

# Propagation d'un signal

## Introduction

Les phénomènes ondulatoires se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique : en mécanique (propagation d'une perturbation sur une corde tendue par exemple), en mécanique des fluides (vaguelettes à la surface d'un liquide), en thermodynamique (propagation d'un son dans un gaz), en électromagnétisme (phénomènes lumineux comme un faisceau LASER dans une expérience d'optique) et même en mécanique quantique (dualité onde-corpuscule et fonction d'onde). Le but de ce chapitre est de mettre en avant les caractéristiques de la propagation d'une onde, support d'un signal physique à transmettre. En particulier nous insisterons sur l'analyse temporelle et spatiale d'un signal ce qui introduira la notion fondamentale de spectre d'un signal. Nous verrons dans quelles conditions un lien peut s'établir entre ces deux analyses et le rôle joué par la célérité du signal. Ce chapitre s'adresse aux classes de MPSI, PCSI et PTSI.

### Plan du chapitre 2

#### A. Spectre d'un signal

- |   |   |
|---|---|
| 1. Exemples de signaux .....            | x |
| 2. Analyse fréquentielle. Spectres..... | x |

#### B. Onde progressive

- |   |   |
|---|---|
| 1. Position du problème.....                  | x |
| 2. Évolution temporelle à position fixée..... | x |
| 3. Analyse spatiale.....                      | x |
| 4. Onde progressive sinusoïdale.....          | x |

#### C. Interférences de deux ondes de même fréquence

- |   |   |
|---|---|
| 1. Généralités .....  | x |
| 2. Représentation de Fresnel.....                                 | x |
| 3. Cas de deux ondes de même fréquence .....                      | x |
| 4. Conditions d'interférences constructives et destructives ..... | x |

#### D. Ondes stationnaires mécaniques

- |  |   |
|--|---|
| 1. Réflexion d'une onde .....                            | x |
| 2. Cas d'une onde progressive sinusoïdale.....           | x |
| 3. Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités..... | x |

#### E. Diffraction

- |  |   |
|--|---|
| 1. Cas d'une onde mécanique .....        | x |
| 2. Diffraction d'un faisceau LASER ..... | x |

Méthodes .....	x
----------------	---

Exercices .....	x
-----------------	---

# A. Spectre d'un signal

## A.1. Exemples de signaux

### Définition 1

On appelle **signal** une représentation physique de l'information. Un signal est en général fonction d'une ou plusieurs variables.

Souvent le signal est dépendant de la variable temporelle et peut se représenter par une fonction  $y(t)$ .

### Exemples :

- La position à l'instant  $t$  d'un système mobile sur une droite ou d'une molécule dans une colonne d'air.
- La pression d'un gaz en un point de cette colonne d'air, en fonction du temps.
- L'intensité d'un courant électrique en un point d'un circuit ; le potentiel en ce point (ou la différence de potentiel entre ce point et un autre).
- La valeur du champ électrique ou du champ magnétique en un point de l'espace.<sup>1</sup>

1. Dans ce cas, les champs sont des vecteurs, dont chaque composante se ramène à un signal physique dépendant de  $t$  : par exemple  $E_x(t)$ .

## A.2. Analyse fréquentielle. Spectres.

En acoustique musicale on associe à chaque son pur une fréquence définie (par exemple un « La 440 » correspond à une fréquence de 440 Hz). Les ondes acoustiques sont dites audibles par l'oreille humaine pour des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz<sup>2</sup>. Un son réel est composé d'une superposition de plusieurs sons purs, de sorte qu'on ne lui attribue plus une fréquence unique mais un spectre de fréquences. Le nombre de fréquences présentes dans le spectre peut être quelconque, entier ou réel. Dans le premier cas on obtient un spectre discret, dans le deuxième cas un spectre continu.

Le spectre d'un signal complexe peut être décomposé pour être étudié. On parle de **spectroscopie** du signal. L'exemple le plus simple est celui du prisme sur lequel tombe un faisceau de lumière blanche (schéma ci-contre). Après traversée du prisme les différentes fréquences (identifiées par leur couleur dans ce cas) du signal sont visibles sur l'écran. Le prisme a « dispersé » le signal et l'a décomposé en ses différentes fréquences.

Le domaine spectral d'un signal correspond à l'intervalle des fréquences qu'il contient. Ainsi un signal lumineux visible se situe dans le domaine de fréquence  $[3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hz} ; 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}]$ . À des fréquences inférieures on entre dans le domaine des infrarouges (IR) ; à des fréquences supérieures on est dans le domaine des ultraviolets (UV). Le spectre des signaux électromagnétiques est représenté dans la [figure 1](#).

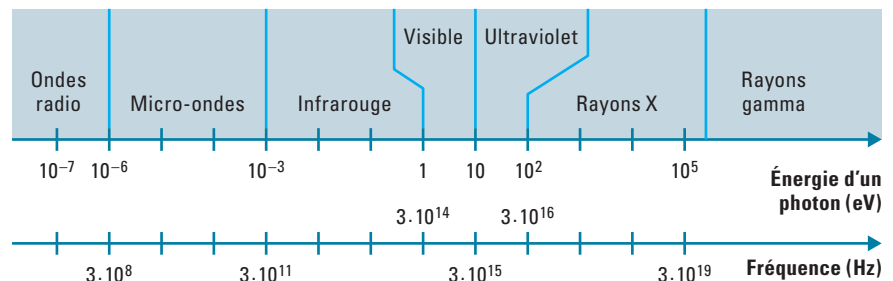
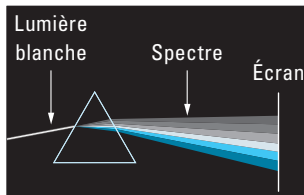
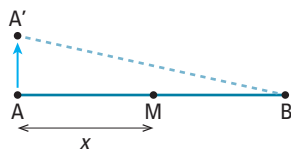


Fig. 1. Spectre électromagnétique.

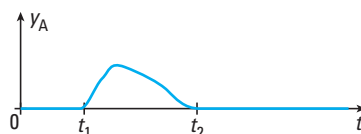
## B. Onde progressive



3. La vitesse  $c$  est appelée célérité de l'onde. Elle ne dépend que de la nature du milieu dans le cas général, ici la masse linéique de la corde et sa tension.

### B.1. Position du problème

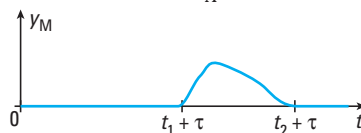
On considère une corde élastique tendue AB. On impose à l'extrémité A, un déplacement de A vers A' puis on la ramène en A entre les temps  $t_1$  et  $t_2$ . L'élongation  $y_A$  du point A, définie comme l'ordonnée de A par rapport à l'horizontale, varie ainsi au cours du temps. C'est la perturbation. Elle va se déplacer de proche en proche le long de la corde à une vitesse  $c$  uniforme<sup>3</sup>.



### B.2. Évolution temporelle à position fixée

Pour parcourir une distance  $AM = x$ , la perturbation met un temps  $\tau = \frac{x}{c}$ . Ce temps correspond au **retard temporel** avec lequel le point M subit la même perturbation que le point A. Cela suppose que la perturbation se propage sans déformation, ce qui est le cas dans ce que l'on considère.

La courbe  $y_M(t)$  est donc la même que  $y_A(t)$  mais avec un retard temporel  $\tau$ .



Soit  $f(t) = y_A(t)$  l'équation du mouvement du point A origine, l'élongation du point M à l'instant  $t$  est celle qu'avait le point A à l'instant  $t - \tau = t - \frac{x}{c}$ , soit :

$$y_M(t) \equiv y(t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

On note que pour un point situé à des abscisses  $x$  négatives (donc à gauche du point origine A avec nos conventions d'orientation), le même raisonnement s'applique et il faut tenir compte du retard de propagation pour que la perturbation atteigne le point distant. Comme  $x$  est négatif le retard s'écrit  $\tau = -\frac{x}{c}$ . Ce dernier exemple illustre la situation d'une perturbation se propageant de droite à gauche.

Dans le cas général d'une perturbation se propageant dans les deux sens le long de la corde, l'élongation d'un point M à un instant  $t$  quelconque s'écrit :

$$y(t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

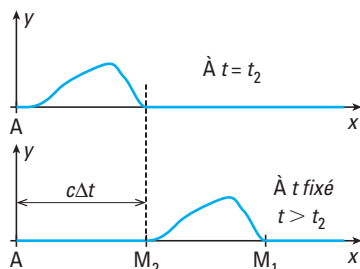
Les fonctions  $f$  et  $g$  représentent les perturbations se propageant le long de la corde dans le sens des  $x$  positifs pour  $f$  et dans le sens contraire pour  $g$ .

### B.3. Analyse spatiale

Pour connaître la forme de la corde à un instant  $t$  donné (photographie instantanée de la corde), il faut tenir compte également du temps de propagation. À l'instant  $t_2$ , la perturbation cesse d'affecter le point A. Noter sur le schéma correspondant que les sections ascendantes et descendantes sont inversées par rapport à l'analyse temporelle du paragraphe B.2. En effet la partie ascendante rapide se manifeste en premier sur l'analyse temporelle. Il est donc normal qu'elle soit la première à arriver en un point M quelconque.

À la date  $t > t_2$ , la perturbation affecte les points compris entre les points  $M_2$  et  $M_1$  tels que :

$$AM_1 = x_1 = c(t - t_1) \text{ et } AM_2 = x_2 = c(t - t_2).$$



La perturbation s'est déplacée d'une distance  $c\Delta t = c(t - t_2)$  dans cet exemple. On peut toujours déduire la forme de la corde de celle qu'elle avait auparavant. Par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on montre que l'équation générale du mouvement peut se mettre sous la forme<sup>4</sup> :

$$y(x) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

4. On remarque aisément que :

$$f(x - ct) = f\left(-c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = \tilde{f}\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

$f$  et  $\tilde{f}$  étant des fonctions quelconques, les formulations en B.2 et B.3 sont bien équivalentes.

## B.4. Onde progressive sinusoïdale

Les exemples précédents étaient limités à de simples perturbations ponctuelles dans le temps et se propageant. On parle d'onde progressive. Considérons maintenant une perturbation reproduite à intervalles de temps régulier. La **période**  $T$  est la plus petite durée au bout de laquelle le phénomène se reproduit identique à lui-même. C'est l'inverse de la fréquence  $f$  :  $T = 1/f$ .

5. L'importance du cas sinusoïdal vient de ce que tout signal périodique peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux (théorie de Fourier).

Un cas particulier important est celui d'un mouvement périodique sinusoïdal<sup>5</sup>. Dans l'exemple de la corde le mouvement du point origine A s'écrirait dans ce cas :  $y = a \cos \frac{2\pi}{T} t$  avec  $a$  l'amplitude du mouvement. On rappelle que la **pulsation** du mouvement est la quantité :  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ . Par application des analyses précédentes, le mouvement qui se propage le long de la corde est de la forme :

$$y = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

Le retard temporel  $\tau = \frac{x}{c}$  peut se convertir en **déphasage** suivant :

$$\varphi = \omega \tau = \omega \frac{x}{c} = 2\pi \frac{\tau}{T} = 2\pi \frac{x}{cT}.$$

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  distincts de la corde, séparés par une distance  $x_2 - x_1$ , sont déphasés de la quantité :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{cT}$$

On en déduit que pour  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont en phase, ce qui correspond à la situation où  $x_2 - x_1$  est un multiple de la distance :  $\lambda = cT$ .

### Définition 2

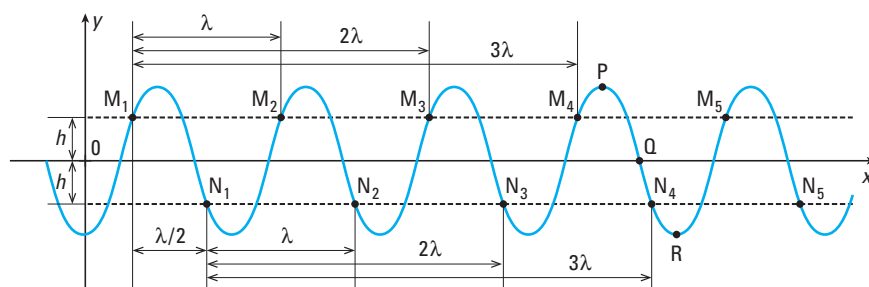
On appelle **longueur d'onde**  $\lambda$  la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle  $T$ . Les relations suivantes sont valables dans le cas des ondes progressives périodiques sinusoïdales :

$$\lambda = cT = c/f.$$

### Application 1 Identifier les déphasages caractéristiques entre les points d'une corde

On reprend l'exemple de la corde tendue sur laquelle se propage une perturbation sinusoïdale (de gauche à droite). On considère les points  $M_{1...5}$  situés à une altitude  $+h$ , distants les uns des autres d'une longueur d'onde, ainsi les points  $N_{1...5}$  situés à une altitude  $-h$ .

Caractériser les vibrations relatives des points M les uns par rapport aux autres. Même question pour les points N. Caractériser les vibrations relatives des points M par rapport aux points N. Que peut-on dire des points P, Q et R?



### Solution

Les points  $M_{1...5}$  viennent tous de passer par leur altitude maximale et descendent tous de la même manière. Ils sont en **phase**. La même conclusion s'impose pour les points  $N_{1...5}$ . On remarque que des points sont en phase quand ils sont séparés par un nombre entier de longueurs d'onde.

Si l'on compare les comportements des points  $M_1$  et  $N_1$  on constate que le premier vient de passer par son altitude maximale et qu'il est en phase descendante, alors que le second vient de passer par son altitude minimale et qu'il est en phase ascendante. Ces deux points sont en **opposition de phase**. Ces points sont séparés par un nombre impair de demi-longueurs d'onde: ( $\lambda/2$  entre  $M_1$  et  $N_1$ ,  $3\lambda/2$  entre  $M_1$  et  $N_2$  etc).

Les points P, Q et R sont à des altitudes remarquables: maximale, minimale ou nulle. P et R sont en opposition de phase. On vérifie qu'ils sont bien séparés par une demi-longueur d'onde. Le point Q est à un quart de longueur d'onde des deux autres. Il est à l'altitude nulle quand les autres sont à des altitudes extrémales et à une altitude extrême quand les deux autres sont à altitude nulle. On dit que P et Q (ou R et Q) sont en **quadrature de phase**.

### Application 2 Double périodicité spatio-temporelle

Mettre en évidence dans l'équation d'évolution d'une onde quelconque:  $y = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$ , sa double périodicité spatio-temporelle.

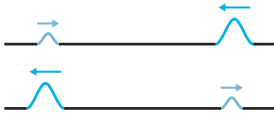
### Solution

En utilisant la définition de la pulsation:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et la relation entre longueur d'onde et période:  $\lambda = cT$  on transforme l'expression de la loi d'évolution de l'onde en:

$$y = a \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Sous cette forme on voit clairement la **double périodicité** spatiale (caractérisée par la longueur d'onde  $\lambda$ ) et temporelle (caractérisée par la période  $T$ ).

## C. Interférences entre deux ondes de même fréquence



### C.1. Généralités

Notons sur l'exemple de la corde tendue que deux ondes peuvent se croiser et qu'au point de croisement leurs amplitudes s'ajoutent. L'amplitude se trouve par conséquent augmentée. Si on suppose maintenant que l'une des deux ondes est en forme de « creux » et l'autre en forme de bosse, on anticipe que des phénomènes d'annulation d'amplitude peuvent intervenir. Ces phénomènes sont caractéristiques des **interférences** entre deux ondes.

Les interférences concernent tous les types d'ondes. Pour que l'on observe des interférences il est nécessaire que deux ondes au moins se superposent et que ces ondes présentent des déphasages constants (conditions de **cohérence**).

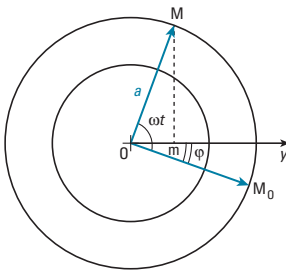
### C.2. Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel est une représentation cinématique qui permet de simplifier certains problèmes en associant à une fonction sinusoïdale, un mouvement circulaire uniforme.

Soit la fonction sinusoïdale  $y = a \cos(\omega t - \varphi)$ . On définit un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de norme  $a$  tournant autour de  $O$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

À  $t = 0$ ,  $M$  est en  $M_0$  et on note  $\varphi$  l'angle  $(\overrightarrow{OM}, Oy)$ , compté positivement dans le sens trigonométrique.

On définit  $Om$ , la projection du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur l'axe  $(Oy)$ . Le point  $m$  est alors animé d'un mouvement sinusoïdal de la forme  $y_m = a \cos(\omega t - \varphi)$ .



### C.3. Cas de deux ondes de même fréquence

Dans le cas d'une superposition de deux vibrations acoustiques ou mécaniques par exemple, la représentation de Fresnel permet de déterminer l'amplitude de la vibration résultante.

On cherche à superposer deux fonctions sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  :

- $y_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$  représenté par la projection  $Om_1$  du vecteur  $\overrightarrow{OM_1}$  de norme  $a_1$  faisant un angle  $\varphi_1$  avec  $(Oy)$  à  $t = 0$ .
- $y_2 = a_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$  représenté par la projection  $Om_2$  du vecteur  $\overrightarrow{OM_2}$  de norme  $a_2$  faisant un angle  $\varphi_2$  avec  $(Oy)$  à  $t = 0$ .

La somme  $y = y_1 + y_2$  est égale à  $Om$ , somme des projections  $Om_1$  et  $Om_2$ . Le vecteur dont elle est la projection est :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ .

Ce vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est un vecteur tournant à la même pulsation<sup>6</sup>  $\omega$ , de déphasage égal à  $\varphi_1 - \varphi_2$  :  $y = y_1 + y_2 = a \cos(\omega t - (\varphi_1 - \varphi_2))$ . La détermination de l'amplitude résultante<sup>7</sup>  $a$  est possible graphiquement puisqu'elle correspond à la norme de  $\overrightarrow{OM}$  :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

### C.4. Conditions d'interférences constructives et destructives

L'amplitude  $a$  de la vibration résultante est :

- maximale si  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ , soit une différence de phase  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire si les deux vibrations composantes sont en phase avec un retard d'un nombre entier de périodes. On parle d'**interférences constructives**<sup>8</sup>.

6.  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  tournant à la même vitesse angulaire, le parallélogramme  $OM_1MM_2$  tourne sans se déformer à la vitesse angulaire  $\omega$ .

7. Dans le triangle  $OM_1M$ , on peut écrire :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

8. Dans le cas d'interférences constructives  $a = a_1 + a_2$  et dans le cas d'interférences destructives  $a = |a_1 - a_2|$ .

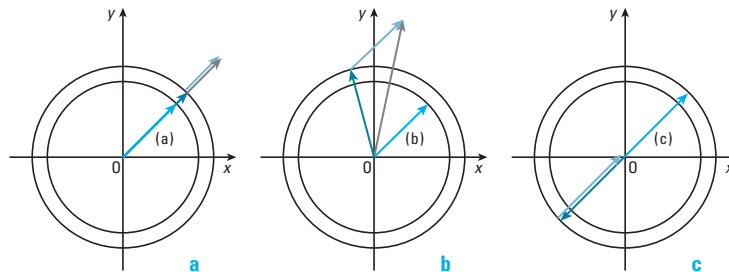
- minimale si  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ , soit une différence de phase  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Les deux vibrations composantes sont en opposition de phase avec un retard d'un nombre impair de demi-périodes. On parle d'**interférences destructives**<sup>8</sup>.

### Application 3 Retrouver les conditions d'interférences constructives/destructives à l'aide de la représentation de Fresnel

Montrer que lorsque deux ondes sont déphasées d'un multiple de  $2\pi$  on obtient une onde résultante d'amplitude maximale. Même question si le déphasage est un multiple impair de  $\pi$ .

#### Solution

On considère deux signaux sinusoïdaux auxquels on associe deux vecteurs (bleu et bleu-gris) dans la représentation de Fresnel. Envisageons 3 cas distincts : les signaux sont en phase (a), déphasés d'un angle quelconque (b), déphasés d'un angle  $\pi$  (c).



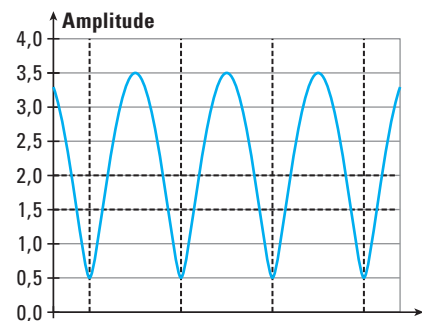
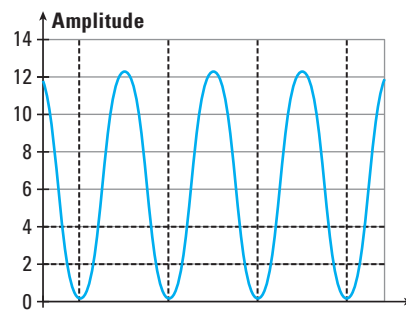
Remarque : le vecteur bleu-gris, égal au vecteur bleu est artificiellement décalé sur la figure.

- (a)
- (b)
- (c)

En construisant le vecteur somme (en noir) dans chacun des cas, on obtient 3 vecteurs de longueur différente : (a), (b) et (c) étant rangés par ordre décroissant. Le cas (a) correspond à la somme des deux rayons des cercles et on ne peut pas construire de vecteur plus long : c'est donc l'amplitude maximale. Le cas (c) correspond à la différence de ces deux rayons et correspond au vecteur le plus court : c'est l'amplitude minimale.

9. Certains signaux physiques ne varient pas linéairement avec  $a$  mais sont proportionnels à  $a^2$ ,  $\ln(a)$  etc.

Les deux figures suivantes montrent l'évolution de l'amplitude (gauche) et du carré de l'amplitude<sup>9</sup> (droite) en fonction du déphasage  $\varphi_1 - \varphi_2$  pour deux signaux d'amplitude (en unité arbitraire)  $a_1 = 2$  et  $a_2 = 1,5$ . Les valeurs de ces deux amplitudes (ou de leurs carrés) sont indiquées par les lignes interrompues horizontales. Les pointillés verticaux indiquent les positions des maxima ou des minima. On vérifie qu'ils sont placés conformément aux conditions d'interférences mentionnées plus haut : multiples pairs de  $\pi$  pour les premiers, multiples impairs pour les seconds.

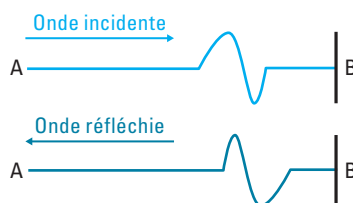


## D. Ondes stationnaires mécaniques

### D.1. Réflexion d'une onde

On considère une corde tendue à une extrémité, notée B. On génère une perturbation transverse de forme quelconque sur la corde qui se propage de l'extrémité libre (notée A) vers B à la célérité  $c$ . C'est l'onde incidente. Lorsque la perturbation arrive en B, elle se réfléchit et repart dans la direction de A. C'est l'onde réfléchie, qui garde la même forme que l'onde incidente mais inversée.

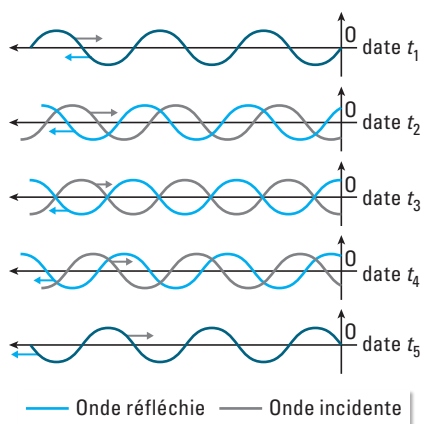
Si l'on répète le signal générant l'onde incidente, il va y avoir superposition de deux ondes et donc des phénomènes d'interférences.



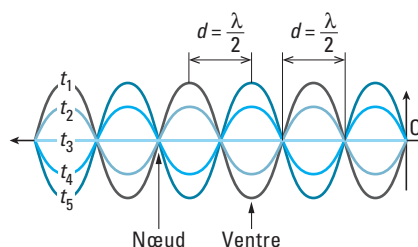
### D.2. Cas d'une onde progressive sinusoïdale

Lorsque l'onde incidente parvient à l'extrémité, elle génère une onde réfléchie, de même fréquence et déphasée.

Ces deux ondes se superposent et l'onde résultante prend la forme d'une **onde stationnaire**, caractérisée par l'existence de positions de vibration nulle (les **nœuds**) et de position de vibration extrême (les **ventres**). La figure ci-dessous illustre le phénomène d'onde stationnaire. En particulier on voit facilement que l'extrémité B de la corde est en permanence un nœud de vibration.



La forme de la corde est caractérisée par la présence de fuseaux entre deux nœuds de vibration, chaque fuseau étant centré sur la position du ventre de vibration. La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs vaut  $\lambda/2$ . L'onde est dite stationnaire car il ne semble plus y avoir de propagation (présence de points fixes notamment).





### D.3. Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités

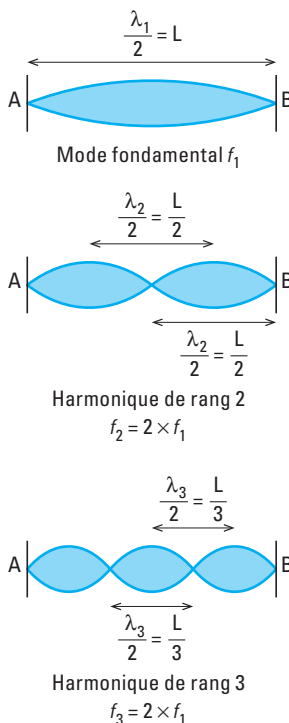
On envisage maintenant le cas d'une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités A et B. Une perturbation simple partant de A se réfléchit en B puis revient vers A où elle se réfléchit à nouveau etc. La propagation le long de la corde se fait à la célérité  $c$ . Il apparaît donc une **période propre** au système (c'est-à-dire indépendante de toute répétition imposée par l'expérimentateur) de valeur :  $T_0 = \frac{2L}{c}$ .

Si on répète la perturbation initiale à une fréquence  $T$ , les perturbations successives se superposent en général de manière incohérente et la corde vibre de manière « désordonnée » avec une faible amplitude.

En revanche si on répète la perturbation à une période synchrone avec  $T_0$ , c'est-à-dire telle que  $T_0 = \frac{2L}{c} = nT$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , on va superposer les perturbations de manière cohérente entre elles et on obtiendra des amplitudes maximales. C'est le phénomène de **résonance**.

Pour une onde stationnaire de période  $T$ , cette condition se traduit donc par les relations suivantes :  $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2L}{c} = nT = n\frac{1}{f} = n\frac{\lambda}{c}$  soit :

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n \equiv \frac{2L}{n} \\ f = nf_0 \equiv f_n}$$



À chaque valeur de  $n$  correspond un **mode propre** de vibration. Le mode propre  $n = 1$  correspond au fondamental. Les modes supérieurs correspondent aux harmoniques de rang  $n$ , suivant la terminologie de l'acoustique musicale. Dans un mode propre  $n$ , la corde prend la forme de  $n$  fuseaux comme sur la figure ci-contre.

L'onde stationnaire résonante n'existe que pour des fréquences d'excitation égales aux fréquences propres  $f_n$ .

Mathématiquement la forme de la corde dans le mode propre  $n$  s'écrit :

$$y_n = A_n \sin(2\pi f_n t) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)$$

On montre de manière générale que lorsque la corde est dans un état vibratoire quelconque, ce dernier peut toujours se déterminer comme une superposition de modes propres :  $y = \sum_n y_n$ .

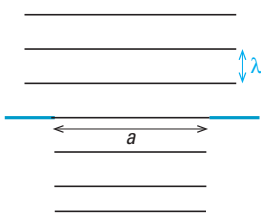
## E. Diffraction

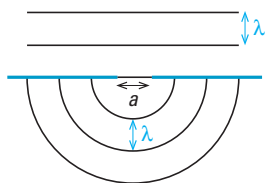
### E.1. Cas d'une onde mécanique

Lorsqu'une onde mécanique progressive sinusoïdale passe à travers une ouverture de largeur  $a$  de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$ , sa direction de propagation à la sortie de l'ouverture est modifiée. C'est le phénomène de **diffraction**.

La diffraction ne modifie pas la période de vibration ni la célérité de l'onde (donc la longueur d'onde).

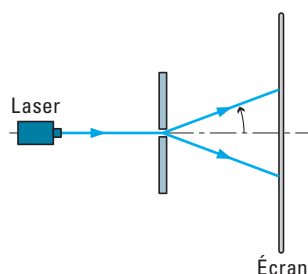
La figure ci-contre montrent les arêtes de vagues se propageant à la surface de l'eau et que l'on diaphragme avec une ouverture grande devant  $\lambda$  : la structure de l'onde est très peu modifiée. La direction de propagation est inchangée.





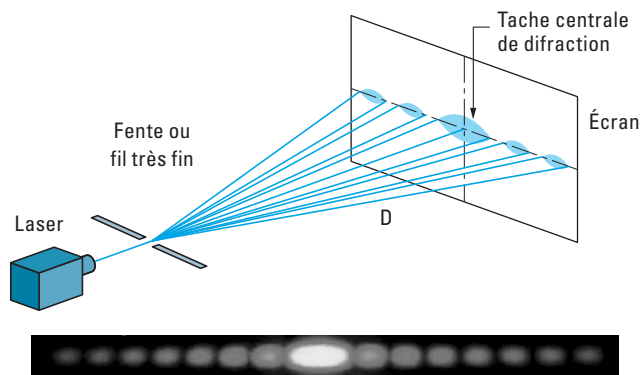
Sur la figure ci-contre en revanche où l'ouverture est faible par rapport à la longueur d'onde on voit que la forme de l'onde est modifiée en sortie. L'onde se propage maintenant dans toutes les directions possibles du plan. La longueur d'onde reste identique. L'onde a été diffractée.

## E.2. Diffraction d'un faisceau LASER



On peut reproduire ce phénomène avec tout type d'ondes, en particulier les ondes lumineuses. Ainsi un faisceau LASER incident sur une ouverture de petites dimensions est modifié en sortie : faisceau élargi, propagation dans des directions différentes de la direction incidente.

Sur un écran de projection l'expérimentateur observe des taches lumineuses espacées de franges sombres. La tache centrale est la plus intense.



Expérimentalement on constate que la direction du premier minimum autour de la tache centrale est, par un angle  $\theta$ , relié à la taille caractéristique de l'ouverture angulaire  $a$  et à la longueur d'onde du rayonnement par la relation :

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

Plus l'ouverture est de petite taille, plus le phénomène de diffraction est marqué. Le phénomène de diffraction intervient dès que l'on tente de diaphragmer un faisceau avec une ouverture de taille comparable à la longueur d'onde. Si la forme de l'ouverture change, la formule donnant l'angle  $\theta$  est modifiée mais l'ordre de grandeur reste le même.

Ce phénomène de diffraction apparaît comme une limitation intrinsèque, conséquence du comportement ondulatoire du signal, à la focalisation d'une onde. En particulier l'obtention d'un faisceau lumineux, par exemple LASER, infiniment fin est impossible physiquement : on doit toujours envisager de se placer à une limite où la diffraction peut être négligée. C'est le cadre d'étude de l'optique géométrique.

# L'essentiel

## ✓ Signal

Un signal est une représentation physique (son, signal électrique, pulse de lumière, etc) d'une information.

Tout signal peut se propager sous forme d'onde avec une certaine célérité  $c$ .

## ✓ Ondes progressives sinusoïdales

Un cas particulier important est celui des ondes progressives sinusoïdales que l'on peut caractériser par une double périodicité spatio-temporelle et représenter par la fonction :

$$y = a \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

La période temporelle  $T$  est l'inverse de la fréquence  $f$  de l'onde.

Dans un milieu non-dispersif la longueur d'onde est liée à  $T$  par la relation :

$$\lambda = cT.$$

## ✓ Spectre d'un signal

Une onde purement sinusoïdale correspond à un son pur en musique. Un son réel est toujours plus compliqué et contient plusieurs fréquences.

L'ensemble des fréquences composant le signal est appelé le spectre en fréquence.

## ✓ Interférences de deux ondes

Si l'on superpose deux ondes cohérentes entre elles, on obtient un phénomène d'interférences qui se manifestent par des zones où l'amplitude du signal résultant est maximale (interférences constructives) et d'autres où elle est minimale (interférences destructives).

Un état d'interférences donné est caractérisé par un déphasage constant entre les deux ondes initiales.

La représentation de Fresnel permet de reconstituer les caractéristiques du signal résultant à partir d'une construction géométrique.

## ✓ Ondes stationnaires et modes propres

Lorsqu'on impose des conditions aux limites à une onde qui se propage, on génère, par superposition des ondes incidentes et des ondes réfléchies, un système d'ondes stationnaires.

Ces dernières se caractérisent par l'existence de points fixes, d'amplitude nulle (les nœuds) ou d'amplitude maximale (les ventres).

Lorsqu'on excite un tel système avec une fréquence externe  $f$ , il ne se passe rien de significatif en général, sauf lorsque  $f$  correspond à l'une des fréquences propres du système :

$$f = f_n \equiv n f_0 \text{ (} f_0 \text{ désigne la fréquence fondamentale)}$$

Dans ce cas on observe un phénomène de résonance qui se traduit par des valeurs d'amplitude extrêmes.

## ✓ Diffraction d'une onde

La diffraction d'une onde se produit lorsqu'une onde mécanique progressive passe à travers une ouverture de largeur  $a$  de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$ . Sa direction de propagation à la sortie de l'ouverture est alors modifiée mais sa fréquence et sa longueur d'onde ne changent pas.

# Mise en œuvre

## Méthode n°1

### Comment réaliser l'analyse spectrale d'un signal?

On considère un signal physique représenté par une fonction temporelle  $y(t)$  périodique, de période  $T$  et on souhaite connaître le spectre en fréquence de cette fonction.

#### → Savoir faire

- 1 Convertir littéralement ou numériquement la période  $T$  en fréquence  $f$ :

$$f = 1/T.$$

- 2 La forme mathématique de la fonction étant connue, la réécrire en une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques (sinus ou cosinus) dont les arguments sont des multiples entiers de  $2\pi f$ : par exemple  $\sin(2\pi ft) + 3 \times \sin(6\pi ft)$ .
- 3 Dans cette combinaison identifier l'entier  $n$  associé à chaque terme ( $n$  est l'entier multiplicateur de la fréquence dans chaque terme).
- 4 Tracer le graphe: amplitude de chaque terme en fonction de  $n$  ou de  $f$ .
- 5 Caractériser le signal en utilisant la terminologie musicale adaptée: hauteur, timbre etc.

#### → Application

On considère le signal donné par la fonction  $y(t) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)$ . Déterminer son spectre en fréquence.

#### Solution

Le signal proposé est une fonction puissance de fonctions trigonométriques simples. La première étape consiste à déterminer la période et la fréquence du signal.

On voit que si l'on remplace  $t$  par  $t + T_0$  dans l'expression de  $y$  on obtient:

$$y(t + T_0) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi(t + T_0)}{T_0}\right) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0} + \pi\right) = -4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right), \text{ ce qui ne convient pas.}$$

En revanche si l'on remplace  $t$  par  $t + 2 \times T_0$  on obtient cette fois:

$$y(t + 2T_0) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi(t + 2T_0)}{T_0}\right) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0} + 2\pi\right) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) = y(t), \text{ ce qui convient.}$$

La période du signal est donc:  $T = 2 \times T_0$  et sa fréquence:  $f = 1/(2T_0)$ .



Les opérations sur les fonctions trigonométriques peuvent s'effectuer soit en utilisant les formules de Moivre:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ et } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ soit en utilisant les identités trigonométriques comme par exemple:}$$

$$\sin(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)), \text{ etc.}$$

Ici on peut partir de:

$$y(t) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) = 4 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \times \sin^2\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) = 4 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \times \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

Ceci nous conduit à une expression comportant deux termes principaux:  $2 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)$  et

$-2 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ . Le 2<sup>nd</sup> terme se transforme grâce à une identité trigonométrique en:

$$-2 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = -2 \times \frac{1}{2} \left( \sin\left(-\frac{\pi t}{T_0}\right) + \sin\left(\frac{3\pi t}{T_0}\right) \right) = \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) - \sin\left(\frac{3\pi t}{T_0}\right).$$

Finalement on trouve que le signal  $y(t)$  peut s'exprimer de manière équivalente sous la forme :

$$y(t) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) = 2 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) + \left( \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) - \sin\left(\frac{3\pi t}{T_0}\right) \right) = 3 \times \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) - \sin\left(\frac{3\pi t}{T_0}\right)$$

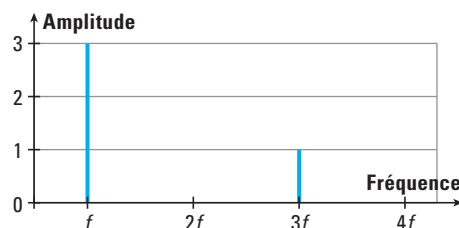
En fonction de la fréquence  $f$  on trouve la décomposition suivante :

$$y(t) = 4 \times \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) = 3 \times \sin(2\pi f t) - \sin(6\pi f t)$$

On identifie donc deux contributions principales, correspondant à des entiers  $n = 1$  (fondamental) et  $n = 3$  (harmonique de rang 3).

Le fondamental a une amplitude égale à 3 (dans les unités du problème, qui ne sont pas précisées), l'harmonique a une amplitude unitaire.

Le spectre de ce signal a donc l'allure suivante :



La hauteur d'un son est la fréquence fondamentale. Elle vaut  $f$  dans ce cas précis.

Le timbre d'un son correspond à la présence d'harmoniques dans le signal. Il y a ici présence d'un harmonique ce qui produirait en terme d'acoustique musicale un son dit « plus riche » qu'un son pur ne possédant que la composante fondamentale dans son spectre.

## Méthode n°2

### Métrologie par diffraction

On veut mesurer les dimensions d'un objet de petite taille, par exemple un cheveu, un grain de pollen etc. Comment mesurer ces dimensions en utilisant la diffraction ?

#### → Savoir faire

- ① Placer l'objet dans un dispositif de diffraction pour en faire la figure de diffraction.
- ② Évaluer l'ordre de grandeur de l'objet à étudier pour adapter la longueur d'onde du rayonnement à utiliser.
- ③ Identifier la tache principale de diffraction et mesurer ses caractéristiques.
- ④ Évaluer l'angle de diffraction en utilisant les caractéristiques du montage expérimental (distance à l'écran, angle d'incidence éventuel, etc.).
- ⑤ En déduire la dimension de l'objet diffractant par application de :

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

- ⑥ Évaluer les incertitudes liées à la mesure.

#### → Application

Quel est le diamètre d'un cheveu que l'on place sur le trajet d'un LASER He-Ne de longueur d'onde égale à 632,8 nm (à 0,1 nm près). La distance  $D$  entre le fil sur son support et l'écran vaut 5 m à 5 mm près. On observe sur l'écran une tache centrale de largeur égale à 22 mm à 1 mm près.

## Solution

a) Le dispositif expérimental est le suivant :  
La largeur de la tache centrale  $d = 22 \text{ mm}$  est reliée à l'angle de diffraction par :

$$\tan \theta = \frac{d/2}{D} \approx \theta.$$

La dernière approximation n'est valable que dans le cas où les angles sont petits, ce qu'il faudra vérifier une fois le calcul fait.

La détermination de l'incertitude liée à cette mesure peut se faire par l'application des différentielles puisque l'on connaît la relation entre les entités mesurées :

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D}$$

Applications numériques :

$$\theta \approx \frac{d/2}{D} = \frac{11 \times 10^{-3}}{5} = 2,2 \text{ mrad}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{22} + \frac{5 \times 10^{-3}}{5} \approx 0,05$$

soit finalement :  $\theta = 2,2 \pm 0,1 \text{ mrad}$ . Cet angle étant très petit, l'approximation effectuée sur sa tangente est complètement justifiée.

Pour déterminer le diamètre du cheveu on utilise la formule reliant l'angle maximal de la tache principale de diffraction aux dimensions de l'objet diffractant :

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a} \approx \theta.$$

On en déduit :

$$a \approx \frac{\lambda}{\theta} = \frac{632,8 \times 10^{-9}}{2,2 \times 10^{-3}} = 287,6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Pour les incertitudes, la même méthode que précédemment s'applique :

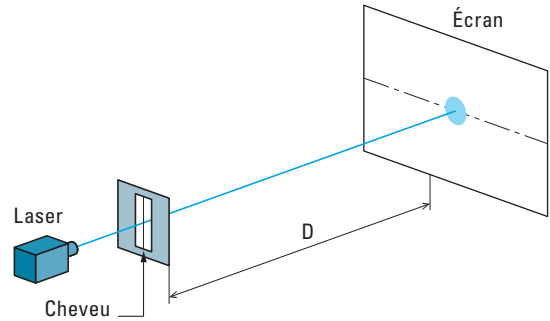
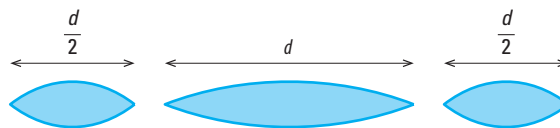
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta \theta}{\theta} + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 0,05 + \frac{0,1}{633} \approx 0,05.$$

On en déduit au final :

$$a = 288 \pm 15 \text{ } \mu\text{m}$$

On remarque au passage qu'une mesure directe nécessite au minimum une amplification de l'image du cheveu (binoculaire ou microscope).

b) La source d'incertitude la plus importante de la méthode provient de la détermination de la largeur de la tache centrale de diffraction, dont les bords sont délicats à évaluer. On peut diminuer cette incertitude en prenant comme limites les bords externes des deux taches secondaires encadrant la tache principale. Chacune de ses taches a en effet une largeur de  $d/2$ .

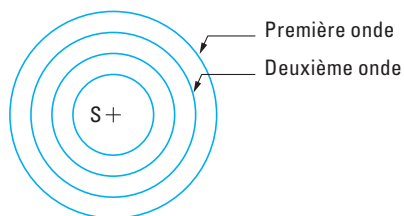


# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Vrai ou Faux

Un véhicule muni d'une sirène est immobile. La sirène retentit et émet un son de fréquence  $f = 680$  Hz. Le son émis à la date  $t = 0$  se propage dans l'air à la vitesse  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à partir de la source S. On note  $\lambda$  la longueur d'onde correspondante. La figure ci-dessous représente le front d'onde à la date  $t = 4T$  ( $T$  étant la période temporelle de l'onde sonore).



Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes :

- 1) Une onde sonore est une onde transversale
- 2) Une onde mécanique se propage dans un milieu matériel avec transport de matière
- 3) La longueur d'onde est indépendante du milieu de propagation.
- 4) Un point M distant du point S d'une longueur égale à  $51,0 \text{ m}$  du milieu reproduit le mouvement de la source S avec un retard  $\Delta t = 1,5 \text{ s}$ .
- 5) Le front d'onde a parcouru  $d = 40,0 \text{ m}$  à la date  $t = 3T$ .
- 6) Deux points situés à la distance  $d' = 55,0 \text{ m}$  l'un de l'autre dans la même direction de propagation vibrent en phase
- 7) L'onde se réfléchit sur un obstacle situé à la distance  $d'' = 680 \text{ m}$  de la source. L'écho de l'onde revient à la source  $2,0 \text{ s}$  après l'émission du signal.

### Ex. 2 Perturbation se propageant sur une corde

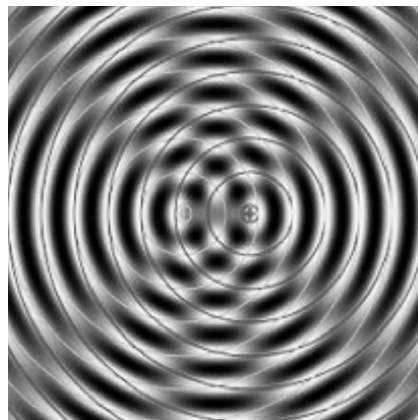
Une perturbation se propage le long d'une corde élastique à la célérité de  $v = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La figure ci-dessous représente l'aspect de la corde à une date  $t_0$ .



- 1) Dessiner l'aspect de la corde aux dates  $t_1 = t_0 + 0,50 \text{ s}$  et  $t_2 = t_0 - 1,50 \text{ s}$ .
- 2) Pendant quelle durée un point de la corde est-il affecté par le passage de la perturbation ?

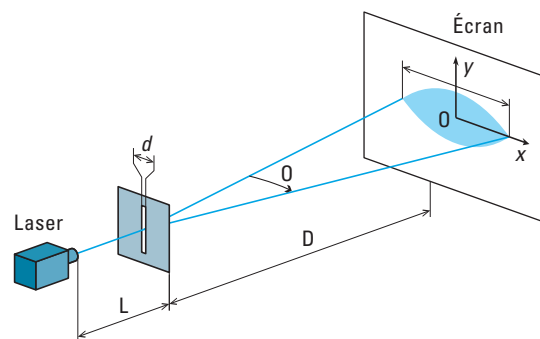
### Ex. 3 Interférences sur une cuve à ondes

On considère une cuve à ondes. On perturbe la surface de l'eau à l'aide de deux stylets représentés par les croix grises vibrant en phase. Expliquer la forme de la surface d'eau observée, en particulier l'existence de zones contrastées lorsqu'on observe la surface en l'éclairant d'en haut (photo ci-dessous).



### Ex. 4 Diffraction par différents objets

On observe dans l'air un phénomène de diffraction avec un laser He-Ne de longueur d'onde  $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$ . On donne  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Sur la figure ci-dessous, seule la tache centrale est représentée.



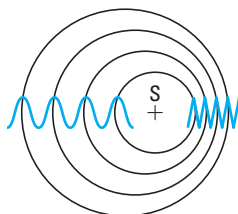
- 1) Peut-on dire que la lumière est une onde mécanique progressive ? Justifier.
- 2) Le phénomène de diffraction existe-t-il dans d'autres domaines que celui de la lumière ?
- 3) Calculer la fréquence de l'onde électromagnétique.
- 4) Décrire qualitativement ce que l'on observe sur l'écran.
- 5) Qu'observerait-on si on remplaçait la fente par un trou circulaire de diamètre  $a$  ?
- 6) Qu'observerait-on si on remplaçait la fente par un trou carré de côté  $a$  ?



## Niveau 2

### Ex. 5 Effet Doppler

Le véhicule de l'exercice 1 se déplace maintenant vers la droite à la vitesse  $v$  inférieure à  $c$ . La figure donnée ci-contre représente le front de l'onde sonore à la date  $t = 4 T$ .



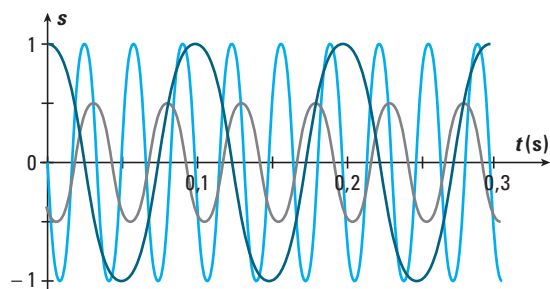
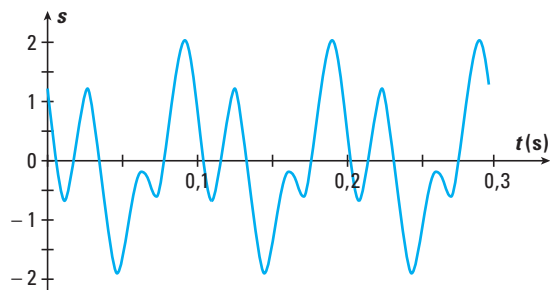
Le véhicule se rapproche d'un observateur immobile.

- 1) Donner l'expression de la longueur d'onde  $\lambda'$  perçue par l'observateur à droite de la source S.
- 2) En déduire l'expression de la fréquence  $f'$  perçue par l'observateur en fonction de  $f$ ,  $c$  et  $v$ .
- 3) Le son perçu est-il plus grave ou plus aigu que le son d'origine? Justifier
- 4) Répéter l'analyse pour l'observateur situé à gauche de S.
- 5) Estimer la vitesse du véhicule qui se rapproche de l'observateur sachant que ce dernier perçoit alors un son de fréquence  $f' = 716 \text{ Hz}$ .

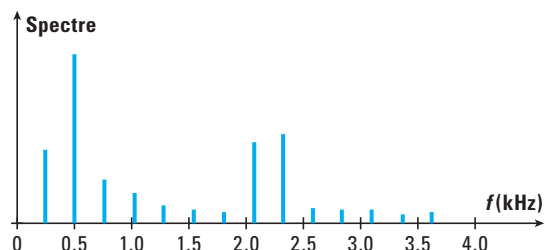
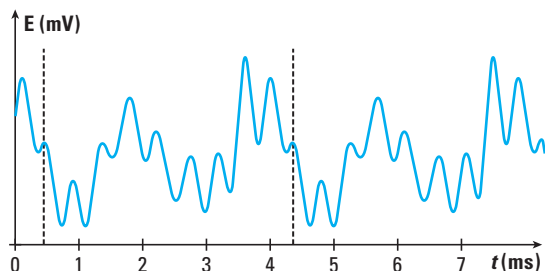
### Ex. 6 Analyse spectrale d'un signal

#### Spectre de Fourier

- 1) On considère un signal  $s(t)$  obtenu par la superposition de trois signaux  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ . Déterminer le spectre en fréquence du signal  $s$ .



- 2) On envisage le son d'un instrument dont l'enregistrement temporel et le spectre sont représentés ci-après. Caractériser le son en termes acoustiques.



### Ex. 7 Loi d'évolution temporelle de l'onde stationnaire

On considère une corde tendue, fixée en une extrémité notée B. On note l'onde incidente vers B sous la forme :  $y = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ , construire la solution mathématique correspondant à l'onde stationnaire.

- 1) Justifier que l'onde réfléchie puisse s'écrire sous la forme :  $y_R = b \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$ .
- 2) Déterminer les paramètres inconnus  $b$  et  $\varphi$  en appliquant les conditions aux limites.
- 3) En déduire la forme de l'onde stationnaire.
- 4) Trouver la position des nœuds de l'onde stationnaire.

On excite maintenant cette corde à une fréquence  $f$ .

- 5) Retrouver la condition de quantification des fréquences de vibration.

### Ex. 8 Dispersion d'une onde progressive

Soit une cuve à ondes dont le vibreur est une pointe. On fait varier la fréquence du vibreur.

Pour chaque fréquence, on mesure les valeurs de la longueur d'onde.

- 1) Qu'observe-t-on à la surface de l'eau?
- 2) Par quelle(s) méthode(s) peut-on mesurer la longueur d'onde. Proposer un protocole.
- 3) Quelle(s) conclusion(s) peut-on tirer du relevé de mesures ci-après?

$f \text{ (Hz)}$	35	25	20
$\lambda \text{ (cm)}$	0,20	0,23	0,7



## Niveau 3

### Ex. 9 Solutions de l'équation d'onde

On considère une corde inextensible de masse linéique  $\mu$ , de longueur  $L$  et tendue (force de tension  $T$  constante). Cette corde est au repos, confondue avec l'axe des abscisses  $Ox$ , et à l'instant  $t = 0$  une perturbation selon  $Oy$  lui est imposée.

On appelle  $y(x, t)$  l'ordonnée d'un point courant de la corde d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ .

On montre que  $y(x, t)$  est solution de l'équation de propagation, dite équation d'ondes ou équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

1) Montrer que le terme  $T/\mu$  est homogène au carré d'une vitesse.

On identifie la célérité de propagation de la perturbation selon :  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

2) Montrer que la fonction  $y = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

est solution de l'équation d'onde. Quelle relation retrouve-t-on entre la période et la longueur d'onde?

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

- 1) **Faux.** Une onde sonore est une onde de compression-dilatation des molécules de gaz (ici de l'air) : c'est une onde longitudinale.
- 2) **Faux.** Une onde transporte de l'énergie, pas de matière (dans le cas présent les molécules d'air considérées initialement au repos vont s'y retrouver après passage de la perturbation)
- 3) **Faux.** La longueur d'onde (comme la célérité) dépend du milieu. La fréquence, caractéristique de l'onde, n'en dépend pas.
- 4) **Faux.** L'onde ne met que  $51/340 = 0,15$  s pour parcourir la distance.
- 5) **Faux.** L'onde parcourt une distance  $d = 3T \times c = 3/680 \times 340 = 1,5$  m pendant 3 périodes.
- 6) **Vrai.** La longueur d'onde vaut  $\lambda = c/f = 340/680 = 0,5$  m. La distance entre les deux points,  $d' = 55$  m, est bien en multiple entier de la longueur d'onde :  $d' = 110 \times \lambda$ .
- 7) **Faux.** L'onde parcourt la distance  $d'' = 680$  m en  $t'' = d''/c = 2$  s. Il lui faut donc le double de temps pour revenir à la source, soit 4 s.

### Exercice 2

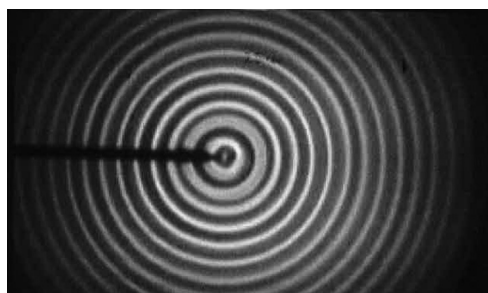
- 1) La propagation de la perturbation s'effectuant sans déformation, on retrouve le même motif aux dates  $t_1$  et  $t_2$  qu'à la date  $t_0$ , simplement décalé sur l'axe des abscisses. On note A le premier point touché par la perturbation (supposée se propager de gauche à droite). À  $t_0$ , le point A se situe à l'abscisse  $x_0 = 6$  m. À  $t_1$  il se situera à  $x_1 = x_0 + v \times (t_1 - t_0) = 7,5$  m. À l'instant  $t_2$  il se situait  $x_2 = x_0 + v \times (t_2 - t_0) = 1,5$  m.
- 2) Reprenons le point A. Au début de la perturbation, il descend vers des ordonnées négatives, puis il remonte, repasse par l'ordonnée nulle, continue de monter jusqu'à atteindre son ordonnée maximale et enfin redescend à l'ordonnée nulle. Pendant qu'il effectue ces différents trajets, la perturbation progresse et quand A cesse d'être affecté, elle atteint le point B, situé à 7,2 m soit à 1,2 m de A. Un point est donc affecté pendant la durée que met la perturbation pour parcourir 1,2 m, soit :  $t = 1,2/3 = 0,4$  s.

### Exercice 3

Une cuve à ondes permet d'observer la propagation d'onde à la surface de l'eau. On peut observer cette dernière soit par le côté soit par-dessus. Dans ce cas on utilise un système d'éclairage qui nous permet d'apprécier le contraste entre les zones de différentes profondeurs : une zone peu profonde apparaîtra claire, alors qu'une zone profonde apparaîtra plus foncée du fait de l'absorption de la lumière par une plus grande quantité d'eau.

Sur la figure de l'énoncé apparaissent clairement trois zones distinctes : noires, blanches et grises. Les deux premières correspondent respectivement à des bosses et à des creux de vagues. Les zones grises correspondent à une altitude intermédiaire entre les creux et les bosses. Ces zones grises s'organisent en faisceaux de droites partant du centre du dispositif.

Interprétation : l'expérience utilise deux stylets (dont les positions sont marquées par les croix grises sur la photo) qui viennent frapper la surface de l'eau à intervalles réguliers. Chaque source génère son propre système d'ondes de surface : vagues dont le front d'onde vu du dessus apparaît comme une succession de cercles centrés sur la source (photo ci-contre).

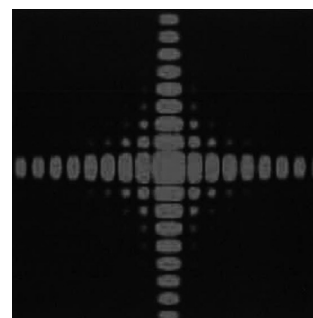
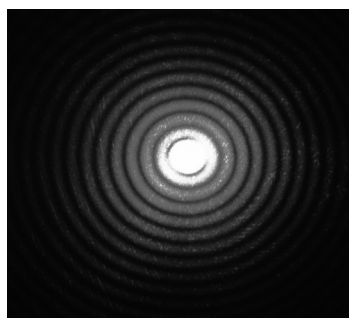


Les deux sources utilisées pour l'expérience vibrent à la même fréquence et en phase (donc leur déphasage est constant) : cela va générer des interférences entre leurs deux systèmes d'ondes. Sur un cercle centré autour de l'une des deux sources on voit que le front d'onde n'est plus uniforme (comme lorsque la source est toute seule), mais il est perturbé par la présence des ondes de l'autre source.

On voit donc clairement apparaître les zones d'interférences constructives où les deux systèmes d'ondes « ajoutent » leur maxima, les zones d'interférences destructives où ils ajoutent leur minima et les zones neutres où un maximum de l'un vient compenser exactement un minimum de l'autre.

## Exercice 4

- 1) La lumière a un comportement ondulatoire progressif mais ce n'est en aucun cas une onde mécanique. Les quantités qui se propagent dans le cas de la lumière sont des champs électriques et magnétiques qui ne sont pas des observables mécaniques telles qu'une position, une pression ou une vitesse. Une différence fondamentale entre ces deux types d'ondes est que la lumière peut se propager dans le vide alors que les ondes mécaniques ont besoin d'un support (corde, air pour les ondes acoustiques etc).
- 2) Le phénomène de diffraction s'observe avec tous les phénomènes ondulatoires dès lors qu'on diaphragme l'onde par une ouverture dont les dimensions sont comparables à la longueur d'onde du signal.
- 3) Par définition :  $f = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 0,633 \cdot 10^{-6} = 4,74 \cdot 10^{14}$  Hz.
- 4) Sur l'écran on observe une tache centrale intense et des taches secondaires moins intenses de part et d'autre de la tache centrale. La largeur de la tache centrale est, dans ce dispositif :  $d = 2 \times D \times \lambda/a$ .
- 5) Si l'on remplace la fente par un trou circulaire de diamètre  $a$ , on obtient une tache centrale circulaire intense de diamètre  $d = 1,22 \times D \times \lambda/a$ , encerclée par des taches circulaires de moins en moins intenses à mesure que l'on s'éloigne du centre.
- 6) Si l'on remplace la fente par un trou carré de côté  $a$ , on obtient une croix dont le centre est un carré de côté  $d = 2 \times D \times \lambda/a$ . Ce carré central est complété par des rectangles de côtés  $d$  et  $d/2$  et par des carrés de côtés  $d/2$  dans la diagonale. Les trois phénomènes sont représentés ci-dessous de gauche à droite.



## Exercices de niveau 2

### Exercice 5

1) Pendant une période  $T$ , le son émis parcourt par définition une longueur d'onde  $\lambda$ . Pendant cette même durée le véhicule se déplace, en se rapprochant de l'observateur, de la distance  $d = v \times T$ . La longueur d'onde  $\lambda'$  perçue par l'observateur à droite de la source  $S$  a donc l'expression suivante :  $\lambda' = \lambda - v \times T$  puisqu'elle correspond par définition à la distance parcourue par le signal, dans le référentiel de l'observateur, entre les deux instants où il repasse par des états identiques.

2) Par définition :  $\lambda' = c/f' = \lambda - v \times T = c/f - v/f = (c - v)/f$ . On en déduit immédiatement la relation entre les fréquences :  $f' = c \times f/(c - v)$ .

3) Le terme correctif  $c/(c - v)$  est supérieur à 1, donc la fréquence  $f'$  est supérieure à  $f$  : le son perçu par l'observateur duquel la source se rapproche perçoit un son plus aigu, ce qui correspond à l'expérience courante. C'est l'effet Doppler.

4) Pour l'observateur situé à gauche de la source, les conclusions se déduisent de ce qui précède par un changement du signe de la vitesse, puisque le véhicule s'éloigne de l'observateur maintenant. En particulier la fréquence perçue par l'observateur est :  $f'' = c \times f/(c + v)$ .

Elle est clairement inférieure à la fréquence émise, ce qui fait que l'observateur perçoit un son plus grave.

5) L'effet Doppler permet de mesurer des vitesses d'éloignement (en astronomie par exemple). Le principe est simple : on suppose connue la fréquence d'émission de la source en mouvement, on mesure la fréquence perçue et on en déduit la vitesse d'éloignement en inversant la relation précédente soit :  $v = c(1 - f/f') = 340(1 - 680/716) = 17,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 61,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

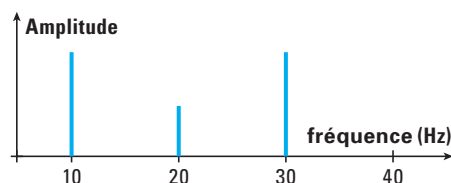
### Exercice 6

1) Le signal  $s(t)$  est composé de trois signaux sinusoïdaux de fréquence et d'amplitude différentes :  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) = A_1 \times \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \times \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3 \times \cos(2\pi f_3 t + \phi_3)$ .

On mesure sur le chronogramme fourni les valeurs des différentes fréquences :  $f_1 = 10 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 20 \text{ Hz}$  et  $f_3 = 30 \text{ Hz}$  soit encore  $f_2 = 2 \times f_1$  et  $f_3 = 2 \times f_1$ .

Les amplitudes de ces différents signaux sont tels que :  $A_2 = A_1/2$  et  $A_3 = A_1$ . La fréquence  $f_1$  apparaît donc comme le fondamental du signal, les fréquences  $f_2$  et  $f_3$  étant les harmoniques de rang 2 et 3 respectivement.

Le spectre a l'allure qualitative suivante :



2) D'après le spectre on voit que la fréquence du fondamental vaut 0,25 Hz et qu'il a de nombreuses harmoniques. La hauteur du son est donc 0,25 Hz et son timbre est caractérisé par sa richesse en harmoniques.

## Exercice 7

1) Pour tenir compte du fait que l'onde réfléchie doit se propager dans le sens inverse de l'onde incidente, on doit changer le signe devant  $x$ . Il faut également tenir compte du déphasage par rapport à l'onde incidente. De manière générale on peut donc choisir la forme suivante :

$$y_R = b \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

2) On sait qu'à tout instant, au point B, la somme de ces deux ondes doit être nulle. Ceci est en particulier vrai à l'instant choisi comme origine des temps, soit :  $a \cos\left(\frac{2\pi x_B}{\lambda}\right) + b \cos\left(\frac{2\pi x_B}{\lambda} + \varphi\right) = 0$ .

Cette équation admet comme solution :  $a = b$  et  $\varphi = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$ .



Le formulaire de trigonométrie nous indique que :

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \text{ et } \cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On peut donc mettre l'onde réfléchie sous la forme :

$$y_R = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right) = -a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

3) Il est possible de construire la solution complète de l'onde stationnaire  $y_S$  comme superposition, à tout instant, de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$y_S = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -2a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

**Remarque :** on a choisi l'origine des  $x$  au point B, seule référence spatiale dans ce problème. Cette solution vérifie bien  $y_S(x_B = 0, t) = 0$ .

On note une caractéristique des ondes stationnaires : les variations temporelles et spatiales sont séparées dans deux fonctions distinctes.

4) Il est facile de montrer à partir de l'expression précédente que les nœuds de vibration se situent aux points  $x_N$  vérifiant  $\sin\left(\frac{2\pi x_N}{\lambda}\right) = 0$  soit  $\frac{2\pi x_N}{\lambda} = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $x_N = k \frac{\lambda}{2}$ . Les nœuds sont bien équidistants de  $\frac{\lambda}{2}$ .

5) Jusqu'à présent la corde n'a été maintenue qu'en une seule extrémité et l'onde incidente était considérée comme semi-infinie. Cette situation a généré un système d'ondes stationnaires qui n'impose aucune contrainte sur les pulsations.

Si on maintient maintenant la corde en ses deux extrémités, que l'on va supposer distante de  $L$ , la situation change. La solution trouvée précédemment reste valable mais doit satisfaire deux conditions

aux limites cette fois-ci :  $y_S = -2a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$  s'annule bien en  $x = 0$  (le point B si l'on garde

la convention précédente) mais que se passe-t-il en  $x = L$ ? L'extrémité opposée à B étant elle aussi un nœud de vibration, on doit avoir :  $y_S(x_A = L, t) = 0$  soit  $\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On retrouve la condition de résonance sur les longueurs d'onde :

$$L = k \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_k \equiv \frac{2L}{k} \text{ qui se traduit pour les fréquences par la condition : } f = k \frac{c}{2L} \equiv f_k.$$

La double condition aux limites imposée au système conduit à une quantification des fréquences susceptibles de se propager dans le système.

## Exercice 8

- 1) On observe à la surface de l'eau des fronts d'onde circulaires, centrés sur la pointe. Ce sont des ondes mécaniques à propagation bidimensionnelle.
- 2) Pour mesurer la longueur d'onde il faut prévoir un système stroboscopique grâce auquel il est possible de « figer » la forme de l'onde et d'accumuler de la sorte suffisamment de fronts d'onde pour avoir la mesure la plus précise possible. La difficulté expérimentale principale vient de la définition du front d'onde (creux ou bosse de la vague).
- 3) Ces mesures conduisent aux valeurs suivantes de la vitesse de propagation du signal :  $v = \lambda \times f$

$f$ (Hz)	35	25	20
$\lambda$ (cm)	0,20	0,23	0,7
$v$ (cm · s <sup>-1</sup> )	7	5,75	14

On voit que la vitesse de propagation varie avec la fréquence de la source. Ceci est caractéristique d'un milieu **dispersif**. La conséquence principale de la propagation d'un signal, en général composé de plusieurs fréquences, dans un tel milieu est que les diverses composantes du signal vont se propager à des vitesses différentes. Après traversée du milieu, elles vont donc se retrouver déphasées entre elles et ses déphasages relatifs seront différents de ce qu'ils étaient initialement. Lorsqu'on recompose le signal à partir des diverses composantes, ce signal est modifié.

La dispersion est utilisée pour analyser les spectres de certains signaux, c'est le point de départ de la spectroscopie optique par exemple où un signal lumineux (en provenance d'une étoile ou d'un autre corps) est décomposé en ses différentes fréquences qui renseignent sur la composition de l'étoile, l'atmosphère d'une planète etc.

## Exercice de niveau 3

### Exercice 9

- 1) L'équation de d'Alembert s'obtient par application de la seconde loi de Newton à un élément de corde de longueur  $dx$  et de masse  $\mu dx$ . Nous en donnerons la démonstration plus tard.

On admet pour l'instant qu'elle permet de décrire le comportement de l'ordonnée  $y$  d'un point  $M$  de la corde, d'abscisse  $x$ , à une date  $t$  donnée par la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Cette équation différentielle est du second ordre par rapport aux variables  $t$  et  $x$ .

Sans rentrer dans les détails techniques de la résolution de cette équation, notons que pour que les deux termes soient homogènes il faut que la dimension de  $\frac{\mu}{T}$  soit :  $[t^2]/[x^2]$ .

Cela nous donne donc l'équation aux dimensions suivante :  $\left[\frac{\mu}{T}\right] = \left[\frac{t^2}{x^2}\right] = \left(\left[\frac{t}{x}\right]\right)^2 = [v]^{-2}$ , on reconnaît les dimensions de l'inverse d'une vitesse.

Au final on définit la célérité des ondes sur la corde comme :  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  ce qui permet d'écrire l'équation de d'Alembert sous forme générique :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

- 2) Injectons la solution proposée :  $y = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$  dans l'équation de propagation :



Lorsqu'on effectue une dérivée partielle par rapport à une variable, on considère que toutes les autres variables sont fixées (à des valeurs constantes) et donc qu'elles ne jouent aucun rôle dans la dérivation.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right) a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

et donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) y$$

De même on trouve :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\left(-\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) y$$

En remplaçant dans l'équation de d'Alembert générique il vient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) y - \frac{1}{c^2} \left(-\frac{4\pi^2}{T^2}\right) y = 0 \Rightarrow 4\pi^2 y \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{c^2 T^2}\right) = 0$$

La dernière relation doit être valable pour toute valeur de  $x$  et de  $t$ , ce qui implique nécessairement :

$$\lambda^2 = c^2 T^2 \text{ soit } \lambda = cT.$$

On retrouve la relation (dite de dispersion même s'il n'est pas question de dispersion ici) liant la période spatiale (la longueur d'onde  $\lambda$ ) à la période temporelle  $T$ .