

Forces centrales conservatives

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les mouvements d'un point matériel soumis à une force centrale conservative, en montrant notamment qu'un certain nombre de grandeurs se conservent tout au long de ces mouvements. Les résultats trouvés (lois de Kepler) permettront l'étude du mouvement des planètes et des satellites artificiels.

Plan du chapitre 14

A. Forces centrales conservatives	x
B. Lois générales de conservation	
1. Conservation du moment cinétique, loi des aires	x
2. Conservation de l'énergie mécanique	x
3. Étude graphique du type de trajectoires	x
C. Mouvement dans un champ de forces centrales attractives en $\frac{1}{r^2}$	
1. Étude de la trajectoire parabolique	x
2. Étude de la trajectoire circulaire	x
3. Étude de la trajectoire elliptique	x
4. Loi de Kepler	x
Méthodes	x
Exercices	x

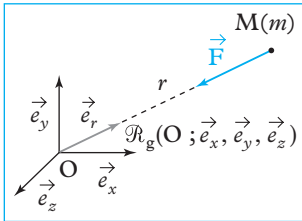


Fig. 1. Force centrale conservative.

1. Le travail élémentaire de la force s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$= F(r) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r)$$

Comme $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ et $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$ (car \vec{e}_r est un vecteur de norme constante), on a :

$$\delta W = F(r) dr = -d\mathcal{E}_p.$$

A. Forces centrales conservatives

Définition 1

Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ constamment dirigée vers un point O, appelé centre de force, fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g (fig. 1) ; cette force ne dépend que de la distance $r = \|\vec{OM}\|$ entre le centre de force O et le point M.

Cette force est conservative et dérive donc d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui ne dépend que de r , ainsi¹ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}$$

F force (N)

\mathcal{E}_p énergie potentielle (J)

r distance en (m)

La force \vec{F} est attractive si $F(r) < 0$, c'est-à-dire si $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} > 0$.

La force \vec{F} est répulsive si $F(r) > 0$, c'est-à-dire si $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} < 0$.

Les forces d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_g = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$ et d'interaction électrostatique $\vec{F}_e = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ sont deux exemples de forces centrales, c'est-à-dire constamment dirigées vers un point O (de masse m_0 de charge q_0 selon le type de force).

Ces deux forces peuvent s'écrire : $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ avec $K = -Gm_0 m$ ou $\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$.

Elles dérivent d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r) = \frac{K}{r}$.

B. Lois générales de conservation

Dans un mouvement à force centrale conservative, le moment cinétique et l'énergie mécanique du point matériel M se conservent, entraînant un certain nombre de conséquences.

B.1. Conservation du moment cinétique, loi des aires

Le TMC appliqué dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au point matériel M de masse m donne :

$$\left(\frac{d(\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}_g})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e} \wedge F(r) \vec{e}_r = \vec{0}$$

Ainsi : $\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$

Le moment cinétique en O du point matériel M se conserve au cours du mouvement.²

Comme $\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte}$, \vec{OM} reste à tout instant perpendiculaire à un vecteur constant $\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}_g}$: **le mouvement est plan**³.

On peut donc utiliser les coordonnées polaires pour repérer le point M (fig. 2) :

$$\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

On pose souvent :

$$r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = C,$$

2. Le moment cinétique peut être calculé à partir de la position initiale \vec{OM}_0 et de la vitesse initiale \vec{v}_0 de M :

$$\vec{L}_0(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \text{cte}$$

$$= \vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0$$

3. Ce plan passe par le centre de force O et est perpendiculaire au vecteur $\vec{L}_0(M)$.

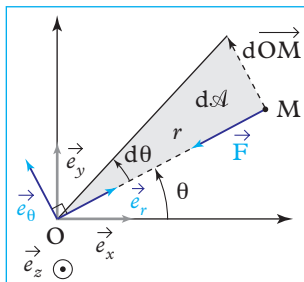


Fig. 2. Aire $d\mathcal{A}$ balayée par \vec{OM} durant dt .

4. C peut être déterminée à l'aide des conditions initiales :

$$C = \|\overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{v}_0\| \\ = \|\overrightarrow{OM_0} \times \vec{v}_0\| \sin(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0).$$

5. Cette relation est une intégrale première du mouvement.

6. Lorsque r est grand, $\dot{\theta}$ est petit et lorsque r est petit, $\dot{\theta}$ est grand.

7. Le cas particulier $C = 0$ correspond à une vitesse angulaire $\dot{\theta} = 0$: le mouvement est rectiligne.

8. $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM}\|$ représente la surface du triangle dont deux côtés sont $d\overrightarrow{OM}$ et \overrightarrow{OM} .

9. $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ s'appelle la vitesse aréolaire.

C étant une constante (> 0) appelée **constante des aires**^{4, 5, 6, 7}.

Cette dernière relation peut être interprétée en adoptant un point de vue cinématique : l'aire balayée $d\mathcal{A}$ par le vecteur \overrightarrow{OM} pendant le temps dt (fig. 2) est :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\| \stackrel{8}{=} \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dt\| = \frac{1}{2} r \times r \dot{\theta} \times dt = \frac{dt}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\text{ainsi : } \frac{d\mathcal{A}}{dt} \stackrel{9}{=} \frac{C}{2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{A}(t) = \frac{C}{2} t + \mathcal{A}(0).$$

Cette relation constitue la loi des aires.

Loi 1

Loi des aires

En présence d'une force centrale passant par le point O, l'aire balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} est proportionnelle au temps et le mouvement est plan.

Remarques :

1) Autrement dit, l'aire balayée à chaque instant par le vecteur position est constante.

2) Autrement dit, la vitesse aréolaire $v_{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}$ est constante pendant le mouvement.

B.2. Conservation de l'énergie mécanique

La force appliquée au point M étant conservative, l'énergie mécanique du point matériel M se conserve au cours du temps :

$$\mathcal{E}_m(M)_{/\mathcal{R}_g} = \text{cte} = \mathcal{E}.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte} = \mathcal{E} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte} = \mathcal{E}.$$

La constante \mathcal{E} peut être déterminée à $t = 0$, à l'aide de $r_0 = \|\overrightarrow{OM_0}\|$ et $v_0 = \|\vec{v}_0\|$:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \mathcal{E}_p(r_0) = \mathcal{E}.$$

En coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ ainsi :

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}^{10}.$$

D'après la relation $C = r^2 \dot{\theta}$ on obtient :

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}.$$

En appelant $\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)$ l'énergie potentielle effective (ou efficace) du point matériel M et $\mathcal{E}_{cr} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ l'énergie cinétique radiale du point M, on se ramène à l'étude du mouvement d'un point matériel à un degré de liberté (r), connaissant son énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_{cr} + \mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \mathcal{E}.$$

La notion d'énergie potentielle effective permet de démontrer les résultats de cours mais est délicate à manipuler car elle intègre une partie seulement de l'énergie cinétique du point matériel M.

B.3. Étude graphique du type de trajectoires

Supposons que le point matériel soit soumis à une force centrale conservative :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

($K > 0$ force répulsive, $K < 0$ force attractive).

Exemple de forces centrales conservatives : force d'interaction gravitationnelle et force d'interaction électrostatique.

10. Cette relation constitue une deuxième intégrale première du mouvement.

11. Dans ce §, on considère que K , m et C sont fixées par des conditions initiales.

12. La résolution de l'équation $\frac{\mathcal{E}_{p\text{eff}}}{dr} = 0$ donne $r = r_0 = -\frac{mC^2}{K}$

et $\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r_0) = \frac{K^2}{2mC^2} = \frac{K}{2r_0} = \frac{\mathcal{E}_{p(\ell_0)}}{2}$.

13. On remarque que la solution de $\mathcal{E}_{p\text{eff}} = 0$ est $r = \frac{r_0}{2} = \frac{mC^2}{2K}$.

Son énergie potentielle effective est¹¹, sachant que $\mathcal{E}_p(r) = \frac{K}{r}$:

$$\mathcal{E}_{p\text{eff}}(r) = \frac{K}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}$$

L'analyse des courbes d'énergie potentielle effective (fig. 3) montre la présence d'un minimum^{12,13} (r_0) si $K < 0$ et d'aucun minimum si $K > 0$.

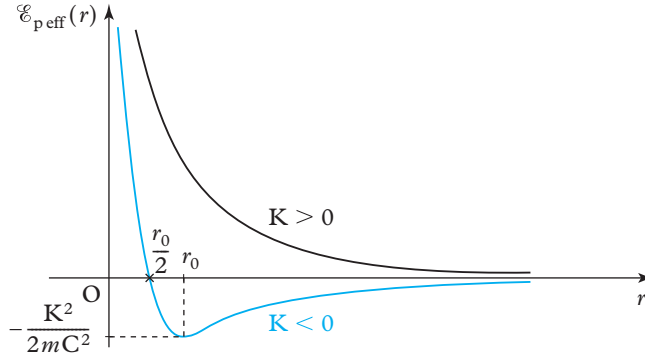


Fig. 3. Courbes d'énergie potentielle effective.

B.3.1. Cas d'une force répulsive : $K > 0$

14. Dans le cas de mouvement de particules chargées dans un atome, l'énergie mécanique ne peut pas prendre n'importe quelle valeur : l'énergie est quantifiée.

15. Les seuls mouvements possibles sont ceux pour lesquels l'énergie cinétique radiale est positive : $\mathcal{E}_{cr} \geq 0$ soit $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{p\text{eff}}$.

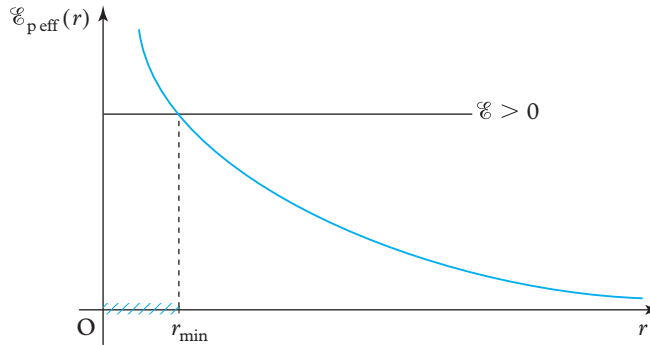


Fig. 4. Force répulsive ($K > 0$).

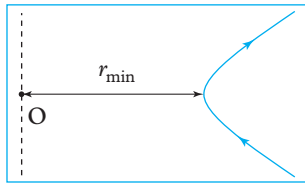


Fig. 5. État de diffusion dans le cas d'une force répulsive ($K > 0$).

Quelles que soient les conditions initiales, c'est-à-dire quelle que soit l'énergie mécanique¹⁴ du point matériel, le mouvement est non borné¹⁵ : on parle d'**état de diffusion** (fig. 5).

Le mouvement radial peut se faire entre r_{\min} et l'infini. r_{\min} constitue la distance minimale d'approche (du point O) et est déterminée par la résolution de l'équation :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}, \text{ lorsque } \dot{r} = 0. \text{ lorsque } r = 0.$$

Ainsi : $\mathcal{E}r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$, soit $r_{\min} = \frac{1}{2\mathcal{E}}(K + \sqrt{K^2 + 2mC^2\mathcal{E}})$ (on ne conserve que la solution positive).

B.3.2. Cas d'une force attractive ($K < 0$)

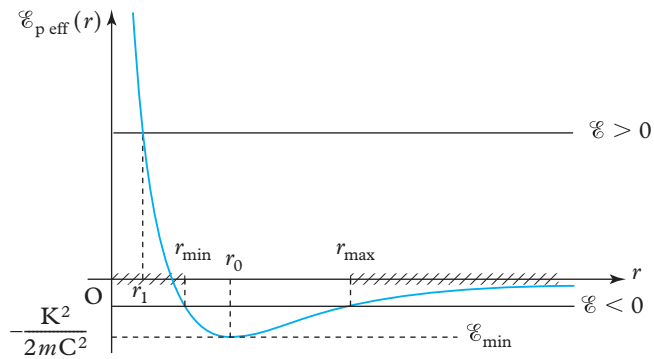


Fig. 6. Force attractive ($K < 0$).

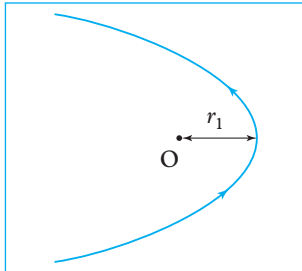


Fig. 7. État de diffusion dans le cas d'une force attractive.

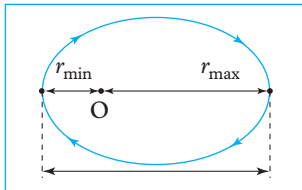


Fig. 8. État lié dans le cas d'une force attractive ($K < 0$).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E} \geq 0$, le mouvement est non borné (de r_1 à l'infini) : on retrouve un état de diffusion (fig. 7).

Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E} < 0$ le mouvement est borné (r est compris entre r_{\min} et r_{\max}) et on parle d'état lié (fig. 8).

r_{\min} et r_{\max} sont solutions de l'équation $\mathcal{E}r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$

$$r_{\max/\min} = \frac{1}{2\mathcal{E}}(K \pm \sqrt{K^2 + 2mC^2\mathcal{E}})$$

Remarque : $r_{\max} + r_{\min} = \frac{K}{\mathcal{E}}$

Si $\mathcal{E}_m = -\frac{K^2}{2mC^2} = \mathcal{E}_{p\text{ eff min}} = \mathcal{E}_{\min}$ le mouvement se fait à $r = r_0 = \text{cte}$: la trajectoire est un cercle de centre O et de rayon r_0 .

C. Mouvement dans un champ de forces centrales attractives en $\frac{1}{r^2}$

C.1. Étude de la trajectoire parabolique ($K < 0$), vitesse de libération

La trajectoire du point matériel M est parabolique lorsque son énergie mécanique est nulle : $\mathcal{E}_m = 0$ soit $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = 0$,

ou encore : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r} = 0$.

La distance de plus courte approche est obtenue lorsque $\dot{r} = 0$:

$$r = r_{\min} = -\frac{mC^2}{2K} = \frac{p}{2}.$$

Une vitesse importante dans les exercices est la **vitesse de libération**, c'est-à-dire la vitesse minimum à donner au point matériel M lorsqu'il se trouve à une distance r_0 du centre de force O pour qu'il se libère de l'attraction du point matériel M ; pour cela, il suffit que son énergie mécanique soit nulle :

$$\mathcal{E}_m = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}mv_\ell^2 = -\frac{K}{r_0} (>0)$$

$$v_\ell = \sqrt{-\frac{2K}{mr_0}} = \sqrt{2\frac{Gm_0}{r_0}} \quad \text{si} \quad K = -Gm_0m$$

Application 1 Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération, appelée seconde vitesse cosmique, d'un satellite terrestre se trouvant à la surface de la Terre.

Données: $R_T = 6\,370\text{ km}$; $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24}\text{ kg}$.

Solution

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

A.N. $v_\ell = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,370 \times 10^3}} \approx 11,2\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

C.2. Étude de la trajectoire circulaire ($K < 0$)

La trajectoire du point matériel M est circulaire de rayon r_0 , son énergie mécanique est^{16, 17}:

16. Si $r = \text{cte}$, $\mathcal{E}_{\text{cr}} = \frac{1}{2}mv^2 = 0$ et

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{p eff}}(r_0) = \frac{\mathcal{E}_p}{2}.$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{K}{2r_0} = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$$

17. Comme $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$, $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$
donc $\mathcal{E}_c = -\frac{\mathcal{E}_p}{2}$.

(En effet l'équation de la trajectoire est: $\mathbf{r} = \text{cte} = \mathbf{r}_0$.)

La vitesse sur cette trajectoire est constante:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r_0} = \text{cte} = \frac{K}{2r_0} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{-\frac{K}{mr_0}} = \text{cte}.$$

18. Pour retrouver rapidement cette relation, on applique le PFD au point M:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - m \frac{v^2}{r_0} \vec{e}_r = + \frac{K}{r_0^2} \vec{e}_r$

ce qui donne:

$$v = \sqrt{-\frac{K}{mr_0}} = \text{cte}$$

(car $\frac{dv}{dt} = 0$).

19. T est le rapport de la distance parcourue $2\pi r_0$ sur la vitesse v (constante).

Si $K = -Gm_0m$: $v = \sqrt{\frac{Gm_0}{r_0}}$ ¹⁸

La période de révolution T de M autour de O est le temps mis par M pour faire un tour, soit¹⁹:

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{-\frac{K}{mr_0}}}$$

En élevant au carré cette relation, on a:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m r_0^3}{-K} \quad \text{soit} \quad \frac{T^2}{r_0^3} = -\frac{4\pi^2 m}{K} = \text{cte}$$

Si $K = -Gm_0m$:

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$$

T période (s)
 r_0 rayon (m)
G constante de gravitation universelle
($G = 6,67 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)
 m_0 masse (kg)

Application 2 Satellite en orbite basse

Calculer la vitesse d'un satellite artificiel en orbite basse ($r \approx R_T$) – première vitesse cosmique –, ainsi que sa période de révolution.

Données: $R_T = 6\,370\text{ km}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24}\text{ kg}$.

Solution

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad \text{et} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_T^3}{GM_T}}$$

A.N. $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,370 \times 10^3}} \approx 7,9\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (6\,370 \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} \approx 5\,062\text{ s} \approx 1\text{ h } 24\text{ min}.$$

Application 3 Satellite géostationnaire

Déterminer la période de révolution, le rayon de la trajectoire et la vitesse d'un satellite se trouvant sur une orbite géostationnaire autour de la Terre (de masse $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$).

Solution

Comme la terre tourne sur elle-même en $T = 24 \text{ h} = 24 \times 3\,600 = 86\,400 \text{ s}$ autour de son axe S/N, le satellite ne peut que tourner sur une trajectoire se trouvant à la verticale de l'équateur (plan équatorial) si on veut qu'il reste toujours à la verticale d'un même point de la terre, avec une période de révolution égale à T . À partir de la relation : $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ on obtient le rayon de la trajectoire :

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

A.N. $r_0 \approx 42\,227 \text{ km}$.

La vitesse du satellite sur cette orbite s'écrit : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$.

A.N. $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{42\,227 \times 10^3}} \approx 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.



L'altitude de ce satellite est :

$$h = r_0 - R_T = 42\,227 \times 10^3 - 6\,370 \times 10^3 \approx 36\,000 \text{ km}.$$

C.3. Étude de la trajectoire elliptique ($K < 0$)

La trajectoire du point matériel M est une ellipse : la distance r entre le centre de force O et le point M varie en fonction de la position de M sur l'ellipse. O est un foyer de l'ellipse.

20. Pour la trajectoire circulaire, O est le centre du cercle

21. Si le mouvement se fait autour de la Terre, on parle de périégée ; si c'est autour du Soleil, on parle de périhélie.

22. Si le mouvement se fait autour de la Terre, on parle d'apogée ; si c'est autour du Soleil on parle d'aphélie.

Le point le plus proche du centre de force O ²⁰ (péricentre²¹) se trouve à la distance $r_{\min} = r_p$ et le point le plus éloigné (apocentre²²) se trouve à la distance $r_{\max} = r_a$.

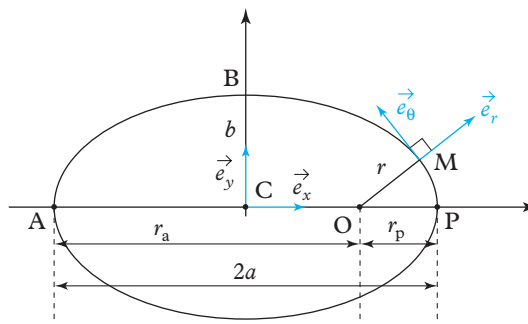


Fig. 9. Trajectoire elliptique.

Les relations pour la trajectoire elliptique $\mathcal{E}_m = \frac{K}{2a}$ et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$ sont identiques à celles obtenues dans le cas de la trajectoire circulaire en remplaçant r_0 , rayon de la trajectoire par a , demi-grand axe de l'ellipse.

Application 4 Trajectoire de la Terre

Calculer la valeur du demi-grand axe a de la trajectoire de la Terre autour du Soleil. Conclure.

Données : $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $T = 1 \text{ an}$; $r_p = 147,2 \times 10^6 \text{ km}$ (point de la trajectoire le plus proche du Soleil).

Solution

De l'expression $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$, on trouve :

$$a = \left(\frac{T^2 GM_S}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,498 \times 10^{11} \text{ m } (= 1 \text{ u.a.})$$

(u.a. : unité astronomique).

On constate que a et r_p sont très proches : la trajectoire de la terre autour du soleil est quasiment circulaire.

C.4. Loi de Kepler

Le mouvement d'un point matériel $M(m)$ à force centrale attractive $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ ($K < 0$), possède les propriétés suivantes :

23. Conique : ellipse, cercle, parabole, hyperbole (le dernier cas n'ayant pas été étudiés).

24. De même : si l'objet en mouvement est une sphère de masse m et de centre d'inertie G , on ne s'intéressera qu'au mouvement d'un point matériel M placé en G de masse m .

- les trajectoires sont des coniques²³ donc le centre de force O était un des foyers ;

- la vitesse aréolaire est constante : $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$;

- dans le cas des trajectoires elliptiques (ou circulaires), le rapport du carré de la période sur le cube du demi-grand axe (ou du rayon) est constant et indépendant de la masse du point matériel M :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte.}$$

Ces lois s'appliquent aux **mouvements des planètes et des satellites artificiels** en remarquant que la force créée (et le champ de gravitation créé) par une sphère de centre O et de masse m_0 est la même que celle créée par un point matériel placé en O de masse m_0 (voir théorème de Gauss et électromagnétisme³⁰) ; il est aussi nécessaire de négliger l'action des autres astres sur le point matériel M , afin que la force soit uniquement centrale et afin de pouvoir considérer que le référentiel d'étude (d'origine O) est galiléen.

Kepler (1571-1630) a énoncé les lois régissant sont le mouvement des corps du système solaire autour du Soleil.

Loi 2

Loi de Kepler

- Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers.
- Le rayon vecteur allant du Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des temps égaux (fig. 10).

- Le carré des périodes de révolution est proportionnel aux cubes des longueurs des demi-grands axes des ellipses $\left(\frac{T^2}{a^3} = \text{cte} \right)$.

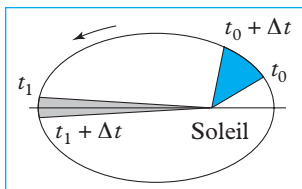
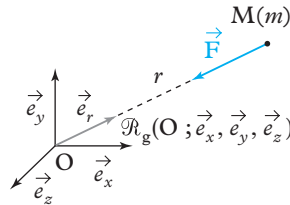


Fig. 10. Deuxième loi de Kepler.

L'essentiel

✓ Forces centrales conservatives

- Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ constamment dirigée vers un point O , appelé centre de force, fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ; cette force ne dépend que de la distance $r = \|\vec{OM}\|$ entre le centre de force O et le point M .



Cette force est conservative et dérive donc d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui ne dépend que de r , ainsi :

$$\vec{F}(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \quad \left| \begin{array}{l} F \text{ force (N)} \\ \mathcal{E}_p \text{ énergie potentielle (J)} \\ r \text{ distance en (m)} \end{array} \right.$$

- Force newtonienne :

$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{e}_r \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_g \text{ force (N)} \\ G \text{ constante de gravitation universelle} \\ (G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}) \\ m_0 \text{ et } m \text{ masses (kg)} \\ r \text{ distance OM (m)} \end{array} \right.$$

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = -G\frac{m_0m}{r} \right)$$

- Force coulombienne :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0q}{r^2}\vec{e}_r \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_e \text{ force (N)} \\ \epsilon_0 \text{ permittivité du vide} \\ (\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}) \\ q_0 \text{ et } q \text{ charges (C)} \\ r \text{ distance OM (m)} \end{array} \right.$$

$$\left(\mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{r} \right)$$

- Conservation du moment cinétique : $\vec{L}_0(M) = \vec{cte}$
 \Rightarrow le mouvement est plan.

$C = r^2 \dot{\theta}^2 = \text{cte}$ est la constante des aires

$\Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$ (**loi des aires**) : en présence d'une force centrale passant par le point O , l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} est proportionnelle au temps.

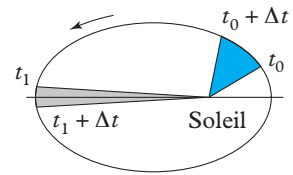
- Conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = \text{cte, avec } K = -Gm_0m \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_0q$$

✓ Lois de Kepler

- Chaque planète se déplace sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers.
- Le vecteur rayon allant du Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des temps égaux.
- Le carré des périodes de révolution est proportionnel aux cubes des longueurs des demi-grands axes des ellipses :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte} \quad \left| \begin{array}{l} T \text{ période de révolution} \\ a \text{ demi-grand axe de l'ellipse} \end{array} \right.$$



✓ Étude des trajectoires

- Dans le cas d'une trajectoire circulaire, savoir retrouver rapidement :

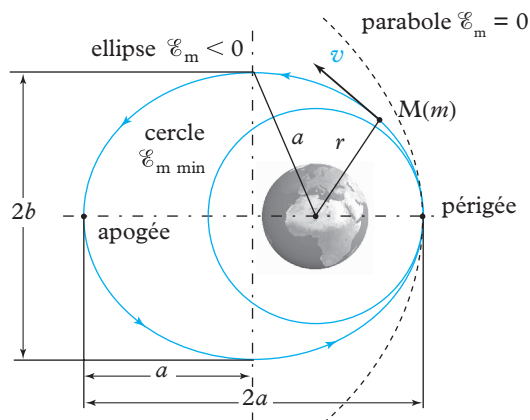
$$v = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}} \quad (\text{à l'aide du PFD}) ;$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{Gm_0 m}{2r} \quad (\text{à partir de } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_0 m}{r}) ;$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0} \quad (\text{à partir de } T = \frac{2\pi r}{v}).$$

- Pour retrouver les formules d'une trajectoire elliptique, on remplace r par a , où a est le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{Gm_0 m}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$$



Énergie mécanique	Trajectoire
$\mathcal{E}_m < 0$	Cercle et ellipse
$\mathcal{E}_m = 0$	Parabole

Pour que la trajectoire soit un cercle, il faut que la vitesse en un point soit $v = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}}$ et que, en ce point, le vecteur vitesse soit orthogonal au rayon $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment déterminer les paramètres (vitesse, énergie, période) d'une orbite circulaire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sur une orbite circulaire sous l'action d'une force centrale newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le rayon r_0 de la trajectoire. On souhaite déterminer la vitesse, l'énergie mécanique et la période de révolution du satellite constitué par ce point M.

→ Savoir faire

- 1 Exprimer la vitesse du point matériel M à l'aide du PFD.
- 2 En déduire l'énergie mécanique du point matériel M(m).
- 3 Calculer la période de révolution.

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse m assimilé à un point matériel M en mouvement sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre O de la Terre.

Déterminer la vitesse v_0 du satellite sur son orbite, puis son énergie mécanique \mathcal{E}_m et enfin sa période de révolution T.

Données : $r_0 = 10\,000\text{ km}$; $m = 800\text{ kg}$; $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$.

Solution

1 Dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (supposé galiléen), le PFD appliqué au satellite M s'écrit sous la forme :

$$m\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}.$$

Comme la trajectoire est un cercle de rayon r_0 , on a :

$$\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}_g} = \frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

La force exercée est : $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r$.

$$\text{Ainsi : } m \frac{dv_0}{dt} \vec{e}_\theta - \frac{mv_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r$$

Ce qui donne en projection sur \vec{e}_θ :

$$\frac{dv_0}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad v_0 = \text{cte},$$

et en projection sur \vec{e}_r :

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM_T}{r_0^2}, \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

$$\text{A.N. } v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{10\,000 \times 10^3}} \approx 6,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

② L'énergie mécanique du satellite s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0}$$

A.N. $\mathcal{E}_m = \frac{-6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 800}{2 \times 10\,000 \times 10^3} \approx -1,6 \times 10^{10} \text{ J}.$

③ La période de révolution T du satellite autour de la Terre est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0}.$$

A.N. $T = \frac{2\pi \times 10\,000 \times 10^3}{6,3 \times 10^3} \approx 9\,973 \text{ s} \approx 2 \text{ h } 46'.$

Méthode n°2

Comment déterminer la nature de la trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservatrice newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne la vitesse v_0 et la distance r_0 au centre de force O en un point de la trajectoire. On souhaite déterminer la nature de la trajectoire du point M .

→ Savoir faire

- ① Exprimer puis calculer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m au point matériel $M(m)$.
- ② Conclure selon le signe de \mathcal{E}_m .

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse $m = 1 \text{ t}$ assimilé à un point matériel M se trouvant à $t = 0$ à la distance $r_0 = 12\,000 \text{ km}$ du centre O de la Terre ($M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$) ; sa vitesse est à $t = 0$, $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer la nature de la trajectoire du satellite par rapport à la Terre.

Solution

① L'énergie mécanique du satellite s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

Elle se conserve au cours du temps ; on peut la calculer à $t = 0$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0}$$

A.N. $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \times 1\,000 \times (8\,000)^2 - \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 1\,000}{12\,000 \times 10^3} \approx -1,2 \times 10^9 \text{ J}.$

② Comme $\mathcal{E}_m < 0$, la trajectoire est une ellipse ou un cercle ; pour que cette trajectoire soit un cercle,

il faut que $\overrightarrow{OM_0} \perp \vec{v}$ et $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$.

Calculons la vitesse qu'aurait le satellite sur une trajectoire circulaire de rayon r_0 :

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{12\,000 \times 10^3}} \approx 5,76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Conclusion : la trajectoire du satellite est une **ellipse**.



Si v_0 avait été égale à $5,76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, la trajectoire n'aurait été un cercle que si, en plus, $\overrightarrow{OM_0} \perp \vec{v}_0$.

Méthode n°3

Comment déterminer la position et la vitesse aux points caractéristiques d'une trajectoire ?

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sous l'action d'une force centrale conservative newtonienne exercée par un objet O de masse m_0 . On donne le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur vitesse \vec{v}_0 en un point M_0 de la trajectoire. On souhaite déterminer les positions et vitesses aux points caractéristiques : à l'apocentre et au péricentre (P) pour une ellipse.

→ Savoir faire

- ❶ Écrire la conservation de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m à l'aide des conditions initiales (en M_0).
- ❷ Écrire la conservation du moment cinétique (ou de la constante des aires C) à l'aide des conditions initiales (en M_0),
(pour les points caractéristiques considérés, $\dot{r} = 0$ donc $\overrightarrow{OM_0} \perp \vec{v}$).
- ❸ Résoudre le système de deux équations à deux inconnues (r ; v) obtenu.

→ Application

On considère un satellite artificiel de masse m assimilé à un point matériel M se trouvant à $t = 0$ à la distance $r_0 = \|\overrightarrow{OM_0}\|$; sa vitesse est alors $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et on a $\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$. Déterminer les positions et vitesses aux périgées et à l'apogée de la trajectoire.

Données : $m = 1\,000\text{ kg}$; $r_0 = 24\,075\text{ km}$ du centre O de la Terre ;

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$; $v_0 = 14\,650\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $\alpha = 44^\circ$.

Solution

- ❶ L'énergie mécanique du satellite est :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{m_0}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0}.$$

- ❷ La conservation de la constante des aires donne :

$$C = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\| = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_0\| \quad \text{soit} \quad C = r v = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

- ❸ L'équation donnant C permet d'obtenir :

$$r = \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{v} = \frac{C}{v}$$

En remplaçant r dans \mathcal{E}_m , on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{C}v = \mathcal{E}_{m_0},$$

soit :

$$(mC)v^2 - (2GM_T m)v - 2C\mathcal{E}_{m_0} = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = 4G^2 M_T^2 m^2 + 8C^2 \mathcal{E}_{m_0} m$ et les solutions sont :

$$v_{p/a} = \frac{2GM_T m \pm \sqrt{4G^2 M_T^2 m^2 + 8mC^2 \mathcal{E}_{m_0}}}{2mC}$$

La vitesse maximale est celle du point le plus proche (périgée) et la vitesse minimale est celle du point le plus éloigné (apogée).

A.N. $\mathcal{E}_{m_0} = -8,26 \cdot 10^9 \text{ J}$ et $C = 6,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;

$v_p = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_a = 1,64 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les distances r_a et r_p à l'apogée et au périogée sont :

$$r_p = \frac{C}{v_p} \quad \text{et} \quad r_a = \frac{C}{v_a}$$

A.N. $r_p \approx 6\,765 \text{ km}$ et $r_a \approx 41\,444 \text{ km}$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Unités

1) Déterminer l'unité de G dans l'équation :

$$F = \frac{GM_T m}{r^2}$$

F est une force, r une distance, M_T et m sont des masses.

2) a) En déduire l'unité de K sachant que :

$$K = GM_T m.$$

b) En déduire l'unité de \mathcal{E}_p sachant que :

$$\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}.$$

Niveau 2

Ex. 2 Vitesse d'un satellite

Un satellite S est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 .

1) Déterminer l'énergie totale \mathcal{E}_{T_0} de ce satellite.

2) L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie totale diminue alors avec le temps suivant la loi :

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T_0}(1 + \alpha t) \quad \alpha > 0, \quad \mathcal{E}_{T_0} < 0.$$

On suppose que la trajectoire reste circulaire. Déterminer le rayon r de la trajectoire et la vitesse v du satellite.

En comparant les énergies, expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

Ex. 3 Transfert d'orbite

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6\,400 + 500$ km (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 6\,400 + 36\,000$ km.

Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de Hohmann dont la Terre est un foyer.

1) Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.

2) Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_1 sur sa trajectoire basse.

3) Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_3 sur l'ellipse de transfert.

4) Que faut-il apporter au satellite au point A pour qu'il passe sur l'ellipse de Hohmann ?

Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_A nécessaire.

5) Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ?

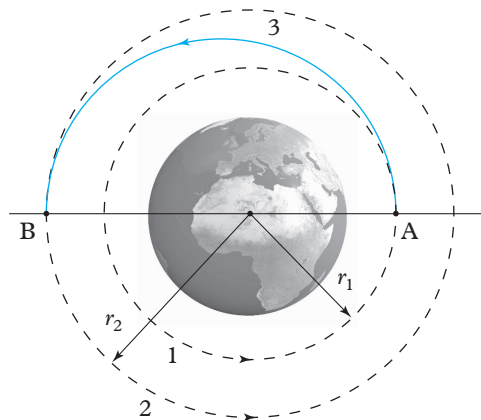
Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_B nécessaire.

6) Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

Données :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2};$$

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}.$$



Niveau 3

Ex. 4 Lancement d'un satellite terrestre

On veut qu'un satellite S décrive une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre T de la Terre (de masse M_T).

1) Calculer la vitesse v_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique. Indiquer la direction de la vitesse \vec{v}_0 .

2) Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé sur un rayon r_0 avec une vitesse v_0 mais la direction réelle de lancement fait un angle α avec la direction de la question 1) (vers l'extérieur : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

a) Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite.

b) Construire l'allure de la trajectoire.

c) Exprimer r_p et r_a les rayons aux périhélie et à l'apogée ainsi que v_p et v_a .

Indications

Ex 2

- 1) Penser à utiliser le PFD et le projeter dans la direction radiale \vec{e}_r .

Ex 3

- 1) Cf. ex 2.1).

Ex 4


- 1) Cf. ex 2 1).
- 2) b) Se servir du fait que la distance foyer/sommet du demi-petit de l'ellipse est égal au demi-grand axe a .

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- 1) Sachant que : $G = \frac{Fr^2}{M_T m}$, son unité est :
- $$\frac{N \times m^2}{kg \times kg} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \times m^2}{kg \times kg} = kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}.$$
- 2) a) L'unité de $K = GM_T m$ est :
- $$kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2} \times kg \times kg = kg \cdot m^3 \cdot s^{-2}.$$
- b) L'unité de $\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}$ est :
- $$\frac{kg \cdot m^3 \cdot s^{-2}}{m} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

 $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = J$ car $1 J = 1 N \times 1 m = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2} \times m = 1 kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$.
 \mathcal{E}_p est donc homogène à une énergie.

Exercices de niveau 2

Exercice 2

- 1) Le satellite est sur une orbite circulaire de rayon r_0 . On va appliquer le PFD au satellite par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (supposé galiléen) et le projeter sur la direction radiale afin de déterminer v_0 :

$$\vec{e}_r \cdot m \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{e}_r \cdot \vec{F}, \text{ puis } -m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}, \text{ d'où } v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}.$$

L'énergie totale du satellite est :

$$\mathcal{E}_{T_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \text{ soit } \mathcal{E}_{T_0} = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0}$$
$$\mathcal{E}_{T_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0}.$$

Remarque : on retrouve $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$.

- 2) L'énergie totale diminue : $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T_0}(1 + \alpha t)$.

L'expression de l'énergie peut être obtenue par analogie avec la question 1).

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2r}$$

Sachant que $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T_0}(1 + \alpha t)$

on a alors : $-\frac{GM_T m}{2r} = -\frac{GM_T m}{2r_0}(1 + \alpha t)$

$$r = \frac{r_0}{1 + \alpha t}$$

Toujours par analogie :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{\frac{r_0}{1+\alpha t}}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \sqrt{1+\alpha t}.$$

$$v = v_0 \sqrt{1+\alpha t}$$

Ainsi le rayon diminue avec le temps alors que la vitesse augmente.

En effet sur une trajectoire circulaire :

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p = -\frac{GM_T m}{r}$$

dans ce cas : $\mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p$, soit $\mathcal{E}_T = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$.

Avec du frottement :

- r décroît donc \mathcal{E}_p décroît ;
- comme $\mathcal{E}_T = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$, \mathcal{E}_T décroît ;
- comme $\mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p$, \mathcal{E}_c croît, donc v croît.



Plus un satellite a une trajectoire circulaire de rayon faible, plus sa vitesse est grande.

Exercices de niveau 3

Exercice 3

1) Le satellite est sur une orbite circulaire de rayon r_1 (autour de la Terre).

Pour calculer la vitesse v_1 , il faut écrire le PFD appliqué au satellite par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_g supposée galiléen et le projeter sur la direction radiale.

$$\vec{e}_r \cdot m\vec{a}(S)_{\mathcal{R}_g} = \vec{e}_r \cdot \vec{F}$$

(\vec{F} est la force d'attraction gravitationnelle)

$$-m \times \frac{v_1^2}{r_1} = -\frac{GM_T m}{r_1^2} \quad \text{soit} \quad v_1 = \frac{GM_T}{r_1}$$

$$\text{A.N.} \quad v_1 = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,900 \times 10^3}} \approx 7\,597 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 7,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) On veut l'énergie mécanique \mathcal{E}_1 du satellite quand il est sur son orbite basse :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_T m}{r_1}, \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_1 = -\frac{GM_T m}{2r_1} < 0$$

3) L'énergie du satellite sur l'ellipse de transfert est obtenue par la formule :

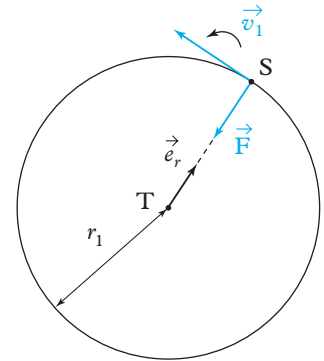
$$\mathcal{E}_3 = -\frac{GM_T m}{2a},$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

Ici $2a = r_1 + r_2$, d'où : $\mathcal{E}_3 = -\frac{GM_T m}{r_1 + r_2} < 0$.

4) Au point A, l'énergie mécanique du satellite doit passer de \mathcal{E}_1 à \mathcal{E}_3 .

Or $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_3 < 0$ ($2r_1 < r_1 + r_2$).



Il faut donc augmenter l'énergie du satellite en lui communiquant **un supplément de vitesse** Δv_A . Pour déterminer Δv_A , il faut déterminer la vitesse v_{A_3} du satellite en A quand il est passé sur l'ellipse de transfert :

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}mv_{A_3}^2 - \frac{GM_T m}{r_1}$$

On a déjà exprimé \mathcal{E}_3 :

$$\mathcal{E}_3 = -\frac{GM_T m}{r_1 + r_2}$$

$$\text{Ainsi : } v_{A_3} = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

Dès lors, on peut déterminer Δv_A :

$$\Delta v_A = v_{A_3} - v_1 = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} \left(\sqrt{2 - \frac{2r_1}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$$

$$\text{A.N. } \Delta v_A = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6\,900 \times 10^3}} \left(\sqrt{\frac{2 \times 42\,400}{6\,900 + 42\,400}} - 1 \right) \approx 2\,367 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx \mathbf{2,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

5) En B, on refait la même démarche qu'en A on calcule d'abord l'énergie \mathcal{E}_2 du satellite sur sa trajectoire haute.

Par analogie avec \mathcal{E}_1 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{GM_T m}{2r_2}$$

Cette fois-ci $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_2 < 0$ ($2r_2 > r_1 + r_2$).

Il faut donc encore augmenter l'énergie du satellite en lui communiquant **un supplément de vitesse** Δv_3 . De la même façon qu'en 4), on peut définir v_{B_3} :

$$v_{B_3} = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

On peut donc exprimer Δv_B :

$$\Delta v_B = v_2 - v_{B_3} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} - \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

$$\Delta v_B = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} \times \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

$$\text{A.N. } \Delta v_B = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{42\,400 \times 10^3}} \times \left(1 - \sqrt{\frac{2 \times 6\,900}{6\,900 + 42\,400}} \right) \approx 1\,443 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx \mathbf{1,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

6) Le temps de transfert t_0 (entre A et B) correspond à la moitié de la période de l'ellipse de Hohmann que l'on peut calculer à l'aide de la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Or sur l'ellipse de Hohmann $2a = r_1 + r_2$, donc :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^3 \quad \text{soit} \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{2GM_T}} \times (r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Donc} \quad T_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2GM_T}} (r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{A.N. } T_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} \times ((6\,900 + 42\,400) \times 10^3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{T \approx 19\,267 \text{ s} \approx 5 \text{ h } 21 \text{ min}}$$

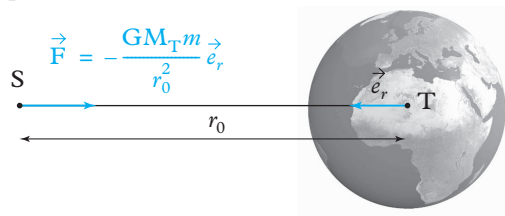
Exercice 4

1) Pour connaître la vitesse v_0 du satellite sur sa trajectoire circulaire, on va appliquer le PFD au satellite dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g géocentrique et projeté sur la direction radiale.

$$\vec{e}_r \cdot m\vec{a}(\text{S})_{/\mathcal{R}_g} = \vec{e}_r \cdot \left(-\frac{GM_T m}{r_0^2} \vec{e}_r \right)$$

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$



L'énergie (mécanique) du satellite est :

$$\mathcal{E}_{T_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \quad \text{soit} \quad \mathcal{E}_{T_0} = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0}$$

soit :

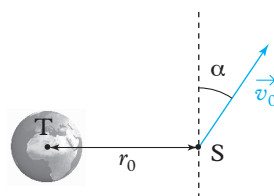
$$\mathcal{E}_{T_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0}$$

De plus, pour que la trajectoire soit un cercle, il faut que la vitesse soit orthoradiale (tangente à la trajectoire), donc :

$$\vec{v}_0 \perp \overline{\text{TS}}$$

2) a) La vitesse \vec{v}_0 fait en réalité un angle α avec la perpendiculaire à $\overline{\text{TS}}$ (la trajectoire n'est donc pas un cercle).

Il faut déterminer la nature puis les caractéristiques de la trajectoire réelle du satellite.



- Calculer d'abord l'énergie totale :

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0} < 0.$$

Donc il s'agit d'un état lié. La trajectoire est une ellipse (dont un des foyers est le centre de la Terre).

- Déterminons le demi-grand axe de l'ellipse.

Sur une ellipse l'énergie du satellite est :

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2a}.$$

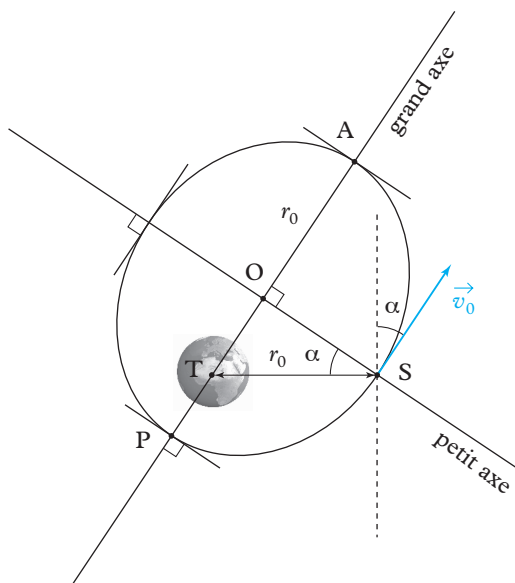
Or ici au départ le satellite possède l'énergie :

$$\mathcal{E}_T = -\frac{GM_T m}{2r_0}.$$

En identifiant on trouve : $a = r_0$, le demi-grand axe de l'ellipse.

b) Cette information ($a = r_0$) permet de conclure que la position de lancement correspond à un des sommets du petit axe ; par suite, on en déduit aussi que le grand axe (dont on connaît la longueur) est parallèle à \vec{v}_0 :

- on trace d'abord le grand axe (parallèle à \vec{v}_0 passant sur T) ;
- on trace ensuite le petit axe (perpendiculaire au grand axe) passant par S ;
- on reporte la demi-longueur du grand axe (r_0) à partir de O (point d'intersection du grand axe et du petit axe) : on obtient les points P et A ;
- on reporte la demi-longueur du petit axe ;
- on trace enfin l'allure de l'ellipse qui est la trajectoire réelle du satellite.



c) On veut calculer r_p et r_a :

$$r_p = r_0 - OT \quad \text{et} \quad r_a = r_0 + OT.$$

Il reste à calculer la distance OT.

Or dans le triangle rectangle TOS :

$$\sin \alpha = \frac{OT}{TS} = \frac{OT}{r_0} \quad \text{donc} \quad OT = r_0 \sin \alpha.$$

Donc : $r_p = r_0(1 - \sin \alpha)$ et $r_a = r_0(1 + \sin \alpha)$.

Pour calculer v_a et v_p , on peut utiliser la conservation de la constante des aires (ou du moment cinétique).

$$C = r_0 v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r_0 v_0 \cos \alpha \quad (\text{en S})$$

$$= r_a v_a \quad (\text{en A})$$

$$= r_p v_p \quad (\text{en P})$$

Donc :

$$v_a = \frac{r_0}{r_a} \cos \alpha v_0 = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} v_0$$

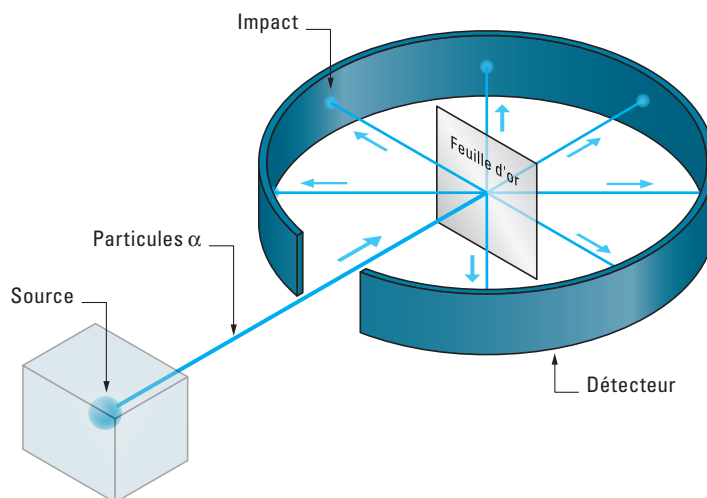
De même :

$$v_p = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} v_0.$$

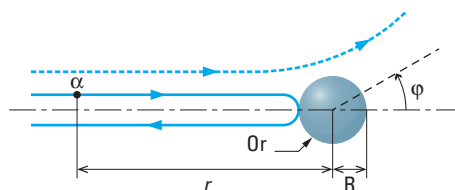
Approche documentaire

À propos de l'expérience de Rutherford

En 1908, Ernest Rutherford (physicien britannique, 1871-1937) décide de sonder la structure de l'atome selon sa maxime « le meilleur moyen de trouver ce qu'il y a dans le pudding est de mettre le doigt dedans ». Il envoie des particules alpha (2 protons, 2 neutrons) en direction d'une mince feuille d'or ; il constate une diffusion des particules tout autour de la feuille d'or. Il envisage alors le modèle planétaire de l'atome : au centre un noyau chargé positivement et autour des électrons qui suivent des trajectoires circulaires (ou elliptiques).



En utilisant la conservation de l'énergie mécanique lors de la rencontre frontale ($\varphi = 180^\circ$) entre une particule alpha et un noyau d'atome d'or, on peut estimer la taille du noyau atomique de l'or. On envoie donc des particules alpha (noyau d'hélium $Z = 2$, masse m) avec une énergie cinétique initiale $\mathcal{E}_{c0} = 7,7 \text{ MeV}$ en direction de la feuille d'or (noyau $Z = 79$, masse $M \gg m$). Retrouver l'estimation du rayon R de l'atome d'or.



Solution

Dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_g supposé galiléen, la particule α n'est soumise qu'à la force d'interaction électrostatique avec le noyau d'or (on néglige le poids), qui ici est répulsive.

Cette force étant conservatrice, on a pour la particule α , $\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}_g} = \text{cste}$

soit $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{c0} + \mathcal{E}_{p0} = \text{cste}$.

À l'instant initial, $r = +\infty$, donc $\mathcal{E}_{p0} = \frac{q_\alpha q_{0r} e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow 0$ et $\mathcal{E}_{c0} = \frac{1}{2}mv^2$.

Au point le plus proche, $r = R$, on a $v = 0$:

$$\mathcal{E}_c = 0 \quad \mathcal{E}_p = \frac{q_a q_{0r} e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Soit : $\frac{q_a q_{0r} e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \mathcal{E}_{c0}$, c'est-à-dire : $R = \frac{q_a q_{0r} e^2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_{c0}}$

$$R = \frac{2 \times 79 \times (1,6 \times 10^{-19})^e}{4\pi\epsilon_0 \times (7,7 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19})} = 3 \times 10^{-14} m$$

L'ordre de grandeur obtenu est tout à fait acceptable.

