

# Généralités sur le champ magnétique

## Ouverture

Une particule chargée en mouvement, placée au voisinage d'un aimant ou d'une bobine parcourue par un courant électrique, subit une force qui modifie sa trajectoire. Cette force apparaît parce que l'aimant, tout comme le courant électrique de la bobine, modifient les propriétés de l'espace qui les entoure, en créant un champ magnétique  $\vec{B}$ . La force exercée sur la particule chargée s'écrit alors, comme cela a déjà été vu dans le cours de mécanique,  $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Dans ce chapitre, nous décrirons quelques propriétés des champs magnétiques et de leurs sources.

### Plan du chapitre ?

#### A. Outils mathématiques

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. Notion de champ .....             | x |
| 2. Lignes de champ .....             | x |
| 3. Flux d'un champ de vecteurs ..... | x |

#### B. Généralités sur le champ magnétique

- |  |   |
|--|---|
| 1. Les sources de champ magnétique .....               | x |
| 2. Notion de pôles .....                               | x |
| 3. Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde ..... | x |
| 4. Cartes de champ magnétique .....                    | x |
| 5. Moment magnétique.....                              | x |

Méthodes .....	x
----------------	---

Exercices .....	x
-----------------	---

## A. Outils mathématiques

### A.1. Notion de champ

En physique, on appelle **champ** une grandeur définie en tout point de l'espace. On distingue les **champs scalaires** et les **champs de vecteurs**. Dans le premier cas, la grandeur associée à un point de l'espace est un nombre, comme la température ou la pression. Dans le deuxième cas, il s'agit d'un vecteur, comme le vecteur vitesse des particules d'un fluide en mouvement ou le champ magnétique.

Un champ est dit **uniforme** s'il est le même en tout point. Il est dit **stationnaire** s'il est indépendant du temps.

### A.2. Lignes de champ

#### Définition 1

Une **ligne de champ** est une courbe dont la tangente en chaque point est parallèle au champ considéré.

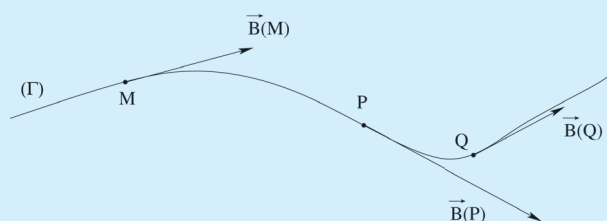


Fig. 1.  $(\Gamma)$  est une ligne de champ associée au champ  $\vec{B}$ .

### A.3. Flux d'un champ de vecteurs

#### A.3.1. Vecteur surface élémentaire

#### Définition 2

Soit une surface  $S$ . À chaque surface élémentaire  $dS$  de  $S$ , on peut associer un vecteur  $\vec{dS}$ , appelé vecteur surface élémentaire, tel que  $\vec{dS} = dS\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à  $S$ . Ainsi, le vecteur surface  $\vec{dS}$  est toujours orthogonale à la surface.

L'orientation de  $\vec{n}$ , et donc de  $\vec{dS}$ , dépend de la nature de la surface (fermée ou ouverte). Elle suit les règles énoncées ci-dessous.

- **Cas d'une surface fermée :** Si la surface  $S$  est fermée, c'est-à-dire si elle délimite un volume  $V$ , (fig. 2), alors  $\vec{n}$ , et donc  $\vec{dS}$ , est orienté vers l'extérieur de  $S$ .

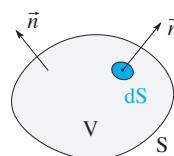


Fig. 2. Surface fermée.

- **Cas d'une surface ouverte :** Si la surface  $S$  est ouverte, alors elle s'appuie sur le contour  $\Gamma$  qui délimite l'ouverture de la surface (g. 3). L'orientation de la surface (c'est-à-dire celle de  $\vec{dS}$ ) découle du sens positif choisi pour l'orientation du contour  $\Gamma$  par application de la règle du tire-bouchon, ou de la règle de la main droite.

**Règle du tire-bouchon :** On « visse » le tire-bouchon dans le sens positif choisi sur  $\Gamma$ . Le sens dans lequel il avance est le sens de  $\vec{n}$  (fig. 3).

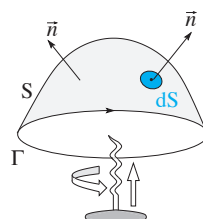


Fig. 3. Règle du tire-bouchon.

**Règle de la main droite :** On place la main **droite** le long de  $\Gamma$  de façon à ce que le sens positif aille du poignet aux doigts. L'orientation de  $\vec{n}$  correspond alors à celle du pouce placé à  $90^\circ$  des autres doigts (fig. 4).

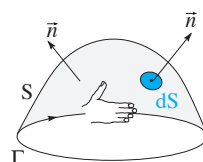


Fig. 4. Règle de la main droite.

### A.3.2. Définition du flux

#### Définition 3

Soit  $\vec{B}$  un champ de vecteurs et  $S$  une surface. Le flux  $\phi$  de  $\vec{B}$  à travers  $S$  s'écrit :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

où  $d\vec{S}$  est le vecteur surface élémentaire de l'élément de surface  $dS$  de  $S$ .

Le calcul du flux est donc lié à l'orientation de la surface.

Dans le cas où  $S$  est une surface fermée, on note souvent :

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

### A.3.3. Cas particulier important : flux d'un champ uniforme à travers une surface plane

Dans le cas d'une surface  $S$  plane et d'un champ  $\vec{B}$  uniforme, on a :

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos \theta dS$$

où  $\theta$  est l'angle, constant, entre  $\vec{B}$  et  $d\vec{S}$  et  $B = \|\vec{B}\|$ .

On obtient donc :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos \theta \iint_S dS = BS \cos \theta$$

#### Résultat 1

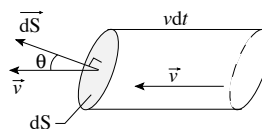
Dans le cas où  $S$  est une surface plane et  $\vec{B}$  un champ uniforme, le flux de  $\vec{B}$  à travers  $S$  s'écrit :

$$\phi = BS \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle, constant, entre le vecteur  $\vec{B}$ , de norme  $B$ , et la surface plane  $S$ .

### A.3.4. Signification physique

La notion de flux d'un champ de vecteurs est assez abstraite dans le cas général, mais peut être facilement comprise à partir de certains cas particuliers, comme le flux du vecteur vitesse d'une circulation d'eau, par exemple.



**Fig. 5.** Le volume d'eau traversant la surface  $dS$  durant  $dt$  est contenu dans le cylindre de longueur  $v dt$ . En se reportant à la figure 5, où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'eau, on voit que le volume d'eau  $dV$  traversant la surface  $dS$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , est contenu à l'instant  $t$  dans le cylindre de base  $dS$  et de longueur  $v dt$ , parallèle à  $\vec{v}$ .

1. Le volume d'un cylindre, droit ou incliné comme ici, est égal au produit de sa base, ici  $dS$ , par sa hauteur, ici  $v dt \cos \theta$ .

Ce volume est donc<sup>1</sup> :

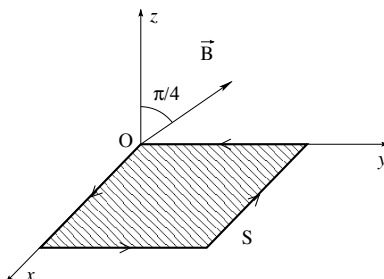
$$dV = dS v dt \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$$

Le flux de la vitesse à travers une surface  $S$  correspond donc au volume d'eau traversant cette surface par unité de temps, c'est-à-dire au débit volumique. C'est de cette constatation que vient le nom de « flux » donné à la quantité définie précédemment.

### Application 1 Calcul d'un flux

On considère, dans le plan  $Oxy$ , une surface rectangulaire  $S$  dont le contour est orienté comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Déterminer l'orientation d'un vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à la surface et calculer le flux du champ magnétique  $\vec{B} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y + \vec{u}_z)$  à travers  $S$ .



### Solution

D'après la règle de la main droite, ou celle du tire-bouchon, la normale positive à  $S$  est orientée dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

À une surface élémentaire  $dS$  est associé un vecteur  $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$ . On a alors :

$$\vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y + \vec{u}_z) \cdot dS \vec{u}_z = \frac{B_0}{\sqrt{2}} dS (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z + \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z) = \frac{B_0}{\sqrt{2}} dS$$

et donc :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \iint_S dS = \frac{B_0}{\sqrt{2}} S = B_0 S \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

ce qui correspond bien au résultat du paragraphe A.3.3.

## B. Généralités sur le champ magnétique

### B.1. Les sources de champ magnétique

Les plus anciennes sources de champ magnétique connues sont bien sûr les aimants. La propriété des aiguilles aimantées à s'orienter suivant le champ magnétique terrestre est utilisée depuis des siècles dans les boussoles. En 1820,

2. Hans Christian Oersted (1777-1851). Physicien et chimiste danois. Il établit la relation entre électricité et magnétisme. En chimie, il découvrit la pipéridine, principe actif du poivre noir, et réussit à produire de l'aluminium métallique. Il fonda l'université technique du Danemark.

3. Nikola Tesla (1856-1943). Inventeur et ingénieur américain d'origine croate. On lui doit de nombreux dispositifs en lien avec l'électricité comme le moteur à induction, la génératrice à champ tournant, utilisée pour produire de l'électricité à partir de l'énergie des chutes d'eau du Niagara, et un générateur à haute fréquence.

4. Ceci n'est plus vrai si on utilise des matériaux aux propriétés magnétiques (noyau ferromagnétique dans un électroaimant ou un transformateur par exemple).

5. Le pôle Nord de la Terre, vers lequel s'oriente le pôle nord d'une aiguille aimantée, correspond donc à un pôle sud au sens magnétique du terme.

Oersted<sup>2</sup> découvrit qu'une aiguille aimantée est déviée lorsqu'on établit un courant électrique à proximité. Ce dernier crée donc un champ magnétique. Cette découverte marque le début de l'électromagnétisme.

En pratique, pour créer des champs magnétiques grâce à des courants électriques, on utilise des bobines, qui fournissent un champ beaucoup plus intense que celui créé par un simple fil rectiligne. Le tableau ci-dessous donne quelques ordres de grandeur de champs magnétiques, exprimés en Tesla<sup>3</sup> (symbole T), l'unité du champ magnétique dans le système international.

S'il existe plusieurs sources de champ magnétique (par exemple deux bobines, ou un aimant et une bobine...), le champ magnétique total est la somme vectorielle des champs créés par chacune des sources.

Dans le cas d'un champ créé par un courant électrique, son intensité  $B$  est proportionnelle à celle du courant<sup>4</sup>. Ceci implique entre autres que le sens de  $\vec{B}$  change si le sens du courant change.

Sources	Intensité du champ magnétique
Champ magnétique terrestre	$\approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Fil parcouru par 1 A, à 1 cm	$2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Bobine longue, 1 000 spires/m, parcourue par 1 A	$10^{-3} \text{ T}$
Aimant permanent, à quelques mm	0,1 à 1 T
Appareil d'IRM	$\approx 5 \text{ T}$
Bobine supraconductrice	$\leq 45 \text{ T}$

Tableau 1. Ordres de grandeur de quelques champs magnétiques

## B.2. Notion de pôles

Une aiguille aimantée, comme n'importe quel aimant droit, s'oriente toujours de la même façon lorsqu'elle est soumise à la seule action du champ magnétique terrestre. L'extrémité de l'aiguille pointant vers le Nord est appelée pôle nord, et l'autre pôle sud<sup>5</sup>.

De même, lorsqu'on approche un aimant d'une bobine, l'un de ses pôles est attiré par une face et repoussé par l'autre. Comme un aimant, une bobine possède donc un pôle nord et un pôle sud. Par contre, à la différence d'un aimant, leur position n'est pas figée puisqu'elle dépend du sens du courant parcourant la bobine. On peut la déterminer par une des règles suivantes :

- règle de la main droite : lorsqu'une main droite est placée sur une bobine de façon à ce que le courant entre par le poignet et sorte par les doigts, le pouce indique le pôle nord lorsqu'il est placé à  $90^\circ$  des autres doigts (fig. 6).

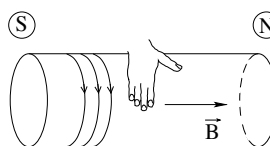


Fig. 6. Détermination des pôles par la méthode de la main droite.

- règle du tire-bouchon : lorsqu'on tourne un tire-bouchon dans une bobine en suivant le sens du courant, il progresse du pôle sud vers le pôle nord (fig. 7).

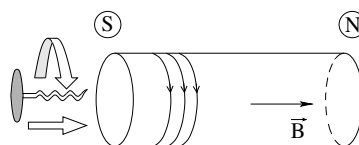


Fig. 7. Détermination des pôles par la méthode du tire-bouchon.

- on peut aussi écrire les lettres « N » pour nord et « S » pour sud sur les faces de la bobine en terminant les extrémités des lettres par des flèches de même sens que le courant (fig. 8).

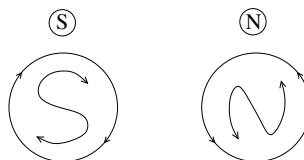


Fig. 8. Une troisième méthode de détermination des pôles.

À proximité du pôle nord, les lignes de champs sortent de la bobine ou de l'aimant alors qu'elle y entrent à proximité du pôle sud.

Notons enfin qu'il est impossible de séparer un pôle nord d'un pôle sud. Ainsi, si on casse un aimant, chacun des morceaux possédera son propre pôle nord et son propre pôle sud. Il en est bien évidemment de même si on sépare en deux une bobine parcourue par un courant électrique. Par contre, il existe des dispositifs multipolaires, comportant plusieurs paires de pôles nord et de pôles sud.

### B.3. Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

Lorsqu'on mesure le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine longue, ou solénoïde, et loin de ses extrémités, ce champ magnétique est pratiquement identique à celui que créerait un solénoïde de longueur infinie. On montre que, dans ce cas, le champ  $\vec{B}$  est uniforme et parallèle à l'axe (fig. 9).

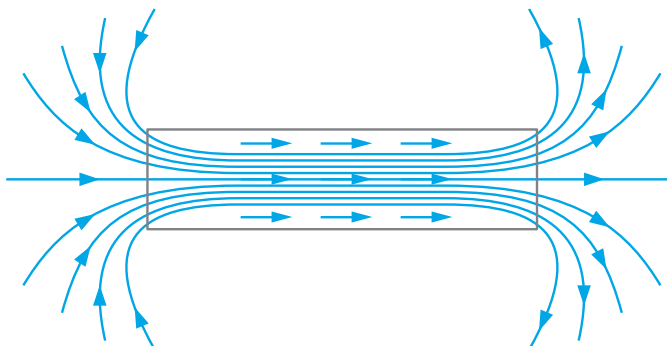


Fig. 9. Carte du champ magnétique créé par une bobine. La bobine est représentée par le rectangle au centre de la figure, sur lequel on a fait figurer deux spires. La longueur des flèches étant proportionnelle à l'intensité du champ magnétique, on constate qu'il est pratiquement nul à l'extérieur. Les lignes courbes sont des lignes de champ. La figure est de révolution autour de l'axe de la bobine.

Son sens peut être déterminé par une des règles du paragraphe B.2. On admettra le résultat suivant :

#### Résultat 2

Soit un solénoïde de longueur  $l$ , d'axe  $Oz$ , comportant  $N$  spires parcourues par un courant d'intensité  $I$ . On note  $n = \frac{N}{l}$  le nombre de spires par unité de longueur. L'orientation de l'axe  $Oz$ , de vecteur directeur  $\vec{u}_z$ , correspond à celle de la normale positive aux spires. Dans l'approximation du solénoïde infini, le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde est donné par

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

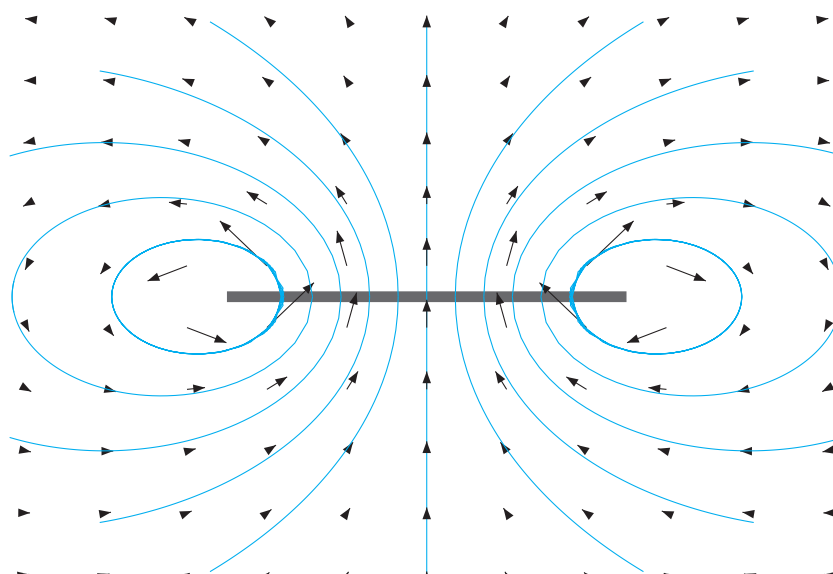
où  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la perméabilité du vide<sup>6</sup>.

Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde infini.

6. H est le symbole du Henry, unité utilisée pour l'inductance.

## B.4. Cartes de champ magnétique

La figure 10 représente le champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant, ainsi que quelques lignes de champ. Comme dans le cas de la bobine, cette figure est de révolution autour de l'axe de la spire. Ceci se comprend aisément puisque la spire, comme la bobine, sont invariantes par toute rotation autour de leur axe. Il en est donc de même du champ qu'elles créent. Cette figure permet d'illustrer quelques propriétés du champ magnétique.

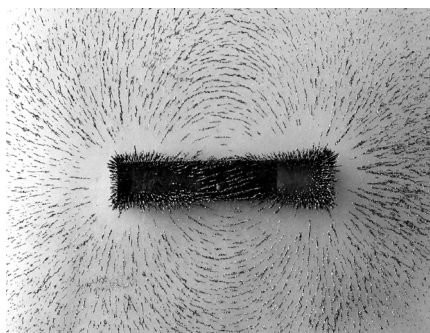


**Fig. 10.** Carte du champ magnétique créé par une spire circulaire. La spire, vue de profil, est représentée par le segment épais au milieu de la figure. Elle est parcourue par un courant allant de la gauche vers la droite de la figure. Les flèches représentent le vecteur champ magnétique en divers points de l'espace et les courbes rouges quelques lignes de champ.

### B.4.1. Comportement à proximité des sources

Tout d'abord, on constate que les lignes de champ s'enroulent autour des sources, ici le fil constituant la spire. Le champ « sort » par le pôle nord et « rentre » par le pôle sud. Ceci est très général, comme on a déjà pu le remarquer sur la figure 9 représentant une carte de champ magnétique créé par un solénoïde.

Dans le cas d'un aimant droit, l'allure de la carte de champ est similaire à celle du solénoïde. La photographie de la figure 11, où les lignes de champ d'un aimant droit sont visualisées avec de la limaille de fer, atteste de cette similitude.



**Fig. 11.** Lignes de champ magnétique créées par un aimant.

### B.4.2. Écartement des lignes de champ et intensité du champ

On constate également que les lignes de champ s'écartent dans les zones où le champ magnétique est le plus faible (flèches les plus courtes) et se rapprochent dans les zones où il est le plus intense. Ceci est très net sur la figure 9 où les lignes de champ s'écartent fortement à la sortie du solénoïde, zone dans laquelle le champ devient très faible par rapport à celui présent à l'intérieur. Inversement, à l'intérieur, les lignes de champ sont parallèles, ce qui signifie que le champ est uniforme dans cette zone.

On peut préciser la relation entre intensité du champ magnétique et écartement des lignes de champ en utilisant une propriété plus générale du champ magnétique : c'est un champ à flux conservatif. Cela signifie que son flux est nul à travers n'importe quelle surface fermée.

Considérons donc la surface fermée formée par la réunion des surfaces  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  de la figure 12.

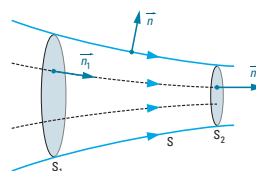


Fig. 12. Tube de champ magnétique.

La surface  $S$  (surface latérale) est une portion de ce que l'on appelle un tube de champ, c'est-à-dire une surface formée uniquement de lignes de champ. Le champ magnétique étant, par définition, tangent à ses lignes de champ, son flux à travers  $S$  est nul. En effet, en tout point de  $S$ , le vecteur surface  $d\vec{S}$  est orthogonal à  $S$  et donc à  $\vec{B}$ . Dans l'analogie hydraulique du paragraphe A.3.4, la surface  $S$  constituerait la paroi d'un tuyau dans lequel s'écoulerait de l'eau. Les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont des sections du tube de champ. Le champ magnétique étant à flux conservatif, cela signifie que le flux « entrant » par  $S_1$  est égal au flux sortant par  $S_2$ , de sorte que le flux global à travers  $S$  soit nul. Si, en première approximation, on considère que  $\vec{B}$  est uniforme sur chacune des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  et normal à ces surfaces, on a :

$$B_1 S_1 \approx B_2 S_2$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont les intensités des champs magnétiques au niveau de  $S_1$  et  $S_2$ .

#### Résultat 3

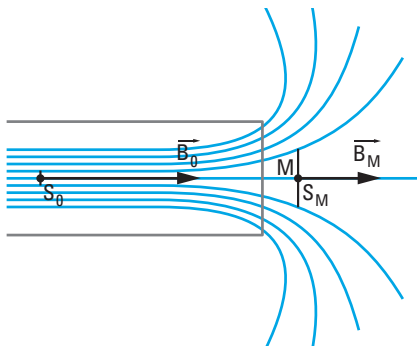
Le flux de  $\vec{B}$  est constant à travers toutes les sections d'un même tube de champ. Ainsi, sur une carte de champ magnétique, les zones où les lignes de champ sont les plus écartées sont celles où le champ est le plus faible.

#### Application 2 Estimation de l'intensité d'un champ magnétique

On considère la carte de champ magnétique ci-dessous, correspondant au champ créé par un solénoïde comportant  $n = 50$  spires par mètre et parcouru par un courant  $I = 1\text{A}$ . Les lignes de champ sur la ligne sont de révolution autour de l'axe du solénoïde.

1. Déterminer l'intensité  $B_0$  du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde dans l'approximation du solénoïde infini.
2. En utilisant la conservation du flux du champ magnétique et la carte de champ, déduire de la question précédente l'ordre de grandeur de l'intensité  $B_M$  du champ en M. On n'hésitera pas, si nécessaire, à mesurer des longueurs directement sur le schéma.





### Solution

1. À l'intérieur,  $B_0 = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 50 \times 1 = 63 \mu\text{T}$ .

2. On considère la surface  $S_M$  orthogonale à la figure et passant par M. Cette surface est une section du même tube de champ que la surface  $S_0$  à l'intérieur du solénoïde. Donc le flux à travers  $S_M$  est le même que le flux à travers  $S_0$ . En considérant que les champs magnétiques sont uniformes sur ces deux surfaces et orthogonaux à celles-ci, on a donc :

$$S_0 B_0 = S_M B_M$$

Les lignes de champ possédant la symétrie de révolution autour de l'axe du solénoïde, les surfaces  $S_0$  et  $S_M$  sont des cercles donc leur aire est proportionnelle au carré de leur diamètre, que l'on peut mesurer sur la figure. On trouve que le rapport des diamètres vaut 0,31. Donc :

$$B_M = (0,31)^2 B_0 = 6,1 \mu\text{T}$$

## B.5. Moment magnétique

### B.5.1. Boucle de courant plane

Soit un circuit filiforme fermé ( $\Gamma$ ) contenu dans un plan et parcourue par un courant  $I$ . Ce circuit fermé définit une surface  $S$ , à laquelle on peut associer un vecteur surface  $\vec{S} = S\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire, orthogonal à  $S$  et orienté conformément au sens de  $I$  (cf. A.3)<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> On aurait aussi pu poser, de façon équivalente,  $\vec{S} = \iint_S d\vec{S}$ , où  $d\vec{S}$  est défini comme au paragraphe A.3.

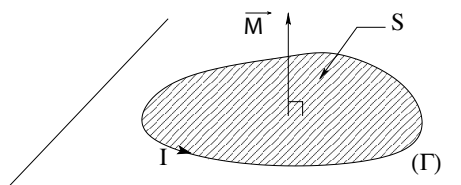


Fig. 13. Boucle de courant plane.

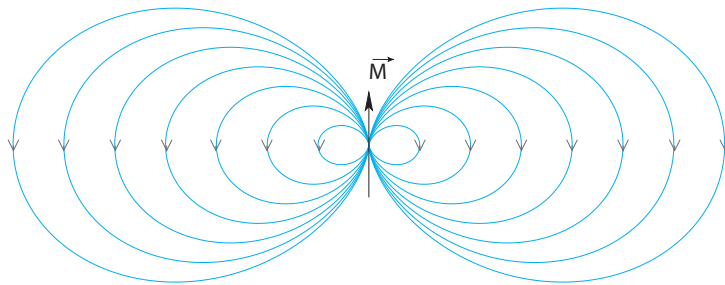
#### Définition 4

Le moment magnétique  $\vec{M}$  associé à une boucle de courant plane ( $\Gamma$ ) est :

$$\vec{M} = I\vec{S}$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface associé à la boucle ( $\Gamma$ ) et  $I$  l'intensité du courant qui la parcourt.  $\vec{M}$  s'exprime en  $\text{A} \cdot \text{m}^2$  et est orthogonal au plan contenant la boucle de courant.

On peut montrer que le champ magnétique créé par une telle boucle de courant ne dépend que de  $M$ , si on se place à une distance de la boucle grande devant ses dimensions. L'expression de ce champ n'est pas au programme mais la figure 14 donne l'allure des lignes de champ.



**Fig. 14.** Lignes de champ à grande distance créées par un moment magnétique  $\vec{M}$ . La boucle de courant associée est orthogonale au moment magnétique. On notera la similitude avec les lignes de champ créées par une spire circulaire. Les flèches sur les lignes de champ indiquent le sens du champ.

Par extension, on pourra aussi associer un moment magnétique à un circuit non plan, comme une bobine, si on s'intéresse au champ créé à des distances suffisamment grandes pour ne pas avoir à tenir compte de son épaisseur. Le moment magnétique sera alors égal à la somme des moments magnétiques créés par chaque spire.

### B.5.2. Cas des aimants

Il semble a priori étrange qu'un aimant et un courant électrique puissent produire les mêmes effets mécaniques (déviations de particules chargées par exemple). On modélise donc ces effets en introduisant la même notion de champ magnétique dans les deux cas. De plus, si l'on compare les lignes de champ correspondant à un aimant droit et à une bobine, on trouve des courbes de même allure (fig. 9 et 11).

**8.** André Marie Ampère (1775-1836). Physicien français. Il jeta les bases de l'électromagnétisme, inventa le galvanomètre, le premier télégraphe et, avec Arago, l'électroaimant. Il contribua également au développement de la chimie et des mathématiques. Son nom a été donné à l'unité d'intensité du courant électrique.

Dès 1820, Ampère<sup>8</sup>, constatant ces similarités, a émis l'hypothèse que le champ magnétique d'un aimant était dû à des courants microscopiques. Cette hypothèse a été confirmée bien plus tard, au cours du XX<sup>e</sup>, lorsqu'a été découverte la structure atomique de la matière. Ces courants microscopiques sont liés au mouvement des électrons dans l'atome (on peut associer un moment magnétique à un électron « tournant » autour du noyau) mais aussi à leur moment magnétique propre, ou spin, indépendant de tout mouvement.

Dans la plupart des matériaux, tous ces moments magnétiques se compensent. Dans certains matériaux, dits

ferromagnétiques, ces moments magnétiques peuvent tous s'aligner en présence d'un champ magnétique extérieur. Si cet alignement persiste en l'absence de champ extérieur, on obtient un aimant permanent, auquel on peut associer un moment magnétique correspondant à la somme de tous les moments magnétiques microscopiques. Ce moment dépend du matériau et de la taille de l'aimant. Néanmoins, dans le cas d'un aimant usuel, il est très approximativement de l'ordre de  $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

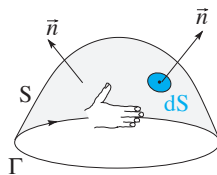
# L'essentiel

- Un champ magnétique est caractérisé en tout point de l'espace par un vecteur,  $\vec{B}$ . Une courbe dont la tangente en tout point est parallèle à  $\vec{B}$  est appelée une **ligne de champ**. Une surface formée uniquement de lignes de champ est un tube de champ.

- À tout élément  $dS$  d'une surface  $S$ , on associe un vecteur surface élémentaire  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $dS$ . Le sens de  $\vec{n}$  dépend de la nature de la surface :

- si  $S$  est une surface fermée,  $\vec{n}$  est orienté vers l'extérieur de  $S$ .

- si  $S$  est une surface ouverte, l'orientation de  $\vec{n}$  est fixée par l'orientation du contour délimitant l'ouverture de  $S$ . Elle s'obtient en utilisant, par exemple, la règle de la main droite.



Pour une surface plane, on définit un vecteur surface  $\vec{S} = \iint_S d\vec{S} = S\vec{n}$ .

- Le **flux**  $\phi$  d'un vecteur  $\vec{B}$  à travers une surface  $S$  est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas d'une surface  $S$  plane et d'un champ  $\vec{B}$  uniforme, on a :

Méthodes

$$\phi = BS \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{S}$ .

- Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  est nul à travers toute surface fermée. On en déduit que ce flux est constant à travers toutes les sections d'un même tube de champ et donc que, plus les lignes de champ sont rapprochées, plus le champ magnétique est intense.

- Le champ magnétique créé par un solénoïde infini d'axe  $Oz$ , parcouru par un courant  $I$ , est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur. Si l'axe  $Oz$  est orienté dans le sens positif correspondant au sens du courant, le champ magnétique à l'intérieur est donné par :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

où  $n$  est le nombre de spires par mètre et  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la perméabilité du vide.

- À une spire plane de surface  $S$  parcourue par un courant  $I$ , on associe son **moment magnétique**  $\vec{M}$  tel que :

$$\vec{M} = I\vec{S}$$

Un aimant peut aussi être caractérisé par son moment magnétique.

# Mise en œuvre

## Méthode n°1

### Comment calculer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface plane?

Soit un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire constant. On cherche à calculer le flux  $\phi$  de  $\vec{B}$  à travers une surface plane  $S$ .

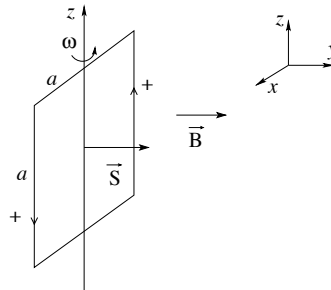
#### → Savoir faire

- ❶ Orienter la surface, si ce n'est pas déjà fait dans l'énoncé.
- ❷ Utiliser au choix  $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  ou  $\phi = BS\cos\theta$ .

#### → Application

Soit une bobine carrée, de côté  $a$ , comportant  $N$  spires, en rotation autour d'un axe  $Oz$  joignant les milieux de deux côtés opposés. On note  $\omega$  la vitesse de rotation. Cette bobine est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0\vec{u}_y$  uniforme, orthogonal à son axe de rotation. À  $t = 0$ , le plan du cadre est orthogonal à l'axe  $Oy$ .

1. Déterminer le flux  $\phi(t)$  de  $\vec{B}$  à travers la bobine en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $\omega$  et  $t$ .
2. Tracer la courbe représentative de  $\phi$  en fonction du nombre de tours  $n$  effectués par le cadre.



#### Solution

❶ On commence par orienter le cadre. On choisit le sens de parcours de façon à ce que le vecteur surface  $\vec{S}$  et  $\vec{B}$  soient de même sens à  $t = 0$ . L'angle  $\theta$  entre ces deux vecteurs à un instant  $t$  quelconque sera alors  $\theta = \omega t$ . On en déduit le flux à travers une spire :

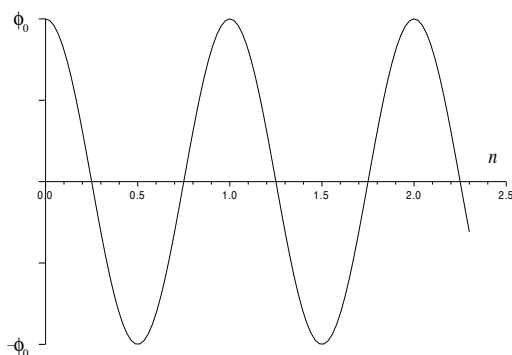
$$\phi = B_0 S \cos\theta = Ba^2 \cos(\omega t)$$

La bobine comporte  $N$  spires, donc  $\phi = N\phi$  soit :

$$\phi = NBa^2 \cos(\omega t) = \phi_0 \cos(\omega t)$$

où  $\phi_0 = NBa^2$ .

❷ Le nombre de tours effectués par le cadre à un instant  $t$  est  $n = \frac{\omega t}{2\pi}$ . On trace donc la courbe correspondant à  $\phi(n) = \phi_0 \cos(2\pi n)$  qui est représentée ci-après.



## Méthode n°2

### Savoir exploiter une carte des lignes de champ

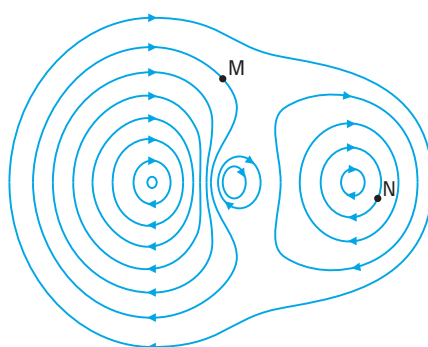
Pouvoir trouver, à partir des lignes de champ, la position des sources, la direction du champ et les zones dans lesquelles le champ est plus intense ou plus faible.

#### → Savoir faire

- ❶ Orientation du champ : il est, par définition, tangent aux lignes de champ.
- ❷ Intensité du champ : plus les lignes sont resserrées, plus le champ est intense. Une zone où les lignes de champ sont parallèles est une zone où le champ est uniforme.
- ❸ Détermination de la position des sources : les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des sources, qui correspondent aussi à des maxima de l'intensité du champ.

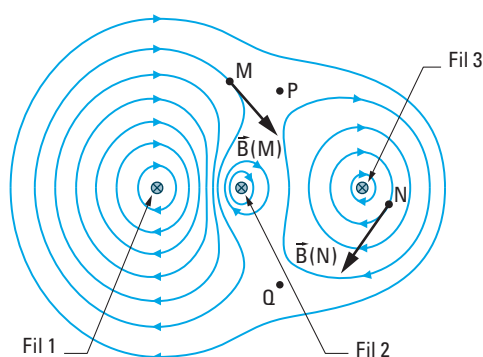
#### → Application

La carte de champ ci-dessous correspond au champ magnétique créé par 3 fils de grande longueur parcourus par des courants électriques orthogonaux au plan de la figure. Les flèches sur les lignes de champ indiquent le sens de  $\vec{B}$ .

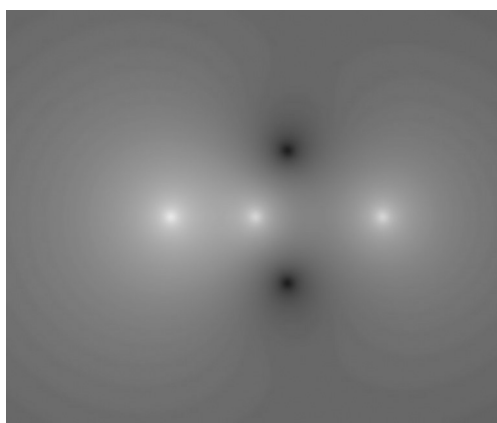


1. Où sont situés les fils ?
2. Déterminer le sens des courants dans les fils, sachant que le courant du fil central « sort » de la figure.
3. Déterminer les zones où le champ est le plus faible.
4. Représenter qualitativement de  $\vec{B}$  aux points M et N.

## Solution



- ❶ Les positions des fils sont indiquées sur la figure ci-dessus. On voit nettement que les lignes de champ s'enroulent autour de ces trois positions.
- ❷ À proximité d'un des fils, l'influence des deux autres fils est faible et donc on peut considérer que le champ magnétique près d'un fil ne dépend que de ce fil. Les lignes de champ tournent dans le sens trigonométrique autour du fil central et dans le sens horaire autour des deux autres. Le sens de  $\vec{B}$  dépendant du sens du courant, on en déduit que les courants, dans les fils 1 et 3, sont dirigés vers l'arrière de la figure.
- ❸ Les zones où le champ est le plus faible sont les zones dans lesquelles les lignes de champ sont le plus écartées, c'est-à-dire ici autour des points P et Q. Ceci est confirmé par la simulation ci-dessous où les zones les plus claires sont celles où le champ est le plus intense.



- ❹ Le champ magnétique est tangent aux lignes de champ passant par les points M et N. De plus, les lignes de champ sont plus resserrées en N qu'en M, donc le champ en N est plus intense qu'en M (vecteur plus long en N qu'en M).

# Exercices

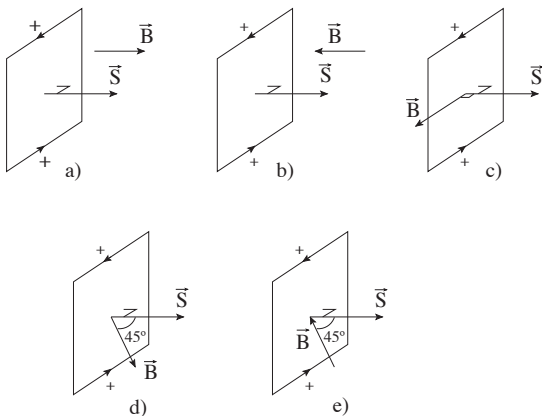
## Vrai/Faux

- 1) Dans une carte de champ magnétique, les zones où le champ est le plus intense sont aussi celles où les lignes de champ sont le plus rapprochées.
- 2) On ne peut pas savoir si un champ magnétique est uniforme en connaissant uniquement ses lignes de champ.
- 3) Si on double l'intensité du courant circulant dans un solénoïde, on double l'intensité du champ magnétique créé.
- 4) Le sens du courant circulant dans une bobine n'a aucune incidence sur le champ magnétique qu'elle crée.
- 5) Le flux d'un champ magnétique uniforme à travers un cadre rectangulaire est maximal quand le champ magnétique est parallèle à un des côtés du cadre.
- 6) Pour calculer le flux d'un champ à travers une surface ouverte, il est nécessaire que le contour de cette surface soit orienté.

## Niveau 1

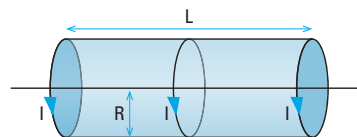
### Ex. 1 Flux à travers un cadre

On considère un cadre orienté de vecteur surface  $\vec{S}$ . Ce cadre est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Classer les cinq situations de la figure ci-dessous par ordre de flux décroissant.



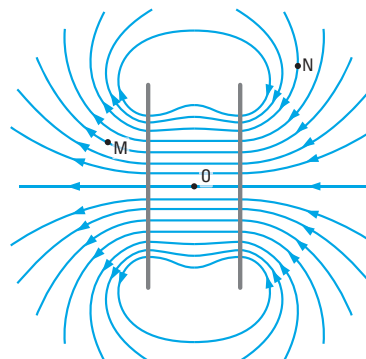
### Ex. 2 Moment magnétique d'un solénoïde

Exprimer le moment magnétique  $\vec{M}$  d'un solénoïde cylindrique d'axe de révolution Oz, de rayon R et de longueur L, comprenant n spires par mètre, chacune parcourue par un courant d'intensité I.



### Ex. 3 Bobines de Helmholtz

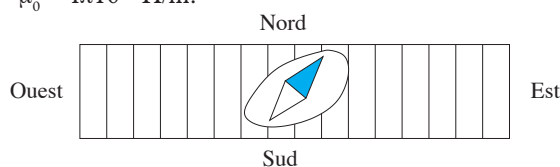
On considère deux bobines de rayons R parcourues par le même courant I (même intensité et même sens), séparées d'une distance R. Un tel dispositif est appelé *bobines de Helmholtz*. La figure ci-dessous représente quelques lignes de champ associées à ces deux bobines.



- 1) Les bobines de Helmholtz sont utilisées pour créer un champ magnétique uniforme. Dans quelle région cela est-il le cas ?
- 2) Dans quelles zones le champ est-il le plus faible ?
- 3) Représenter qualitativement le vecteur  $\vec{B}$  aux points M et N.
- 4) Indiquer le sens du courant pour chacune des bobines.
- 5) Que vaudrait le champ en O si on inversait le sens du courant dans une des deux bobines ?

### Ex. 4 Mesure du champ magnétique terrestre

On dispose d'un solénoïde comportant  $n = 100$  spires/m, parcouru par un courant d'intensité  $I = 100$  mA. On place ce solénoïde sur une table horizontale et on oriente son axe dans la direction Est-Ouest. On introduit, à l'intérieur, une aiguille aimantée mobile en rotation autour d'un axe vertical. Cette aiguille s'oriente parallèlement à la composante horizontale du champ magnétique existant à l'endroit où elle se trouve. On donne la perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m.

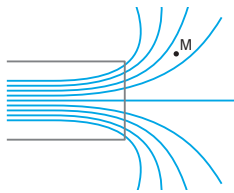


- 1) Calculer l'intensité du champ magnétique créé par le solénoïde.
- 2) Sachant que l'aiguille aimantée fait un angle  $\theta = 58^\circ$  avec l'axe du solénoïde, déterminer la valeur de la composante horizontale  $B_H$  du champ magnétique terrestre.

## Niveau 2

### Ex. 5. Calcul approché de l'intensité d'un champ magnétique.

On considère la carte de champ magnétique ci-dessous, correspondant au champ créé par un solénoïde. La figure est de révolution autour de l'axe du solénoïde. À l'intérieur du solénoïde, dans la zone où le champ est uniforme et parallèle à l'axe, son intensité vaut  $B_0 = 100 \mu\text{T}$ . On demande de déterminer une valeur approchée du champ magnétique  $B(M)$  au point M. On considérera que le champ  $\vec{B}(M)$  fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe du solénoïde.



## Niveau 3

### Ex. 6. Moment magnétique d'un noyau atomique

On cherche l'expression du moment magnétique du noyau d'un atome dans le modèle suivant. Le noyau

est supposé être constitué par une sphère de petit rayon  $a$  uniformément chargée en volume et tournant autour de l'un de ses diamètres avec la vitesse angulaire  $\omega$ . L'axe de rotation est l'axe  $z'z$ , on utilise le repérage des coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\phi$ , la base locale sphérique étant alors  $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  et l'origine du repère le centre O du noyau de l'atome. Celui-ci possède  $Z$  protons, on note  $-e$  la charge électronique (négative).

1) On considère une spire de rayon  $R$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Rappeler l'expression de son moment magnétique  $\vec{M}$ .

2) On considère un élément  $d\tau$  de volume du noyau centré sur un point M dont les coordonnées sont  $r, \theta$  et  $\phi$ .

a) Donner l'expression de l'élément de volume en fonction des variations élémentaires  $dr, d\theta$  et  $d\phi$  des coordonnées  $r, \theta$  et  $\phi$ .

(On rappelle qu'il s'agit d'un parallélépipède dont chaque arête a pour longueur celle parcourue par le point M (de coordonnées  $r, \theta$  et  $\phi$ ) dans la variation élémentaire de l'une des coordonnées, les autres étant alors considérées comme fixes.)

b) Quel est le volume élémentaire engendré par la rotation du volume  $d\tau$  autour de l'axe ( $z'z$ ) ?

c) Quelle est la charge  $dq$  contenue dans ce volume ?

d) Quelle est la durée  $T$  d'un tour effectué par cette charge ? En déduire l'expression de l'intensité  $di$  circulant dans la spire équivalente au volume  $d\tau$  mobile.

e) Écrire le moment magnétique élémentaire  $d\vec{M}$  associé à cette spire.

3) En déduire l'expression du moment magnétique total  $\vec{M}$  du noyau dans ce modèle.

Donnée :  $\int \sin^3 \alpha d\alpha = -\cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3}$ .

## Indications

### Ex 1

Utiliser  $\phi = B \cos \theta$ .

### Ex 2

Faire la somme des moments magnétiques de chacune des spires.

### Ex 5

Considérer le tube de champ passant par M et dont l'intersection avec le plan de figure est délimitée par

les deux lignes de champ de part et d'autre de M. Une section de ce tube est un anneau de même axe que le solénoïde.

### Ex 6

Le volume élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ .



# Solutions des exercices

## Exercices de Vrai/Faux

### Exercice 1

- 1) Vrai.
- 2) Faux. Une zone dans laquelle le champ est uniforme est caractérisée par des lignes de champ parallèles.
- 3) Vrai. L'intensité du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant.
- 4) Faux. Une inversion du sens du courant provoque une inversion du sens de  $\vec{B}$ , ce qui se traduit par une inversion des pôles.
- 5) Faux. Le flux est proportionnel au cosinus de l'angle formé par le champ magnétique et la normale orientée au cadre. Il est donc nul quand le champ magnétique est parallèle à un des côtés du cadre.
- 6) Vrai. Calculer un flux à travers une surface n'a de sens que si la surface est orientée. Dans le cas d'une surface ouverte, l'orientation de la surface est donnée par l'orientation du contour sur lequel elle s'appuie.

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

Soit  $\phi$  le flux magnétique à travers le cadre, de surface  $S$ . On a montré en cours que  $\phi = BS \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle  $(\vec{B}, \vec{S})$ . Pour les différents cas de l'exercice, on a :

$$\theta_a = 0^\circ \quad \theta_b = 180^\circ \quad \theta_c = 90^\circ \quad \theta_d = 45^\circ \quad \theta_e = 135^\circ$$

On en déduit donc :

$$\phi_a > \phi_d > \phi_c > \phi_e > \phi_b$$

### Exercice 2

Si l'on tourne un tire-bouchon dans le sens de l'intensité  $I$ , il se translate dans la direction et le sens de l'axe  $(Oz)$  ; on en déduit  $\vec{n} = \vec{u}_z$ .

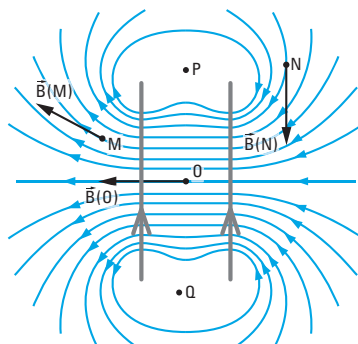
Une spire possède le moment magnétique  $\vec{M} = I\vec{S} = \pi R^2 I \vec{u}_z$ . Le solénoïde compte  $n$  spires par mètre et sa longueur est  $L$  ; il a donc  $N = nL$  spires. Toutes ces spires sont identiques, orientées de la même manière, et le moment magnétique total est la somme des moments individuels :

$$\vec{M} = NI\vec{S} = nL\pi R^2 I \vec{u}_z.$$

### Exercice 3

- 1) Le champ magnétique est uniforme là où les lignes de champ sont parallèles, c'est-à-dire entre les bobines, autour du point  $O$ .

- 2) Le champ magnétique est le plus faible là où les lignes de champ sont les plus espacées. C'est le cas ici autour des points P et Q.



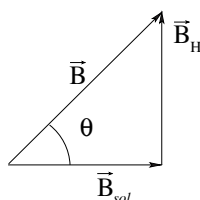
- 3) Le vecteur  $\vec{B}$  est tangent aux lignes de champ et son sens est donné par celui des lignes de champ.  
 4) Le sens du courant dans les bobines peut être déterminé à partir d'une des règles vues en cours (main droite ou tire-bouchon). Il est indiqué sur la figure ci-dessus.  
 5) Dans la configuration des bobines de Helmholtz, les champs créés par les deux bobines sont de même sens et se renforcent au point O. Si l'on inversait le sens du courant dans une des deux bobines, les champs créés par les deux bobines seraient de sens opposés en O. De plus, la position de ce point est la même par rapport à chacune des deux bobines ; les normes des champs créés par les deux bobines y sont donc identiques. Le champ en O serait donc nul.

#### Exercice 4

- 1) Soit  $\vec{B}_{sol}$  le champ magnétique créé par le solénoïde. On a d'après le cours :

$$B_{sol} = \mu_0 n I = 4\pi 10^{-7} \times 100 \times 0,1 = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

- 2) Le champ magnétique  $\vec{B}$  au niveau de l'aiguille, correspond à la superposition du champ magnétique  $\vec{B}_{sol}$  et du champ magnétique terrestre. Le solénoïde étant orienté Est-Ouest,  $\vec{B}_{sol}$  est orthogonal à la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui est, elle, orientée Sud-Nord.



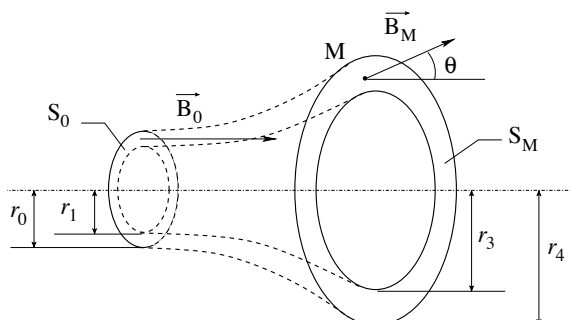
On a donc :

$$B_H = B_{sol} \tan \theta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

## Exercices de niveau 2

#### Exercice 5

Considérons le tube de champ représenté sur la figure ci-dessous. Il passe par M et est délimité par les deux lignes de champ situées de part et d'autre de ce point.



Le flux du champ magnétique est le même à travers les deux sections de tube de champ représentées sur le schéma : la section  $S_0$  traversée par le champ  $\vec{B}_0$  à l'intérieur du solénoïde (flux noté  $\phi_0$ ) et la section  $S_M$  contenant le point M,  $S_M$  (flux noté  $\phi_M$ ).

On a, d'après le cours :

$$\phi_0 = B_0 S_0 = \pi B_0 (r_0^2 - r_1^2).$$

On procède de même pour  $\phi_M$  en prenant de plus en compte l'angle entre la normale à  $S_M$  et  $\vec{B}_M$ , soit  $45^\circ$  d'après l'énoncé. On a donc :

$$\phi_M = \pi B_M (r_4^2 - r_3^2) \cos(45^\circ)$$

en supposant que le champ magnétique est uniforme sur  $S_M$ . Donc, finalement

$$\phi_0 = \phi_M \Leftrightarrow B_M = B_0 \sqrt{2} \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_4^2 - r_3^2}$$

Après avoir mesuré les longueurs sur la figure donnée par l'énoncé, on obtient :

$$B_M \approx 14 \mu\text{T}$$

## Exercices de niveau 3

### Exercice 6

1) On a :  $\vec{M} = I\vec{S} = \pi R^2 I \vec{u}_z$ , où  $(Oz)$  est l'axe de révolution de la spire orientée conformément au sens du courant dans la spire.

2) a) La figure ci-contre rappelle la définition des coordonnées sphériques et permet de visualiser les distances élémentaires parcourues par le point M lors de la variation élémentaire d'une seule des coordonnées.

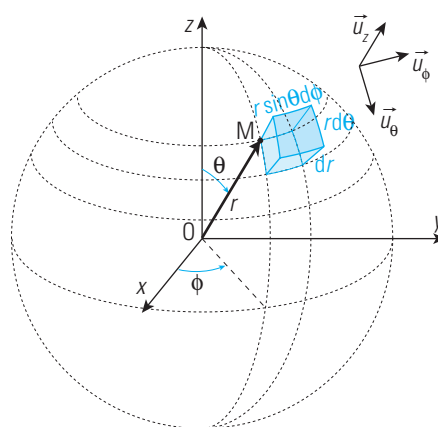
- Lorsque  $r$  varie de  $dr$ , à  $\theta$  et  $\phi$  fixés, le point M parcourt la distance  $dr$ .
- Lorsque  $\theta$  varie de  $d\theta$ , à  $r$  et  $\phi$  fixés, le point M parcourt la distance  $r d\theta$ .
- Lorsque  $\phi$  varie de  $d\phi$ , à  $r$  et  $\theta$  fixés, le point M parcourt la distance  $r \sin\theta d\phi$ .

Chacune de ces trois distances est l'arête du parallélépipède rectangle qui définit le volume  $d^3\tau$  proposé. Ce volume s'écrit donc :

$$d\tau = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi.$$

b) Le volume  $d\tau'$  est l'intégration sur  $\phi$  de 0 à  $2\pi$  du volume  $d^3\tau$ . On a alors affaire à un tore circulaire à section rectangulaire d'épaisseur infinitésimale (sa section vaut  $dS = dr \times r d\theta$ ) :

$$d\tau' = \int_{\theta=0}^{2\pi} d^3\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi r^2 dr \sin\theta d\theta.$$



c) Le noyau compte  $Z$  protons ; sa charge vaut  $Q = Ze$  et occupe le volume  $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ .

La densité volumique de charges  $\rho$  du noyau est donc :

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^3}.$$

La charge  $dq$  comprise dans le volume  $d\tau'$  du noyau est :

$$dq = \rho d\tau', \text{ soit } dq = \frac{3Ze}{4\pi a^3} \times 2\pi r^2 dr \sin\theta d\theta = \frac{3Ze}{2a^3} r^2 dr \sin\theta d\theta.$$

d) Cette charge tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe ( $Oz$ ) et effectue un tour pendant la durée  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Pendant cette durée  $T$ , toute la charge  $dq$  de cette spire élémentaire a traversé une section de cette spire, laquelle est donc parcourue par un courant d'intensité :

$$di = \frac{dq}{T}, \text{ soit } di = \frac{3Ze\omega}{4\pi a^3} r^2 dr \sin\theta d\theta.$$

e) Cette spire est constituée par un cercle de rayon  $r \sin\theta$  parcouru par un courant d'intensité  $di$  dont le sens est tel que la normale orientée  $\vec{n}$  à la spire est  $\vec{n} = \vec{u}_z$ . Le moment magnétique de cette spire s'écrit alors :

$$d\vec{M} = \pi (r \sin\theta)^2 di \vec{u}_z = \frac{3Ze\omega}{4a^3} r^4 dr \sin^3\theta d\theta \vec{u}_z.$$

3) Le moment magnétique résultant est la somme de tous les moments magnétiques élémentaires. On intègre donc sur  $r$  entre 0 et  $a$  et sur  $\theta$  entre 0 et  $\pi$  :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \iint d\vec{M} = \frac{3Ze\omega}{4a^3} \vec{u}_z \int_{r=0}^a \sin^3\theta d\theta = \frac{3Ze\omega}{4a^3} \vec{u}_z \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^a \left[ -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi, \\ \vec{M} &= \frac{3Ze\omega}{4a^3} \vec{u}_z \times \frac{a^5}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{Ze\omega a^2}{5} \vec{u}_z. \end{aligned}$$