

Circuits électriques dans l'ARQS

Introduction

Un circuit électrique est constitué de différents composants reliés entre eux par des fils. On appelle dipôle électrocinétique un composant ayant deux bornes, par exemple un générateur, une résistance, un condensateur ou une bobine. Ce chapitre introduit les grandeurs et les lois fondamentales de l'électrocinétique, l'étude des dipôles en régime permanent, les caractéristiques des dipôles et la modélisation linéaire d'un dipôle, encore valable dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Nous verrons comment les réponses des condensateurs et des bobines à un échelon de tension ne sont pas instantanées et passent par une phase transitoire régie par une équation différentielle linéaire.

Ce chapitre s'adresse aux classes de MPSI, PCSI et PTSI.

Plan du chapitre 5

A. Charges et courants électriques	x
1. Différents types de courants électriques	x
2. Intensité du courant électrique.....	x
3. Loi des nœuds	x
4. Différence de potentiel entre deux points	x
5. Loi des mailles	x
B. Caractérisation des dipôles électriques	
1. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).....	x
2. Caractéristique d'un dipôle	x
3. Dipôles actifs – Dipôles passifs – Puissance	x
4. Point de fonctionnement d'un circuit	x
C. Les conducteurs ohmiques	
1. Caractéristique. Résistance. Conductance	x
2. Puissance dissipée. Effet Joule	x
3. Association série de deux conducteurs ohmiques (division de tension)	x
4. Association parallèle de deux conducteurs ohmiques (division de courant)	x
D. Modélisation linéaire de dipôles électriques	
1. Les dipôles générateurs.....	x
2. Les dipôles récepteurs	x
3. Dipôles linéaires en régime variable. Condensateurs.....	x
4. Dipôles linéaires en régime variable. Bobines.....	x
5. Association de dipôles linéaires.....	x
Méthodes	x
Exercices	x

A. Charges et courants électriques

A.1. Différents types de courants électriques

Définition 1

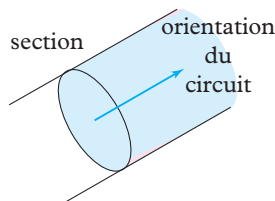
Le courant électrique dans un circuit correspond à un mouvement ordonné de charges électriques (appelées **porteurs de charges**), sans tenir compte du mouvement microscopique désordonné de ces charges.

Exemples :

- Le courant de conduction correspond au déplacement de charges électriques dans un support matériel conducteur :
 - dans les conducteurs usuels (par exemple les métaux), les porteurs de charge sont les électrons de charge négative $q = -e^1$;
 - dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge sont soit des électrons (semi-conducteurs dopés n), soit des « trous » de charge $q = +e$ (semi-conducteurs dopés p) ;
 - dans les électrolytes, les porteurs de charge sont des ions en solution (cations et anions).
- Le courant de convection (type courant d'air) est causé par le déplacement d'un objet lui-même chargé (par exemple des ions dans l'air).
- Le courant de particules est dû aux déplacements de particules chargées dans le vide, par exemple d'électrons dans le tube d'un oscilloscope.

1. La charge élémentaire e vaut $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

2. Il existe d'autres courants comme le courant de déplacement introduit lors de la propagation d'ondes électromagnétiques.



Dans la suite on ne considérera que le courant de conduction².

A.2. Intensité du courant électrique

Définition 2

L'intensité du courant mesure la quantité algébrique d'électricité (ie la charge électrique) traversant la section d'un circuit orienté par unité de temps. L'unité de charge est le coulomb (C) et l'unité d'intensité est l'ampère (A).

L'orientation d'un circuit est arbitraire : le sens de parcours du contour orienté fixe la direction et le sens de la normale (conventionnellement extérieure) à la section.

D'après la définition, un courant d'intensité positive correspond au déplacement de charges positives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges négatives en sens inverse.

A contrario, un courant d'intensité négative correspond au déplacement de charges négatives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges positives en sens inverse.

Définition 3

Dans un circuit, l'intensité i du courant est égale à **la dérivée par rapport au temps t de la charge Q traversant une section du circuit orienté** :

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

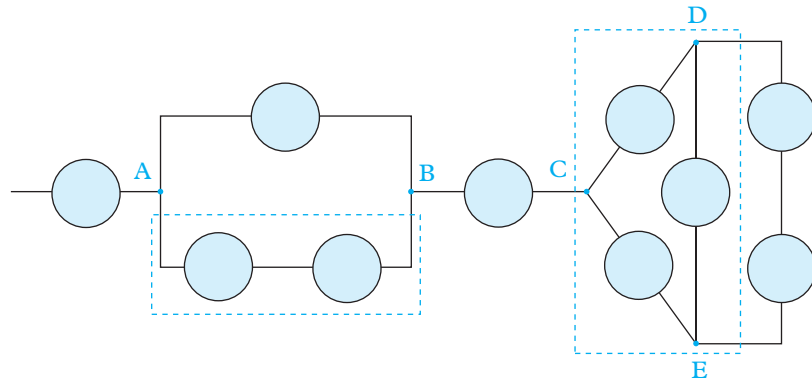
i intensité en ampère (A), Q charge en coulomb (C), t temps en seconde (s).

A.3. Loi des nœuds

Dans un circuit électrique, on appelle **nœud** un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus. L'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds

consécutifs constitue une **branche**. Enfin, un ensemble de branches formant un contour fermé constitue une **maille**.

Exemple : Les points A, B, C, D, E sont des nœuds. Sur le schéma, on a encadré en pointillés la branche AB et la maille CDE.



En régime permanent, la charge contenue dans un volume quelconque du conducteur ne varie pas au cours du temps : dans ce volume, le débit des charges entrant réellement est donc égal au débit des charges sortant réellement.

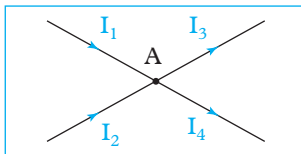
En conséquence, l'intensité I du courant a la même valeur en tout point d'une branche du circuit. En un nœud du circuit, la conservation de la charge se traduit par la loi des nœuds.

Loi 1

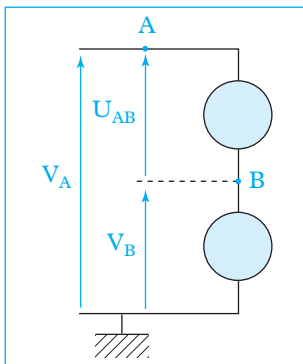
La somme des intensités $\sum_i I_i$ des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités $\sum_j I_j$ des courants algébriques s'éloignant de ce nœud³.

$$\sum_i I_i = \sum_j I_j$$

3. Au nœud A, on a : $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.



4. Dans cette analogie, les charges jouent le rôle du fluide et la fonction potentielle celui de l'altitude. On retrouve ces éléments dans potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz$ à comparer à $E_p = qV$.



A.4. Différence de potentiel entre deux points

Dans un circuit, le mouvement des porteurs de charges q est dû à la force créée par le champ électrique. Cette force dérive d'une énergie potentielle qV définie à une constante additive près. $V(M)$ représente le potentiel électrique en un point M quelconque du circuit.

Dans un circuit électrique, les charges évoluent spontanément dans le sens des potentiels décroissants en l'absence de générateur par analogie avec un fluide qui s'écoule naturellement de l'altitude la plus élevée à l'altitude la plus faible⁴.

Définition 4

Dans un circuit, le potentiel électrique V , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V), est à l'origine du mouvement des charges. La **différence de potentiel** (ddp) ou tension, exprimée comme le potentiel en volt (V) est une grandeur algébrique indépendante de l'origine des potentiels électriques.

En pratique, on prend une référence commune comme origine des potentiels électriques : la « masse », définie par exemple par la carcasse d'un appareil.

Le potentiel V_A du point A (respectivement V_B du point B) est représenté par une flèche partant de la masse au potentiel nul et arrivant au point A (respectivement au point B). La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ est alors représentée par une flèche d'origine B et d'extrémité A.

A.5. Loi des mailles

Dans un circuit, les différences de potentiel sont additives. Par exemple, si A, B et C sont trois points du circuit, alors on a : $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.

Loi 2

Loi des mailles

Dans une maille, la somme algébrique des différences de potentiel mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné, choisi arbitrairement, est nulle :

$$\sum_{\text{maille}} U_i = 0.$$

B. Caractérisation des dipôles électriques

B.1. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Un circuit est en régime « quasi-stationnaire » lorsque les tensions aux bornes des dipôles et l'intensité du courant varient « lentement ». On compare alors la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques avec une grandeur temporelle $\tau = L/c$, caractéristique du circuit, définie par le temps mis par le signal électrique pour parcourir le circuit de dimension L à une vitesse de l'ordre de grandeur de la célérité c de la lumière dans le vide.

Définition 4

Un circuit de dimension L vérifie l'**approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)** si τ est négligeable devant la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c} \quad \text{soit} \quad L \gg cT.$$

Toutes les lois énoncées en régime permanent restent valables en ARQS. On se placera dans la suite dans le cadre de cette approximation.

B.2. Caractéristique d'un dipôle

Définition 5

On appelle caractéristique d'un dipôle la courbe représentant la tension u à ses bornes en fonction de l'intensité i du courant qui le traverse :

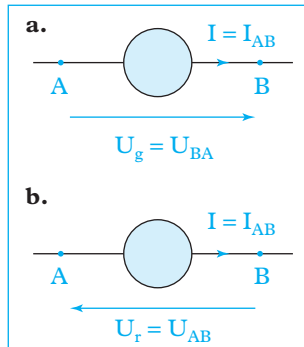
- soit la caractéristique tension-courant (l'intensité i est en abscisses et la tension u en ordonnées) ;
- soit la caractéristique courant-tension (la tension u est en abscisses et l'intensité i en ordonnées).

Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est **linéaire** et que le dipôle qu'elle représente est un dipôle linéaire.

Remarque importante : la caractéristique d'un dipôle dépend de la convention dans laquelle on se place :

Un dipôle AB possède un **caractère générateur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels croissants à travers ce dipôle. Un générateur fournit de l'énergie au circuit électrique. *Exemples* : piles, réseau EDF 220 V, etc.

• Un dipôle AB possède un **caractère récepteur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants à travers ce dipôle. Un récepteur reçoit de l'énergie du circuit électrique. *Exemples* : moteurs, composants électroniques passifs, etc.



On considère un dipôle AB traversé par un courant orienté de la borne A vers la borne B. L'intensité $I = I_{AB}$ du courant est algébrique : I est positive si le courant réel circule de A vers B, négative si le courant réel circule de B vers A.

On peut alors étudier le dipôle AB selon deux conventions :

- la **convention générateur**, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est $U_g = U_{BA}$, orientée dans le même sens que l'intensité $I = I_{AB}$ (cas **a.** ci-contre) ;
- la convention récepteur, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est $U_r = U_{AB}$, orientée en sens inverse de l'intensité $I = I_{AB}$ (cas **b.** ci-contre).

B.3. Dipôles actifs – Dipôles passifs – Puissance

La puissance électrique s'exprime en watt (W) si l'intensité est en ampère (A) et la tension en volt (V) :

- puissance fournie (convention générateur) $P_g = U_{BA} I_{AB} = U_g I$
- puissance reçue (convention récepteur) $P_r = U_{AB} I_{AB} = U_r I$

Le dipôle AB possède un caractère générateur si la puissance P_g qu'il fournit (calculée en convention générateur) est positive. Le dipôle AB possède un caractère récepteur si la puissance P_r qu'il reçoit (calculée en convention récepteur) est positive.

Définition 6

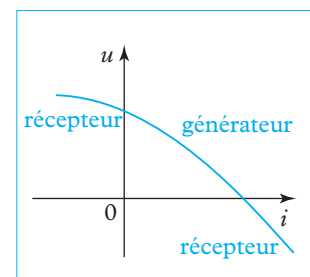
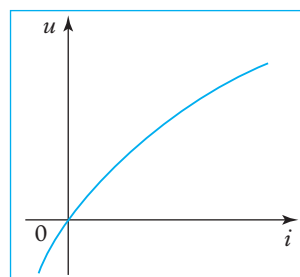
Un dipôle est **passif** lorsque l'énergie électrique qu'il reçoit est complètement dégradée en énergie thermique. La puissance électrique P_r reçue par le dipôle est positive : c'est donc un récepteur.

Un dipôle est **actif** lorsqu'une partie de l'énergie qu'il fournit au milieu extérieur n'est pas de l'énergie thermique.

La caractéristique tension-courant d'un dipôle passif passe par l'origine des axes. En convention récepteur, elle appartient aux deux quadrants du plan : ($u > 0$ et $i > 0$) et ($u < 0$ et $i < 0$).

La caractéristique tension-courant d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes.

Les graphes suivants illustrent les deux cas précédents : à gauche la caractéristique, en convention récepteur, d'un dipôle passif ; à droite la caractéristique, en convention générateur, d'un dipôle actif.

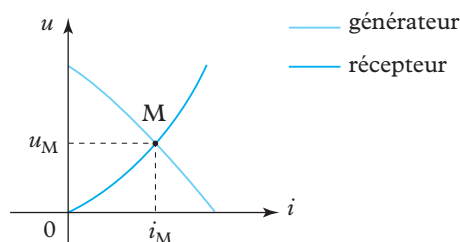
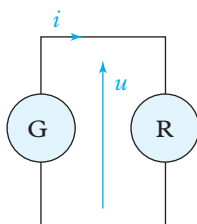


5. La caractéristique de G est tracée en convention générateur et la caractéristique de R est tracée en convention récepteur.

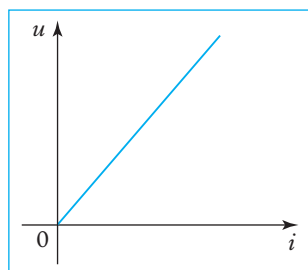
B.4. Point de fonctionnement d'un circuit

On considère le circuit constitué par un dipôle générateur (G) et un dipôle récepteur (R) passif ou actif. La tension u aux bornes de chaque dipôle est la même et l'intensité i du courant qui les traverse est égale.

On représente sur un même graphe les caractéristiques tension-courant des deux dipôles⁵. L'intersection des deux courbes définit le **point de fonctionnement** M du montage : l'abscisse i représente l'intensité du courant dans le circuit et l'ordonnée u la tension commune aux deux dipôles.



C. Les conducteurs ohmiques



C.1. Caractéristique. Résistance. Conductance

Un conducteur ohmique est un dipôle dont la caractéristique est une droite passant par l'origine.

Loi 3

Loi d'Ohm

En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm :

$$u = Ri \text{ avec } u \text{ en volt (V), } R \text{ en ohm } (\Omega) \text{ et } i \text{ en ampère (A).}$$

La résistance est donc le coefficient directeur de la caractéristique du dipôle. On définit de même la conductance G du conducteur ohmique, exprimée en siemens (S) : $G = \frac{1}{R}$ d'où $i = Gu$.

C.2. Puissance dissipée. Effet Joule

La puissance reçue par un conducteur ohmique est entièrement dégradée sous forme thermique. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Joule.

Loi 4

Effet Joule

La puissance reçue par un conducteur ohmique a pour expression :

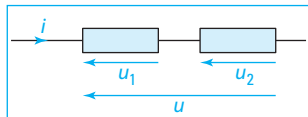
$$P_r = ui = Ri^2 = Gu^2.$$

C.3. Association série de deux conducteurs ohmiques (division de tension)

On considère deux conducteurs ohmiques traversés par le même courant d'intensité i . On note u_1 et u_2 les tensions à leurs bornes respectives.

En convention récepteur la tension totale aux bornes de l'association vaut :

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i \text{ soit } u = R_{eq} i \text{ avec } R_{eq} = R_1 + R_2.$$



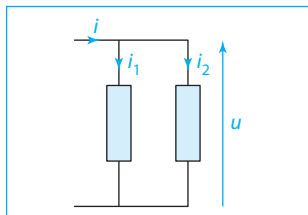
6. Ce résultat est généralisable à un nombre n quelconque de conducteurs ohmiques associés.

L'association de deux⁶ conducteurs ohmiques de résistance R_1 et R_2 est équivalente à un conducteur ohmique unique de résistance $R_{eq} = R_1 + R_2$.

La tension u_1 aux bornes du conducteur ohmique de résistance R_1 vaut : $u_1 = R_1 i$ soit $u_1 = (R_1 / R_{eq}) u$. On réalise ainsi une **division de la tension u** aux bornes de chaque conducteur ohmique associé en série.

Remarque importante : il faut veiller à ce que le même courant d'intensité i circule dans chacun des conducteurs ohmiques.

C.4. Association parallèle de deux conducteurs ohmiques (division de courant)



On considère deux conducteurs ohmiques soumis à la même tension u . On note i_1 et i_2 les intensités des courants traversant respectivement chacun des deux conducteurs.

En convention récepteur l'intensité totale du courant traversant l'association vaut (loi des nœuds) :

$$i = i_1 + i_2 = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u \text{ soit } i = G_{eq} u \text{ avec } G_{eq} = G_1 + G_2.$$

L'association de deux⁶ conducteurs ohmiques de conductance G_1 et G_2 est équivalente à un conducteur ohmique unique de résistance $G_{eq} = G_1 + G_2$.

L'intensité du courant i_1 traversant le conducteur ohmique de conductance G_1 vaut : $i_1 = G_1 u$ soit $i_1 = (G_1 / G_{eq}) i$. On réalise ainsi une **division de l'intensité i** traversant l'ensemble des deux conducteurs ohmiques associés en parallèle.

Application 1 Résistance équivalente à un réseau

Dans le montage schématisé ci-contre, on a : $R_1 = 2,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$ et $R_3 = 0,5 \text{ k}\Omega$.

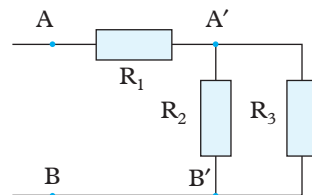
Déterminer la résistance équivalente R_{eq} au montage entre les points A et B.

Solution

Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle entre A' et B'.

La résistance équivalente vaut : $\frac{1}{R_{||}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ soit $R_{||} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 400 \text{ }\Omega$.

Cette résistance $R_{||}$ est montée en série avec R_1 entre A et B. La résistance équivalente du montage est donc : $R_{eq} = R_1 + R_{||} = 2,4 \text{ k}\Omega$.



D. Modélisation linéaire de dipôles électriques

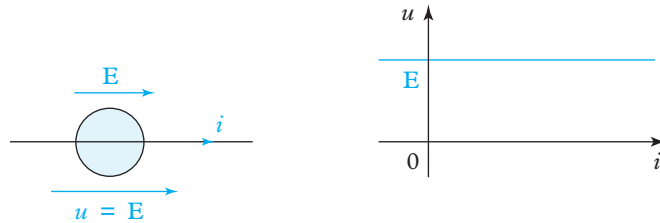
La plupart des dipôles (actifs ou passifs) ont des caractéristiques quelconques et donc peu aisées à manipuler. Pourtant dans certains domaines de fonctionnement particuliers, il est souvent possible de ramener ces caractéristiques à des formes linéaires : segments de droite (cas d'une diode par exemple) ou formes différentielles linéaires (cas de la bobine ou du condensateur).

D.1. Les dipôles générateurs

La caractéristique d'un dipôle générateur ne passe pas par l'origine des axes. En convention générateur, il s'agit d'une courbe quelconque, difficilement exploitable. En pratique, cependant, les conditions d'utilisation sont telles que seule une petite partie de la caractéristique est concernée. Localement, la caractéristique d'un générateur réel peut donc être modélisée par une droite.

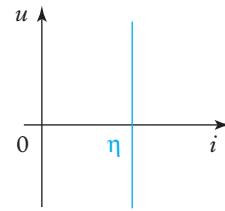
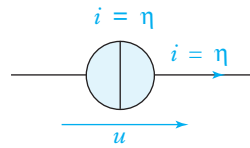
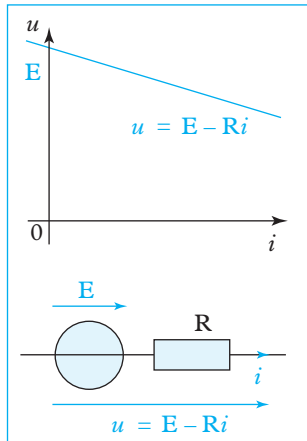
Générateur de tension idéal

Un générateur idéal de tension délivre une tension constante E quel que soit le courant i , positif ou négatif, débité par celui-ci. La caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur idéal de tension est une droite horizontale. La puissance fournie par un tel générateur est $P_g = Ei$.



Générateur de courant idéal

Un générateur idéal de courant délivre un courant d'intensité constante η quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci. La caractéristique d'un générateur idéal de courant est une droite verticale. La puissance fournie par un tel générateur est $P_g = \eta u$.



Modélisation linéaire d'un générateur (représentation de Thévenin)

Définition 7

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur réel a pour équation (en convention générateur) :

$$u = E - Ri,$$

où E est la force électromotrice (fém) du récepteur en volt (V) et R sa résistance interne en ohm (Ω).

La fém E est l'ordonnée à l'origine de la droite $u = f(i)$. En pratique, elle se mesure à l'aide d'un voltmètre lorsque le courant débité par le générateur est nul : elle est donc égale à la tension à vide aux bornes du générateur.

On peut modéliser le générateur réel ainsi linéarisé par un générateur idéal de tension E en série avec un conducteur ohmique de résistance R . Ce modèle, appelé **modèle de Thévenin**, est valable si le générateur délivre de faibles courants.

Remarque : il existe une représentation équivalente dans laquelle le générateur réel est modélisé par une source de courant idéale en parallèle avec un conducteur ohmique de conductance $G = 1/R$.

Puissance fournie par un générateur réel

La puissance fournie par un tel générateur est $P_g = ui = Ei - Ri^2$.

- Le terme Ei représente la puissance fournie par le générateur idéal de tension.
- Le terme Ri^2 représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne.

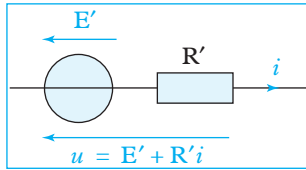
D.2. Les dipôles récepteurs

Définition 8

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique d'un récepteur réel a pour équation (en convention récepteur) :

$$u = E' + R' i$$

où E' est la force contre-électromotrice (fcém) du récepteur en volt (V) et R' sa résistance interne en ohm (Ω).



On peut donc représenter le récepteur par l'association série de la fcém et d'un conducteur ohmique de résistance R' . Sur la figure ci-contre le modèle de Thévenin d'un dipôle récepteur est représenté en convention récepteur.

Puissance reçue par un récepteur

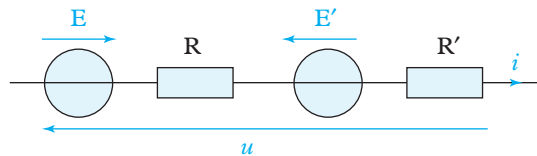
La puissance reçue par un tel récepteur est $P_g = ui = E'i + R'i^2$.

– Le terme $E'i$ représente la puissance utile du récepteur, c'est-à-dire la fraction de la puissance électrique reçue par le récepteur pouvant être convertie en une forme d'énergie non thermique.

– Le terme $R'i^2$ représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne.

Application 2 Association série d'un générateur et d'un récepteur

Un générateur de fém E et de résistance interne R est monté en série avec un récepteur de fcém E' et de résistance interne R' . À quelle condition cette association est-elle équivalente à un générateur ? À un récepteur ? (Dans chaque cas, on précisera les caractéristiques du dipôle équivalent.)



Solution

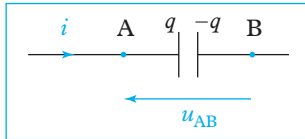
En convention récepteur, la tension u aux bornes de l'association est : $u = E' - E + (R + R') i$.

- L'association des deux dipôles est un générateur si la fém E est supérieure à la fcém E' . La fém de l'ensemble des deux dipôles est $E - E'$. La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes $R + R'$.
- L'association des deux dipôles est un récepteur si la fcém E' est supérieure à la fém E . La fcém de l'ensemble des deux dipôles est $E' - E$. La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes $R + R'$.

D.3. Dipôles linéaires en régime variable. Condensateurs

Les dipôles étudiés jusqu'à présent fonctionnent en régime permanent. Mais il existe de nombreux dipôles fonctionnant en régime variable. Par exemple, la réponse d'un condensateur ou d'une bobine à un échelon de tension n'est pas instantanée et passe par une phase transitoire. Dans les deux cas, les grandeurs électriques u et i vérifient une équation différentielle linéaire. Cette propriété les classe dans la catégorie des dipôles linéaires à l'instar des conducteurs ohmiques.

Charge d'un condensateur. Un condensateur est l'association de deux conducteurs en regard, appelés armatures. Lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel u non nulle, des charges opposées $q_A = q$ et $q_B = -q_A = -q$ s'accumulent sur les deux armatures.



Définition 9

La charge q_A d'un condensateur est proportionnelle à la tension u_{AB} à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité C , exprimé en farad (F), s'appelle la capacité du condensateur :

$$q_A = C u_{AB}$$

Relation tension-intensité pour un condensateur. En convention récepteur, la relation entre l'intensité qui traverse le condensateur et la charge de ce dernier s'écrit, conformément à la définition 3 :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Définition 10

Les relations tension-charge et charge-intensité se combinent pour donner la relation tension-intensité pour un condensateur, en convention récepteur :

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

On en déduit la propriété importante suivante : la tension aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps. En effet dans le cas contraire l'intensité serait infinie ce qui n'est pas physiquement acceptable.

Application 3 Tension aux bornes d'un condensateur

Un générateur de courant idéal débite un courant constant d'intensité $I = 1,0 \mu\text{A}$ dans un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$. Initialement, la tension u aux bornes du condensateur est nulle. Comment u varie-t-elle au cours du temps ?

Solution

En convention récepteur, on a : $i = C \frac{du}{dt}$ soit : $du = \frac{I}{C} dt$.

On intègre cette équation par rapport au temps : $u(t) = \frac{I}{C}t + \text{cte}$ avec $u(t=0) = 0$.

On déduit des conditions initiales à $t = 0$: $\text{cte} = 0$, d'où : $u(t) = \frac{I}{C}t$ soit : $u(t) = \frac{1,0 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-9}}t = 10t$.

La tension u varie linéairement avec le temps.

Énergie d'un condensateur parfait. La puissance électrique P_r reçue par le condensateur à l'instant t vaut : $P_r = u i$ avec $i = C \frac{du}{dt}$, d'où :

$$P_r = C u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right).$$

L'énergie dE_{elec} emmagasinée par le condensateur pendant la durée infinitésimale dt est reliée à la puissance reçue par :

$$P_r = \frac{dE_{\text{elec}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right).$$

L'énergie totale E_{elec} reçue par le condensateur est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque la tension passe de 0 à u . D'où :

$$E_{\text{elec}} = \int dE_{\text{elec}} = \int_0^u d \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) = \frac{1}{2} C u^2.$$

7. Un condensateur est déchargé lorsque la charge portée par ses armatures est nulle. En conséquence la tension à ses bornes est nulle.

Définition 11

L'énergie électrostatique E_{elec} emmagasinée dans un condensateur soumis à la tension u est égale à l'énergie électrique reçue par le condensateur initialement déchargé⁷ lorsque la tension à ses bornes passe de 0 à u . Elle a pour expression :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu^2.$$

Application 4 Énergie emmagasinée dans un condensateur

Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$ chargé sous la tension constante $U = 10 \text{ V}$.

Solution

L'énergie du condensateur vaut par définition :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu^2 \text{ d'où : } E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \times 100 \cdot 10^{-9} \times 10^2 = 5,0 \times 10^{-6} = 5,0 \text{ } \mu\text{J}.$$

D.4. Dipôles linéaires en régime variable. Bobines

Description d'une bobine parfaite. Une bobine est constituée par l'enroulement régulier d'un fil métallique conducteur. Dans le cas d'une bobine parfaite on néglige l'effet de la résistance r de l'enroulement. Si l'on doit tenir compte de cette résistance, on considérera une association série entre une bobine parfaite et un conducteur ohmique de résistance r .

Relation tension-intensité pour une bobine

Définition 12

La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité i du courant qui la traverse. En convention récepteur, le coefficient de proportionnalité L , exprimé en henry (H), s'appelle l'inductance propre de la bobine :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

On en déduit la propriété importante suivante : l'intensité traversant une bobine est toujours une fonction continue du temps. En effet dans le cas contraire la tension à ses bornes serait infinie ce qui n'est pas physiquement acceptable.

Application 5 Intensité dans une bobine

Une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ est soumise à la tension constante $U = 1,0 \text{ V}$. Initialement, l'intensité i du courant dans la bobine est nulle. Comment i varie-t-elle au cours du temps ?

Solution

En convention récepteur, on a : $u = L \frac{di}{dt}$ soit : $di = \frac{U}{L} dt$.

On intègre cette équation par rapport au temps : $i(t) = \frac{U}{L} t + \text{cte}$ avec $i(t=0) = 0$.

On déduit des conditions initiales à $t = 0$: $\text{cte} = 0$, d'où : $i(t) = \frac{U}{L} t$ soit : $i(t) = \frac{1,0}{100 \cdot 10^{-3}} t = 10t$.

L'intensité i varie linéairement avec le temps.

Énergie d'une bobine parfaite. La puissance électrique P_r reçue par le condensateur à l'instant t vaut : $P_r = ui$ avec $u = L \frac{di}{dt}$, d'où :

$$P_r = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right).$$

L'énergie dE_{mag} emmagasinée par la bobine pendant la durée infinitésimale dt est reliée à la puissance reçue par :

$$P_r = \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right).$$

L'énergie totale E_{mag} reçue par la bobine est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque l'intensité passe de 0 à i . D'où :

$$E_{\text{mag}} = \int dE_{\text{mag}} = \int_0^i d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{2} Li^2.$$

Définition 13

L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans une bobine traversée par un courant d'intensité i est égale à l'énergie électrique reçue par la bobine lorsque l'intensité passe de 0 à i . Elle a pour expression :

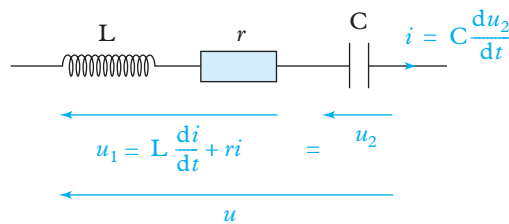
$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2.$$

D.5. Association de dipôles linéaires

Un dipôle est linéaire lorsque la tension à ses bornes et l'intensité du courant le traversant vérifient une équation différentielle linéaire (à coefficients constants). Dans le cadre de l'ARQS on considère que les variations temporelles sont relativement lentes.

L'association de n dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. L'ordre de l'équation différentielle obtenue augmente avec le nombre de dipôles associés.

Exemple : association série d'un condensateur parfait et d'une bobine réelle :



On étudie en convention récepteur l'association d'un condensateur parfait C et d'une bobine réelle (L, r) .

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale u s'écrit :

$$u = u_1 + u_2 = L \frac{di}{dt} + ri + u_2.$$

En dérivant une fois cette expression, on obtient :

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

L'association est donc équivalente à un dipôle linéaire vérifiant une équation différentielle d'ordre 2 en $i(t)$ et d'ordre 1 en $u(t)$.

L'essentiel

✓ Éléments d'un circuit électrique

- Un **nœud** est un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus.
- Une **branche** est constituée par l'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds consécutifs.
- Une **maille** est un ensemble de branches formant un contour fermé.

✓ Intensité du courant électrique. Potentiel électrique.

- L'intensité i du courant est reliée à la charge Q traversant une section du circuit orienté par : $i = \frac{dQ}{dt}$, avec i en ampère (A), Q en coulomb (C), t en seconde (s).
- Le potentiel électrique V , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V), est à l'origine du mouvement des charges dans le circuit.

✓ Lois de Kirchhoff

- **Loi des nœuds** : la somme des intensités des courants algébriques arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités des courants algébriques s'éloignant de ce nœud.
- **Loi des mailles** : la somme algébrique des différences de potentiel mesurées en parcourant complètement une maille dans un sens donné est nulle.

✓ Puissance

- En **convention générateur**, la tension U mesurée aux bornes du dipôle est orientée dans le même sens que l'intensité I le traversant.
- En **convention récepteur**, la tension U mesurée aux bornes du dipôle est orientée en sens inverse de l'intensité I le traversant.
- La puissance électrique P d'un dipôle est une grandeur algébrique. Dans la convention choisie, elle a pour expression : $P = U \times I$.

✓ ARQS

Un circuit de dimension L vérifie l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) si la grandeur temporelle liée à la propagation de l'information dans le circuit est négligeable devant la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques.

✓ Caractéristique d'un dipôle

- Dans la convention d'étude, on appelle caractéristique d'un dipôle la courbe d'équation $u = f(i)$ (caractéristique tension-courant) ou $i = g(u)$ (caractéristique courant-tension). Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est linéaire.
- La caractéristique d'un dipôle passif passe par l'origine des axes ; la caractéristique d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes.

✓ Conducteurs ohmiques

- En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm : $u = R \times i$ ou $i = G \times u$, avec R : résistance en ohm (Ω), $G = 1/R$: conductance en siemens (S).

- La puissance reçue par un conducteur ohmique (et entièrement dissipée par effet Joule) vaut :

$$P_r = ui = Ri^2 = Gu^2$$

- L'association série de 2 résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance unique $R_{eq} = R_1 + R_2$. Les tensions u_1 et u_2 à leurs bornes sont des divisions de la tension u aux bornes de l'ensemble :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u.$$

- L'association parallèle de 2 conductances G_1 et G_2 est équivalente à une conductance unique $G_{eq} = G_1 + G_2$. Les intensités i_1 et i_2 les traversant sont des divisions de l'intensité totale i alimentant l'ensemble :

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i.$$

✓ Modélisations linéaires de dipôles

- Un générateur idéal de tension délivre une tension constante E quel que soit le courant i , positif ou négatif, débité par celui-ci. Un générateur idéal de courant délivre un courant d'intensité constante η quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci.
- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un générateur réel par le modèle de Thévenin associant en série un générateur idéal de fém E et un conducteur ohmique de résistance R (E, R).
- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un récepteur réel par le modèle de Thévenin associant en série un récepteur de fcém E' et un conducteur ohmique de résistance R' (E', R').

✓ Propriétés des condensateurs

- La charge q d'un condensateur est proportionnelle à la tension u à ses bornes : $q = Cu$. C est la capacité du condensateur en farad (F).
- En convention récepteur, les relations charge-intensité et tension-intensité s'écrivent pour un condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

- La tension aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.
- L'énergie électrostatique E_{elec} emmagasinée dans un condensateur a pour expression :

$$E_{elec} = \frac{1}{2} Cu^2.$$

✓ Propriétés des bobines

- La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité i du courant qui la traverse. En convention récepteur, on a :

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

L est l'inductance de la bobine, en henry (H).

- L'intensité $i(t)$ du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.
- L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans une bobine a pour expression : $E_{mag} = \frac{1}{2} Li^2$.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment vérifier la validité de l'électrocinétique?

Il est judicieux, en préambule à l'étude d'un circuit électrique, de vérifier si les lois de l'électrocinétique peuvent effectivement s'appliquer à ce circuit. On se propose de vérifier ce point.

→ Savoir faire

- ❶ Identifier dans le descriptif du circuit, la grandeur L caractéristique de sa taille.
- ❷ Identifier de même la grandeur caractéristique de la durée d'évolution du signal électrique (ce peut être une fréquence, une période ou une pulsation). Convertir cette grandeur en un temps T .
- ❸ Calculer le rapport L/T . Si ce rapport est inférieur de deux ordres de grandeur à la célérité c de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), les lois de l'électrocinétique sont applicables.

→ Application

Un poste de radio capte un signal de 98,0 MHz à l'aide d'une antenne de 2,0 m. Le signal est filtré puis amplifié par un circuit dont la taille est inférieure à celle de l'antenne. L'électrocinétique classique s'applique-t-elle à ce signal?

Solution

- ❶ La taille du circuit complet n'excède pas deux fois celle de l'antenne : $L = 4,0 \text{ m}$.
- ❷ La fréquence du signal est 98,0 MHz, donc sa période vaut : $T = 1/f = 1/98,0 \cdot 10^6 = 1,02 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.
- ❸ Le rapport entre la taille du circuit et la grandeur caractéristique de l'évolution du signal électrique vaut : $L/T = 4,0/1,02 \cdot 10^{-8} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > c$.

L'électrocinétique ne s'applique pas à la réception du signal. Il faudra formuler ce problème dans le cadre de la théorie électromagnétique.

Méthode n°2

Comment déterminer le caractère générateur/récepteur d'un dipôle?

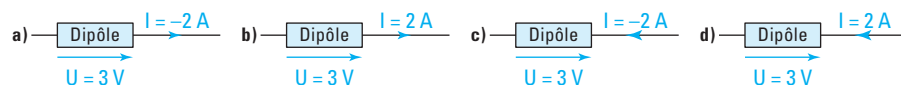
Soit un dipôle traversé par l'intensité algébrique I et soumis à la différence de potentiel U . On cherche à déterminer si ce dipôle est générateur ou récepteur.

→ Savoir faire

- ❶ Identifier une convention pour l'étude de ce dipôle :
 - si I et U sont orientées dans le même sens, identifier la convention générateur ;
 - si I et U sont orientées en sens inverse, identifier la convention récepteur.
- ❷ Déterminer le signe de la puissance algébrique $P = U \times I$ dans la convention choisie :
 - si $P > 0$, alors le dipôle est de même nature que la convention (générateur-générateur ou récepteur-récepteur) ;
 - si $P < 0$, alors le dipôle est de nature opposée à la convention (générateur-récepteur ou récepteur-générateur).

→ Application

Les dipôles ci-dessous ont-ils un caractère générateur ou récepteur ?



Solution

a) L'intensité I et la tension U étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.

La puissance fournie par le dipôle $P_g = UI = -6 \text{ W}$ est négative, donc le dipôle est **récepteur**.

b) L'intensité I et la tension U étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.

La puissance fournie par le dipôle $P_g = UI = +6 \text{ W}$ est positive, donc le dipôle est **générateur**.

c) L'intensité I et la tension U étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.

La puissance reçue par le dipôle $P_r = UI = -6 \text{ W}$ est négative, donc le dipôle est **générateur**.

d) L'intensité I et la tension U étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.

La puissance reçue par le dipôle $P_r = UI = +6 \text{ W}$ est positive, donc le dipôle est **récepteur**.



Les situations a) et d) d'une part, b) et c) d'autre part, sont identiques. La convention d'orientation du courant dans le circuit diffère, mais le courant réel traversant le dipôle est le même.

Méthode n°3

Comment appliquer les lois de Kirchhoff à un circuit ramifié ?

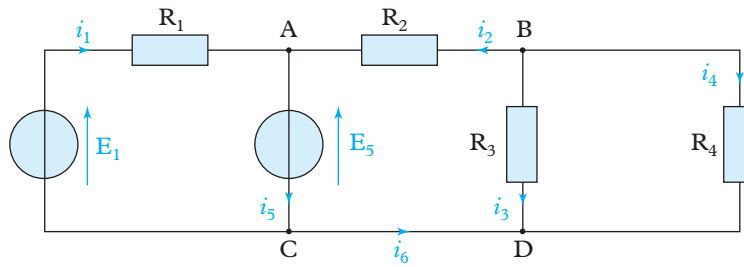
Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs mailles, l'écriture systématique des lois de Kirchhoff conduit généralement à un excès d'information. Comment être sûr de n'écrire que des relations nécessaires ?

→ Savoir faire

- 1 Dénombrer les nœuds (n) et les mailles indépendantes (m) dans le circuit.
- 2 Écrire ($n - 1$) lois des nœuds entre les intensités. Le dernier nœud conduit à une relation redondante. (Le nœud inutilisé est indifférent.)
- 3 Écrire (m) lois des mailles. (Des mailles sont indépendantes si elles comportent chacune un dipôle que ne comportent pas les autres.)
- 4 Injecter les caractéristiques des dipôles dans les lois des mailles, de façon à n'obtenir que des relations entre les intensités (et les grandeurs caractéristiques des dipôles).
- 5 Résoudre le système constitué de b équations dont les b intensités sont les inconnues avec $b = n + m - 1$.

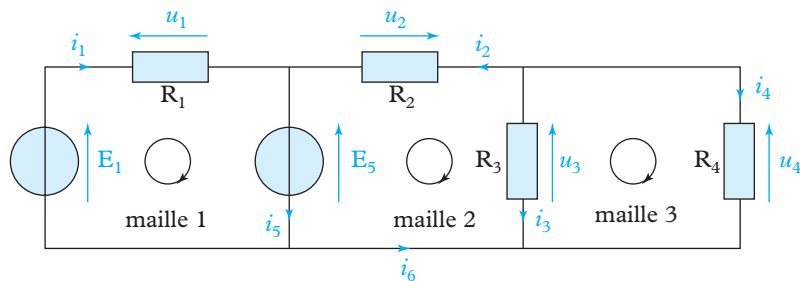
→ Application

Déterminer les intensités dans le circuit schématisé ci-dessous en fonction des données du problème.



Solution

- On dénombre $n = 4$ nœuds A, B, C et D, et $m = 3$ mailles indépendantes.
- On écrit donc 3 lois des nœuds (le nœud inutilisé est indifférent) :
 au nœud A: $i_1 + i_2 - i_5 = 0$
 au nœud B: $i_2 + i_3 + i_4 = 0$
 au nœud C: $i_5 - i_1 - i_6 = 0$.
- On écrit donc 3 lois des mailles. Le fléchage des tensions est arbitraire à ce stade.



- maille 1: $E_1 - u_1 - E_5 = 0$
 maille 2: $E_5 + u_2 - u_3 = 0$
 maille 3: $u_3 - u_4 = 0$.

- On injecte les caractéristiques en prenant garde aux conventions de fléchage des tensions. Sur cet exemple, toutes les résistances ont été fléchées en convention récepteur.
 $u_1 = R_1 i_1$, $u_2 = R_2 i_2$, $u_3 = R_3 i_3$, $u_4 = R_4 i_4$.

- On résoud alors le système à $m + n = 6$ équations :

$$\begin{cases}
 i_1 - i_2 - i_5 = 0 & (1) \\
 i_2 + i_3 + i_4 = 0 & (2) \\
 i_5 - i_1 - i_6 = 0 & (3) \\
 E_1 - R_1 i_1 - E_5 = 0 & (4) \\
 E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\
 R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0 & (6)
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\
 i_4 = \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\
 i_2 + \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) i_3 = 0 & (2) + (6) \\
 E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\
 i_5 = i_1 + i_2 & (1) \\
 i_6 = i_5 - i_1 & (3)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\
i_3 = -\frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} & (2) + (6) \\
E_5 + R_2 i_2 + R_3 \left(\frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right) = 0 & (5) \\
i_4 = \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\
i_5 = i_1 + i_2 & (1) \\
i_6 = i_5 - i_1 = i_2 & (3) + (1)
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} \\
i_2 = \frac{-E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\
i_3 = \frac{R_4 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\
i_4 = \frac{R_3 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\
i_5 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} - \frac{E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\
i_6 = i_2.
\end{cases}$$

La résolution d'un système linéaire d'ordre élevé est rarement demandée en physique; elle est cependant au programme de l'enseignement de mathématiques.



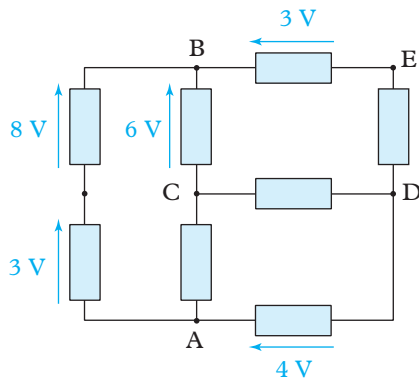
On pourra remarquer que les nœuds C et D de cet exemple sont équipotentiels car reliés par un fil. Si on choisit de ne dénombrer que trois nœuds en les réunissant, l'intensité i_6 de la branche qui les sépare disparaît. On a alors $m = 3$, $n = 3$, ce qui conduit aux mêmes résultats.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Loi des mailles

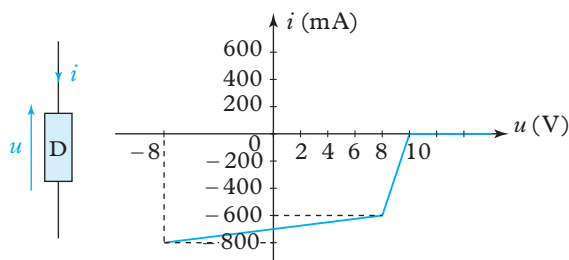
On considère le circuit suivant, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.



- Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.
- Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?
- Déterminer les tensions u_{AC} , u_{CD} et u_{DF} .

Ex. 2 Dipôle à caractéristique linéaire par morceaux

Un dipôle actif présente la caractéristique courant-tension expérimentale suivante, donnée en convention récepteur.



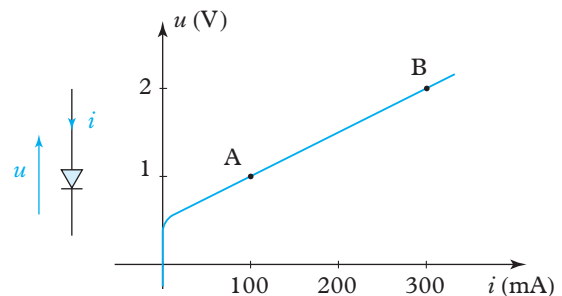
Proposer une caractérisation linéaire par morceaux.

Ex. 3 Caractéristique d'une diode

Lors de l'étude d'une diode, on a tracé la caractéristique suivante :

- pour $u < 0,3 \text{ V}$: $i = 0$;
- pour $u > 0,7 \text{ V}$, la caractéristique est linéaire, passant par les points :

A($u = 1 \text{ V}$; $i = 100 \text{ mA}$) et B($u = 2 \text{ V}$; $i = 300 \text{ mA}$).



- Comment peut-on tracer la caractéristique d'une telle diode ?

- Dans sa partie linéaire ($u > 0,7 \text{ V}$), donner un modèle équivalent à la diode.

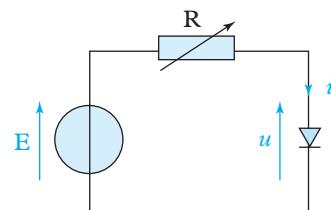
- On branche aux bornes de la diode un générateur de tension de force électromotrice $E = 1,5 \text{ V}$ et de résistance interne R .

Le courant dans la diode vaut alors $I = 100 \text{ mA}$.

Déterminer la résistance R , la puissance reçue par la diode et la puissance fournie par le générateur.

- On modélise la caractéristique de la diode par deux droites. Préciser les droites modélisant le mieux la diode.

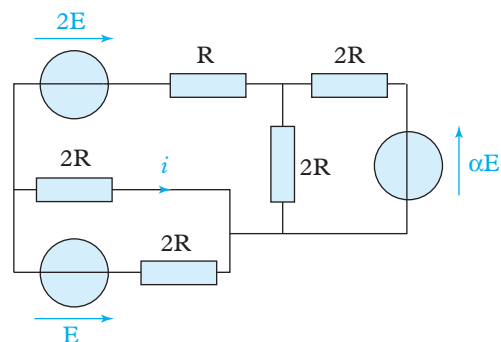
- On utilise le modèle établi en d) pour la diode. Elle est branchée sur un générateur de tension idéal $E = 1,5 \text{ V}$, placé en série avec une résistance R variable.



Tracer la courbe donnant la puissance \mathcal{P} reçue par la diode en fonction de R .

Ex. 4 Application des lois de Kirchhoff

Déterminer l'intensité i sur le schéma ci-dessous.



Niveau 2

Ex. 5 Alimentation d'un moteur

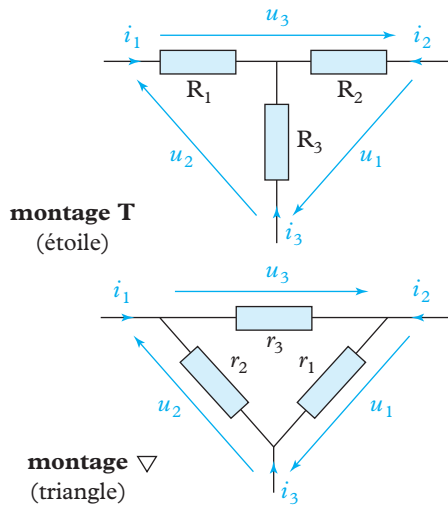
Un moteur est un récepteur actif de résistance R' et de fém $E' = kN$, où N est la vitesse de la rotation du moteur. La puissance motrice fournie par le moteur est $\mathcal{P}_m = E'i$ où i est l'intensité du courant circulant en convention récepteur dans le moteur.

Le moteur est alimenté par un générateur de fém E et de résistance interne R .

- Déterminer l'intensité i circulant dans le moteur. Donner son expression en fonction de E , R , R' et kN .
- Quelle est la puissance motrice \mathcal{P}_m ?
- Tracer la courbe donnant \mathcal{P}_m en fonction de N . Pour quelle valeur N_0 de la vitesse de rotation du moteur la puissance motrice est-elle maximale?

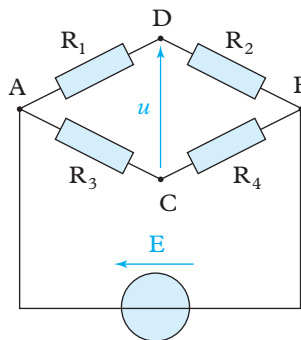
Ex. 6 Théorème de Kennely

À quelle condition les deux montages sont-ils équivalents?



Ex. 7 Pont de Wheatstone

Le schéma du pont est représenté sur la figure ci-dessous.



La résistance à déterminer est la résistance R_1 .

Les résistances R_3 et R_4 sont des résistances fixes connues.

La résistance R_2 est une résistance variable dont on connaît la valeur.

Le pont est équilibré quand la tension u mesurée entre C et D est nulle.

a) Déterminer la tension u en fonction de E et des résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

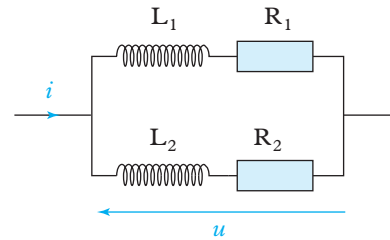
b) À quelle condition le pont est-il équilibré? Déterminer alors R_1 .

A.N. $R_3 = 100 \Omega$; $R_4 = 5 \Omega$; $R_2 = 1\,827 \Omega$; $E = 6 \text{ V}$.

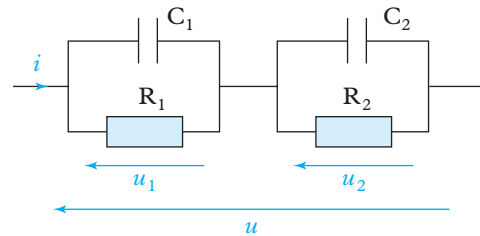
Ex. 8 Équations différentielles

Déterminer l'équation différentielle liant la tension u et le courant i dans le montage ci-dessous.

• Montage 1 :

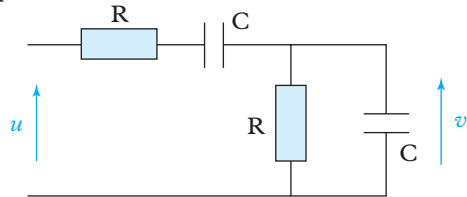


• Montage 2 :



Ex. 9 Filtre de Wien

Le montage schématisé ci-dessous comporte deux résistances identiques R et deux condensateurs de capacité C .



a) Écrire l'équation différentielle liant la tension de sortie v aux bornes du condensateur et la tension d'entrée u .

b) à l'instant initial, les deux condensateurs sont déchargés et la tension $u = E$ est constante. Déterminer les conditions initiales portant sur v et $\frac{dv}{dt}$ juste après

le branchement du circuit ($v(0^+)$ et $\frac{dv}{dt}(0^+)$).

Solutions des exercices

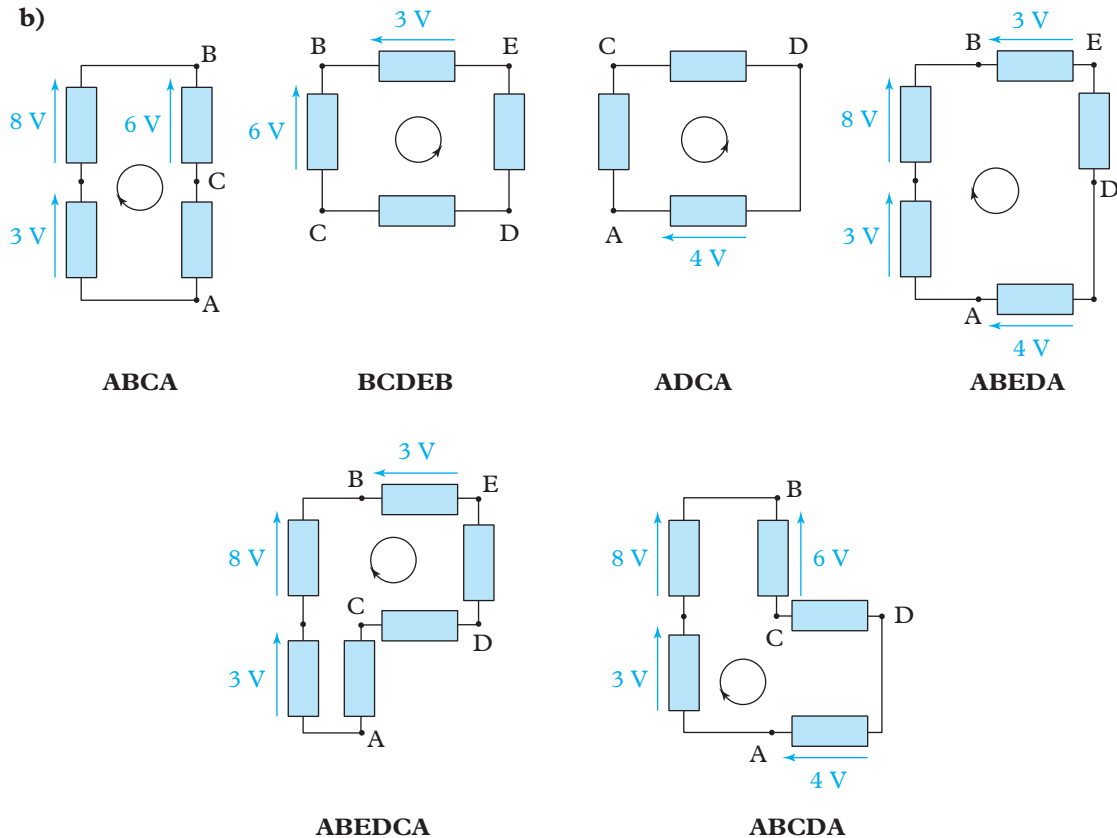
Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) On dénombre 6 mailles dans le circuit :

ABCA; BCDEB; ADCA; ABEDA; ABEDCA; ABCDA.

b)



On obtient le système suivant :

- maille ABCEA : $3 + 8 - 6 + u_{AC} = 0$ (1)
- maille BCDEB : $-6 + u_{DC} + u_{ED} + 3 = 0$ (2)
- maille ADCA : $u_{AC} + u_{CD} - 4 = 0$ (3)
- maille ABEDA : $3 + 8 - 3 + u_{DE} + 4 = 0$ (4)
- maille ABEDCA : $3 + 8 - 3 + u_{DE} + u_{CD} + u_{AC} = 0$ (5)
- maille ABCDA : $3 + 8 - 6 + u_{DC} + 4 = 0$ (6)

Les relations (1), (4) et (6) permettent de définir des tensions inconnues : elles sont donc **indépendantes**.

Les relations (2), (3) et (5) s'obtiennent par combinaison linéaire : elles ne sont donc pas **indépendantes**.

☀ Par exemple, on a : (5) = (1) + (4) – (6).

c) À partir de (1), (4) et (6), on trouve facilement :

$$u_{AC} = -5 \text{ V} ; \quad u_{DE} = -12 \text{ V} ; \quad u_{CD} = 9 \text{ V}.$$

Exercice 2

❶ Sur la caractéristique, on identifie trois zones :

$$\begin{cases} \text{zone 1 : } u < 8 \text{ V} \\ \text{zone 2 : } u \in [8 \text{ V} ; 10 \text{ V}] \\ \text{zone 3 : } u > 10 \text{ V.} \end{cases}$$

❷ On mesure sur ces trois zones la pente $\frac{\Delta i}{\Delta u}$ et on en déduit la résistance $R = \frac{\Delta u}{\Delta i}$ l'inverse de la pente.

– Zone 1 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{16} = 0,0125 \Omega^{-1}$, soit $R_1 = 80 \Omega$.

– Zone 2 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,3 \Omega^{-1}$, soit $R_2 = 3,33 \Omega$.

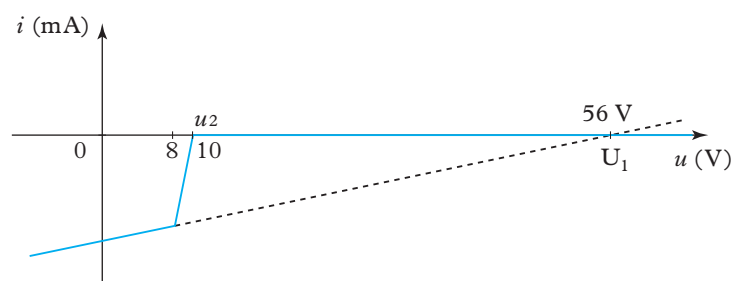
– Zone 3 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = 0 \Omega^{-1}$, soit R_3 infinie.

❸ On mesure la tension à vide en déterminant l'abscisse de l'intersection du morceau de la caractéristique considéré avec l'axe des abscisses.

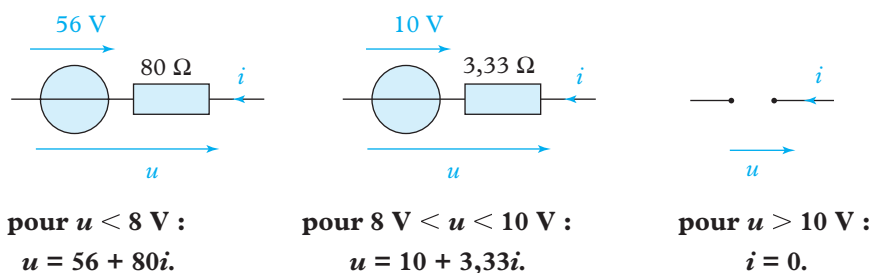
– Zone 1 : on prolonge la caractéristique jusqu'à l'axe des abscisses et on lit $U_1 = 56 \text{ V}$.

– Zone 2 : on lit directement sur le graphe $U_2 = 10 \text{ V}$.

– Zone 3 : U_3 n'est pas définie.

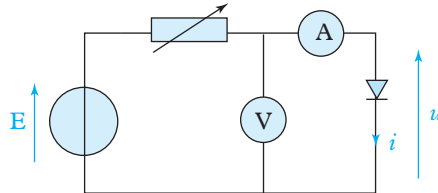


❹ Les trois modélisations linéaires sont donc (en représentation de Thévenin) :



Exercice 3

a) Pour tracer la caractéristique de la diode, il faut placer en amont de celle-ci un générateur dont on peut faire varier la tension (alimentation stabilisée) ou utiliser un générateur en série avec un potentiomètre (résistance variable). Un voltmètre aux bornes de la diode permet de mesurer la tension u , un ampèremètre en série avec celle-ci donnera la mesure de l'intensité i du courant.



b) Pour $u > 0,7 \text{ V}$, la caractéristique est linéaire ; on peut écrire $u = E' + R'i$, où E' est la tension du générateur de Thévenin et R' la résistance interne.

💡 On applique la méthode n° 4 à la diode étudiée en convention récepteur.

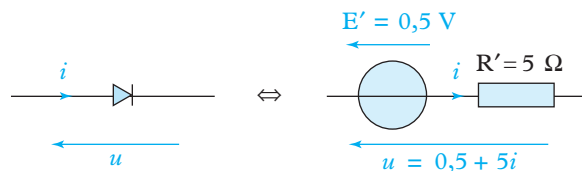
- On mesure la pente $\frac{\Delta u}{\Delta i}$ de la droite et on en déduit la résistance R' :

$$R' = \frac{\Delta u}{\Delta i}, \text{ soit : } R' = \frac{2 - 1}{0,3 - 0,1} = 5 \Omega.$$

- On mesure la tension à vide E' en faisant $i = 0$, d'où : $E' = 0,5 \text{ V}$.

💡 Pour déterminer E' , on prolonge la droite jusqu'à l'axe des ordonnées.

La diode est donc équivalente à la fcém $E' = 0,5 \text{ V}$ en série avec la résistance $R' = 5 \Omega$.



c) Le montage réalisé est schématisé ci-contre.

Comme $I = 0,1 \text{ A}$, on lit sur la caractéristique de la diode $U = 1 \text{ V}$.

- En convention générateur, la tension aux bornes du générateur est :

$$U = E - RI, \text{ d'où : } R = \frac{E - U}{I} = \frac{1,5 - 1}{0,1} = 5 \Omega.$$

- La puissance reçue par la diode est :

$$\mathcal{P}_{\text{diode}} = UI = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ W}.$$

- La puissance fournie par le générateur est :

$$\mathcal{P}_g = UI = 0,1 \text{ W}.$$



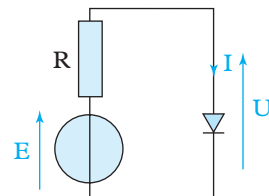
La puissance reçue par un dipôle se calcule en convention récepteur. La puissance fournie par un dipôle se calcule en convention générateur.



On constate que l'énergie se conserve dans le circuit : la puissance reçue par la diode est égale à la puissance fournie par le générateur.

d) Les droites modélisant le mieux la diode sont (avec u en volt et i en ampère) :

- pour $u < 0,5$, $i = 0$;
- pour $u > 0,5$, $u = 5i + 0,5$.



e)

💡 On applique la méthode n° 5 au circuit constitué du générateur de tension, de la résistance variable et de la diode.

- On se propose de déterminer le point de fonctionnement du circuit quand un courant i circule.
- L'intensité i se déduit de la loi des mailles :

$$U = E' + R'i = E - Ri, \quad \text{d'où : } i = \frac{E - E'}{R + R'} > 0 \quad (\text{car } E > E').$$



Il faut toujours vérifier que le point de fonctionnement trouvé est valable. Comme ici $E > E'$, il circule bien un courant positif du générateur vers le récepteur, indépendamment de la valeur de R .

- La tension u aux bornes de la diode vaut alors :

$$u = E' + R'i = E' + R' \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{R'E + RE'}{R + R'}.$$

- La puissance \mathcal{P} reçue par la diode est :

$$\mathcal{P} = ui = \frac{R'E + RE'}{R + R'} \times \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{(E - E')(R'E + RE')}{(R + R')^2}.$$

Pour étudier les variations de la fonction $\mathcal{P}(R)$, on calcule sa dérivée :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = (E - E') \frac{E'(R + R')^2 - 2(R + R')(R'E + RE')}{(R + R')^4} = \frac{E - E'}{(R + R')^3} [E'(R' - R) - 2R'E].$$

La dérivée s'annulerait pour :

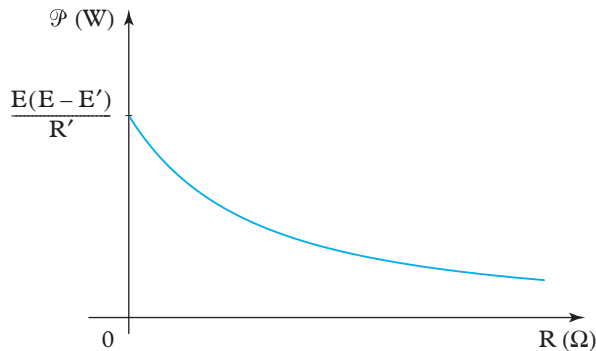
$$E'(R' - R) - 2R'E = 0, \quad \text{soit : } R = \frac{R'(E' - 2E)}{E'} < 0.$$

Comme la résistance R est toujours positive ou nulle, la dérivée ne s'annule pas et la fonction $\mathcal{P}(R)$ est décroissante avec :

$$\left(\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E(E - E')}{R'} = 0,3 \text{ W} \right) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}(R) \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty).$$



Le signe de la dérivée est donné par : $\frac{d\mathcal{P}}{dR}(R = 0) = \frac{E - E'}{R'^2} (E' - 2E) < 0$.

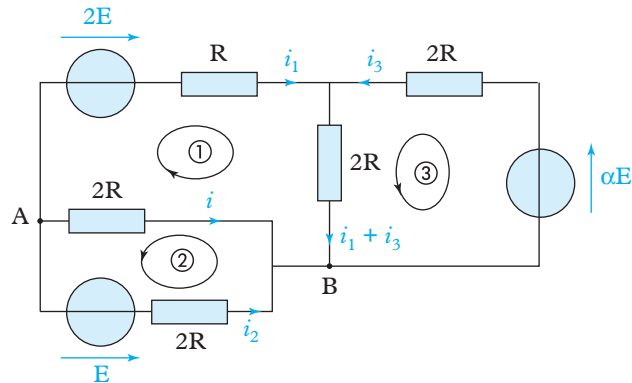


Exercice 4

On obtient donc le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{nœud A : } i_1 + i + i_2 = 0 & (1) \\ \text{maille 1 : } 2E - Ri_1 - 2R(i_1 + i_3) + 2Ri = 0 & (2) \\ \text{maille 2 : } E - 2Ri_2 + 2Ri = 0 & (3) \\ \text{maille 3 : } \alpha E - 2Ri_3 - 2R(i_1 + i_3) = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2 = -i_1 - i & (1) \\ 3Ri_1 + 2Ri_3 - 2Ri = 2E & (2) \\ 2Ri_1 + 4Ri = -E & (3) + (1) \\ 2Ri_1 + 4Ri_3 = \alpha E & (4) \end{cases}$$

Le montage étudié comporte 3 nœuds et 3 mailles indépendantes. On le paramètre simplement en introduisant les trois inconnues supplémentaires i_1 , i_2 et i_3 .



⚠ On a injecté (1) dans l'équation (3). L'objectif est maintenant d'exprimer i_1 et i_3 en fonction de i .

On déduit de l'équation (3) :

$$2Ri_1 = -E - 4Ri, \text{ soit } Ri_1 = -\frac{1}{2}(E + 4Ri).$$

On déduit de l'équation (4) :

$$4Ri_3 = \alpha E - 2Ri_1 = (\alpha + 1)E + 4Ri, \text{ soit : } Ri_3 = \frac{1}{4}[(\alpha + 1)E + 4Ri].$$

On reporte ces deux résultats dans l'équation (2) :

$$-\frac{3}{2}(E + 4Ri) + \frac{1}{2}[(\alpha + 1)E + 4Ri] - 2Ri = 2E.$$

$$-6Ri + \frac{1}{2}\alpha E - E = 2E.$$

$$i = -\frac{E}{6R}\left(3 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Exercices de niveau 2

Exercice 5

a) D'après le schéma du montage, la loi des mailles donne immédiatement :

$$i = \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{E - kN}{R + R'}.$$

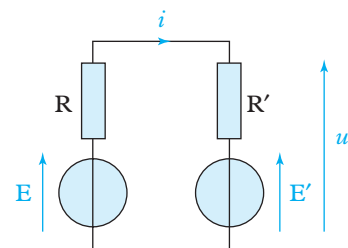
⚠ Le moteur est un récepteur. Sur le schéma du montage, la fém E et la fcém E' doivent donc avoir des sens opposés par rapport au courant.

b) La puissance motrice du moteur a pour expression :

$$\mathcal{P}_m = E'i = k \frac{N(E - kN)}{R + R'}.$$

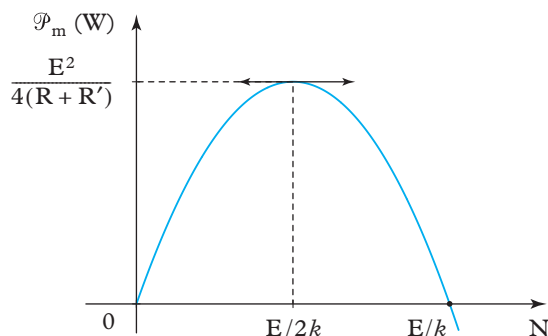
c) D'après son équation, la courbe donnant \mathcal{P}_m en fonction de N est une parabole à concavité vers le bas. Elle s'annule pour :

$$N(E - kN) = 0, \text{ soit : } N = 0 \text{ ou } N = \frac{E}{k}.$$



La puissance motrice \mathcal{P}_m est donc maximale pour $N_0 = \frac{E}{2k}$. Elle vaut alors :

$$\mathcal{P}_m(N_0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4(R + R')}.$$



☀ La concavité d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est donnée par le signe de a (si $a > 0$, la concavité est vers le haut; si $a < 0$, la concavité est vers le bas).

Exercice 6

Dans les montages T et ∇ , on a :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 & (\text{loi des mailles}) \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 & (\text{loi des nœuds}). \end{cases}$$

Seules les tensions u_1 et u_2 d'une part, les courants i_1 et i_2 d'autre part sont indépendants.

☀ D'après les équations, deux tensions et deux courants sont indépendants, mais leur choix est libre.

- Exprimons u_1 et u_2 en fonction de i_1 et i_2 dans le montage T :

$$\begin{cases} u_1 = R_3 i_3 - R_2 i_2 = -R_3 i_1 - (R_2 + R_3) i_2 & (a) \\ u_2 = R_1 i_1 - R_3 i_3 = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2. & (b) \end{cases}$$

- Exprimons i_1 et i_2 en fonction de u_1 et u_2 dans le montage ∇ :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{u_2}{r_2} - \frac{u_3}{r_3} = \frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) & (a') \\ i_2 = \frac{u_3}{r_3} - \frac{u_1}{r_1} = -u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{u_2}{r_3}. & (b') \end{cases}$$

Reportons les expressions de i_1 et i_2 obtenues (a') et (b') dans les expressions de u_1 et u_2 de (a) et (b) :

$$\begin{aligned} u_1 &= -R_3 \left[\frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] + (R_2 + R_3) \left[-u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[\frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} \right] \\ u_2 &= (R_1 + R_3) \left[\frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] - R_3 \left[-u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[\frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} \right]. \end{aligned}$$

De ces égalités, nous déduisons :

$$\begin{cases} R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} = 1 & (1) \\ \frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} = 1 & (3) \\ \frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} = 0 & (4) \end{cases}$$

On tire de (2) : $R_3 = \frac{r_2}{r_3} R_2$, que l'on reporte dans (1) :

$$R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

De même, on tire de (4) : $R_3 = \frac{r_1}{r_3} R_1$, que l'on reporte dans (3) :

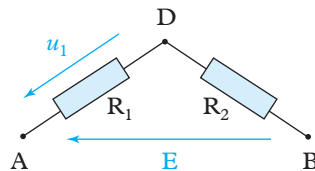
$$R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_1}{r_2 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Enfin, grâce à (2) ou (4), on trouve :

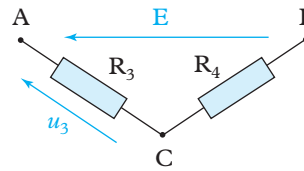
$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Exercice 7

1) a) On applique le théorème de division de tension pour les branches ADB, puis ACB.



$$\text{On a : } u_1 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



$$\text{On a : } u_3 = E \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$



Les théorèmes de division de tension et de division de courant sont des outils très puissants.

La tension u demandée vaut donc :

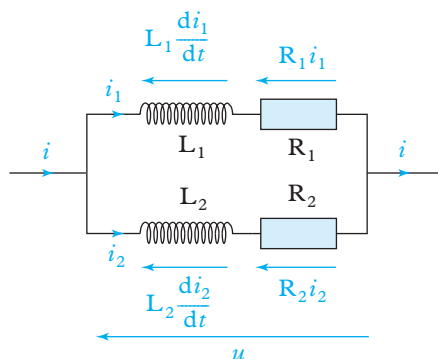
$$u = -u_1 + u_3, \text{ soit : } u = E \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{E(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

b) Le pont est équilibré si $u = 0$, d'où :

$$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0, \text{ soit : } R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{1\,827 \times 100}{5 \cdot 10^3} = 36,5 \, \Omega.$$

Exercice 8

• Montage 1 :



La tension u se retrouve aux bornes de chaque bobine. En notant i_1 et i_2 les courants les traversant, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 & \text{(a)} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{avec } i = i_1 + i_2 \quad \text{(c)}.$$

On reporte $i_2 = i - i_1$, tiré de (c), dans (b) :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - L_2 \frac{di_1}{dt} - R_2 i_1.$$

💡 On cherche à exprimer i_1 en fonction de i et de u , puis on injecte cette expression dans la caractéristique de la première bobine.

⚠ On pourrait aussi chercher à exprimer i_2 en fonction de i et de u , puis injecter cette expression dans la caractéristique de la deuxième bobine. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

On reporte $\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} i_1$, tiré de (a), dans l'équation ci-dessus :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - \frac{L_2}{L_1} u + \left(\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2 \right) i_1,$$

$$\text{d'où : } i_1 = \frac{u \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \quad \text{si } \frac{R_2}{R_1} \neq \frac{L_2}{L_1}.$$

On reporte cette expression dans (a) :

$$u = \frac{L_1}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \left[\left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{du}{dt} - L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} - R_2 \frac{di}{dt} \right] + \frac{R_1}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \left[\left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) u - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i \right].$$

Après simplification, on obtient :

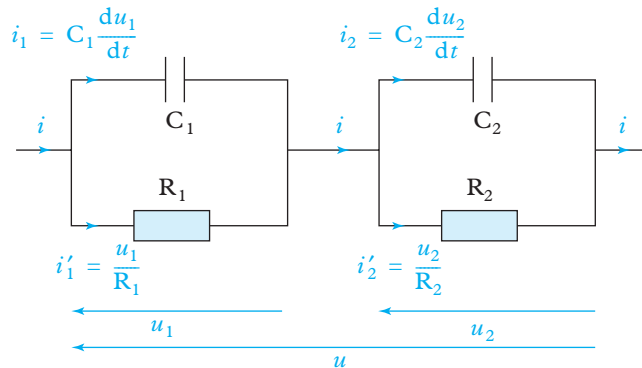
$$(L_1 + L_2) \frac{du}{dt} + (R_1 + R_2) u = L_1 L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{di}{dt} + R_1 R_2 i.$$

⚠ Si $\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1}$, l'expression est plus simple et on a immédiatement :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - \frac{L_2}{L_1} u, \text{ d'où : } u \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i.$$

Exercice 9

- Montage 2 :



On a pour chaque condensateur réel :

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} = C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2}, \quad \text{avec } u = u_1 + u_2.$$

Reportons $u_2 = u - u_1$ dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} - \frac{C_2}{C_1} i + \frac{C_2}{R_1 C_1} u_1 - \frac{u_1}{R_2}.$$

💡 On cherche à exprimer u_1 en fonction de i et de u , puis on injecte cette expression dans la caractéristique du premier condensateur.

⚠ On pourrait aussi chercher à exprimer u_2 en fonction de i et de u , puis injecter cette expression dans la caractéristique du deuxième condensateur. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

Reportons $\frac{du_1}{dt} = \frac{i}{C_1} - \frac{u_1}{R_1 C_1}$ dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} - C_2 \frac{du_1}{dt} + \frac{u}{R_2} - \frac{u_1}{R_2}$$

- Si $R_1 C_1 = R_2 C_2$, l'expression obtenue est :

$$i \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}.$$

- Si $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$, on extrait $u_1 = \frac{i \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2}}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}}$, d'où :

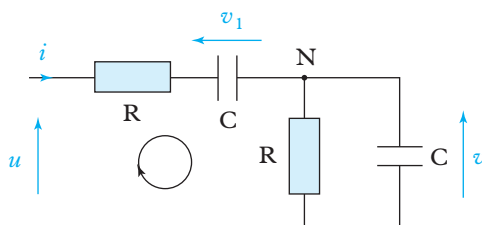
$$i = \frac{C_1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[\left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \frac{di}{dt} - C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{R_2} \frac{du}{dt} \right] + \frac{1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[\left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) i - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2} \right].$$

Après simplification, nous obtenons :

$$C_1 C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_1 R_2} = (C_1 + C_2) \frac{di}{dt} + i \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Exercice 9

a) Notons v_1 la tension aux bornes du premier condensateur et i l'intensité du courant le parcourant en convention récepteur.



- En appliquant la loi des nœuds en N, nous avons :

$$i = C \frac{dv_1}{dt} = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

- En appliquant la loi des mailles, nous avons aussi :

$$u = Ri + v_1 + v = R \left(\frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \right) + v_1 + v,$$

soit : $u = RC \frac{dv}{dt} + 2v + v_1 \quad (2)$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{du}{dt} = RC \frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{dv_1}{dt}.$$

- b) • La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. On a donc :

$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = v(0^-) = 0.$$



Les deux condensateurs sont déchargés, donc la tension à leurs bornes est nulle.

- Comme nous obtenons grâce à l'équation (2) :

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{1}{RC} (u(0^+) - 2v(0^+) - v_1(0^+)), \text{ soit } \frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}.$$