogène à un **moment cinétique**).

- L'unité de l'expression $\frac{dL_{\Delta}}{dt}$ est :

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \mathbf{N \cdot m}$$
 (car $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

(homogène à un **moment**).

Exercice 2

- Le moment cinétique L_e de l'électron par rapport au centre O du noyau dans un référentiel lié à celui-ci est :

$$L_e = m_e r^2 \times \omega$$

Or $\omega = 2\pi f$

💡 Pour un mouvement circulaire uniforme, on a toujours : $v = \omega R$,
avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

On en déduit donc :

$$L_e = 2\pi m_e r^2 f.$$

A.N. $L_e \approx 2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (5,3 \cdot 10^{-11})^2 \times 6,6 \cdot 10^{15} \approx \mathbf{1,1 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$.

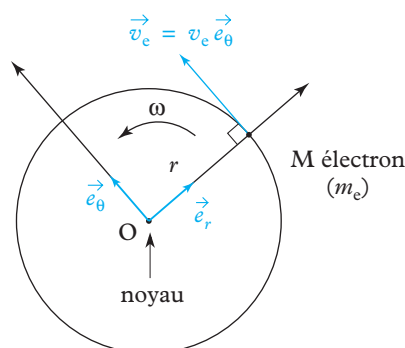
💡 On aurait pu écrire : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_\theta$ et calculer le produit vectoriel $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ des vecteurs de base.

- De même, la valeur du moment cinétique L_L de la Lune par rapport au centre de la Terre est :

$$L_L = 2\pi m_L d^2 f_L = \frac{2\pi m_L d^2}{T}.$$

A.N. $L_L = \frac{2\pi \times 7,3 \cdot 10^{22} \times (3,8 \cdot 10^8)^2}{27,3 \times 24 \times 3\,600} \approx \mathbf{2,8 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$.

💡 Dans l'application numérique, ne pas oublier d'exprimer d en m et T en s.



Exercice 3

On applique la formule : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm \text{bras de levier} \times F$.

 Le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ d'une force par rapport à un axe est un scalaire (nombre) positif ou négatif.

- $\mathcal{M}_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = -OA \times F = -\ell F \sin \theta_0$.

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens indirect autour de $(O; \vec{e}_z)$ donc il faut un signe $-$.

A.N. $\mathcal{M}_{(O; \vec{e}_z)}(\vec{F}) \approx -7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- $\mathcal{M}_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = +CH \times F = \ell F \sin \theta_0$.

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens direct autour de $(C; \vec{e}_z)$ donc le signe est $+$.

A.N. $\mathcal{M}_{(C; \vec{e}_z)}(\vec{F}) \approx 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- $\mathcal{M}_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = +AD \times F = \ell F \cos \theta_0$.

 La force \vec{F} a tendance à faire tourner M dans le sens direct autour de $(D; \vec{e}_z)$ donc le signe est « $+$ ».

A.N. $\mathcal{M}_{(D; \vec{e}_z)}(\vec{F}) = 1,0 \times 1,0 = 10^3 \times \cos 45^\circ \approx 7,1 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Exercice 4

1) Soit I le moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à $\Delta = (O; \vec{e}_z)$:

$$I = J + 4mR^2$$

soit, en remplaçant J par MR^2

$$I = (M + 4m)R^2$$

2) $\mathbf{L}_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = \mathbf{I}\dot{\theta} = (M + 4m)R^2\dot{\theta}$

3) $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2} \mathbf{I}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (M + 4m)R^2\dot{\theta}^2$

Exercices de niveau 2

Exercice 5

 Voir méthode 1.

 Cet exercice est à savoir refaire par cœur.

1) • **Système étudié** : le solide \mathcal{S} = balancier d'horloge de moment d'inertie J.

• **Référentiel galiléen d'étude** : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au système** :

– le poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$;

– la liaison pivot en O.

• **Axe de calcul des moments** : $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ fixe dans \mathcal{R}_g .

• **Calculs des moments par rapport à l'axe Δ** :

– pour le poids : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell \sin \theta$.

☀️ mg est une force, ℓ est le bras de levier ($\ell \sin \theta > 0$ car $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) et « - » car le poids a tendance à faire tourner M dans le sens négatif (sens positif défini par \vec{e}_z);

– pour la liaison pivot: $\mathcal{M}_\Delta(\text{pivot}) = 0$.

- Calcul du moment cinétique $L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}_g}$.

$$L_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g} = J\dot{\theta}$$

- Application du TMC (Δ):

$$\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})_{/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\text{pivot})$$

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = -mg\ell \sin \theta + 0$$

$$J\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J} \sin \theta = 0$$

2) Le mouvement étant considéré de faible amplitude, on peut utiliser $\sin \theta \approx \theta$ (développement limité à l'ordre 1).

En posant $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J} = \frac{g}{k\ell}$ on obtient l'équation: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.

Cette équation admet une solution de la forme :

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

qui varie sinusoïdalement.

☀️ A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

La période des oscillations de faibles amplitudes est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{kg}}$.

La fréquence est $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{\ell}}$.

3) La période d'oscillation du balancier dépend de k .

- Si l'horloge avance, cela veut dire que la période est trop faible et que la fréquence est trop grande.

Il faudra donc augmenter T_0 ou diminuer f_0 c'est-à-dire diminuer k .

- Si l'horloge retarde, il faudra à l'inverse augmenter k .

Exercice 6

- **Système étudié:** le solide \mathcal{S} .

- **Référentiel galiléen d'étude:** $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- **État t_1 :** au départ, à l'arrêt

État t_2 : après 18 tours, quand la vitesse de rotation atteint 1 200 tr/min.

- **Travail des efforts extérieurs:**

$$-W_{\text{pivot A}, t_1 \rightarrow t_2} = 0$$

$$-W_{\text{pivot B}, t_1 \rightarrow t_2} = 0$$

$$-W_{\text{poids}, t_1 \rightarrow t_2} = 0 \text{ (même altitude car même position après 18 tours)}$$

$$-W_{\text{moteur}} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{cte}} d\theta = \mathcal{C} \int_{t_1}^{t_2} d\theta = \mathcal{C} \cdot \theta \text{ (avec } \theta = 18 \times 2\pi = 113,1 \text{ rad)}$$

- **Énergie cinétique:**

$$-\mathcal{E}_c(\mathcal{S})(t_2) = \frac{1}{2} J \omega_2^2 \text{ avec } \omega_2 = 1\,200 \times \frac{2\pi}{60} = 125,66 \text{ rad/s.}$$

$$- \mathcal{E}_c(\mathcal{F})(t_1) = \frac{1}{2} J \omega_1^2 \quad \text{avec } \omega_1 = 0$$

• **Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{F})(t_2) - \mathcal{E}_c(\mathcal{F})(t_1) = W_{\text{ext}, t_1 \rightarrow t_2} = 0 + 0 + 0 + \mathcal{C}\theta$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \mathcal{C}\theta$$

$$J = \frac{2\mathcal{C}\theta}{\omega_2^2}$$

☀ Comme \mathcal{C} est en $\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}$, θ en rad et ω_2 en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la formule est homogène puisque J est bien en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

$$\text{A.N. } J = \frac{2 \times 1,5 \times (18 \times 2\pi)}{125,66^2} = 0,0215 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

☀ Le théorème de l'énergie cinétique (1 équation) permet de comparer 2 états t_1 et t_2 et d'en déduire une grandeur mécanique (vitesse, angle, inertie, etc.).

☀ Ce théorème est tout particulièrement utile quand le travail des efforts extérieurs est facile à calculer.

Exercice 7

1) Pour écrire l'équation différentielle du mouvement, on va appliquer le TMC($\Delta = (O; \vec{e}_y)$) à \mathcal{S} dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

• Moments des efforts extérieurs à \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ :

$$\text{– poids : } \vec{P}_1 = m_1 \vec{g} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) = 0$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{g} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2) = 0$$

$$\text{– pivot : en O, } \mathcal{M}_\Delta(\text{pivot O}) = 0$$

$$\text{en A, } \mathcal{M}_\Delta(\text{pivot A}) = 0$$

$$\text{– couple moteur : } \Gamma = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \sin 2\theta$$

$$\bullet L_\Delta(\mathcal{S}) = (I_1 + I_2) \dot{\theta}$$

Le TMC(Δ) s'écrit :

$$(I_1 + I_2) \ddot{\theta} = 0 + 0 + 0 + 0 - \lambda \dot{\theta}_0^2 \sin 2\theta$$

$$(I_1 + I_2) \ddot{\theta} = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \sin(2\theta) = \Gamma(\theta) \quad (1)$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nwarrow \\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 & \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} & \text{kg} \cdot \text{m}^2 & (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \end{matrix}$

2) Pour obtenir l'expression de $\dot{\theta}$, il faut intégrer l'équation différentielle (1).

On multiplie d'abord par $\dot{\theta}$:

$$(I_1 + I_2) \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \sin(2\theta) \dot{\theta} \quad \text{soit} \quad (I_1 + I_2) d\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \lambda \dot{\theta}_0^2 d\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right),$$

$$\text{ou encore : } (I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \lambda \dot{\theta}_0^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + \text{cte.}$$

$$\text{Or, quand } \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \text{ donc, on a : } (I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \lambda \dot{\theta}_0^2 \times 0 + \text{cte.}$$

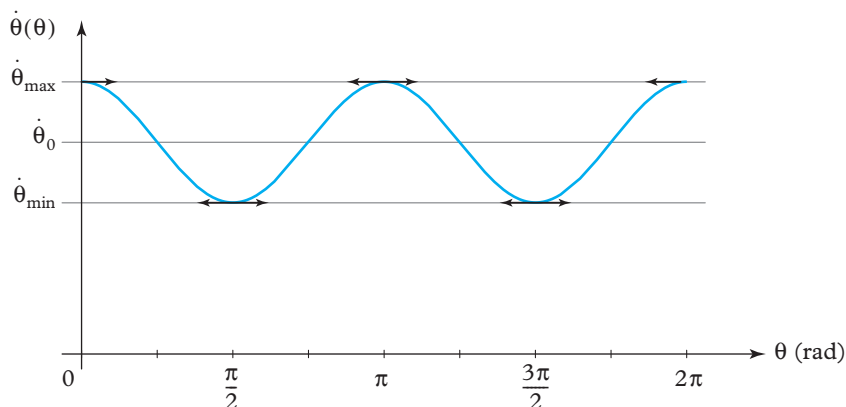
$$\text{Ainsi : } (I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \lambda \dot{\theta}_0^2 \frac{\cos 2\theta}{2} + (I_1 + I_2) \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}$$

$$\text{ou encore : } \dot{\theta} = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{\lambda \dot{\theta}_0^2}{I_1 + I_2} \cos 2\theta} = \dot{\theta}_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda}{I_1 + I_2} \cos 2\theta}.$$

Comme $\frac{\lambda}{I_1 + I_2} \ll 1$, on a : $\dot{\theta} \approx \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \cos 2\theta \right]$. Ainsi :

$$\dot{\theta}(\theta) = \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \cos 2\theta \right].$$

Le tracé de la fonction $\theta \rightarrow \dot{\theta}(\theta)$ donne la courbe suivante :



• **Commentaire :** quand le couple moteur varie, la vitesse angulaire de (\mathcal{J}) varie (« la vitesse du moteur » varie).

• $\dot{\theta}_0$ représente la vitesse angulaire moyenne :

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\int_0^\pi \dot{\theta}(\theta) d\theta}{\pi - 0}.$$

3) L'expression de $\dot{\theta}(\theta)$ donne :

• $\dot{\theta}_{\max} = \dot{\theta}_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \right]$ quand $\cos 2\theta = 1$;

• $\dot{\theta}_{\min} = \dot{\theta}_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2(I_1 + I_2)} \right]$ quand $\cos 2\theta = -1$.

On obtient alors :

$$\dot{\theta}_{\max} - \dot{\theta}_{\min} = \frac{\lambda \dot{\theta}_0}{I_1 + I_2} \text{ soit } k = \frac{\dot{\theta}_{\max} - \dot{\theta}_{\min}}{\dot{\theta}_0} = \frac{\lambda}{I_1 + I_2}$$

$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

• k mesure la variation relative de la « vitesse du moteur ».

Plus k est faible, plus la vitesse du moteur « est constante ».

• Pour faire **diminuer** k , il faut augmenter $I_1 + I_2$, c'est-à-dire **augmenter** I_2 (le moment d'inertie du volant d'inertie).

4) On a $k = \frac{\lambda}{I_1 + I_2} = 2 \% = 0,02$ avec :

$$\lambda = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; I_1 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; I_2 = m_2 \frac{R^2}{2} \text{ avec } R = 125 \text{ mm}.$$

On obtient :

$$k = \frac{\lambda}{I_1 + m_2 \frac{R^2}{2}}, \text{ soit } m_2 = \frac{2}{R^2} \left(\frac{\lambda}{k} - I_1 \right).$$

$\text{kg} \cdot \text{m}^2$ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
 kg m^2

A.N. $m_2 = \frac{2}{0,125^2} \times \left(\frac{1,5 \times 10^{-3}}{0,02} - 0,01 \right)$, d'où $m_2 \approx 8,32 \text{ kg}$.

Le volant d'inertie permet, par son moment d'inertie, de limiter la variation de vitesse angulaire quand le couple moteur varie.

Exercice de niveau 3

Exercice 8

1) a) Le solide \mathcal{S} étant en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = (O; \vec{e}_z)$ du référentiel galiléen \mathcal{R}_g , on utilise le TMC (Δ) afin de déterminer l'équation du mouvement de rotation donnant $\omega(t)$.

Système étudié : \mathcal{S} .

Référentiel galiléen d'étude : \mathcal{R}_g .

Efforts extérieurs appliqués au système

- poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_x$ appliqué en un point de l'axe ;
- couple de moteur : $\vec{C}_m = kI_0\vec{e}_z$;
- Réaction de la liaison pivot : $\mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0$ si la liaison est parfaite.

TMC (Δ)

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}} \quad (1)$$

Moment cinétique de \mathcal{S} par rapport à Δ

$$L_{\Delta}(\mathcal{S}) = J\omega.$$

Moment des efforts extérieurs par rapport à Δ

- $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$ car le bras de levier du poids par rapport à Δ est nul ;
- $C_m = \vec{C}_m \cdot \vec{e}_z = kI_0$;
- $\mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} = 0$.

(1) s'écrit :

$$J\dot{\omega} = C_m + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})}, \text{ soit } \dot{\omega} = \frac{C_m}{J}.$$

b) Comme $\frac{C_m}{J} = \frac{kI_0}{J} = \text{cte}$, on a :

$$\omega(t) = \frac{C_m}{J}t + \text{cte}.$$

Avec la condition initiale, $\omega(0) = 0 = \text{cte}$, on obtient :

$$\omega(t) = \frac{C_m}{J}t = \frac{kI_0}{J}t.$$

A.N. $\omega(t) = \frac{22 \times 10^{-3} \times 0,1}{10,7 \times 10^{-7}}t \approx 2\,056\,t.$

c) Afin de déterminer T_0 , on résout l'équation :

$$\omega(T_0) = \omega_0 \text{ soit } \frac{C_m}{J}T_0 = \omega_0,$$

ce qui donne :

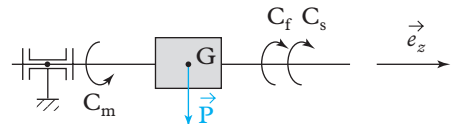
$$T_0 = \frac{J\omega_0}{C_m} = \frac{J\omega_0}{kI_0}.$$

A.N. $T_0 = \frac{10,7 \times 10^{-7} \times 1\,800}{22 \times 10^{-3} \times 0,1} \approx 0,87\,s.$

2) a) On reprend l'étude du 1) en ajoutant les couples de frottements ce qui donne :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta, \text{ext}}$$

$$\begin{aligned} \text{ou encore } J\dot{\omega} &= C_m - C_f - C_s + \mathcal{M}_{\Delta(\text{pivot})} \\ &= C_m - C_s - \lambda\omega \end{aligned}$$



ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{J}{\lambda} \dot{\omega} + \omega = \frac{C_m - C_s}{\lambda}.$$

💡 $\frac{J}{\lambda}$ est une constante de temps caractéristique des éléments mécaniques du moteur : elle est appelée constante de temps mécanique.

$$\tau_m = \frac{J}{\lambda} = \frac{10,7 \times 10^{-7}}{10^{-6}} \approx 1,07 \text{ s}.$$

b) L'équation différentielle s'écrit :

$$\tau_m \dot{\omega} + \omega = \frac{C_m - C_s}{\lambda} = \text{cte.}$$

La solution est la somme de la solution de l'équation sans second membre $\omega_\ell(t)$ et d'une solution particulière (ω_p).

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\tau_m \dot{\omega} + \omega = 0 \quad (2).$$

Son équation caractéristique est :

$$\tau_m r + 1 = 0 \quad \text{soit } r = -\frac{1}{\tau_m}.$$

La solution de (2) est : $\omega_\ell(t) = A e^{rt} = A e^{-\frac{t}{\tau_m}}$.

La solution particulière est de la forme du second membre (ici, une constante) : $\omega_f = \frac{C_m - C_s}{\lambda}$.

La solution totale est donc :

$$\omega(t) = \omega_\ell(t) + \omega_f = A e^{-\frac{t}{\tau_m}} + \frac{C_m - C_s}{\lambda}.$$

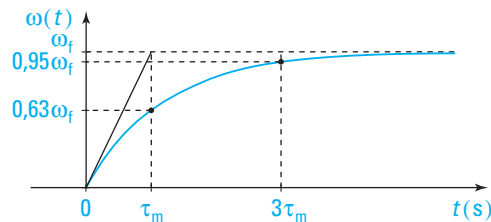
Avec la condition initiale, $\omega(0) = 0$, on a :

$$0 = A + \frac{C_m - C_s}{\lambda} = A + \omega_f, \quad \text{d'où } A = -\omega_f,$$

et la solution est donc :

$$\omega(t) = \omega_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right), \quad \text{soit } \omega(t) = \frac{C_m - C_s}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right).$$

💡 $\omega(t)$ a l'allure classique d'un système du premier ordre.



c) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $\omega(t) \rightarrow \omega_f = \frac{C_m - C_s}{\lambda}$.

A.N. $\omega_f = \frac{22 \times 10^{-3} \times 0,1 - 400 \times 10^{-6}}{10^{-6}} \approx 1\,800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$

En régime permanent, $\omega(t)$ vaut ω_f .

Pour atteindre cette valeur, ou plus précisément 95 % de cette valeur, le temps mis T_1 vérifie :

$$0,95 \omega_f = \omega_f \left(1 - e^{-\frac{T_1}{\tau_m}} \right) \quad \text{soit } e^{-\frac{T_1}{\tau_m}} = 0,05,$$

et donc $T_1 = \ln(0,05) \times (-\tau_m)$.

Ainsi : $T_1 \approx 3\tau_m$.

A.N. $T_1 = 3\tau_m = 3 \times 1,07 = 3,21 \text{ s.}$

Conclusion : le fait de prendre en compte les frottements montre que le moteur est en réalité plus de 3,5 fois plus lent que ce qui pourrait être prévu en négligeant les frottements : le modèle sans frottement est trop simpliste.