

Cinématique du point

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons au mouvement d'un point, puis celui d'un solide sans nous occuper ni des effets, ni des causes de ce mouvement. Ainsi nous étudierons le mouvement, c'est-à-dire l'évolution d'un point dans l'espace et au cours du temps, à l'aide des notions de vecteur position, de vitesse ou d'accélération, toutes relatives à un observateur ou un référentiel.

Plan du chapitre 9

A. Description du mouvement	x
1. Exemple: l'hélicoptère	x
2. Système étudié, observateur.....	x
3. Repérage d'un point.....	x
4. Vitesse d'un point.....	x
5. Accélération	x
6. Bilan.....	x
7. Bases de projection utiles.....	x
B. Étude de mouvements usuels	
1. Mouvement rectiligne.....	x
2. Mouvement circulaire	x
C. Introduction au mouvement d'un solide	
1. Définition d'un solide.....	x
2. Cas particuliers de mouvements.....	x
Méthodes	x
Exercices	x

A. Description du mouvement

A.1. Exemple : l'hélicoptère

Considérons un hélicoptère se déplaçant horizontalement en ligne droite (fig. 1).

Repérons deux points particuliers : le point A, *axe des pales* et le point M extrémité d'une pale. Le point O est un point fixe par rapport au sol. Le point A est un point fixe par rapport au cockpit de l'hélicoptère.

Afin de décrire le mouvement de l'hélicoptère, il est nécessaire de choisir un **observateur** (qui regarde la scène) et un **observé** (point qui est observé par l'observateur).

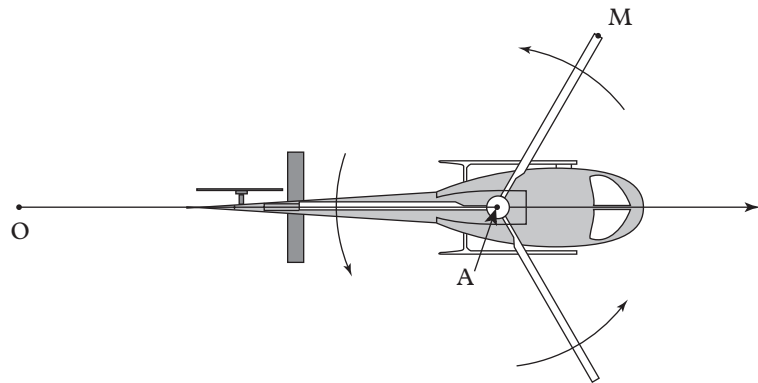


Fig. 1. Déplacement rectiligne horizontal de l'hélicoptère.

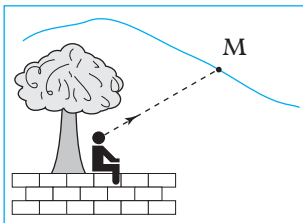
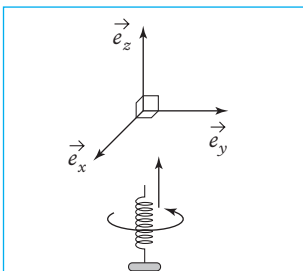


Fig. 2. Observateur et point observé.

1. On dit que le mouvement n'a pas un caractère absolu, mais est relatif (à l'observateur).



$$\begin{aligned} & \bullet \|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1. \\ & \bullet \vec{e}_x \perp \vec{e}_y; \vec{e}_y \perp \vec{e}_z; \vec{e}_z \perp \vec{e}_x. \end{aligned}$$

Fig. 3. Base orthonormée directe; en vissant le tire-bouchon :

- de \vec{e}_x vers \vec{e}_y il s'enfonce vers \vec{e}_z ;
- de \vec{e}_y vers \vec{e}_z il s'enfonce vers \vec{e}_x ;
- de \vec{e}_z vers \vec{e}_x il s'enfonce vers \vec{e}_y .

Par exemple, le point M observé depuis le cockpit va tourner alors qu'observé depuis le sol, il va « tourner et avancer ».

De même, le point A, observé depuis le cockpit, sera immobile alors qu'observé depuis le sol, il avancera.

Ainsi, il est indispensable de préciser ce qu'on observe (le point observé) et d'où on l'observe (observateur).

A.2. Système étudié, observateur

A.2.1. Définir le système étudié

- La première étape consiste à définir le système étudié (l'observé); en cinématique du point, il s'agira forcément d'un point : le **point observé**.

Par exemple, sur la fig. 2, le point M est l'observé.

- La seconde étape consiste à définir l'**observateur**; c'est par rapport à lui que le mouvement sera décrit (le mouvement du point observé dépend de l'observateur)¹. Par exemple, sur la fig. 2, l'observateur qui observe M est lié au sol. Or définir précisément un observateur, c'est définir un référentiel.

A.2.2. Notion de référentiel

• Base orthonormée directe

Pour définir un référentiel (observateur), il faut d'abord définir une base orthonormée directe (voir fig. 3), composée de trois vecteurs :

- perpendiculaires entre eux (ortho);
- de norme 1 (normée);
- respectant la règle du tire-bouchon (directe).

Cette base définit en fait trois directions.

• Repère

L'adjonction d'un point O (origine du repère) à une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ définit un repère orthonormé direct : $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Référentiel

Comme le point M se déplace au cours du temps, il faut que l'observateur soit capable de préciser la position du point M à chaque instant ; il faut donc qu'il soit capable de mesurer le temps (à l'aide d'une horloge).

L'adjonction du temps à un repère définit un référentiel \mathcal{R} : $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.

Celui-ci définit précisément la notion d'observateur².

Ainsi sur la fig. 4, $\mathcal{R} : (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est un référentiel lié à l'observateur.

Le temps s'écoulant de la même manière dans tout référentiel, il sera inutile de préciser le temps dans l'écriture du référentiel ; ainsi, on pourra écrire : $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

2. Ce référentiel correspond à tout ce qui est fixe par rapport à l'observateur ; on le représente souvent par un solide auquel est lié l'observateur.

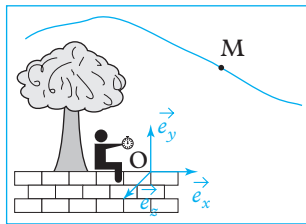


Fig. 4. Référentiel $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ lié à l'observateur.

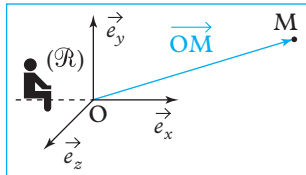


Fig. 5. Vecteur position du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

A.3. Repérage d'un point

A.3.1. Vecteur position et trajectoire

• La position du point M observé (fig. 5), depuis l'observateur (référentiel \mathcal{R}) est définie à l'aide du **vecteur position** \overrightarrow{OM} composé :

- d'un point origine O fixe par rapport à l'observateur, c'est-à-dire au référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;
- du point M observé.

Rappel : un vecteur est défini par :

- sa direction ;
- son sens ;
- sa norme (ou valeur).

• La trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps ; la trajectoire dépend du choix de l'observateur, c'est-à-dire du référentiel \mathcal{R} .

• Exemple de l'hélicoptère (fig. 6).

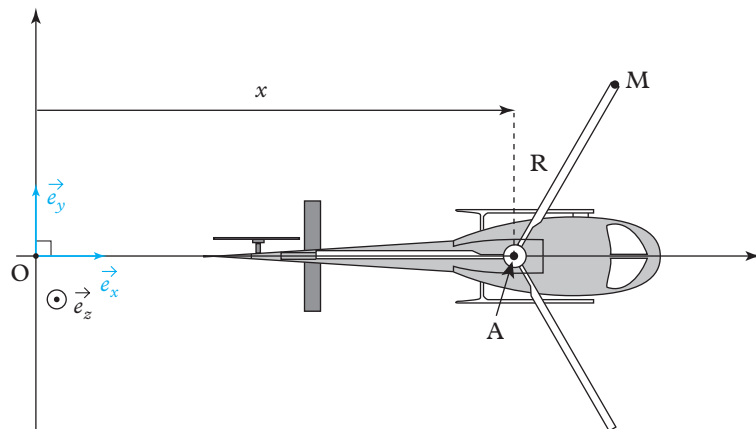


Fig. 6. Position du point M dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' .

La position du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, c'est-à-dire par rapport à l'observateur lié au sol, est définie à l'aide du vecteur position \overrightarrow{OM} .

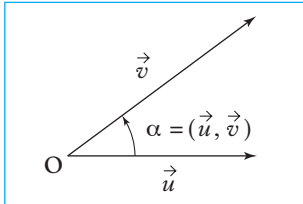


Fig. 7. Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

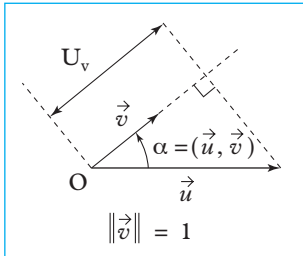


Fig. 8. Projection de \vec{u} sur \vec{v} .

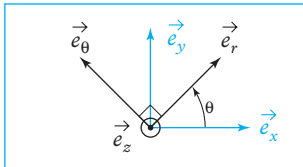


Fig. 9. Base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

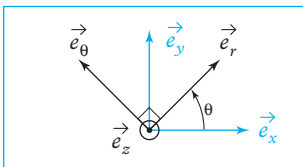


Fig. 10. Base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

3. Comme sous-entendu ici, la ou les bases utilisées n'ont pas forcément de lien avec le référentiel de l'observateur.

La position du point M dans un référentiel $\mathcal{R}'(A; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, c'est-à-dire par rapport à l'observateur lié au cockpit de l'hélicoptère, est définie à l'aide du vecteur position \vec{AM} .

Dans ce référentiel \mathcal{R}' , le point M décrit une trajectoire circulaire de centre A et de rayon $R = AM$.

A.3.2. Produit scalaire

Définition 1

Le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} (fig. 7) est un scalaire (un nombre), noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Propriétés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$, soit $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ représente la projection du vecteur \vec{u} dans la direction du vecteur \vec{v} si $\|\vec{v}\| = 1$ (fig. 8) ; en effet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = U_v$.
- Produit scalaire entre vecteurs d'une base orthonormée directe (fig. 9) :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 ; \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 ;$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 ; \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 ;$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 ; \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 ;$$

- Produit scalaire entre vecteurs de deux bases orthonormées directes (fig. 10) :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos \theta ;$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sin \theta ;$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos\left(-\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin \theta ;$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta.$$

A.3.3. Différentes expressions d'un vecteur

On exprime un vecteur à l'aide des vecteurs d'une ou plusieurs bases, appelées bases de projection³.

Un vecteur aura des expressions différentes selon la base de projection choisie. En revanche, il s'agira du même vecteur (même direction, même sens et même norme).

Dans un souci de clarté, on peut utiliser les vecteurs de plusieurs bases de projection pour exprimer un vecteur.

Exemple

Dans le cas de l'hélicoptère vu précédemment, on peut exprimer le vecteur position du point M dans $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en écrivant :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_r,$$

(utilisation des vecteurs de plusieurs bases).

Néanmoins, on aurait pu exprimer la position du point M en écrivant :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + R\cos\theta\vec{e}_x + R\sin\theta\vec{e}_y = (x + R\cos\theta)x\vec{e}_x + R\sin\theta\vec{e}_y$$

La première expression est plus simple, donc plus facile à manipuler, tandis que la deuxième est plus longue. Il s'agit cependant du même vecteur : \vec{OM} .

Calcul de la norme :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OM}\| &= \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}} = \sqrt{(x\vec{e}_x + R\vec{e}_r) \cdot (x\vec{e}_x + R\vec{e}_r)} \\ &= \sqrt{x^2\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + xR\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r + R\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + R^2\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r} \\ &= \sqrt{x^2 + R^2 + 2xR \cos \theta}^4.\end{aligned}$$

4. Attention : $\|\overrightarrow{OM}\| \neq \sqrt{x^2 + R^2}$ car \vec{e}_x n'est pas perpendiculaire à \vec{e}_r .

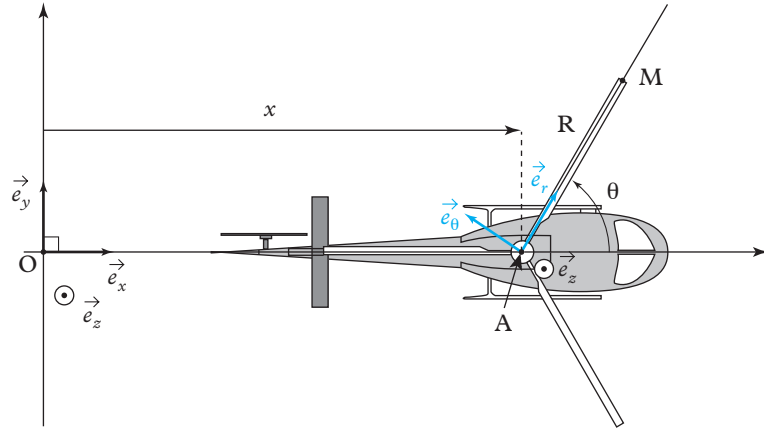


Fig. 11. L'hélicoptère et les deux bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

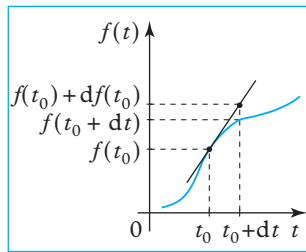


Fig. 12. Dérivée de $f(t)$ en t_0 .

5. Lorsqu'on écrit la dérivée par rapport au temps, on peut la noter : $\dot{f}(t_0)$ au lieu de $\frac{df}{dt}(t_0)$.

A.4. Vitesse d'un point

A.4.1. Dérivée scalaire

La dérivée temporelle de la fonction $f(t)$ en t_0 représente la pente de la tangente à la courbe $f(t)$ en t_0 (fig. 12) ; on la note⁵ : $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Si t passe de t_0 à $t_0 + dt$, on se déplace de $f(t_0)$ à $f(t_0 + dt)$ sur la courbe $f(t)$ et de $f(t_0)$ à $f(t_0) + df(t_0)$ sur la tangente ; comme dt est infiniment petit, on peut confondre les deux valeurs précédentes :

$$f(t_0) + df(t_0) = f(t_0 + dt),$$

$$\text{soit } d\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}(t_0 + dt) - \mathbf{f}(t_0) \text{ ou } \frac{d\mathbf{f}(t_0)}{dt} = \frac{\mathbf{f}(t_0 + dt) - \mathbf{f}(t_0)}{dt}.$$

Propriétés

- Somme : $\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = \dot{f} + \dot{g}.$
- Produit : $\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} = \dot{f}g + f\dot{g}.$
- Composition : $\frac{d}{dt}(f(g)) = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dg}\dot{g}.$

A.4.2. Dérivée vectorielle

Soit \vec{U} un vecteur d'expression dans la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$:

$$\vec{U} = x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0}.$$

6. On dit aussi par rapport au ...

La dérivée vectorielle de \vec{U} dans⁶ le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0})\right)_{/\mathcal{R}}$$

soit :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_{x_0} + x\left(\frac{d\vec{e}_{x_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dy}{dt}\vec{e}_{y_0} + y\left(\frac{d\vec{e}_{y_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_{z_0} + z\left(\frac{d\vec{e}_{z_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

Remarque :

Ce calcul permet de savoir comment varie \vec{U} observé depuis \mathcal{R} .

Si l'on veut savoir comment varie \vec{U} observé depuis $\mathcal{R}_0(\mathbf{O}; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$, on calculera :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_{x_0} + y\vec{e}_{y_0} + z\vec{e}_{z_0})\right)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_{x_0} + \frac{dy}{dt}\vec{e}_{y_0} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_{z_0}.$$

En effet \vec{e}_{x_0} , \vec{e}_{y_0} et \vec{e}_{z_0} sont fixes dans \mathcal{R}_0 donc :

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{e}_{y_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{e}_{z_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}.$$

Ainsi, contrairement à la dérivée d'une fonction scalaire, la dérivée d'une fonction vectorielle dépend du référentiel de dérivation, c'est-à-dire que la variation d'un vecteur dépend de « l'endroit » depuis lequel on l'observe.

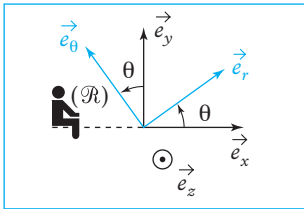


Fig. 13. Bases de projection ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) et ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

• Dérivée des vecteurs de base de projection

Considérons deux bases ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) et ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$); cherchons la dérivée de chacun des vecteurs dans le référentiel $\mathcal{R}(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (voir fig. 13).

Comme \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont des vecteurs constants dans \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

\vec{e}_r et \vec{e}_θ « tournant » par rapport à \mathcal{R} (on a $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$), on a ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \neq \vec{0}.$$

Remarquons que $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$.

$$\text{Ainsi } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\cos\theta)}{dt}\vec{e}_x + \cos\theta\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{d(\sin\theta)}{dt}\vec{e}_y + \sin\theta\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

Comme θ peut dépendre du temps t , $\frac{d(\cos\theta)}{dt}$ est la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d(\cos\theta)}{dt} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta)\dot{\theta}.$$

De même, $\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \cos(\theta)\dot{\theta}$, et donc :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y,$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y\right],$$

soit⁷ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

De la même manière, on montre que^{8, 9} :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Propriétés :

- $\left(\frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v})\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{v}}{dt}_{/\mathcal{R}}$.
- $\left(\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u})\right)_{/\mathcal{R}} = \lambda \frac{d\vec{u}}{dt}_{/\mathcal{R}}$.
- $\left(\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v})\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}_{/\mathcal{R}}$.

7. On montre par là-même que

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta \text{ car}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} \times \frac{d\theta}{dt}.$$

8. On constate que la dérivée d'un vecteur de norme constante (comme par exemple $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \dots$) est un vecteur ayant subi une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ rad.

En effet, si \vec{u} est un vecteur de norme constante, alors :

$$\frac{d\|\vec{u}\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{or } \frac{d\|\vec{u}\|^2}{dt} &= \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \text{ et donc :}$$

$$\vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

9. On montre par là même que :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r.$$

A.4.3. Vecteur vitesse

Définition 2

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} (par rapport à l'observateur \mathbf{I}), est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R}^{10} :

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v} \text{ vecteur vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \vec{OM} \text{ vecteur position (m)} \\ t \text{ temps (s)} \end{array} \right.$$

10. $d\vec{OM} = \vec{OM}(t+dt) - \vec{OM}(t)$.

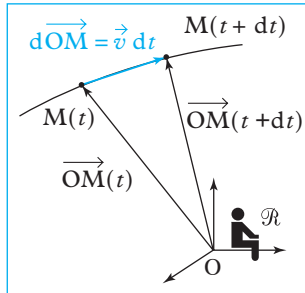


Fig. 14. Vecteur vitesse.

(Comme nous l'avons déjà signalé, O est un point fixe du référentiel \mathcal{R}).

Rappel : $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ est un vecteur tangent à la trajectoire en chacun de ses points : il correspond à la variation $d\vec{OM}$ du vecteur \vec{OM} pendant l'intervalle de temps dt (fig. 14) :

$$\vec{v}dt = \vec{OM}(t+dt) - \vec{OM}(t)$$

Remarques :

1) On est souvent amené à travailler avec la mesure algébrique v de la vitesse \vec{v} : $\vec{v} = v\vec{e}_T$ (\vec{e}_T vecteur unitaire tangent à la trajectoire). v est la composante du vecteur \vec{v} selon \vec{e}_T , c'est une grandeur qui a un signe (plus au moins).

La démarche du physicien consiste à se placer dans un cas particulier où les signes des grandeurs algébriques utilisées sont connus (abscisse, vitesse, force, elongation...) et à établir une relation entre ces grandeurs dans ce cas particulier ; l'équation obtenue restera alors valable pour les autres positions du système.

2) Le calcul de $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}$ permet de savoir comment varie la position du point M observé depuis le référentiel \mathcal{R} (l'observateur).

Application 1 Vitesse d'avancement de l'hélicoptère

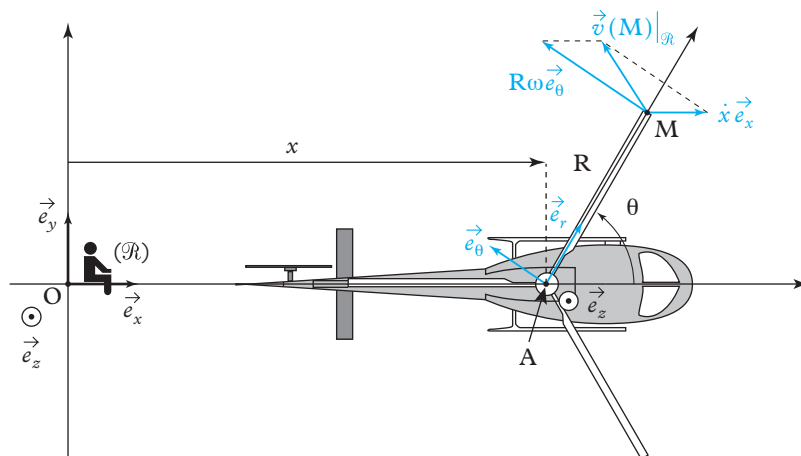
Exprimer le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) dans le cas de l'hélicoptère vu précédemment.

Déterminer la vitesse limite d'avancement de l'hélicoptère selon l'axe ($O ; \vec{e}_x$) sachant que la vitesse du point M doit être inférieure à la vitesse du son ($v_{\text{son}} = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) à chaque instant.

Données : les pales ont un rayon $R = 5,3 \text{ m}$ et tournent avec une vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 450 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Solution



Le vecteur position du point M est : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_r$.

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donc :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = x\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + R\vec{e}_r + R \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Comme $R = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et comme $\vec{e}_x = \text{cte}$ dans \mathcal{R} , $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$. En revanche $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
Ainsi : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on obtient :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta.$$

Remarque : on pourrait écrire $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$ soit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = (\dot{x} - R\omega\sin\theta)\vec{e}_x + (R\omega\cos\theta)\vec{e}_y.$$

La vitesse maximale du point M est obtenue lorsque les vecteurs $\dot{x}\vec{e}_x$ et $R\omega\vec{e}_\theta$ ont même direction et même sens, c'est-à-dire lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$.

Alors $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_x = (\dot{x} + R\omega)\vec{e}_x$.

Comme on veut, $\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\| \leq v_{\text{son}}$, il faut avoir :

$$\dot{x} + R\omega \leq v_{\text{son}}, \text{ soit } \dot{x} \leq v_{\text{son}} - R\omega.$$

A.N. $\dot{x} \leq 330 - 5,3 \times 450 \times \frac{2\pi}{60}$

$$\dot{x} \leq 80,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 289 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

La vitesse maximale d'avancement de l'hélicoptère est de $289 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

A.5. Accélération

A.5.1. Expression de l'accélération

Définition 3

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a} \text{ vecteur accélération (m} \cdot \text{s}^{-2}) \\ \vec{v} \text{ vecteur vitesse (m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \overrightarrow{OM} \text{ vecteur position (m)} \\ t \text{ temps (s)} \end{array} \right.$$

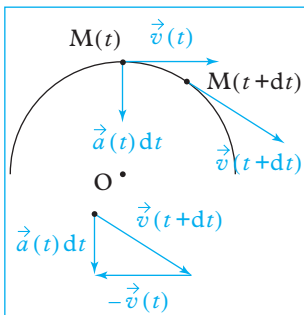


Fig. 16. Vecteur accélération.

Le vecteur accélération (fig. 16) représente la variation du vecteur vitesse entre les instants t et $t + dt$ et divisée par l'intervalle de temps dt :

$$\vec{a}(t)_{/\mathcal{R}} dt = \vec{v}(t+dt)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(t)_{/\mathcal{R}}.$$

Remarque : l'accélération représente donc la variation de :

- la norme du vecteur vitesse ;
- la direction (et du sens) du vecteur vitesse.

A.5.2. Types de mouvement

Le mouvement d'un point matériel M est **accélééré** dans le référentiel \mathcal{R} si $\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\|$ croît au cours du temps, c'est-à-dire si $\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\|^2$ croît ; on peut alors écrire :

$$\frac{d\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\|^2}{dt} > 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d(\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}})}{dt} > 0,$$

$$\text{ou encore : } \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} > 0,$$

ainsi : $2\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} > 0$, ce qui donne :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} > 0.$$

Le mouvement est **décéléré** (ou ralenti) si $\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\|$ décroît au cours du temps ; on montre de la même façon que cette définition correspond à :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} < 0.$$

Le mouvement du point matériel M est **uniforme** dans le référentiel \mathcal{R} si $\|\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\| = \text{cte}$ au cours du temps, ce qui correspond à :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = 0.$$

Application 2 Accélération de l'hélicoptère

Exprimer l'accélération du point A dans le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ puis l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'(A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et dans le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On suppose que la vitesse d'avancement de l'hélicoptère est constante : $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ($v = \text{cte}$) et que la vitesse de rotation des pales est constante $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 450 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$. Le rayon des pales est $R = 5,3 \text{ m}$.

Remarque : il ne faut pas confondre « exprimer l'accélération dans le référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ » avec « projeter le vecteur accélération dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ » !

Solution

- $\vec{OA} = x\vec{e}_x$ donc $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$.

Comme $\vec{e}_x = \text{cte}$ dans \mathcal{R} , $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$; ainsi :

$$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x = v\vec{e}_x \quad (v = \dot{x}).$$

L'accélération de A dans \mathcal{R} est alors :

$$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{v}\vec{e}_x + v \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}, \text{ soit } \vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

- La position de M dans \mathcal{R}' est repérée par : $\vec{AM} = R\vec{e}_r$.

Sa vitesse dans \mathcal{R}' est donc : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \dot{R}\vec{e}_r + R \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'}$.

Comme $R = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta$, on a :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = R\omega\vec{e}_\theta.$$

L'accélération de M dans \mathcal{R}' est donc :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{R}\omega\vec{e}_\theta + R\dot{\omega}\vec{e}_\theta + R\omega \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'},$$

Remarque : $\frac{d}{dt}(uvw) = \frac{du}{dt}vw + u\frac{dv}{dt}w + uv\frac{dw}{dt}$.

Comme $R = \text{cte}$ et $\omega = \text{cte}$, $\dot{R} = 0$ et $\dot{\omega} = 0$; de plus $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = -\dot{\theta}\vec{e}_r = -\omega\vec{e}_r$. On a donc :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

La position de M dans \mathcal{R} est repérée par : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_r$.

Sa vitesse dans \mathcal{R} est donc : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_\theta$.

Son accélération dans \mathcal{R} est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + R\omega \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}, \text{ soit } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_r.$$

Cette accélération est constamment dirigée vers A !

A.N. $\|\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}\| = 5,3 \times \left(\frac{450 \times 2\pi}{60} \right)^2 \approx 11\,769,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$

A.6. Bilan

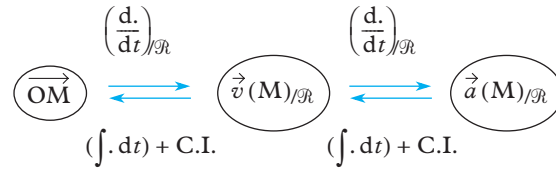


Fig. 17. Bilan cinématique.

La figure 17 permet d'établir un bilan cinématique des principes utilisés. La cinématique a pour objet d'étudier les mouvements à travers les grandeurs cinématiques : vecteur position (et trajectoire), vecteur vitesse et vecteur accélération. À partir d'une ces quantités, on peut passer aux autres soit en dérivant $\left(\frac{d.}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel d'étude, soit en intégrant $\left(\int. dt \right)$ en tenant compte des conditions initiales (C.I.).

A.7. Bases de projection utiles

A.7.1. Base cartésienne

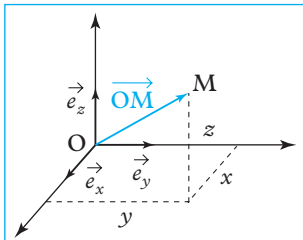


Fig. 18. Base cartésienne.

La base cartésienne est constituée des trois vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (fig. 18). Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres x, y et z tels que :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

Cette base est la même pour tous les points de l'espace.

Remarque :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{\vec{OM} \cdot \vec{OM}} = \sqrt{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A.7.2. Base cylindrique

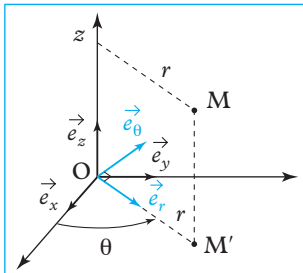


Fig. 19. Base cylindrique.

La base cylindrique est constituée des trois vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (fig. 19).

L'angle $(\vec{e}_x, \vec{e}_r) = \theta$ s'appelle **angle polaire** et on a $r = \|\vec{OM}\|$.

Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide des trois paramètres r, θ et z tels que^{11, 12} :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

Remarque : $\|\vec{OM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Cette base est mobile et bouge avec le point M : elle est utile dans les problèmes à symétrie cylindrique.

Rappel : $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r$ et $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta$ avec $\mathcal{R} = (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Très souvent, on travaille dans le plan ; dans ce cas on n'utilise pas le vecteur \vec{e}_z : on parle alors de **base polaire** (fig. 20).

La base polaire est constituée des deux vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et le vecteur \vec{OM} est alors donné par la relation¹³ : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

Remarque : on a toujours $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r$.

A.7.3. Expressions de la vitesse et de l'accélération à l'aide des bases cartésienne et cylindrique

Soit un point M en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Si on utilise comme base de projection la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on a :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad 14$$

11. Attention de ne pas écrire : $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$.

12. Attention, θ n'apparaît pas explicitement mais \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de θ .

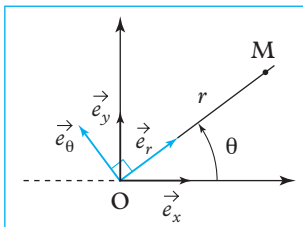


Fig. 20. Base polaire.

13. Attention, θ n'apparaît pas explicitement mais \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de θ .

14. En effet $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;

$$\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} ; \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

15. Afin d'obtenir ces vecteurs en coordonnées polaires, il suffit de supprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération selon \vec{e}_z .

$$\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad 14.$$

Si maintenant, on utilise comme base de projection la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on a¹⁵ :

$$\bullet \quad \vec{\text{OM}} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

$$\bullet \quad \vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\text{OM}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{e}_z + z\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \quad \text{soit :}$$

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.$$

$$\bullet \quad \vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{soit : } \vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \ddot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z$$

soit encore :

$$\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Remarque : la composante selon \vec{e}_r d'un vecteur est appelée composante radiale, la composante selon \vec{e}_θ est appelée composante orthoradiale.

B. Étude de mouvements usuels

B.1. Mouvement rectiligne

La trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est une droite, par exemple $(\text{O} ; \vec{e}_x)$; les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent donc sous la forme :

- $\vec{\text{OM}} = x\vec{e}_x$;
- $\vec{v}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x$;
- $\vec{a}(\mathbf{M})_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

B.1.1. Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement est **rectiligne uniforme** si $v = \dot{x} = \text{cte}$ (on retrouve alors $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ puisque $\vec{a} = \vec{0}$).

B.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement est **rectiligne uniformément varié** si $\vec{a} = \vec{\text{cte}} = a\vec{e}_x$ et si la trajectoire est une droite :

- si $va > 0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, en effet : $\vec{v} \cdot \vec{a} = va > 0$;
- si $va < 0$, le mouvement est rectiligne uniformément ralenti (ou décéléré, ou retardé, en effet : $\vec{v} \cdot \vec{a} = va < 0$).



Le signe de \vec{a} ne suffit pas.

À partir de $\vec{a} = a\vec{e}_x = \vec{\text{cte}}$, on peut trouver la vitesse en intégrant vectoriellement l'équation :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a\vec{e}_x, \quad \text{d'où } \vec{v}(t) = at\vec{e}_x + \vec{v}(t=0) = (at + v_0)\vec{e}_x.$$

Le vecteur position s'obtient en intégrant vectoriellement l'équation :

$$\frac{d\vec{\text{OM}}}{dt} = at\vec{e}_x + v_0\vec{e}_x \quad \text{soit } \vec{\text{OM}}(t) = \frac{at^2}{2}\vec{e}_x + v_0t\vec{e}_x + \vec{\text{OM}}(t=0),$$

ou encore : $x\vec{e}_x = \left(\frac{at^2}{2} + v_0t + x_0\right)\vec{e}_x$.

En projetant selon \vec{e}_x , on obtient :

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Application 3 Déterminer une durée et une distance

Un véhicule de sport se déplaçant sur une ligne droite horizontale a une accélération constante $a = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Déterminer le temps mis pour passer de 0 à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ainsi que la distance parcourue.

Solution

Dans le référentiel $\mathcal{R}(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la route ($\text{O} ; \vec{e}_x$), le vecteur accélération du véhicule M s'écrit :

$$\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = a\vec{e}_x = \text{cte}.$$

À $t = 0$ (au départ), M se trouve en O ($x_0 = 0$) avec une vitesse nulle ($v_0 = 0$) ;

ainsi en intégrant (à l'aide des conditions initiales précédentes) :

$$\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = at\vec{e}_x \text{ et } \overline{\text{OM}} = \frac{at^2}{2}\vec{e}_x.$$

Le temps mis pour atteindre $v_f = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est : $t_0 = \frac{v_f}{a}$.

La distance parcourue est : $D = x(t_0) = \frac{at_0^2}{2}$.

A.N. $t_0 = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)}{6} \approx 4,6 \text{ s}$ et $D = \frac{6 \times 4,6^2}{2} \approx 64,3 \text{ m}$.

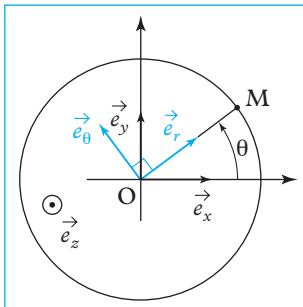


Fig. 21. Trajectoire circulaire du point M dans la base ($\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

B.2. Mouvement circulaire

La trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un cercle de centre O et de rayon R. En utilisant la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) (ou polaire) puisque le mouvement se fait dans le plan ($\text{O} ; \vec{e}_x, \vec{e}_y$) (fig. 21), les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent :

- $\overline{\text{OM}} = R\vec{e}_r$;
- $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$;
- $\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ ¹⁶.

– Le mouvement est **circulaire uniforme** si $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \text{cte}$, en effet dans ce cas :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = R\omega\vec{e}_\theta \cdot (-R\omega^2\vec{e}_r) = 0,$$

on a alors :

- $\overline{\text{OM}} = R\vec{e}_r$;
- $\vec{v}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = R\omega\vec{e}_\theta$ (la vitesse est orthoradiale) ;
- $\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_r$ (l'accélération est radiale et centripète)¹⁷.

Remarque : dans ce cas, même si $v = R\omega = \text{cte}$, l'accélération n'est pas nulle car la direction du vecteur vitesse varie.

– Le mouvement est **circulaire uniformément accéléré** si $\ddot{\theta} = \text{cte} > 0$.

En effet, dans ce cas :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \cdot (R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} > 0.$$

– Le mouvement est circulaire uniformément décéléré si $\ddot{\theta} < 0$.

^{16.} On a $v = R\dot{\theta}$ ce qui permet d'écrire :

$$\vec{a}(\text{M})_{/\mathcal{R}} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

L'accélération orthoradiale est responsable de la variation de la norme de \vec{v} et l'accélération radiale est responsable de la variation de la direction de \vec{v} .

^{17.} On a $v = R\omega$ donc :

$$a = R\omega^2 = R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}.$$

Application 4 Vitesse d'un avion

Un avion de chasse M se déplace à vitesse constante v en virage circulaire horizontal de centre O et de rayon $R = 600$ m. Déterminer la vitesse v de l'avion afin que son accélération soit $a = 6g$ (avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Solution

Le mouvement est circulaire uniforme dans le référentiel lié au centre O de la trajectoire; ainsi :

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{aR}.$$

A.N. $v = \sqrt{6 \times 9,81 \times 600} \approx 187,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 676 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

C. Introduction au mouvement d'un solide

C.1. Définition d'un solide

Définition 4

Un solide (indéformable) \mathcal{S} est un ensemble de points tel que (fig. 22) pour tout couple de points (A, B) de \mathcal{S} , la distance AB est constante au cours du temps :

$$\forall A \in \mathcal{S}, \forall B \in \mathcal{S}, \|\overline{AB}\| = \text{cte.}$$

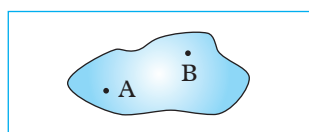


Fig. 22. Un solide.

C.2. Cas particuliers de mouvements

C.2.1. Solide en translation

18. Cette translation peut être :
- rectiligne (les trajectoires des points du solide sont des droites);
 - circulaire (les trajectoires des points du solide sont des cercles de même rayon);
 - ou quelconque.

19. Ce vecteur change, dans le cas général, d'un instant à l'autre !

Un solide \mathcal{S} est en translation¹⁸ par rapport au référentiel \mathcal{R} si, à un instant t , les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques (fig. 23).

Ainsi, pour deux points A et B éléments du solide \mathcal{S} , on a, à l'instant t :

$$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(t) \text{ }^{19}.$$

Ainsi, $\forall t, \overline{AB} = \text{cte.}$

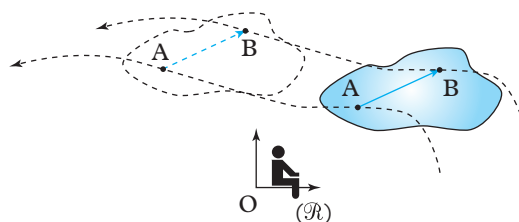


Fig. 23. Solide en translation dans un référentiel \mathcal{R} .

C.2.2. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide \mathcal{S} est en rotation autour de l'axe fixe \mathcal{D} du référentiel \mathcal{R} (fig. 24) si tous les points du solide \mathcal{S} sont en mouvement sur des trajectoires circulaires centrées sur \mathcal{D} , à la même vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$.

A décrit une trajectoire circulaire de rayon $OA = r_A$ (voir § B.2)

donc $v_A = r_A \times \omega$.

B décrit une trajectoire circulaire de rayon $OB = r_B$ donc $v_B = r_B \times \omega$.

Remarque : Dans le cas général, $\dot{\theta} = \omega \neq \text{cste}$.

Si $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$, la rotation est uniforme.

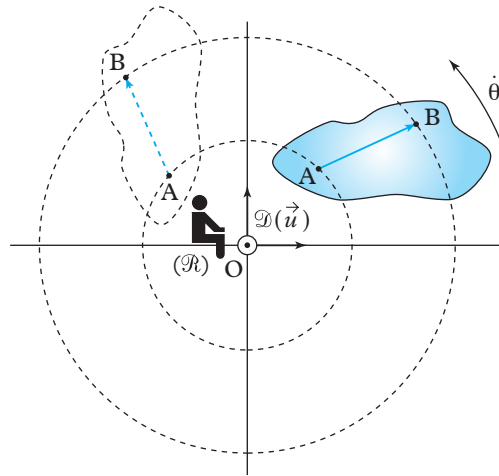
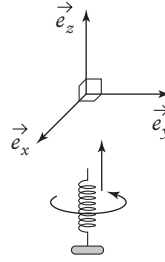


Fig. 24. Solide en rotation autour de l'axe \mathcal{D} fixe dans un référentiel \mathcal{R} .

L'essentiel

✓ Référentiel/observateur

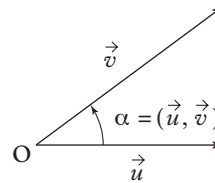
- base orthonormée directe: 3 vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tels que :
 - $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$, $\vec{e}_y \perp \vec{e}_z$ et $\vec{e}_z \perp \vec{e}_x$;
 - $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$;
 - règle du tire-bouchon.
- repère $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- référentiel (\equiv observateur) $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.




✓ Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

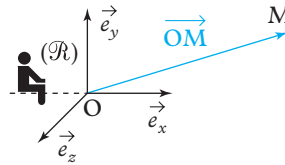
Propriétés : si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



✓ Vecteur position


La position du point M observé depuis l'observateur  (référentiel \mathcal{R}) est définie par le vecteur position \vec{OM} composé :

- d'un point **fixe** O dans \mathcal{R} ;
- du point observé M.



Remarque : la trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps.

✓ Vecteur vitesse

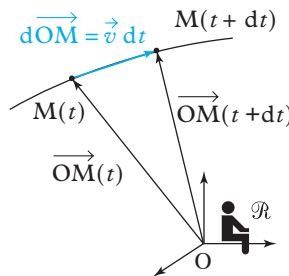
Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} (par rapport à l'observateur ) est la dérivée temporelle du vecteur position du point M dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(\mathbf{M})_{I\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{I\mathcal{R}}$$

\vec{v} vecteur vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

\vec{OM} vecteur position (m)

t temps (s)



Remarque : le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

✓ Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

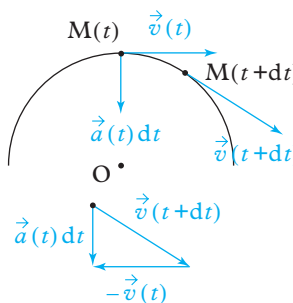
$$\vec{a}(\mathbf{M})_{I\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right)_{I\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(\mathbf{M})_{I\mathcal{R}}}{dt} \right)_{I\mathcal{R}}$$

\vec{a} vecteur accélération ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

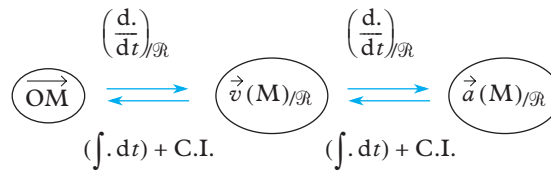
\vec{v} vecteur vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

\vec{OM} vecteur position (m)

t temps (s)



✓ Bilan



✓ Caractérisation du mouvement

- Mouvement accéléré: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} > 0$
- Mouvement décéléré: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} < 0$
- Mouvement uniforme: $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = 0$.

✓ Bases de projection

• Base Cartésienne

La base cartésienne est constituée de trois vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres x, y et z tels que: $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

Remarque: savoir retrouver vitesse et accélération.

• Base cylindrique

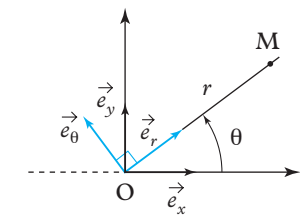
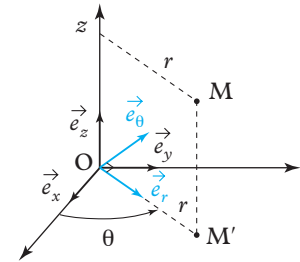
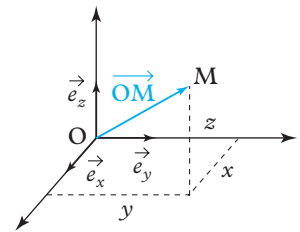
La base cartésienne est constituée de trois vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

L'angle θ s'appelle angle polaire et on a $r = \|\vec{OM}\|$. Un vecteur \vec{OM} y est défini à l'aide de trois paramètres r, θ et z tels que: $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

Avec $\mathcal{R}(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on a: $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Remarques:

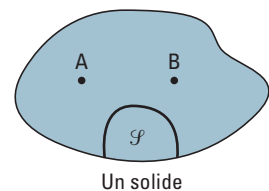
- 1) Savoir retrouver vitesse et accélération.
- 2) Ne pas écrire $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$
- 3) Dans le plan, on parle de base polaire $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.



✓ Définition d'un solide

Un solide (indéformable) \mathcal{S} est un ensemble de points tels que pour tout couple de points (A, B) de \mathcal{S} , la distance AB est constante au cours du temps :

$$\forall A \in \mathcal{S}, \forall B \in \mathcal{S} \quad \|\vec{AB}\| = \text{cte.}$$



Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment déterminer la vitesse puis l'accélération d'un point connaissant sa position?

On considère un point M dont la position est connue à l'instant t et repéré à l'aide de paramètres $(x, y, r, \theta \dots)$. On cherche à déterminer son vecteur vitesse puis son vecteur accélération.

→ Savoir faire

❶ Bien préciser le référentiel \mathcal{R} (l'observateur) par rapport auquel on cherche à déterminer le vecteur vitesse puis le vecteur accélération du point M.

❷ Exprimer le vecteur position \overrightarrow{OM} .

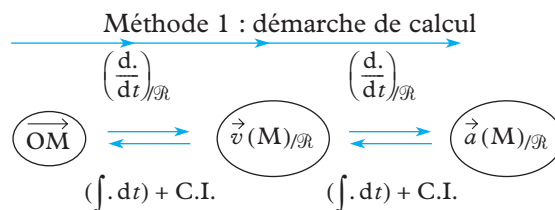
⚠ 0 est un point fixe du référentiel \mathcal{R} .

❸ Dériver le vecteur position par rapport au référentiel \mathcal{R} afin d'obtenir le vecteur vitesse. Vérifier les unités.

⚙ Comme la position du point M est connue à tout instant, le vecteur vitesse est lui-même connu à tout instant.

❹ Dériver le vecteur vitesse par rapport au **même** référentiel \mathcal{R} afin d'obtenir le vecteur accélération. Vérifier les unités.

⚙ La démarche de calcul est basée sur la dérivation de vecteurs soit un déplacement sur le schéma ci-dessous de la gauche vers la droite (uniquement).



→ Application

Soit M un point correspondant à la valve d'une roue de voiture, de centre G et de rayon $r = 0,3$ m. Pour repérer le point M, on utilise deux paramètres (voir figure) :

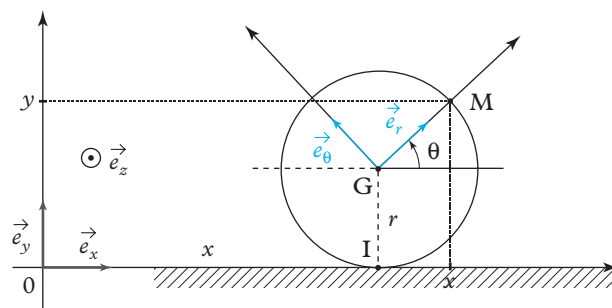
- $x(t) = 3t^2$ ($x = OI$) ; x (m), t (s) ;
- $\theta(t) = -10t^2$, $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$; θ (rad), t (s).

Déterminer le vecteur vitesse de M par rapport au sol, puis le vecteur accélération de M par rapport au sol.

Solution

❶ On cherche la vitesse du point M par rapport au sol donc le référentiel \mathcal{R} est ici $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

⚙ Cela signifie que l'observateur qui regarde bouger M est fixe par rapport au sol.



- ② On exprime le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GM} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_y + r\vec{e}_r.$$



O doit être fixe par rapport au référentiel (ici le sol).



À tout instant :

- $x(t)$ est connu ;
- r est une constante égale à 0,3 m ;
- \vec{e}_r est parfaitement déterminé puisque $\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ est connu à tout instant ;

donc \overrightarrow{OM} est connu à tout instant.

- ③ Pour déterminer le vecteur vitesse de M par rapport au sol, on va dériver le vecteur position par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + r\vec{e}_y + r\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt}(r\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}}.$$



En effet $(u + v)' = u' + v'$.

$$\text{soit} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + x\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt}\vec{e}_y + r\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$



En effet $(uv)' = u'v + uv'$.



On voit que la dérivation de vecteurs s'effectue de la même manière que la dérivation scalaire en mathématiques. La seule différence réside dans le fait qu'il faut préciser **par rapport à quel référentiel** on dérive un vecteur.



Pour dériver un vecteur par rapport à \mathcal{R} , il n'y a pas obligatoirement nécessité d'exprimer ce vecteur dans \mathcal{R} avant de le dériver : ici \overrightarrow{OM} est exprimé à l'aide de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_r , et on va le dériver par rapport à \mathcal{R} (0 ; \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z).

En reprenant le calcul :

- $r = \text{cte}$, donc $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0$;
- \vec{e}_x est fixe dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;
- \vec{e}_y est fixe dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$;
- \vec{e}_r bouge dans \mathcal{R} , et on sait (d'après le cours) que $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$;

on a :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + x \times \vec{0} + 0 \times \vec{e}_y + r \times \vec{0} + 0 \times \vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

soit

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Unités : comme \dot{x} est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, r en m et $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et que $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, cette expression est homogène.

Par ailleurs, on connaît :

$$x(t) = 3t^2 \quad \text{et} \quad \theta(t) = -10t^2 ;$$

donc $\dot{x}(t) = \dot{x} = 6t$ et $\dot{\theta}(t) = -20t$, donc :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = 6t\vec{e}_x + 0,3 \times (-20t)\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = 6t\vec{e}_x - 6t\vec{e}_\theta = 6t(\vec{e}_x - \vec{e}_\theta).$$

À tout instant, on connaît \vec{e}_x et \vec{e}_θ , donc $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$.

- ④ Pour déterminer le vecteur accélération de M par rapport au sol, on va dériver le vecteur vitesse **toujours** par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{e}_x + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned}\text{soit } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d}{dt}(\dot{x} \vec{e}_x) \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d}{dt}(r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \right)_{/\mathcal{R}} \\ \text{soit } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \ddot{x} \vec{e}_x + \dot{x} \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \\ &= \ddot{x} \vec{e}_x + \dot{x} \times \vec{0} + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r).\end{aligned}$$

☀ On sait que $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$.

Ainsi :
$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{e}_x + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

Unités : comme \ddot{x} est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, r en m , $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\ddot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

☀ Encore une fois, il n'y a pas besoin d'exprimer le vecteur vitesse dans \mathcal{R} (expression en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z **uniquement**), pour pouvoir dériver ce vecteur vitesse par rapport à \mathcal{R} , (mais on peut le faire, c'est souvent plus long au niveau des calculs).

Ici comme $\dot{x}(t) = 6t$ et $\dot{\theta}(t) = -20t$, alors : $\ddot{x}(t) = 6$ et $\ddot{\theta}(t) = -20$;
et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = 6\vec{e}_x + 0,3 \times (-20)\vec{e}_\theta - 0,3 \times (-20t)^2 \vec{e}_r = 6(\vec{e}_x - \vec{e}_\theta) - 120t^2 \vec{e}_r.$$

À tout instant on connaît \vec{e}_x , \vec{e}_θ et \vec{e}_r donc $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$.

Méthode n°2

Comment déterminer la position d'un point connaissant son accélération ?

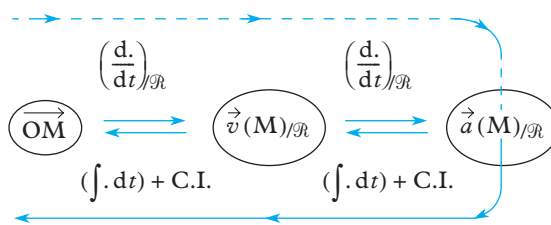
On considère un point M repéré à l'aide de paramètres (x, y, r, θ, \dots) . Connaissant son accélération (à tout instant), on cherche à déterminer sa position (à tout instant).

→ Savoir faire

- 1 Reprendre la démarche de la méthode 1. Exprimer le vecteur position, le vecteur vitesse puis le vecteur accélération du point M en fonction des paramètres (et de leurs dérivées) qui repèrent le point M.
- 2 Utiliser l'information sur l'accélération afin de trouver des relations entre ces paramètres (et leurs dérivées).
- 3 Intégrer ces relations par rapport au temps (en utilisant les C.I.) afin de déterminer la variation en fonction du temps des paramètres repérant le point M donc afin de déterminer le vecteur position.

☀ La démarche commence donc par la dérivation des vecteurs (identique à la méthode 1 : déplacement de la gauche vers la droite sur le schéma) puis se poursuit par l'intégration de relations (déplacement de la droite vers la gauche sur le schéma) afin de déterminer exactement le vecteur position (après avoir utilisé les informations disponibles au niveau de l'accélération).

Méthode 2 : démarche de calcul

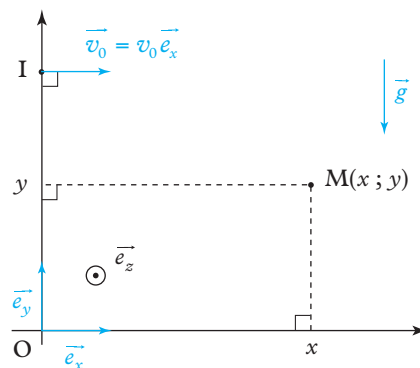


→ Application

Soit un point M repéré par deux paramètres x et y (voir figure). À tout instant l'accélération du point M par rapport au sol $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est égale à \vec{g} vecteur vertical vers le bas et de norme $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

À $t = 0$, le point M se trouve en I ($OI = h = 200 \text{ m}$) et possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer la position du point M pour tout instant $t \geq 0$.



Solution

- ① Le référentiel qui nous intéresse est bien évidemment $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ c'est-à-dire le sol puisqu'on sait que l'accélération de M vaut \vec{g} par rapport au sol.

• Vecteur position : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

🌀 Comme $x(t)$ et $y(t)$ ne sont pas connues, ce vecteur position n'est pour l'instant pas connu.

• Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$.

🌀 En effet, \vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes dans \mathcal{R} , donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

• Vecteur accélération : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$.

- ② Or l'énoncé nous dit qu'à tout instant l'accélération de M par rapport au sol est :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_y, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

En comparant les deux expressions de l'accélération, on en déduit :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y = -g\vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 & (\text{projection sur } \vec{e}_x) \\ \ddot{y} = -g & (\text{projection sur } \vec{e}_y). \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g. \end{cases}$$

- ③ Il ne reste plus qu'à intégrer ces deux relations par rapport au temps (en utilisant les C.I. c'est-à-dire informations valables uniquement à un instant donné (ici $t = 0$)) afin d'obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

$$\text{Ainsi : } \dot{x}(t) = k_1$$

$$\text{Or : } \dot{x}(t=0) = k_1 = \vec{v}_0 \cdot \vec{e}_x = v_0 \quad \text{donc} \quad k_1 = v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{De même : } \dot{y}(t) = -gt + k_2$$

$$\text{Or : } \dot{y}(t=0) = k_2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{e}_y = 0 \quad \text{donc} \quad k_2 = 0.$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt. \end{cases}$$

On obtient en intégrant une nouvelle fois par rapport au temps :

$$x(t) = v_0 t + k_3.$$

$$\text{Or : } x(t=0) = \vec{OM}(t=0) \cdot \vec{e}_x = \vec{OI} \cdot \vec{e}_x = 0 \quad \text{avec} \quad k_3 = 0.$$

$$\text{De même : } y(t) = -g \frac{t^2}{2} + k_4.$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } y(t=0) &= k_4 = \vec{OM}(t=0) \cdot \vec{e}_y \\ &= \vec{OI} \cdot \vec{e}_y = h = 200 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{donc } k_4 = h.$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -g \frac{t^2}{2} + h. \end{cases}$$

Comme $x(t)$ et $y(t)$ sont déterminées à tout instant, \overline{OM} est déterminé à tout instant ; on connaît donc parfaitement la position de M à tout instant $t \geq 0$. On peut ainsi positionner le point M au cours du temps sur un graphique, c'est-à-dire tracer sa trajectoire.

Remarque : on peut retrouver les résultats numériquement en utilisant une calculatrice programmable, un tableur (Excel) ou tout autre langage de programmation : on peut programmer rapidement une résolution numérique de cette équation par la méthode d'Euler, qui consiste à approcher la dérivée $\frac{dv_x}{dt}$ par $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$; ainsi

le système formé des deux équations différentielles $\frac{dv_x}{dt}$ et $\frac{dv_y}{dt}$ permet de calculer $v_x(t + \Delta t)$ et $v_y(t + \Delta t)$ à partir de $v_x(t)$ et $v_y(t)$.

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - g\Delta t \end{cases}$$

À partir des conditions initiales sur la vitesse ($v_x(t = 0) = v_0$ et $v_y(t = 0) = 0$), on obtient, de proche en proche (pas d'avancement dans le temps : Δt), les valeurs approchées de v_x et v_y au cours du temps.

On peut de la même manière, connaissant à chaque instant (plus précisément instant multiple du pas de calcul Δt) la vitesse, déterminer la position de M :

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t \end{cases}$$

équations obtenues à partir de $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$.

Tableau excel réalisé avec $\Delta t = 0,25$ s :

« $\Delta t = 0,25$ s » « v_0 » 0 « $x_0 = 0$ »
= A4 + 0,25

« $v_x(t + \Delta t) = v_x(t)$ »
= A26

	A	K	L	M	N
1					
2		Chute libre			
3	t	Vx	Vy	x	y
4	0.000	50.000	0.000	0.000	200.000
5	0.250	50.000	-2.453	12.500	200.000
6	0.500	50.000	-4.905	25.000	199.387
7	0.750	50.000	-7.358	37.500	198.161
8	1.000	50.000	-9.810	50.000	196.321
9	1.250	50.000	-12.263	62.500	193.869
10	1.500	50.000	-14.715	75.000	190.803
11	1.750	50.000	-17.168	87.500	187.124
12	2.000	50.000	-19.620	100.000	182.833
13	2.250	50.000	-22.073	112.500	177.928
14	2.500	50.000	-24.525	125.000	172.409
15	2.750	50.000	-26.978	137.500	166.278
16	3.000	50.000	-29.430	150.000	159.534
17	3.250	50.000	-31.883	162.500	152.176
18	3.500	50.000	-34.335	175.000	144.206
19	3.750	50.000	-36.788	187.500	135.622
20	4.000	50.000	-39.240	200.000	126.425
21	4.250	50.000	-41.693	212.500	116.615
22	4.500	50.000	-44.145	225.000	106.192
23	4.750	50.000	-46.598	237.500	95.156
24	5.000	50.000	-49.050	250.000	83.506
25	5.250	50.000	-51.503	262.500	71.244
26	5.500	50.000	-53.955	275.000	58.368
27	5.750	50.000	-56.408	287.500	44.879
28	6.000	50.000	-58.860	300.000	30.778
29	6.250	50.000	-61.313	312.500	16.063
30	6.500	50.000	-63.765	325.000	0.734

« $y_0 = 200$ »

Conditions initiales

« $y(t + \Delta t) = y(t) + v_y \Delta t$ »
= E14 + C14 × 0,25

« $x(t + \Delta t) = x(t) + v_x \Delta t$ »
= D22 + B22 × 0,25

« $v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - y \times \Delta t$ »
= C26 - 9,81 × 0,25

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Homogénéité d'une formule

Vérifier l'homogénéité de la formule ci-dessous :

$$y = 5at^2 + vt + h,$$

où a est une accélération, t le temps, v une vitesse et y et h sont deux longueurs.

Ex. 2 Vitesses rectiligne et angulaire

a) Une voiture avance à la vitesse $\dot{x} = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Donner sa vitesse \dot{x} en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

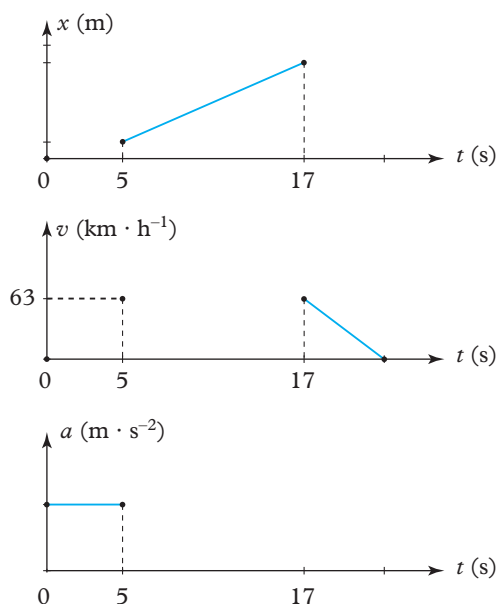
b) Un moteur tourne à la vitesse $\dot{\theta} = 3\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Donner sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Niveau 2

Ex. 3 Analyse de graphiques

Une voiture roulant sur une route horizontale rectiligne, se déplace d'un point A vers un point B distants de 300 m. On donne les informations partielles sur la position x , la vitesse v et l'accélération a de la voiture pendant ce trajet.

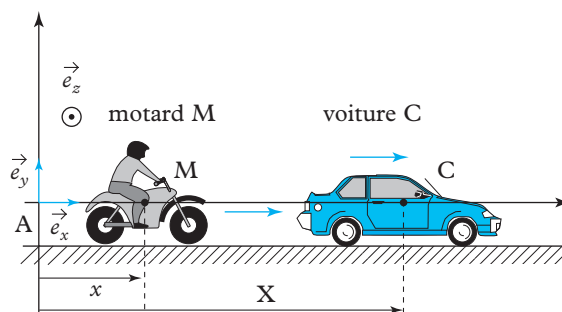


Compléter les graphiques en indiquant les valeurs et le type de courbe.

Calculer le temps T mis pour aller de A à B.

Ex. 4 Course poursuite

Une voiture C roule à la vitesse constante $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route horizontale et droite ; un motard M, qui démarre à $t = 0$ au moment où la voiture passe à sa hauteur (au point A), accélère uniformément ; il atteint $v = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ au bout de $t = 10 \text{ s}$. Soit \mathcal{R}_0 le référentiel (A ; \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z).

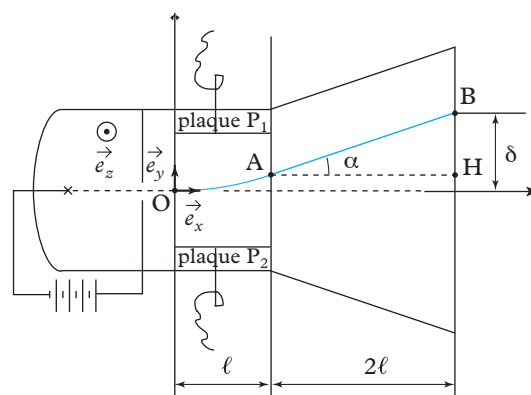


- 1) Déterminer $x(t)$ et $X(t)$.
- 2) Quel temps T faudra-t-il au motard pour rattraper la voiture ?
- 3) Quelle sera alors la distance d parcourue ?
- 4) Quelle sera la vitesse v_1 acquise par le motard ?

Niveau 3

Ex. 5 Écran d'oscilloscope

On étudie le mouvement des électrons formant le faisceau qui laisse une trace fluorescente sur l'écran de l'oscilloscope.



Ces électrons arrivent en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Ils traversent alors un jeu de plaques (P_1 et P_2) de longueur ℓ qui créent, à l'aide d'un champ électrostatique, une accélération constante $\vec{a}_0 = a_0 \vec{e}_y$. Les

électrons sont déviés et sortent du jeu de plaques en A avec une vitesse \vec{v}_A inclinée d'un angle α par rapport à \vec{e}_x . Ils poursuivent alors leur trajet jusqu'à l'écran (au point B) avec une accélération nulle.

Données :

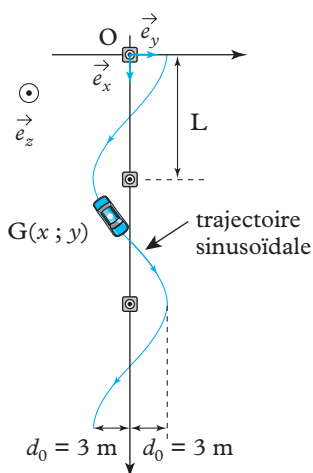
$$v_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; a_0 = 1 \cdot 10^{15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; \ell = 5 \text{ cm}.$$

- 1) Déterminer la trajectoire des électrons entre O et A.
- 2) Déterminer puis calculer α .
- 3) Déterminer la trajectoire des électrons entre A et B.
- 4) Calculer δ .

Ex. 6 Test de stabilité d'une automobile

Lors d'un test de stabilité, une voiture repérée par le point G de coordonnées $(x; y)$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale horizontale de slalom entre des plots espacés d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_0 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

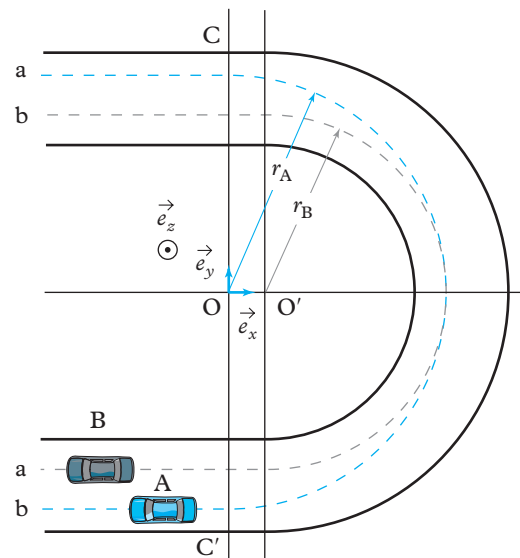
Si on veut conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7g$, à quelle distance minimum L doit-on placer les plots ?



Ex. 7 Course de voiture

Lors d'une course de voiture, 2 voitures (A et B) arrivent en ligne droite et prennent le virage de manière différente :

- la voiture A prend le virage sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_A = 90 \text{ m}$;
- la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_B = 75 \text{ m}$.



On appelle \mathcal{R} le référentiel $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le but de l'exercice est de comparer l'avancement des 2 voitures, sachant que la **référence de comparaison est liée à l'axe (CC')**.

- 1) Déterminer puis calculer les longueurs L_A et L_B des trajectoires des 2 voitures A et B. Conclusion.
- 2) On suppose que les 2 voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 voitures restent inférieures à $0,8g$.
- 3) En déduire les temps t_A et t_B nécessaires aux 2 voitures pour négocier le virage. Conclure.

Indications

Ex 7

- 1) Ne pas oublier les 2 segments de droite pour la voiture B.
- 2) Utiliser les coordonnées polaires pour exprimer vitesse et accélération.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

- Accélération : a est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Vitesse : v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Temps : t est en s.

Longueurs : h et y sont en m.

Ainsi :

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{s}^2 = \text{m} [5at^2]$$

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m} [vt]$$

$$\text{m} [h]$$

L'ensemble de l'expression est homogène à une longueur en m. Ceci est de plus cohérent avec y .

Exercice 2

a) $\dot{x} = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Or $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$ et $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$.

$$\text{Donc } \dot{x} = \frac{70 \times 1\,000}{3\,600} = \frac{70}{3,6} \approx 19,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

☀ Pour passer des $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise par 3,6.

b) $\dot{\theta} = 3\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Or $1 \text{ tr} = 2\pi \text{ rad}$ et $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$.

$$\text{Donc } \dot{\theta} = \frac{3\,500 \times 2\pi}{60} = \frac{3\,500}{\frac{60}{2\pi}} = \frac{3\,500}{9,55} \approx 366,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

☀ Pour passer des $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise quasiment par 10.

Exercices de niveau 2

Exercice 3

1) À tout instant, on a entre les différentes grandeurs les relations suivantes :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour $0 < t < 5 \text{ s}$

$a(t) = a_0 = \text{cte}$ donc $v(t)$ est linéaire (par rapport au temps).

En effet :


$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{donc} \quad v(t) = a_0 t + \text{cte}$$

$$v(t=0) = 0 + \text{cte} = 0$$

$$v(t=5 \text{ s}) = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \quad \text{donc} \quad a_0 = \frac{63}{5} = 3,6 = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$x(t)$ est **parabolique** :

- elle admet une tangente horizontale en $t=0$ car $v(t=0) = 0$;
- il y a continuité de la tangente à la courbe $x(t)$ à gauche et à droite de $t=5 \text{ s}$ car $v(t=5^-) = v(t=5^+) = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

 La vitesse est la pente de la courbe $x(t)$ donnant la position en fonction du temps.

En effet :

$$\frac{dx}{dt} = v = a_0 t \quad \text{donc} \quad x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + \text{cte}.$$

$$\text{Or } x(t=0) = 0 \quad \text{donc cte} = 0, \text{ d'où } x(t) = a_0 \frac{t^2}{2}.$$

$$\text{Pour } t=5 \text{ s} : x(t=5 \text{ s}) = 3,5 \times \frac{5^2}{2} = 43,75 \text{ m}.$$

Pour $5 < t < 17 \text{ s}$

Comme $x(t)$ est linéaire, $v(t)$ est **constante** et $a(t)$ est **nulle**.

$$a = 0$$

$$v = \text{cte} = v_0 = 63 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, \text{ donc } x = v_0 t + \text{cte}.$$

$$\text{Or } t=5 \text{ s}, x = 43,75 \text{ m} \quad \text{donc} \quad \text{cte} = 43,75 - \frac{63}{3,6} \times 5 \quad \text{soit} \quad \text{cte} = -43,75 \text{ m}.$$

$$\text{Donc } x(t) = v_0 t - 43,75.$$

$$\text{Alors pour } t=17 \text{ s} : x(t=17 \text{ s}) = \frac{63}{3,6} \times 17 - 43,75 = 253,75 \text{ m}.$$

Pour $17 \text{ s} < t < T$

La vitesse est linéaire par rapport au temps donc l'accélération est constante et le déplacement est parabolique :

$$a(t) = a_1 = \text{cte} \quad \text{donc} \quad v(t) = a_1 t + \text{cte}.$$

Or à $t=17 \text{ s}$, $v = v_0$ et à $t=T$, $v=0$ donc :

$$v(t) = -\frac{v_0}{T-17}(t-17) + v_0 \quad \text{donc} \quad x(t) = -\frac{v_0}{T-17} \frac{(t-17)^2}{2} + v_0 t + \text{cte}.$$

Or à $t=17 \text{ s}$, $x = 253,75 \text{ m}$, donc :

$$x(t) = -\frac{v_0}{T-17} \frac{(t-17)^2}{2} + v_0(t-17) + 253,75.$$

On sait par ailleurs que $x(t=T) = 300 \text{ m}$, donc :

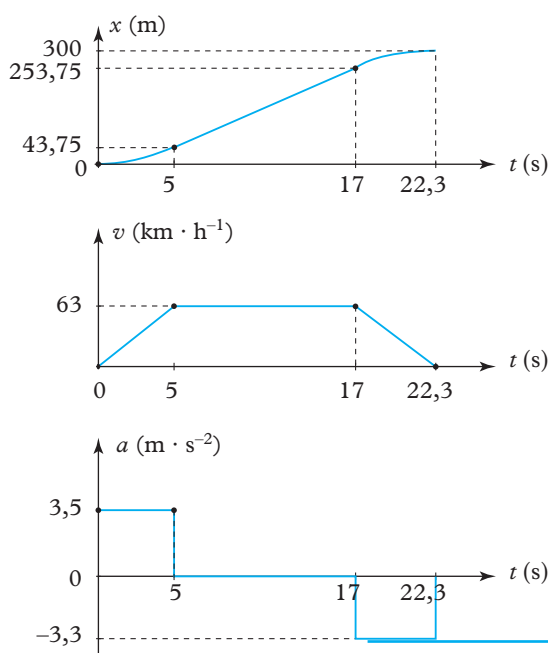
$$-\frac{v_0}{T-17} \frac{(T-17)^2}{2} + v_0(T-17) + 253,75 = 300$$

$$\frac{v_0}{2}(T-17) = 46,25$$

$$T = \frac{46,25}{\left(\frac{63}{3,6}\right)} + 17.$$

Ainsi le temps pour aller de A à B est $T \approx 22,3 \text{ s}$

$$\text{et } a_1 = -\frac{v_0}{T-17} \approx -\frac{3,6}{22,3-17} \approx -3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



Exercice 4

1) Pour trouver le temps que le motard va mettre pour rattraper la voiture, il va falloir trouver l'expression des vecteurs positions de la moto et de la voiture.

Pour la voiture

Exprimons le vecteur vitesse afin d'utiliser l'information v_0 .

- Vecteur position : $\overrightarrow{AC} = X\overrightarrow{e_x}$.
- Vecteur vitesse : $\vec{v}(C)_{/\mathcal{R}_0} = \dot{X}\overrightarrow{e_x} + X\left(\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \dot{X}\overrightarrow{e_x}$.
- ☀ $\overrightarrow{e_x}$ est fixe dans \mathcal{R}_0 donc $\left(\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$.

Ici $\dot{X}(t) = v_0$.

On peut alors, en intégrant une fois par rapport au temps, obtenir l'expression de $X(t)$:

$$X(t) = v_0 t + \text{cte}$$

À $t = 0$ $X(t = 0)$ donc $\text{cte} = 0$ et ainsi :

$$X(t) = v_0 t.$$

Pour la moto

- Vecteur position : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{e_x}$.
- Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$.
- Vecteur accélération : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x}$.

Ici $\ddot{x} = a_0 = \text{cte}$.

On peut alors intégrer 2 fois par rapport au temps afin d'obtenir $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = a_0 t + \text{cte}.$$

- À $t = 0$: $\dot{x}(t = 0) = 0$ donc $\text{cte} = 0$.
- À $t = t_0$: $\dot{x}(t = t_0) = v_0$ donc $a_0 t_0 = v_0$ ($t_0 = 10 \text{ s}$ et $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$), d'où :

$$a_0 = \frac{v_0}{t_0}.$$

Ainsi $\dot{x}(t) = \frac{v_0}{t_0} t$ donc $x(t) = \frac{v_0}{t_0} \frac{t^2}{2} + \text{cte}$.

À $t = 0$: $x(t = 0) = 0$ donc $\text{cte} = 0$; ainsi, on a :

$$x(t) = \frac{v_0}{t_0} \frac{t^2}{2}.$$

☀ Comme x est en m, v_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, t_0 et t en s, cette expression est homogène : $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} \times \text{s}^2 = \text{m}$.

2) On cherche l'instant T où les véhicules se rejoignent, c'est-à-dire l'instant où :

$$X(t = T) = x(t = T) \quad \text{soit} \quad v_0 T = \frac{v_0}{t_0} \frac{T^2}{2} \quad \text{soit} \quad T = 2t_0.$$

A.N. $T = 2 \times 10 \text{ s} = 20 \text{ s}$.

3) Les positions des deux véhicules sont parfaitement déterminées donc :

$$d = X(t = T), \quad \text{soit} \quad d = v_0 T = v_0 \times 2t_0, \quad \text{soit encore} \quad d = 2v_0 t_0.$$

☀ d est en m, v_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et t_0 en s donc cette expression est homogène : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$.

A.N. $d = 2 \times \frac{90}{3,6} \times 10 = 500 \text{ m}$.

☀️ Pour calculer d , on aurait pu utiliser :

$$d = x(t = T) = \frac{v_0}{t_0} \times \frac{(2t_0)^2}{2} = 2v_0 t_0,$$

ce qui peut aussi constituer un moyen de vérification.

4) La vitesse acquise par le motard sera :

$$v_1 = \dot{x}(t = T) = \frac{v_0}{t_0} \times T = \frac{v_0}{t_0} \times 2t_0 = 2v_0 \quad \text{soit} \quad \mathbf{v}_1 = \dot{x}(t = T) = 2\mathbf{v}_0.$$

A.N. $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{x}}(t = T) = 2 \times 90 = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

Exercices de niveau 3

Exercice 5

1) Entre O et A, les électrons subissent une accélération : $\vec{a} = a_0 \vec{e}_y$.

Leur vitesse est : $\vec{v} = a_0 t \vec{e}_y + \text{cte}$.

Or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = \text{cte}$ donc $\vec{v} = a_0 t \vec{e}_y + v_0 \vec{e}_x$.

Leur position est donc : $\vec{OA} = a_0 \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + v_0 t \vec{e}_x + \text{cte}$.

Or à $t = 0$, $\vec{OA} = \vec{0}$ donc $\vec{OA} = a_0 \frac{t^2}{2} \vec{e}_y + v_0 t \vec{e}_x$.

Si on note $\vec{OA} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ alors $\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = a_0 \frac{t^2}{2} \end{cases}$

Donc l'équation de la trajectoire est, en éliminant le temps entre les deux relations :

$$y = a_0 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{v_0} \right)^2, \quad \text{soit} \quad \mathbf{y = \frac{a_0}{2v_0^2} x^2}.$$

Il s'agit d'une parabole.

2) En dérivant l'expression précédente, on obtient : $\frac{dy}{dx} = \frac{a_0}{v_0^2} x$.

Or $\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\ell}$, donc :

$$\mathbf{\tan \alpha = \frac{a_0}{v_0^2} \ell}.$$

A.N. $\tan \alpha = \frac{1 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^7)^2} \times 0,05 \approx 0,055 \quad \text{d'où} \quad \alpha \approx 3,2^\circ.$

3) Entre A et B, les électrons subissent une accélération nulle :

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \text{cte}$$

or à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_A$ donc $\vec{v}(t) = \vec{v}_A$.

Comme la vitesse est constante (vectoriellement), **la trajectoire est une droite.**

4) Dans le triangle ABH, on a : $\tan \alpha = \frac{\delta - y_A}{2\ell}$ donc $\delta = \tan \alpha \times 2\ell + y_A$.

À l'aide de la question 1), on a :

$$y_A = y(x = \ell) = \frac{a_0}{2v_0^2} \times \ell^2.$$

Donc $\delta = \frac{a_0}{v_0^2} \times \ell \times 2\ell + \frac{a_0}{2v_0^2} \ell^2$, soit $\mathbf{\delta = \frac{5}{2} \frac{a_0}{v_0^2} \ell^2}.$

A.N. $\delta = \frac{5}{2} \times \frac{10^{15} \times 0,05^2}{(3 \cdot 10^7)^2} \approx 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \quad \text{donc} \quad \mathbf{\delta = 6,9 \text{ mm}.}$

Exercice 6

On peut tout d'abord écrire l'équation de la trajectoire :

$$y(x) = A \cos(Bx).$$

- $y(x=0) = d_0 = A$;

- $y(x=L) = -d_0 = A \cos(BL) = d_0 \cos(BL)$ donc $\cos(BL) = -1$.

D'où : $BL = \pi$ soit $B = \frac{\pi}{L}$ et ainsi :

$$y(x) = d_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

On va ensuite déterminer l'expression de l'accélération afin d'utiliser la condition d'accélération latérale inférieure à $0,7g$.

- Vecteur position : $\overrightarrow{OG} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

- Vecteur vitesse : $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$.

☼ \vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes dans \mathcal{R} .

Or $\dot{x} = v_0 = \text{cte}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$; donc $\dot{y} = -\frac{\pi}{L} d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \dot{x} = -\frac{\pi}{L} d_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) v_0$.

Donc : $\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}} = v_0 \vec{e}_x - \frac{\pi}{L} d_0 v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$.

- Vecteur accélération : $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\frac{\pi}{L} d_0 v_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \times \frac{\pi}{L} \dot{x} \vec{e}_y$.

☼ \vec{e}_x et \vec{e}_y fixes dans \mathcal{R} donc $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

$v_0 = \text{cte}$ donc $\dot{v}_0 = 0$.

Donc : $\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}} = -\frac{\pi^2 d_0 v_0^2}{L^2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$.

L'accélération maximale est obtenue pour : $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \pm 1$.

On veut : $|a_{\max}| \leq 0,7g$, soit $\frac{\pi^2 d_0 v_0^2}{L^2} \leq 0,7g$, d'où :

$$L \geq \pi v_0 \sqrt{\frac{d_0}{0,7g}}.$$

☼ Comme L est en m, v_0 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, d_0 en m et g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, cette expression est homogène.

En effet : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \sqrt{\frac{1}{\text{s}^{-2}}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$.

A.N. $L \geq \pi \times \frac{50}{3,6} \times \sqrt{\frac{3}{0,7 \times 9,81}} \approx 28,8 \text{ m}$.

Exercice 7

La trajectoire de la voiture A est un demi-cercle de centre O et de rayon r_A donc :

$$L_A = \pi r_A.$$

A.N. $L_A = \pi \times 90 \approx 282,7 \text{ m}$.

La trajectoire de la voiture B est constituée par deux segments de droite de longueur, OO' (au début et à la fin de la trajectoire) et d'un demi-cercle de centre O' et de rayon r_B donc :

$$\begin{aligned} L_B &= 2 \times OO' + \pi r_B \\ L_B &= 2 \times (r_A - r_B) + \pi r_B \\ L_B &= 2r_A + (\pi - 2)r_B. \end{aligned}$$

A.N. $L_B = 2 \times 90 + (\pi - 2) \times 75 \approx 265,6 \text{ m}$.

Conclusion : la trajectoire semble la meilleure puisque plus courte plus de 17 m (= 6 %).

2) Pour calculer la vitesse et l'accélération de chaque véhicule en virage, on va utiliser les coordonnées polaires.

Pour la voiture A

- Vecteur position : $\overrightarrow{OA} = r_A \vec{e}_r$.
- Vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v}(A)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(r_A \vec{e}_r) \right)_{/\mathcal{R}} = \frac{dr_A}{dt} \vec{e}_r + r_A \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \\ &= 0 \vec{e}_r + r_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta = r_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

$$\odot (uv)' = u'v + uv'.$$

$$r_A = \text{cte} \text{ donc } \dot{r}_A = \frac{dr_A}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} \times \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \dot{\theta}.$$

Soit en posant : $v_A = r_A \dot{\theta}$: $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = v_A \vec{e}_\theta$.

- Vecteur accélération :

$$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{dr_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r_A \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r_A \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

Or : $\dot{r}_A = 0$ ($r_A = \text{cte}$) ; $\ddot{\theta} = 0$ car $v_A = r \dot{\theta} = \text{cte}$;

$$\text{et } \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/\mathcal{R}} \times \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \dot{\theta}.$$

Donc :

$$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = r_A \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) = -r_A \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_A^2}{r_A} \vec{e}_r.$$

On veut que l'accélération ne dépasse pas $0,8g$.

Plaçons-nous dans le cas limite.

$$\|\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}}\| = 0,8g, \text{ soit } \frac{v_A^2}{r_A} = 0,8g, \text{ d'où } v_A = \sqrt{0,8g r_A}.$$

\odot Comme v_A est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et r_A en m.

Cette expression est homogène : $\sqrt{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

A.N. $v_A = \sqrt{0,8 \times 9,81 \times 90} \approx 26,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $v_A \approx 95,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

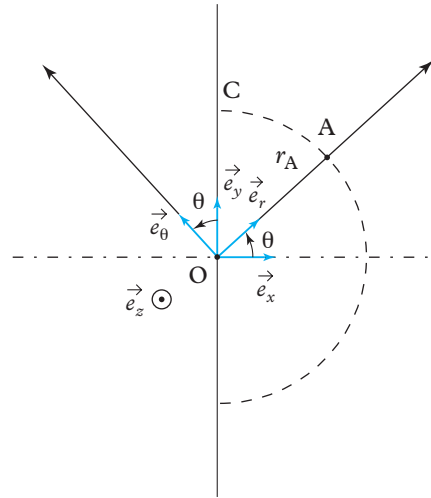
On peut procéder de la même manière pour la voiture B dans son virage de centre O' et de rayon r_B ; on obtient :

$$\|\vec{a}(B)_{/\mathcal{R}}\| = \frac{v_B^2}{r_B}.$$

Cette accélération est limitée à $0,8g$; donc $\frac{v_B^2}{r_B} = 0,8g$ et l'on a :

$$v_B = \sqrt{0,8g r_B}.$$

A.N. $v_B = \sqrt{0,8 \times 9,81 \times 75} = 24,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 87,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.



3) Comme les vitesses sont constantes sur les 2 trajectoires, on en déduit :

$$t_A = \frac{L_A}{v_A} = \frac{\pi r_A}{\sqrt{0,8g r_A}} = \pi \sqrt{\frac{r_A}{0,8g}}.$$

$$\text{A.N. } t_A = \pi \times \sqrt{\frac{90}{0,8 \times 9,81}} \approx 10,64 \text{ s.}$$

De même :

$$t_B = \frac{L_B}{v_B} = \frac{2r_A + (\pi - 2)r_B}{\sqrt{0,8g r_B}}.$$

$$\text{A.N. } t_B = \frac{2 \times 90 + (\pi - 2) \times 75}{\sqrt{0,8 \times 9,81 \times 75}} \approx 10,95 \text{ s.}$$

Ainsi même si la trajectoire de B est plus courte, la voiture B met plus de temps.

C'est donc la trajectoire de la voiture A qui est la meilleure (dans le cadre d'une course de voitures).