

Induction électromagnétique dans un circuit mobile

Introduction

Ce chapitre est consacré au phénomène d'induction dans des circuits mobiles ou déformables plongés dans un champ magnétique indépendant du temps. On se limitera aux cas pour lesquels la loi de Faraday s'applique.

L'induction électromagnétique permet ici de réaliser une conversion de puissance mécanique en puissance électrique. C'est ce phénomène qui est à la base des alternateurs produisant l'électricité dans les centrales thermiques, nucléaires ou hydrauliques.

Il doit aussi être pris en compte pour bien comprendre le fonctionnement des moteurs électriques, ou d'autres dispositifs tels que

le haut-parleur, réalisant la conversion de puissance inverse.

Du point de vue pédagogique, ce chapitre permet de réviser les connaissances acquises sur les circuits électriques et la mécanique.

Plan du chapitre 28

A. Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

- | | |
|--|---|
| 1. Exemple: les rails de Laplace | x |
| 2. Spire en rotation autour de son axe | x |

B. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

- | | |
|--|---|
| 1. Rails de Laplace – Principe du moteur à courant continu | x |
| 2. Haut-parleur électrodynamique | x |

C. Quelques applications

- | | |
|--|---|
| 1. Freinage par induction – Courants de Foucault | x |
| 2. Moteurs à courant continu | x |
| 3. Alternateurs | x |
| 4. Machine asynchrone | x |

Méthodes	x
----------------	---

Exercices	x
-----------------	---

A. Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

A.1. Exemple : les rails de Laplace

A.1.1. Présentation

On considère le dispositif représenté sur la [figure 1](#). Il est constitué d'une barre conductrice rectiligne pouvant se déplacer en translation parallèlement à deux rails parallèles, espacés d'une distance l , sur lesquels elle est posée. Les deux rails sont reliés par un conducteur fixe. L'ensemble forme donc un circuit fermé et est placé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire, perpendiculaire au plan du circuit. Un opérateur exerce une force $\vec{F} = F\vec{u}_x$ parallèle aux rails qui met la tige en mouvement avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

Un dispositif similaire a déjà été étudié lors de l'étude de la force de Laplace mais le circuit comportait alors un générateur et aucun opérateur n'exerçait d'action sur la barre.

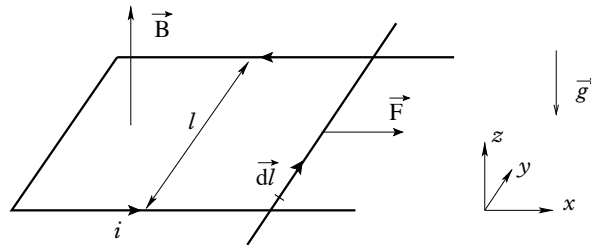


Fig. 1. Rails de Laplace. Le sens positif choisi pour le circuit est indiqué sur le schéma.

A.1.2. Étude qualitative

Chaque fois que cela est possible, il est souhaitable de procéder à une analyse qualitative du phénomène étudié avant de commencer les calculs.

Ici, le mouvement de la tige provoque une variation de la surface du circuit et donc du flux magnétique à travers ce circuit. Il apparaît donc une fém e et, puisque le circuit est fermé, un courant induit i .

La loi de Lenz permet de préciser le sens de ce courant. En effet, les effets de l'induction doivent s'opposer à ses causes, c'est-à-dire ici au mouvement de la tige. La force de Laplace associée au courant induit, $\vec{F}_L = i\vec{l} \wedge \vec{B} = i l B \vec{u}_x$, doit donc être opposée à \vec{F} . On en déduit donc que i est négative, c'est-à-dire que le courant réel circule dans le sens négatif.

A.1.3. Détermination de la fém et du courant induit

On désigne par R la résistance totale du circuit et on néglige tout phénomène d'auto-induction, c'est-à-dire que l'on suppose que le champ magnétique créé par le courant induit est très faible devant le champ \vec{B} créé par des sources extérieures au circuit.

Compte tenu de l'orientation choisie, le flux ϕ du champ magnétique à travers le circuit s'écrit :

$$\phi = B l x$$

en supposant que $x = 0$ lorsque la barre mobile se trouve confondue avec le conducteur reliant les deux rails¹. D'après la loi de Faraday, la fém induite e s'écrit $e = -\frac{d\phi}{dt}$. On obtient donc le résultat suivant :

1. Ce choix de l'origine n'a en fait aucune importance pour la suite puisqu'on ne s'intéressera qu'à la dérivée de ϕ .

Résultat 1

La fém d'induction apparaissant dans une tige se déplaçant à une vitesse v , dans un dispositif de rails de Laplace espacés de l , et plongés dans un champ \vec{B} orthogonal au plan des rails, s'écrit :

$$e = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

D'où l'on déduit immédiatement le schéma électrique équivalent au circuit (fig. 2) et l'expression de l'intensité i :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{-Blv}{R}$$

On vérifie bien que, puisque v est positif, i et e sont négatifs.

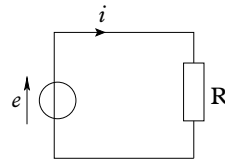


Fig. 2. Schéma électrique équivalent aux rails de Laplace.

A.1.4. Conversion de puissance

On suppose ici que la vitesse est constante et qu'il n'y a pas de frottement entre les rails et la tige mobile.

La puissance mécanique, P_{meca} , fournie à la tige l'est par l'intermédiaire de la force \vec{F} . On a donc $P_{\text{meca}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. D'autre part, la fém induite fournit au circuit une puissance électrique, $P_{\text{elec}} = ei$. Le but de ce paragraphe est de trouver une relation entre ces deux puissances. Il faut pour cela exprimer \vec{F} en fonction de i . Les forces s'exerçant sur la tige sont :

- son poids et la réaction des rails, dirigés suivant \vec{u}_x ,
- la force \vec{F} exercée par l'opérateur et la force de Laplace \vec{F}_L , dirigés suivant \vec{u}_x .

En écrivant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox , on obtient, en notant m la masse de la tige :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_L = \vec{0}$$

car la vitesse est constante. De plus, $\vec{F}_L = i \vec{l} \wedge \vec{B} = i l B \vec{u}_x$. On a donc :

$$\vec{F} = -\vec{F}_L = -i l B \vec{u}_x$$

et donc :

$$P_{\text{meca}} = -i l B v = i e = P_{\text{elec}}$$

Toute l'énergie mécanique fournie est ainsi transformée en énergie électrique. La conversion se fait donc avec un rendement théorique de 100%. En pratique, le rendement est évidemment moindre en particulier à cause des frottements, négligés ici. D'autre part, si le champ magnétique \vec{B} est créé par des bobines, il faut aussi intégrer au bilan énergétique les pertes par effet Joule dans ces bobines.

A.1.5. Origine physique du phénomène d'induction

Dans le cas d'un circuit mobile, le phénomène d'induction s'explique simplement à partir de la force de Lorentz. En effet, lorsque la tige est en mouvement à la vitesse \vec{v} , les porteurs de charge possèdent également une vitesse \vec{v} et sont donc soumis à la force $\vec{f}_1 = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, où q désigne la charge d'un porteur de charge. Cette force est parallèle à la tige et crée donc un mouvement des porteurs de charge dans la tige, à une vitesse \vec{v}' par rapport à la tige (fig. 3).

Ce mouvement constitue un courant électrique.

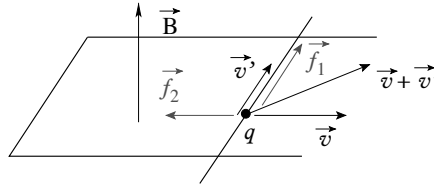


Fig. 3. Lien entre force de Lorentz et induction. On a pris $q < 0$ pour la figure.

La vitesse des porteurs de charge dans le référentiel du laboratoire n'est donc plus \vec{v} mais $\vec{v} + \vec{v}'$. Ils sont donc soumis à :

$$\vec{f} = q(\vec{v} + \vec{v}') \wedge \vec{B} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

où $\vec{f}_1 = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la force responsable de l'induction et $\vec{f}_2 = q\vec{v}' \wedge \vec{B}$ celle qui est à l'origine de la force de Laplace. La puissance de la force de Lorentz $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ étant nulle (puisque'elle est perpendiculaire à la vitesse $\vec{v} + \vec{v}'$), on en déduit que les puissances de \vec{f}_1 et \vec{f}_2 sont opposées, car $P_{\vec{f}} = P_{\vec{f}_1} + P_{\vec{f}_2}$. Or, la puissance de \vec{f}_1 n'est autre que P_{elec} , puissance fournie au circuit par la fém induite, et la puissance de \vec{f}_2 celle de la force de Laplace, P_L . On a donc :

$$P_{\text{elec}} + P_L = 0.$$

Cette propriété, que l'on avait déjà mis en évidence dans le paragraphe précédent, est générale pour tout circuit mobile dans un champ magnétique indépendant du temps. C'est elle qui permet le rendement théorique de 100 % de ce type de dispositif.

Application 1 Détermination d'un mouvement en présence d'induction

On considère le dispositif des rails de Laplace étudié dans les paragraphes précédents. La tige, de masse m , est mobile sans frottement sur les rails et on note R la résistance totale du circuit. À $t = 0$, on lance la tige avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ mais aucun opérateur n'exerce de force sur elle pour $t > 0$.

Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ de la tige pour $t > 0$.

Solution

On se réfère aux notations de la figure 1. D'après ce qui a été vu précédemment, le mouvement de la tige crée une fém $e = -Blv$ et un courant induit $i = -\frac{Blv}{R}$ dans le circuit.

Les forces s'exerçant sur la tige sont donc :

- son poids et la réaction des rails, dirigés suivant \vec{u}_z ,
- la force de Laplace \vec{F}_L , dirigée suivant \vec{u}_x .

En écrivant le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox , on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} = i l B = \frac{(Bl)^2}{R} v.$$

La vitesse de la tige satisfait donc à l'équation :

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\tau} v = 0$$

où on a posé $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$. On en déduit immédiatement que :

$$\vec{v}(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_x$$

Remarque : Dans ce type d'exercices, on a deux inconnues, i et v . La résolution nécessite donc deux équations. L'une, appelée *équation électrique*, correspond à la loi des mailles dans laquelle la fém s'exprime à partir de la loi de Faraday. L'autre, appelée *équation mécanique*, correspond à un théorème de la mécanique : principe fondamental de la dynamique, comme c'est le cas ici, ou théorème du moment cinétique si on a affaire à un mouvement de rotation.

A.2. Spire en rotation autour de son axe

A.2.1. Description

On considère dans ce deuxième exemple une spire plane de surface S , en rotation à vitesse constante $\omega > 0$ autour d'un axe Oz . Cette spire est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} , orthogonal à Oz . On choisit l'axe Ox tel que $\vec{B} = B\vec{u}_x$. On note \vec{S} le vecteur surface de la spire. L'orientation de \vec{S} définit le sens de parcours positif sur la spire (fig. 4). On suppose que les deux extrémités du fil constituant la spire sont reliées, de sorte qu'elle constitue un circuit fermé de résistance R . On négligera ici tout phénomène d'auto-induction.

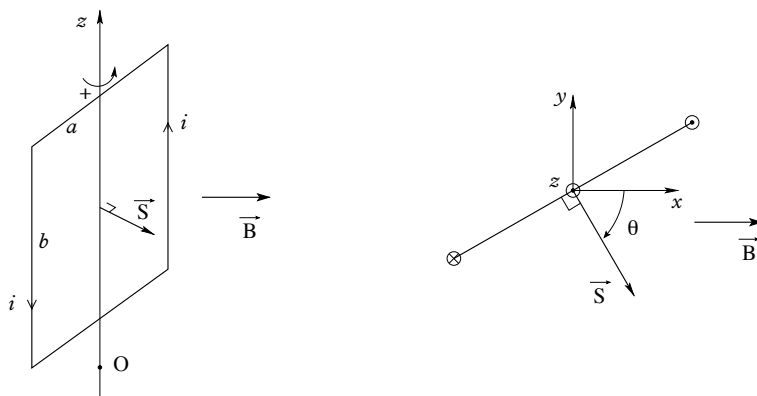


Fig. 4. Spire rectangulaire en rotation dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.

A.2.2. Étude qualitative

La rotation de la spire fait varier l'angle $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$. Le flux magnétique ϕ à travers la spire étant donné par $\phi = BS \cos \theta$, il varie lors de la rotation. Il apparaît donc une fém et un courant induits dans la spire.

Ce courant induit est à l'origine de forces de Laplace dont le couple $\vec{\Gamma}_L$ doit, d'après la loi de Lenz, s'opposer à la rotation de la spire.

On a vu que $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$ où $\vec{M} = i\vec{S}$ est le moment magnétique de la spire. On a donc $\vec{\Gamma}_L = iSB \sin(-\theta)\vec{u}_z = -iSB \sin \theta \vec{u}_z$. Or, le vecteur rotation de la spire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ est dirigé dans le même sens que \vec{u}_z puisque $\omega > 0$. On doit donc avoir $i \sin \theta > 0$.

2. On rappelle que si $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, alors \vec{c} est orthogonal à \vec{a} et \vec{b} et son sens est tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme un trièdre direct. Enfin, $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.

A.2.3. Détermination de la fém et du courant induit

On a, d'après la loi de Faraday, $e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS \frac{d(\cos \theta)}{dt}$. Or, $\theta = \omega t + \theta_0$. On peut choisir arbitrairement l'origine des temps. On la prend donc de façon à avoir $\theta_0 = 0$, ce qui donne le résultat suivant :

Résultat 1

La fém e induite dans une spire de surface S , tournant à une vitesse de rotation ω constante, et placée dans un champ magnétique \vec{B} orthogonal à son axe de rotation s'écrit :

$$e = BS\omega \sin(\omega t).$$

On a supposé ici que le plan de la spire était orthogonal à \vec{B} pour $t = 0$.

On en déduit immédiatement $i = \frac{e}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin(\omega t)$ et on vérifie bien que, puisque B , S , ω et R sont positifs, i et $\sin \theta = \sin(\omega t)$ sont de même signe, conformément à la loi de Lenz.

Ce dispositif permet donc d'obtenir un courant sinusoïdal à partir d'un mouvement de rotation uniforme.

A.2.4. Conversion de puissance

On procède comme pour les rails de Laplace. La vitesse de rotation ω étant constante, le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Oz^3 permet d'affirmer que le couple moteur Γ assurant la rotation et le couple Γ_L des forces de Laplace sont reliés par :

$$\Gamma + \Gamma_L = 0.$$

On en déduit donc que la puissance mécanique P_{meca} fournie à la spire s'écrit :

$$P_{\text{meca}} = \Gamma \omega = -\Gamma_L \omega = iSB\omega \sin \theta = ei = P_{\text{elec}}$$

où P_{elec} est la puissance électrique que la fém induite fournit au circuit. On a donc bien, comme dans l'exemple des rails de Laplace, une conversion complète de la puissance mécanique fournie au système en puissance électrique.

3. On rappelle que ce théorème stipule que la somme des moments par rapport à un axe, appliqués à un système en rotation autour de cet axe à une vitesse ω , est égale à la dérivée de ω par rapport au temps, donc ici à 0.

Application 2

On considère une bobine de surface S , d'inductance propre L , de résistance R et comportant N spires. Cette bobine est en rotation autour d'un axe Oz avec une vitesse ω constante et est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_x$. On note \vec{S} le vecteur surface de la bobine et θ l'angle (\vec{B}, \vec{S}) . À $t = 0$, $\theta = 0$.

- 1) Déterminer la fém e induite par la rotation de la bobine.
- 2) Les deux extrémités du fil constituant la bobine sont reliées. Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans le circuit ainsi formé en fonction de N , B , S , R , L et ω .
- 3) **A.N.** : Calculer la valeur efficace I_{eff} de i pour $B = 0,1 \text{ T}$, $L = 5 \text{ mH}$, $R = 10 \text{ } \Omega$, $N = 500$ spires, $S = 50 \text{ cm}^2$ et $\omega = 500$ tours/min.

Solution

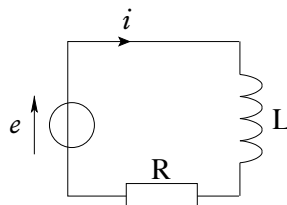
1) La situation est exactement la même que dans le cours, à l'exception du nombre de spires. On a ici N spires, donc le flux magnétique ϕ est égal à N fois celui déterminé dans le cours et il en est de même

de la fém $e = -\frac{d\phi}{dt}$. On a donc :

$$e = NBS\omega \sin(\omega t).$$

2) L'intensité $i(t)$ est *a priori* de la forme $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Il faut donc déterminer i_0 et φ .

Le schéma équivalent au circuit est représenté ci-dessous :



Puisqu'on est en régime sinusoïdal, on va utiliser les nombres complexes.

On pose donc $\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\hat{e}(t) = NBS\omega e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$, de façon à avoir $\text{Re}(\hat{e}) = e$ puisque $\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t)$.

La loi des mailles s'écrit :

$$\hat{e} = R\hat{i} + jL\omega\hat{i} = (R + jL\omega)\hat{i}.$$

Ce qui donne, puisque $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$:

$$-jNBS\omega = i_0 e^{j\varphi} (R + jL\omega).$$

Et donc :

$$i_0 e^{j\varphi} = \frac{-jNBS\omega}{R + jL\omega}.$$

On en déduit :

$$i_0 = |i_0 e^{j\varphi}| = \frac{NBS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

et

$$\varphi = \text{Arg}(i_0 e^{j\varphi}) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

3) La valeur efficace d'un signal périodique est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$. On a donc $I_{\text{eff}} = i_0/\sqrt{2}$.

En exprimant ω en unités S.I, on a $\omega = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52 \text{ rad/s}$ et donc :

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{500 \times 0,1 \times 0,005 \times 52}{\sqrt{100 + 25 \cdot 10^{-6} \times 52^2}} = 0,9 \text{ A}.$$

B. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

B.1. Rails de Laplace – Principe du moteur à courant continu

4. De tels dispositifs sont aussi appelés transducteurs.

La plupart des dispositifs utilisant l'induction pour convertir une grandeur physique en une autre⁴ peuvent fonctionner de façon réversible. C'est par exemple le cas de la machine à courant continu, qui peut être utilisée soit comme générateur électrique, soit comme moteur. Le modèle le plus simple d'une telle machine est constitué par les rails de Laplace (on donnera plus loin des descriptions plus réalistes).

B.1.1. Description

5. Ce dispositif est identique à celui décrit lors de l'étude de la force de Laplace, à ceci près que l'intensité était alors supposée connue. Ce n'est plus le cas ici où elle va dépendre à la fois du générateur et des phénomènes d'induction.

On a vu plus haut comment ce dispositif pouvait convertir une puissance mécanique en puissance électrique. On peut obtenir la conversion inverse en remplaçant le conducteur reliant les deux rails par un générateur⁵, comme sur la figure 5 où le générateur fournit une tension continue E .

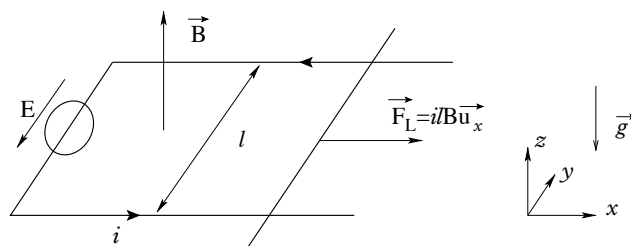


Fig. 5. Dispositif des rails de Laplace utilisé en moteur.

Le générateur fait circuler un courant électrique dans le circuit et la tige est mise en mouvement sous l'effet de la force de Laplace. Son mouvement va créer une fém induite dans le circuit, de sens opposée à E d'après la loi de Lenz. Une étude plus approfondie est nécessaire pour connaître le mouvement de la tige.

B.1.2. Mouvement de la tige

Le problème comporte deux inconnues, la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ de la tige et l'intensité i dans le circuit. On aura donc besoin de deux équations, comme cela a déjà été vu dans l'Application 1.

On fait les mêmes hypothèses que précédemment, à savoir que la tige est mobile sans frottements dans un plan horizontal et que l'auto-induction est négligée. On notera R la résistance totale du circuit.

• **Équation mécanique :** les forces qui s'appliquent à la tige sont les mêmes que dans le paragraphe A.1.4. On obtient donc, en projetant le PFD sur l'axe Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = i l B$$

• **Équation électrique :** le mouvement de la tige crée, comme précédemment, une fém induite $e = -Blv$. Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 6.

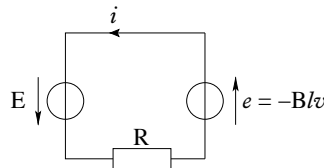


Fig. 6. Schéma électrique équivalent au dispositif des rails de Laplace utilisé en moteur.

La loi des mailles donne :

$$E + e = E - Blv = Ri.$$

• **Résolution :** L'équation mécanique donne $i = \frac{m}{lB} \frac{dv}{dt}$. En reportant dans l'équation électrique et en posant $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = E \frac{lB}{mR}.$$

La solution de l'équation sans second membre est : $v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ où v_0 est une constante que l'on déterminera à partir des conditions initiales.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$v = E \frac{lB}{mR} \tau = \frac{E}{Bl}.$$

La solution de l'équation complète est donc : $v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{Bl}$.

En prenant comme condition initiale $v(0) = 0$, on obtient $v_0 = -\frac{E}{Bl}$.

On a donc finalement :

$$v(t) = \frac{E}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Ce qui donne immédiatement :

$$i(t) = \frac{m}{lB} \frac{dv}{dt} = \frac{m}{lB} \frac{E}{Bl} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

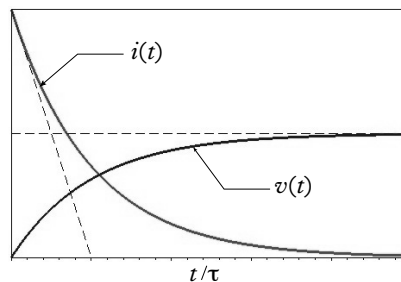


Fig. 7. Vitesse et intensité dans la tige mobile.

On voit donc qu'après une durée de l'ordre de quelques τ , le courant induit annule le courant dans le circuit. La force de Laplace exercée sur la tige s'annule donc également et cette dernière a alors un mouvement de vitesse constante, proportionnelle à la fém E du générateur.

B.2. Haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur est un dispositif permettant la conversion d'énergie électrique en énergie sonore, qui n'est rien d'autre qu'une forme d'énergie mécanique. En effet, le son correspond à un déplacement vibratoire de la matière constituant le milieu de propagation, fluide ou solide. L'énergie transportée par une onde sonore n'est autre que l'énergie correspondant à la vibration de la matière.

Dans un haut-parleur, une membrane met en vibration l'air à son contact et crée ainsi une onde sonore. Il existe plusieurs moyens pour réaliser un tel dispositif. On étudie ici le plus utilisé, le haut-parleur électrodynamique.

B.2.1. Description

Dans un haut-parleur électrodynamique (fig. 8), une bobine solidaire de la membrane est plongée dans un champ magnétique radial créé par un aimant torique. La bobine est liée à l'aimant par un système élastique, que l'on modélisera par un ressort unique de raideur k , et ne peut se déplacer que parallèlement à l'axe de révolution de l'aimant. Un générateur de tension, de fém $E(t)$, est branché aux bornes de la bobine parcourue par un courant $i(t)$. Celle-ci est donc soumise à des forces de Laplace qui provoquent son déplacement ainsi que celui de la membrane, produisant ainsi une onde sonore. D'autre part, la bobine constitue un conducteur mobile dans un champ magnétique. La force de Lorentz, en plus d'être à l'origine de la force de Laplace, crée aussi un courant induit dans le circuit⁶.

6. Ce même dispositif, non alimenté par un générateur, mais excité par des ondes sonores, peut être utilisé comme microphone : la conversion électromécanique se fait dans le sens inverse. En effet, l'onde sonore met la membrane, et donc aussi la bobine, en mouvement. Cette dernière est alors le siège d'une fém induite, image du son capté par le dispositif.

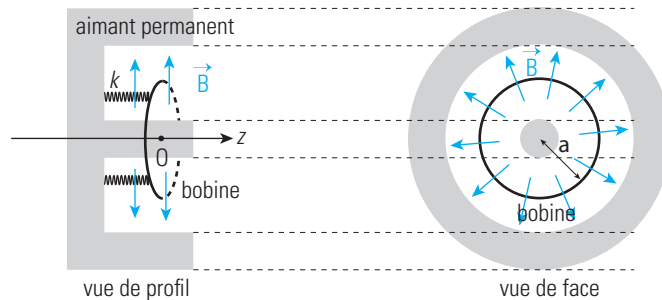


Fig. 8. Schéma d'un haut-parleur électrodynamique. Le générateur n'est pas représenté sur la figure.

Il y a donc un couplage entre le déplacement de la bobine et l'intensité parcourant le circuit, comme dans les cas étudiés précédemment dans ce chapitre. Cependant, la géométrie du dispositif est telle que la loi de Faraday ne peut être utilisée ici. On raisonnera donc, conformément au programme, sur le modèle simplifié décrit ci-après.

B.2.2. Modèle simplifié

On remplace dans ce modèle simplifié (fig. 9) la bobine par une tige de masse m ⁷, mobile suivant l'axe Ox sur des rails de Laplace espacés d'une distance l ⁸, et reliée au conducteur fixe joignant les deux rails par un ressort de raideur k . Afin de tenir compte de l'auto-induction dans la bobine, on ajoute dans le circuit une inductance L , égale à celle de la bobine. La membrane vibrante est solidaire de la tige mobile. La position $x(t)$ de la barre est repérée par rapport à la position où la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide, et représente donc aussi l'allongement du ressort.

7. m représente la masse de la partie mobile, bobine et membrane, du haut-parleur.

8. On peut montrer que la longueur l représente la longueur totale du fil constituant la bobine.

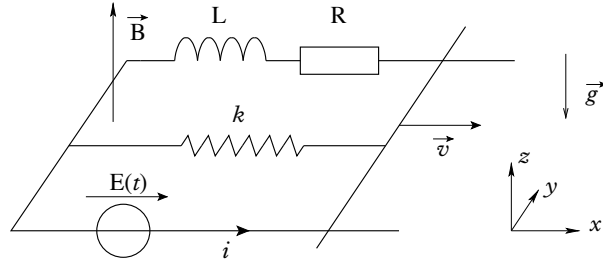


Fig. 9. Modèle simplifié du haut-parleur.

B.2.3. Mise en équations

• **Équation mécanique :** les forces qui s'appliquent à la tige et qui contribuent au mouvement suivant l'axe Ox sont :

- la force de Laplace, $\vec{F} = i l B \vec{u}_x$,
- la force de rappel du ressort, $\vec{F}_k = -kx \vec{u}_x$,
- la force de frottement de l'air sur la membrane, $\vec{F}_{\text{air}} = -h\vec{v} = -hv \vec{u}_x$, où h est une constante.

On obtient donc, en projetant le PFD sur l'axe Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = i l B - kx - hv.$$

• **Équation électrique :** le mouvement de la tige crée comme précédemment une fém $e = -Blv$. Le circuit électrique équivalent est représenté sur la figure 10.

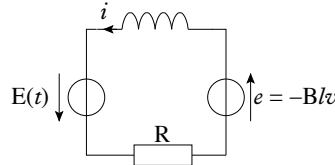


Fig. 10. Schéma électrique équivalent au haut-parleur.

L'équation électrique est donc :

$$E(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + Blv.$$

En tenant compte du fait que $v = \frac{dx}{dt}$, ces deux équations permettent de déterminer le mouvement de la membrane ainsi que l'intensité du courant circulant dans le haut-parleur. Le cas particulier du régime sinusoïdal sera traité plus en détail en exercice.

B.2.4. Bilan de puissance

La puissance fournie au haut-parleur est la puissance électrique Ei fournie par le générateur. On va utiliser les deux équations du paragraphe précédent pour établir le bilan énergétique du haut-parleur.

En multipliant par $i(t)$ l'équation électrique, on obtient :

$$Ei = Ri^2 + L \frac{di}{dt} i + Blvi.$$

On peut exprimer le terme $Blvi(t)$ à partir de l'équation mécanique, ce qui donne :

$$Blvi = m \frac{dv}{dt} v + k \frac{dx}{dt} x + hv^2.$$

Et finalement :

$$Ei = Ri^2 + L \frac{di}{dt} i + m \frac{dv}{dt} v + k \frac{dx}{dt} x + hv^2. \quad (1)$$

Ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$P_{\text{elec}} = P_J + \frac{dU_m}{dt} + \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} - P_f$$

où :

- $P_{\text{elec}} = E_i$ est la puissance fournie au haut-parleur ;
- $P_J = Ri^2$ est la puissance perdue par effet Joule ;
- $U_m = \frac{1}{2} Li^2$ est l'énergie magnétique stockée dans la bobine ;
- $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ est l'énergie cinétique du dispositif mobile ;
- $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ est l'énergie potentielle du ressort ;
- $P_f = -hv^2$ est la puissance des forces de frottements.

La puissance fournie est donc en partie stockée sous forme magnétique ou mécanique et en partie dissipée par effet Joule et par la force de frottements. La partie utile correspond à la force de frottements fluides⁹ qui provoque une mise en mouvement de l'air et donc l'émission d'une onde sonore.

⁹ On a négligé ici les frottements solides entre pièces mécaniques en mouvement.

B.2.5. Rendement

Le rendement η est, par définition, le rapport entre la puissance utile restituée par le système et la puissance totale qui lui a été fournie. La puissance utile correspond au terme hv^2 de l'équation (1) et la puissance fournie au terme E_i .

On se placera ici en régime sinusoïdal et on raisonnera sur les grandeurs moyennes. Les fonctions i , v et x étant de la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$, les produits du type $i \frac{di}{dt}$ s'écrivent $-A\omega \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{2} A\omega \sin(2\omega t + 2\varphi)$ et sont donc de valeurs moyennes nulles. On peut donc écrire :

$$\langle E_i \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle hv^2 \rangle$$

d'où l'on déduit le rendement :

$$\eta = \frac{\langle hv^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle hv^2 \rangle}.$$

Ce dernier est d'autant plus élevé que h est grand ou R petit.

C. Quelques applications

Ce paragraphe présente succinctement quelques-unes des nombreuses applications de l'induction électromagnétique qui n'ont pas été citées dans ce qui précède.

C.1. Freinage par induction – courants de Foucault

C.1.1. Mise en évidence des courants de Foucault

Ainsi que cela a déjà été signalé dans le chapitre précédent, les courants de Foucault sont des courants induits, non pas dans des circuits filiformes, mais dans des conducteurs massifs. On peut les mettre en évidence, de façon assez spectaculaire, par l'expérience suivante. On lâche deux aimants identiques dans deux tubes verticaux, de même forme, mais dont l'un est réalisé en cuivre (qui est un matériau non magnétique, l'aimant n'est donc pas attiré par le cuivre) et l'autre en plastique. Pour une hauteur de chute d'environ un mètre, l'aimant tombant dans le tube de cuivre accuse un retard facilement

mesurable, de l'ordre d'une seconde, par rapport à celui tombant dans le tube en plastique (fig. 11).

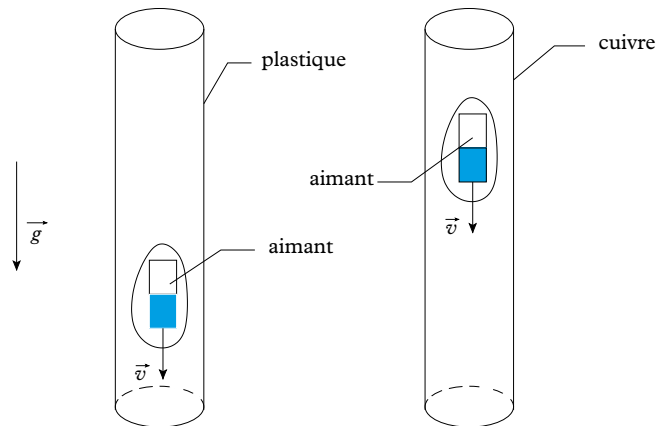


Fig. 11. Mise en évidence des courants de Foucault.

L'explication de cette expérience réside dans la création de courants induits dans le cuivre (courants de Foucault) au passage de l'aimant. En effet, en un point donné du tube, le champ magnétique varie quand l'aimant tombe. Il y a donc un phénomène d'induction électromagnétique, même si la loi de Faraday, utilisée dans ce cours, n'est pas adaptée pour déterminer ces courants. D'après la loi de Lenz, le courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, donc ici à la chute de l'aimant : les courants de Foucault créent un champ magnétique qui tend à repousser l'aimant.

C.1.2. Freinage par induction

L'expérience précédente, ainsi que l'étude des rails de Laplace au paragraphe A.1, ont montré que, lorsqu'un mouvement était la cause d'un phénomène d'induction, les forces de Laplace associées au courant induit tendaient à ralentir ce mouvement, conformément à la loi de Lenz. Ce phénomène est mis à profit dans certains dispositifs de freinage de véhicules lourds, où un disque conducteur solidaire d'une pièce en rotation est placé dans un champ magnétique. Les courants de Foucault créés dans le disque freinent la rotation.

Comme on l'a vu dans les exemples traités plus haut, l'intensité du courant, et donc de la force de Laplace, augmentent avec la vitesse. Le freinage sera donc efficace à vitesse élevée, mais un autre dispositif sera nécessaire pour les faibles vitesses.

Cependant, les courants de Foucault sont souvent nuisibles car ils prennent naissance dans les carcasses métalliques des dispositifs utilisant l'induction (transformateurs, moteurs, alternateurs...) et dissipent de l'énergie par effet Joule, ce qui a pour effet de diminuer le rendement de ces appareils.

C.2. Moteurs à courant continu

C.2.1. Description

Un moteur à courant continu est constitué d'un rotor (partie mobile) pouvant tourner autour d'un axe (Δ) et d'un stator (partie fixe) entourant le rotor et créant un champ magnétique radial à l'aide d'aimants ou d'électroaimants¹⁰. Sur le rotor sont enroulés des fils conducteurs formant des spires dont les plans contiennent l'axe de rotation (fig. 12).

10. Un électroaimant est constitué d'une bobine comportant un noyau de fer permettant de canaliser et de concentrer le champ magnétique.

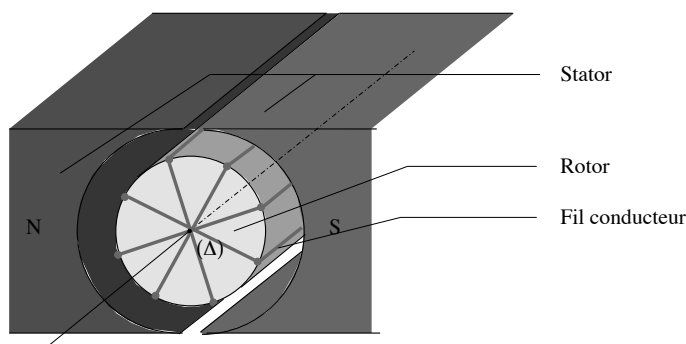


Fig. 12. Schéma de principe d'un moteur à courant continu.

Lorsqu'un courant parcourt les spires, les forces de Laplace mettent le rotor en mouvement (fig. 13). On remarque toutefois que, lorsque la spire représentée sur la figure 13 traverse l'axe appelée *ligne neutre*, le sens des forces de Laplace s'inverse. Pour obtenir un mouvement de rotation qui soit toujours dans le même sens, il faut donc inverser le sens du courant dans la spire au passage de cette ligne neutre. C'est ce qui est effectivement réalisé dans de tels moteurs par un dispositif appelé collecteur, que nous ne décrivons pas ici.

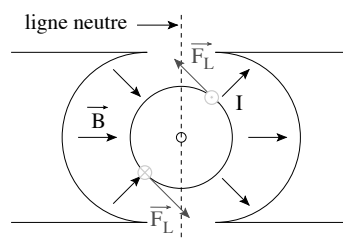


Fig. 13. Champ magnétique créé par le stator d'un moteur à courant continu. Ce champ magnétique est à l'origine des forces de Laplace (en gris tramé) s'exerçant sur la spire représentée sur la figure (en gris tramé clair).

C.2.2. Moteur à entrefer plan

Il existe de nombreuses variantes du moteur à courant continu, parmi lesquelles le moteur continu à entrefer plan (fig. 14) est celui qui se rapproche le plus du dispositif des rails de Laplace étudié dans le cours. Dans ce moteur, le rotor est constitué d'un disque sur lequel des conducteurs filiformes sont disposés suivant les rayons. Le stator comporte des aimants permanents créant un champ magnétique intense de direction orthogonale au plan du disque. Lorsque les conducteurs sont parcourus par un courant, la force de Laplace fait tourner le rotor.

L'avantage de ce moteur est sa petite taille ainsi que sa faible inertie.

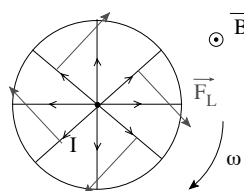


Fig. 14. Rotor d'un moteur à entrefer plan. On a représenté quelques-uns des conducteurs sur lesquels s'exercent les forces de Laplace (en gris tramé) permettant le mouvement du moteur.

C.2.3. Fonctionnement en génératrice

Comme la plupart des transducteurs électromécaniques utilisant l'induction, le moteur à courant continu est réversible. Si une action extérieure fait tourner le rotor, il apparaît un courant induit continu dans les spires. On parle alors de dynamo ou de génératrice de courant continu. L'appellation moteur ou

générateur étant déterminé par l'usage que l'on en fait, le dispositif lui-même est souvent désigné par le nom de **machine à courant continu**.

C.2.4. Utilisation

La machine à courant continu n'est pratiquement plus utilisée comme génératrice mais l'est beaucoup en tant que moteur. De nombreux moteurs de faible puissance fonctionnent sur ce principe, par exemple dans les voitures (lève-vitres...), les jouets, l'électroménager. Il existe aussi des moteurs à courant continu de forte puissance comme ceux qui équipaient les locomotives des premiers TGV.

C.3. Alternateurs

C.3.1. Principe de fonctionnement

Nous avons vu au paragraphe A.2 que l'on pouvait produire une tension sinusoïdale en faisant tourner une spire dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Ce principe est utilisé dans les alternateurs pour produire du courant alternatif. Cependant, comme seul compte le mouvement relatif de la spire par rapport au champ et qu'il est toujours délicat de relier un circuit mobile à un circuit fixe, surtout s'il est parcouru par des courants intenses sous de hautes tensions, on préfère laisser la spire (ou induit) fixe et faire tourner le circuit inducteur (ou les aimants) produisant le champ magnétique.

C.3.2. Alternateurs industriels

Les alternateurs industriels sont formés d'un induit fixe (stator) comportant plusieurs bobines reliées entre elles. Le rotor constituant l'inducteur est formé d'un axe en rotation à l'intérieur du stator sur lequel sont placés des électroaimants créant le champ magnétique. Le mouvement du rotor est généralement causé par une turbine tournant sous l'effet de vapeur d'eau sous pression (cas des centrales thermiques et nucléaires) ou d'eau liquide (cas des centrales hydrauliques).

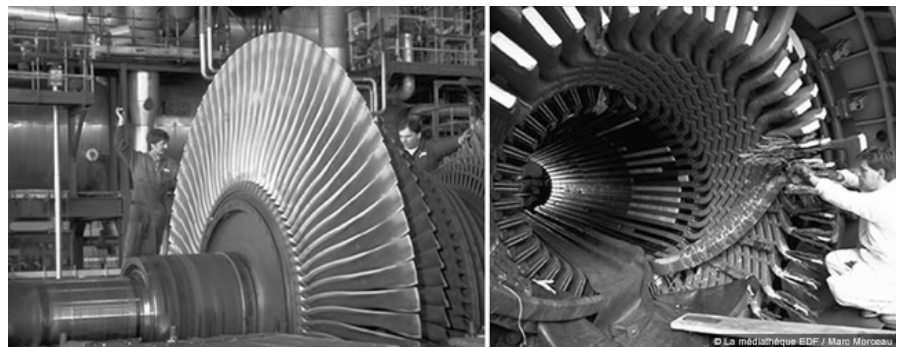


Fig. 15. Rotor et stator d'un alternateur de la centrale thermique de Porcheville.

C.3.3. Moteur synchrone

Un alternateur peut fonctionner en moteur, appelé moteur synchrone, si le stator est alimenté par un courant de même fréquence que celui qu'il fournit en tant que générateur. Il crée alors un champ magnétique tournant qui met le rotor en mouvement suivant le principe vu dans le chapitre traitant de la force de Laplace¹¹. Le principe de fonctionnement du moteur synchrone a fait l'objet de l'exercice 10 du chapitre portant sur les forces de Laplace.

Comme pour la machine à courant continu, ce dispositif pouvant fonctionner en moteur ou en générateur est appelé **machine synchrone**. Il est néan-

11. Ce moteur est qualifié de synchrone car le rotor tourne à la même vitesse que le champ magnétique.

moins surtout utilisé comme alternateur même s'il constitue la motorisation de certains TGV (TGV Atlantique).

C.4. Machine asynchrone

Les machines asynchrones, principalement utilisées comme moteurs, ont un principe de fonctionnement voisin de celui des machines synchrones. La différence réside dans le fait que, dans le cas des machines synchrones, le moment magnétique du rotor est créé par des aimants ou par une alimentation électrique spécifique, alors que, dans les machines asynchrones, il est créé grâce aux courants induits par le champ magnétique variable du stator. Le principe de fonctionnement d'un tel moteur fait l'objet de l'exercice 9 de ce chapitre.

Les moteurs asynchrones sont très robustes et sont les plus utilisés dans l'industrie. Les derniers TGV en sont équipés.

L'essentiel

- ✓ Lorsque le mouvement d'un circuit, ou d'une partie d'un circuit, plongé dans un champ magnétique \vec{B} , provoque une variation du flux magnétique ϕ le traversant, il se crée une force électromotrice induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- ✓ Le signe de e est donné directement par la loi de Faraday et peut être vérifié par la loi de Lenz qui stipule ici que les forces de Laplace s'opposent au mouvement du circuit.
- ✓ Dans le cas des rails de Laplace, $|e| = Bl|v|$ où l est l'écartement entre les deux rails et $|v|$ la norme de la vitesse de la tige mobile. Le signe de e dépend, entre autres, de l'orientation choisie pour le circuit.
- ✓ Dans le cas d'une spire de surface S , en rotation à une vitesse ω dans un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à son axe de rotation, la force électromotrice induite est sinusoïdale, de pulsation ω et d'amplitude $BS\omega$.
- ✓ Dans tous les cas, plus le mouvement est rapide, plus le flux varie vite et donc plus la force électromotrice induite est importante.
- ✓ Le phénomène d'induction n'est pas limité aux circuits filiformes. Il peut aussi apparaître des courants volumiques, appelés courants de Foucault, dans un conducteur massif en mouvement dans une zone où règne un champ magnétique.
- ✓ Les dispositifs où l'induction est causée par un mouvement permettent de réaliser une conversion entre énergie mécanique et énergie électrique. Cette conversion se fait avec un rendement théorique de 100 % puisque la puissance des forces de Laplace est égale à la puissance fournie au circuit par la fém induite. En pratique, les frottements et l'effet Joule diminuent la valeur du rendement.
- ✓ Cette conversion peut se faire dans les deux sens. Un alternateur, ou une dynamo, crée un courant électrique à partir d'un mouvement. La conversion inverse est mise à profit dans les moteurs électriques, les haut-parleurs et certains dispositifs de freinage par exemple.

Mise en œuvre

Méthode

Comment déterminer le mouvement d'un système en présence d'induction?

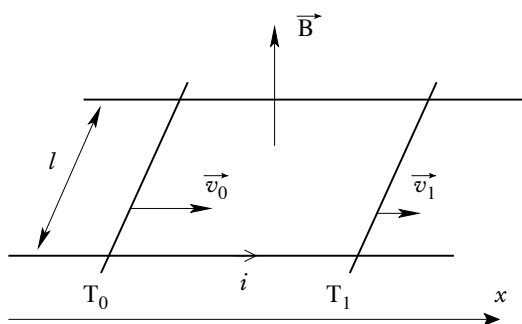
Le phénomène d'induction crée un courant dépendant du mouvement du système. On a donc deux inconnues : l'intensité i de ce courant et la vitesse v , ou ω , que l'on veut déterminer. On a donc besoin de deux équations que l'on appelle traditionnellement **équation mécanique** et **équation électrique**.

→ Savoir faire

- 1) Prédire qualitativement le comportement du système et, si possible, déterminer le sens du mouvement et/ou du courant en utilisant la loi de Lenz.
- 2) Déterminer la fém \mathcal{E} induite dans le système en utilisant la loi de Faraday.
- 3) En déduire l'équation électrique en écrivant la loi des mailles.
- 4) Utiliser le principe fondamental de la dynamique (mouvement de translation) ou le théorème du moment cinétique (mouvement de rotation) pour obtenir l'équation mécanique.
- 5) Résoudre le système formé par ces deux équations.
- 6) Vérifier la cohérence des résultats avec la loi de Lenz.

→ Application

Deux tiges parallèles T_0 et T_1 , de masse m et de résistance R , peuvent glisser sans frottement sur 2 rails horizontaux, parallèles, de résistance négligeable, distants de l et de direction perpendiculaire à celle des tiges. L'ensemble est placé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire, perpendiculaire au plan.



- 1) On impose à T_0 un mouvement uniforme vers T_1 , de vitesse v_0 . Quelle conséquence cela a-t-il pour T_1 (réponse qualitative mais justifiée)?
- 2) On note $v_1(t)$ la vitesse de T_1 . Établir une relation entre v_0 , v_1 et l'intensité i du courant circulant dans les tiges (équation électrique).
- 3) Établir une relation entre v_1 et i (équation mécanique).
- 4) Déduire des questions précédentes les expressions de $v_1(t)$ et $i(t)$ en fonction des données.
On posera $\tau = \frac{2mR}{B^2 l^2}$.
- 5) Vers quelles valeurs tendent v_1 et i ?

Solution

1) La surface du circuit constitué par les deux tiges T_1 et T_0 et les rails diminue. D'après la loi de Faraday, il apparaît une fém et un courant induits dans le circuit. Ce courant va provoquer le déplacement de T_1 sous l'effet de la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, T_1 se déplace dans le même sens que T_0 afin de minimiser la variation de flux magnétique. Pour cela, i doit circuler dans le sens positif.

2) Le circuit est orienté de façon à ce que le flux ϕ de \vec{B} soit positif. En notant x_0 et x_1 les positions de T_0 et T_1 , on a $\phi = lB(x_1 - x_0)$ et donc :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -lB\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) = lB(v_0 - v_1).$$

La loi des mailles donne alors :

$$2Ri = e = lB(v_0 - v_1).$$

3) La tige T_1 est soumise à son poids, à la réaction des rails (2 forces verticales) et à la force de Laplace \vec{F}_{L1} qui s'écrit :

$$\vec{F}_{L1} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = i l B \vec{u}_x.$$

En appliquant le PFD à T_1 et en projetant sur Ox , on obtient :

$$m \frac{dv_1}{dt} = i l B.$$

4) L'équation mécanique donne $i = \frac{m}{lB} \frac{dv_1}{dt}$. En reportant dans l'équation électrique, on obtient :

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{\tau} v_1 = \frac{1}{\tau} v_0$$

$$\text{où } \tau = \frac{2mR}{B^2 l^2}.$$

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre ($v_1 = A e^{-\frac{t}{\tau}}$) et d'une solution particulière de l'équation complète ($v_1 = v_0$). On a donc :

$$v_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0.$$

Or, à $t = 0$, on a $v_1(0) = 0$ donc $A = -v_0$. On en déduit :

$$v_1(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Avec $i = \frac{m}{lB} \frac{dv_1}{dt}$, on obtient :

$$i(t) = \frac{v_0 B l}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

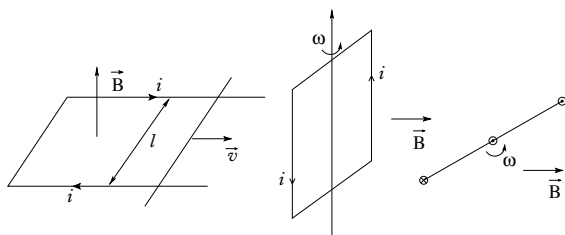
On vérifie que i et v sont bien positifs comme prévu par la loi de Lenz.

5) Quand $t \rightarrow \infty$, v_1 tend vers v_0 et i tend vers 0.

Exercices

Vrai/Faux

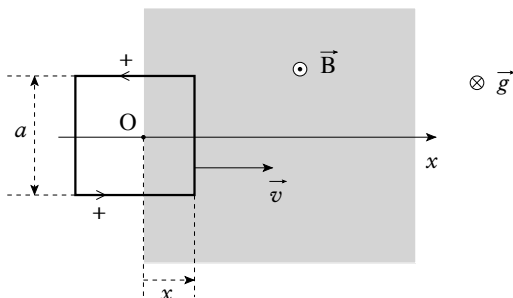
- 1) Dans le dispositif des rails de Laplace de la figure ci-dessous, la fém induite est $e = B/v$.
- 2) Dans la spire en rotation de la figure ci-dessous, le courant induit réel circule dans le sens indiqué par les flèches.
- 3) Plus le mouvement du circuit est rapide, plus la fém est grande (en valeur absolue).



Niveau 1

Ex. 1 Cadre mobile dans un champ magnétique uniforme

On considère une spire conductrice carrée, de côté a , de résistance R , d'inductance négligeable et de masse m , pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal suivant un axe Ox . Dans la portion de l'espace indiquée en grisé sur la figure règne un champ magnétique uniforme, dirigé vers le haut. Si $x < 0$, la spire est complètement en dehors du champ magnétique; elle y est complètement immergée si $x > a$. Pour $x < 0$, la vitesse de la spire est v_0 , dirigée vers la droite parallèlement à Ox .

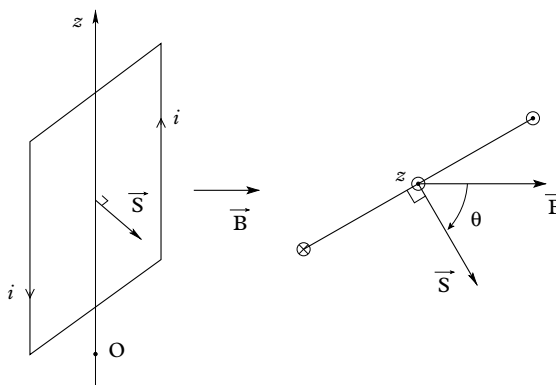


- 1) Déterminer l'intensité du courant induit dans la spire pour $0 < x < a$.
- 2) En déduire l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la spire.
- 3) Établir l'équation différentielle dont la vitesse $v(t)$ de la spire est solution.
- 4) Déterminer $v(t)$ et $x(t)$.

- 5) Quel est le mouvement de la spire quand elle est complètement immergée dans le champ magnétique?

Ex. 2 Freinage par induction

On considère une spire conductrice de surface S , de résistance R et d'inductance propre négligeable, mobile en rotation sans frottement autour d'un axe Oz . Cette spire est de plus plongée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme, stationnaire et perpendiculaire à l'axe de rotation. On note J son moment d'inertie par rapport à Oz . À t , l'angle $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$ entre le champ magnétique et le vecteur surface de la spire est nul et la vitesse de rotation a la valeur ω_0 .



- 1) Rappeler la relation existant entre la vitesse de rotation ω et l'angle θ .
- 2) Déterminer la fém induite dans la spire en fonction de B , S et ω et en déduire l'intensité du courant induit.
- 3) Déterminer le moment Γ_L du couple des forces de Laplace s'exerçant sur la spire par rapport à l'axe Oz . On suppose que ω varie peu sur un tour. En déduire le moment moyen sur un tour en fonction de B , S , R et ω . Dans la suite de l'exercice, on utilisera cette valeur moyenne et non la valeur instantanée du moment.
- 4) Déterminer l'équation du mouvement. On pourra poser $\tau = \frac{2RJ}{(BS)^2}$. En déduire $\omega(t)$ en fonction de ω_0 et τ .
- 5) Étude énergétique. Montrer que l'énergie dissipée par effet Joule dans le cadre lors du mouvement (entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$) est égale à la variation d'énergie cinétique du cadre. On pourra là encore remplacer $i(t)^2$ par sa valeur moyenne sur un tour.

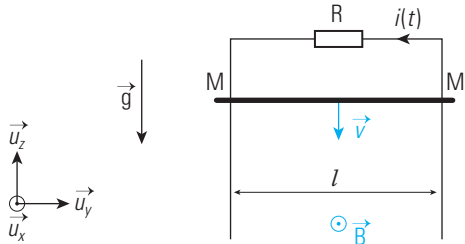
Ex. 3 Rails de Laplace verticaux

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de l , glisse sans frottement une tige horizontale MM' , de masse m , grâce à deux contacts glissants M et M' . On considère

que l'axe Oz du repère est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM' .

On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.

On produit un champ magnétique uniforme et permanent \vec{B} , normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails et dirigé suivant \vec{u}_x .



On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

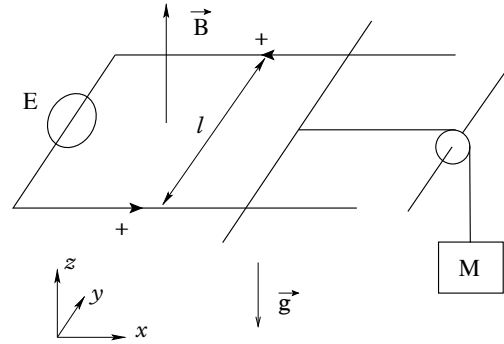
- 1) Étudier qualitativement l'évolution du système.
- 2) Les extrémités supérieures des rails sont reliées à un résistor de résistance R . La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit et par $v(t)$ la norme de la vitesse de la tige, à l'instant t .

- a) Déterminer la force électromotrice e induite dans la tige MM' .
 - b) En déduire l'équation électrique du montage.
 - c) Établir l'équation mécanique du système.
 - d) En déduire l'équation différentielle en $i(t)$.
 - e) Donner la loi d'évolution $i(t)$.
 - f) Donner la loi d'évolution $v(t)$.
- 3) Déterminer la puissance des forces de Laplace et l'exprimer en fonction de $i(t)$. Conclure sur la conversion électromécanique.

Niveau 2

Ex. 4 Treuil

On considère un dispositif des rails de Laplace, plongé dans un champ magnétique \vec{B} , dans lequel on a inséré un générateur de tension continue de fém E (figure ci-dessous). On note R la résistance totale du circuit ainsi formé. La barre mobile est reliée par l'intermédiaire d'un fil et d'une poulie à une masse M . On admettra que, comme M est très supérieure à la masse de la barre, la tension du fil est égale au poids de la masse M , quelle que soit l'accélération de celle-ci.



- 1) Déterminer le sens de branchement du générateur ainsi que la valeur minimale de E pour que le dispositif puisse soulever la masse M .
- 2) Déterminer les équations électrique et mécanique du système lorsqu'il soulève la masse.
- 3) Déterminer la vitesse $v(t)$ de la masse M . Quelle est sa valeur limite, v_l ?
- 4) Faire un bilan de puissance dans le cas où $v = \text{Cste} = v_l$.

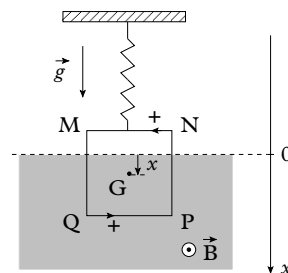
Ex. 5 Cadre mobile dans un champ magnétique uniforme (suite)

Cet exercice reprend le système décrit dans l'exercice 1 mais la spire est maintenant constituée d'un matériau supraconducteur, de sorte que sa résistance est nulle.

- 1) Peut-on toujours négliger l'inductance propre L du cadre ?
- 2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ pour $0 < x < a$. On posera $\omega_0 = \frac{Ba}{\sqrt{mL}}$.
- 3) Résoudre cette équation et discuter du mouvement du cadre. On distinguera 2 cas suivant la valeur de ω_0 .

Ex. 6 Oscillations d'un cadre dans un champ magnétique

Un cadre de cuivre carré filiforme, $MNPQ$, de résistance R , d'inductance propre négligeable, de côté a , de masse m , est accroché à un ressort vertical de raideur k , de masse négligeable. Le plan du cadre est vertical et, à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est située dans un champ magnétique \vec{B} uniforme, stationnaire et perpendiculaire au cadre. On note $\vec{g} = g\vec{u}_x$ l'accélération de la pesanteur.



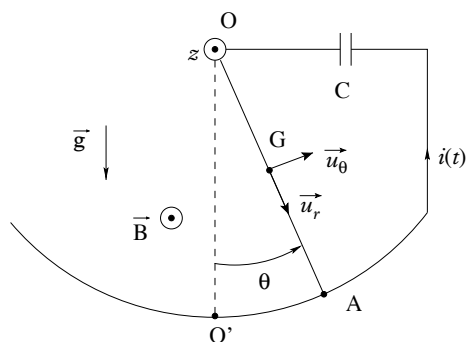
On abaisse le cadre de $\frac{a}{2}$ et on le lâche sans vitesse initiale. On repérera sa position par l'abscisse $x(t)$ de son centre G qui vaut 0 à l'équilibre et est toujours comprise entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

- 1) Exprimer l'intensité i du courant circulant dans le cadre en mouvement en fonction de B , a , R et $\frac{dx}{dt}$.
- 2) Quelle relation a-t-on entre m , g , k et X_0 , allongement du ressort à l'équilibre?
- 3) Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
- 4) On donne $k = 0,4 \text{ N/m}$, $B = 0,1 \text{ T}$, $R = 0,5 \text{ m}\Omega$, $m = 50 \text{ g}$, $a = 10 \text{ cm}$. Déterminer $x(t)$ et tracer la courbe correspondante.

Ex. 7 Pendule soumis à une force de Laplace

Une tige métallique homogène OA , de masse m et de longueur l , peut tourner autour d'un axe horizontal Oz . La liaison au niveau de son extrémité fixe O est considérée comme parfaite.

L'extrémité mobile A glisse sans frottement sur un profil circulaire, de sorte qu'à chaque instant l'ensemble tige-profil circulaire assure la fermeture d'un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C , de la tige OA et de fils électriques. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$ dirigé suivant l'axe de rotation Oz .



- 1) Déterminer la force électromotrice d'induction, e , qui apparaît dans le circuit.
- 2) On néglige les chutes de tension dans les parties résistives du circuit ainsi que tout phénomène d'auto-induction. Représenter le schéma électrique équivalent et montrer que l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit s'écrit $i(t) = \frac{CB l^2}{2} \ddot{\theta}$.
- 3) Déterminer, dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ l'expression de la force de Laplace \vec{F}_L s'exerçant sur la tige mobile. Quel est son point d'application?
- 4) Déterminer la puissance P_L de \vec{F}_L en fonction de C , B , l , θ et $\dot{\theta}$.
- 5) Déterminer la puissance du poids de la tige OA .

6) Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz est $J_{Oz} = \frac{1}{3} m l^2$. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c de la tige.

7) Déterminer l'équation du mouvement et en déduire que la pulsation ω_0 des petites oscillations ($\theta \ll 1$) de

$$\text{la tige s'écrit } \omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} mg}{\frac{1}{3} m l + \frac{1}{4} C B^2 l^3}}.$$

Ex. 8 Haut-parleur

Cet exercice poursuit l'étude du haut-parleur faite en cours. On suppose que le haut-parleur est alimenté par un générateur sinusoïdal de fém $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Le courant $i(t)$ circulant dans le haut-parleur et le déplacement $x(t)$ de la membrane sont donc aussi des fonctions sinusoïdales du temps.

1) Réécrire les équations mécanique et électrique en utilisant la notation complexe et en ne faisant intervenir que les variables \underline{x} et \underline{i} .

2) Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$. On mettra \underline{Z} sous la forme :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m \text{ où } \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{R'} + jC'\omega + \frac{1}{jL'\omega}$$

\underline{Z}_m est appelée impédance motionnelle car elle n'existe qu'à cause du mouvement de la membrane.

3) Faire un schéma du circuit électrique équivalent.

Niveau 3

Ex. 9 Moteur asynchrone (Banque PT 2006)

Aucune connaissance préalable du moteur asynchrone n'est nécessaire. Les parties B, C et D sont indépendantes de la partie A.

Un moteur asynchrone est constitué :

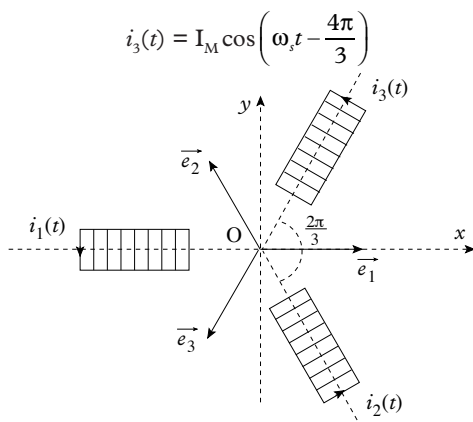
- d'un rotor modélisé par une petite bobine de surface S , contenant N spires et mobile en rotation autour d'un axe Oz ,
- d'un stator comprenant des bobines fixes engendrant un champ magnétique tournant $\vec{B}(t)$ au niveau du rotor.

A. Production d'un champ tournant

Soit un ensemble de trois bobines, représenté ci-dessous, dont les axes sont régulièrement décalés

de $\frac{2\pi}{3}$ dans le plan Oxy et qui sont alimentées par les trois courants d'intensité $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ données ci-après :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_M \cos(\omega t) \\ i_2(t) &= I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$



La fréquence d'alimentation des bobines est :

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50 \text{ Hz.}$$

Chaque bobine crée en O un champ magnétique $\vec{B}_j = K i_j(t) \vec{e}_j$ où K est une constante et \vec{e}_j le vecteur unitaire de l'axe de la $j^{\text{ème}}$ bobine.

1) Déterminer les composantes sur Ox et Oy des vecteurs unitaires \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . En déduire les composantes du champ magnétique total \vec{B} en O.

On rappelle que :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

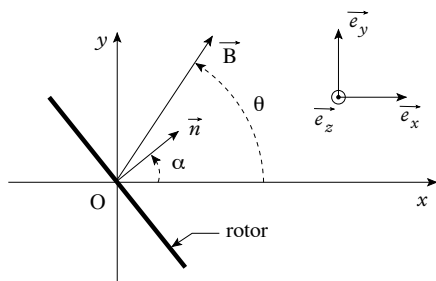
2) Exprimer la norme B de \vec{B} en fonction de K et I_M et justifier l'appellation de champ tournant pour \vec{B} . On précisera sa vitesse angulaire et on la calculera en tours par minute (tr/min).

B. Entraînement du rotor

La bobine modélisant le rotor est orientée suivant sa normale \vec{n} (figure ci-dessous). Elle est plongée dans le champ magnétique tournant que l'on suppose uniforme, de norme B, et peut tourner autour de l'axe Oz avec une vitesse de rotation ω constante.

Les positions angulaires de \vec{B} et \vec{n} sont repérées par les angles suivants :

$$\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_s t \text{ et } \alpha(t) = (\vec{e}_x, \vec{n}) = \omega t$$



Dans toute la suite, on suppose que $0 \leq \omega \leq \omega_s$.

1) Exprimer le flux ϕ de \vec{B} à travers la bobine constituant le rotor en fonction de B, N, S, ω , ω_s et t.

2) En déduire la force électromotrice induite $e(t)$ qui apparaît dans le rotor en fonction du flux maximal $\phi_M = NSB$ et de la vitesse angulaire de glissement $\omega_r = \omega_s - \omega$.

3) Le rotor est équivalent à un circuit série de résistance R et d'inductance propre L.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ dans la bobine.

b) En déduire l'expression de $i(t)$ en régime sinusoïdal sous la forme :

$$i(t) = I_0 \sin(\omega_r t - \psi).$$

On exprimera I_0 et ψ en fonction de ϕ_M , R, L et ω_r .

C. Couple électromagnétique

Le cadre est parcouru par le courant $i(t)$. On note $\vec{\Gamma} = \Gamma(t) \vec{e}_z$ le moment des forces de Laplace s'exerçant sur le rotor, de surface S, plongé dans le champ magnétique $\vec{B}(t)$.

1) Rappeler l'expression de $\vec{\Gamma}$.

2) Montrer que la valeur moyenne de $\vec{\Gamma}(t)$, notée Γ_{em} , est donnée par :

$$\Gamma_{em} = \left(\frac{\phi_M^2}{2L} \right) \frac{RL\omega_r}{R^2 + (L\omega_r)^2}$$

On rappelle que $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

et que $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}}$.

3) On définit le glissement, noté g, par :

$$g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = \frac{\omega_r}{\omega_s}.$$

Que vaut g lorsque le moteur est à l'arrêt ? lorsqu'il tourne à la vitesse ω_s ?

4) On pose $\Gamma_0 = \frac{\phi_M^2}{2L}$. Exprimer Γ_{em} en fonction de Γ_0 ,

g, R et du produit $L\omega_s$.

5) Donner l'expression, notée Γ_d , de Γ_{em} au démarrage du moteur ($\omega = 0$).

6) Déterminer, en fonction de Γ_0 , la valeur maximale Γ_{max} de $\Gamma_{em}(g)$ et préciser l'expression du glissement g_{max} correspondant.

On admettra que la fonction $f(x) = \frac{x}{a+bx^2}$ est maximale pour $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

7) A.N. : R = 4 Ω , $L\omega_s = 40 \Omega$ et $\Gamma_0 = 100 \text{ N.m}$. On rappelle que ω_s est égale à la pulsation des courants circulant dans le stator.

a) Calculer les valeurs numériques de Γ_d , g_{max} et Γ_{max} .

b) En déduire la vitesse de rotation du moteur en tours par minute, n, pour $g = g_{max}$.

c) Pour $g = g_{max}$, calculer la valeur efficace, I_{eff} , de l'intensité du courant rotorique.

8) Tracer l'allure de la courbe $\Gamma_{em}(g)$ lorsque la vitesse angulaire du moteur évolue entre l'arrêt et ω_s .

9) La charge mécanique accouplée à l'arbre du moteur correspond à un couple résistant de moment constant $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_z$ avec $\Gamma_r > 0$.

a) Que se passe-t-il si $\Gamma_r > \Gamma_d$?

b) Montrer par une analyse graphique que, si $\Gamma_d < \Gamma_r < \Gamma_{\max}$, il existe deux points de fonctionnement du moteur correspondant à deux vitesses de rotation du rotor, ω_1 et ω_2 .

c) Étudier de façon qualitative leur stabilité.

D. Puissance et rendement

On note P_{meca} la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur et P_J la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans les conducteurs du rotor.

1) Exprimer P_{meca} et P_J en fonction de Γ_0 , R , L , ω_r et ω .

2) La puissance électromagnétique moyenne P_{em} transmise du stator vers le rotor est intégralement convertie en P_{meca} et P_J . En déduire l'expression du rendement en fonction de ω et ω_s . On rappelle que $\omega_r = \omega_s - \omega$.

3) **A.N.** : Calculer la valeur du rendement η pour $g = 0,05$.

Indications

Ex 1

5) Quelle est la variation de flux magnétique lorsque la spire est complètement plongée dans le champ magnétique ?

Ex 2

- 2) La valeur moyenne de $\sin^2 \theta$ vaut 0,5.
- 3) Utiliser le théorème du moment cinétique.

Ex 4

- 1) Il faut chercher la valeur de E telle que la force de Laplace compense exactement le poids de la masse M .
- 4) Montrer que la puissance fournie par le générateur est utilisée en partie pour soulever la masse et est en partie perdue par effet Joule.

Ex 5

3) Suivant la valeur de ω_0 , la spire peut, ou non, pénétrer complètement dans la zone où le champ magnétique est présent.

Ex 7

1) Exprimer le flux ϕ en fonction de sa valeur ϕ_0 pour $\theta = 0$ et de l'angle θ , sachant que la surface d'un secteur angulaire de rayon l et d'angle θ vaut $\frac{1}{2} \theta l^2$.

ϕ_0 est inconnu mais disparaît quand on dérive ϕ pour obtenir e .

4) La puissance P d'une force \vec{F} s'exerçant en un point M est donnée par $P = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$ où $\vec{v}(M)$ est la vitesse du point M .

7) Appliquer le théorème de la puissance cinétique. Si θ est petit, on a $\sin \theta \approx 1$.

Solutions des exercices

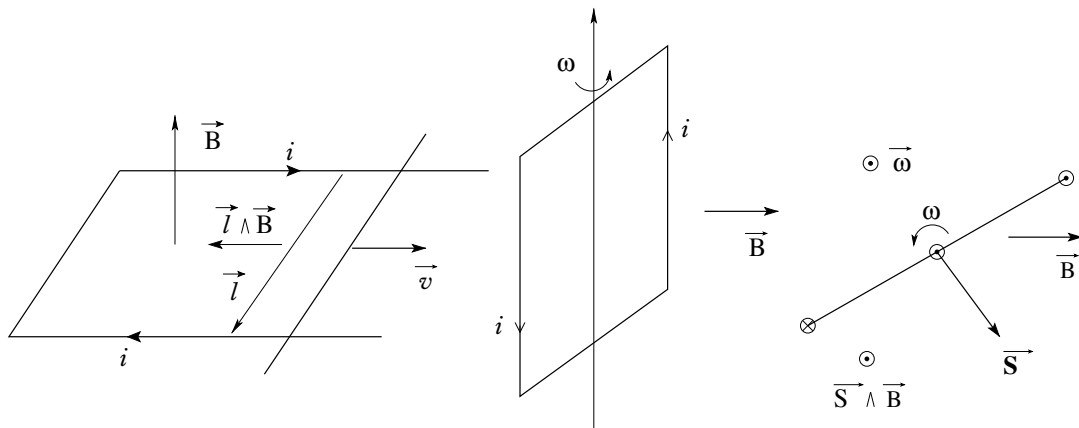
Vrai/Faux

1) **Vrai.** D'après le cours, la valeur absolue de la fém dans un dispositif des rails de Laplace est bien $|e| = B/v$. Le signe dépend de l'orientation du circuit et est donné directement par la loi de Faraday ou par la loi de Lenz. Utilisons cette dernière qui affirme ici que la force de Laplace, $\vec{F}_L = i\vec{l} \wedge \vec{B}$, s'oppose à la vitesse \vec{v} . Le produit vectoriel $\vec{l} \wedge \vec{B}$ et \vec{v} étant de sens contraires, on en déduit que i est positif et donc $e = B/v$.

Remarque : dans le cours, $e = -B/v$ mais le circuit est orienté dans l'autre sens.

2) **Faux.** D'après la loi de Lenz, le couple des forces de Laplace, $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$, s'oppose à la vitesse de rotation $\vec{\omega}$. Le sens du vecteur surface \vec{S} est déterminé par le sens positif choisi sur la spire et, ici, $\vec{S} \wedge \vec{B}$ a le même sens que $\vec{\omega}$. Donc, i est négatif et le courant réel circule dans le sens opposé aux flèches.

Remarque : le sens de i s'inverse au cours de la rotation, suivant le signe de l'angle (\vec{B}, \vec{S}) .



3) **Vrai.** Toutes choses égales par ailleurs, un mouvement plus rapide provoque une variation de flux plus grande pour une durée donnée, c'est-à-dire une augmentation de $\frac{d\phi}{dt}$ et donc de la fém.

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Compte tenu de l'orientation choisie pour la spire et du sens de \vec{B} , le flux magnétique ϕ dans la spire s'écrit $\phi = +Bax$. On en déduit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba \frac{dx}{dt} = -Bav(t)$$

où $v(t)$ est la vitesse de la spire à l'instant t . On en déduit l'intensité $i(t)$ du courant induit :

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{Bav(t)}{R}$$

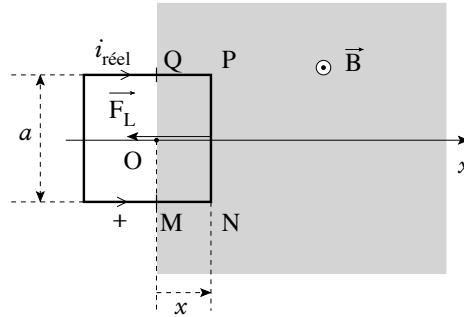
2) La force de Laplace ne s'exerce que sur la partie de la spire qui est plongée dans le champ magnétique, autrement dit sur les segments MN, NP et PQ (cf. figure ci-dessous). On a, en désignant par \vec{F}_{MN} , \vec{F}_{NP} et \vec{F}_{PQ} les forces de Laplace sur les 3 segments correspondants :

$$\vec{F}_{MN} = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -i \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_{PQ}$$

$$\vec{F}_{NP} = i \overrightarrow{NP} \wedge \vec{B} = iaB \vec{u}_x$$

La force de Laplace résultante, \vec{F}_L , s'écrit donc :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{NP} = \vec{F}_{NP} = iaB \vec{u}_x$$



On vérifie que, comme i et v sont de signe opposés, la force de Laplace s'oppose bien au mouvement de la spire. Le sens du courant indiqué sur la figure est le sens réel, opposé au sens positif.

3) L'équation du mouvement s'obtient ici en projetant le pfd appliqué à la spire sur l'axe Ox . On a donc :

$$m \frac{dv}{dt} = iaB = -\frac{(Ba)^2(t)}{R} v$$

soit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0$$

avec $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$.

4) La solution de l'équation de la question précédente est de la forme $v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$. A est une constante que l'on détermine en utilisant le fait que $v = v_0$ pour $t = 0$, ce qui donne :

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On en déduit $x(t)$ en intégrant $v(t)$, soit $x(t) = -\tau v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + K$. Comme $x(t = 0) = 0$, on a $K = \tau v_0$ et donc :

$$x(t) = \tau v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

5) Lorsque la spire est complètement immergée dans le champ magnétique, le flux ϕ ne varie plus et donc $i = 0$. La force de Laplace est donc nulle et la spire a un mouvement rectiligne uniforme.

Exercice 2

1) On a par définition $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.

2) Le flux magnétique ϕ dans la spire s'écrit $\phi = BS \cos \theta$. On en déduit :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = BS \dot{\theta} \sin \theta = BS \omega \sin(\theta)$$

L'intensité i du courant induit s'écrit donc :

$$i(t) = \frac{BS\omega}{R} \sin(\theta).$$

3) On a $\Gamma_L = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$ où $\vec{M} = i\vec{S}$ est le moment magnétique de la spire. On en déduit :

$$\Gamma_L = iSB \sin(-\theta) = -iSB \sin(\theta) = -\frac{(BS)^2 \omega}{R} \sin^2(\theta).$$

En négligeant la variation de ω sur un tour, on a donc :

$$\langle \Gamma_L \rangle = -\frac{(BS)^2 \omega}{R} \langle \sin^2(\theta) \rangle = -\frac{(BS)^2 \omega}{2R}.$$

3) D'après le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz on a :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_L = -\frac{(BS)^2 \omega}{2R}$$

soit :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{2RJ}{(BS)^2}.$

En prenant en compte la condition initiale $\omega = \omega_0$, on en déduit l'expression de $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4) Quand $t \rightarrow \infty$, $\omega(t)$ et donc l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$ tendent vers 0. La variation d'énergie cinétique est donc :

$$\Delta E_c = E_c(\infty) - E_c(0) = -\frac{1}{2} J \omega_0^2.$$

D'autre part, l'énergie E_J dissipée par effet Joule pendant la même période s'écrit :

$$E_J = \int_0^\infty R i(t)^2 dt \simeq \int_0^\infty R \langle i(t)^2 \rangle dt.$$

Or, $\langle i(t)^2 \rangle = \left(\frac{BS\omega(t)}{R} \right)^2 \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{BS\omega(t)}{R} \right)^2$ et donc :

$$E_J = \frac{(BS)^2}{2R} = -mg\omega_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{(BS\omega_0)^2}{2R} \left(\frac{\tau}{2} \right) = \frac{(BS\omega_0)^2}{2R} \frac{RJ}{(BS)^2} = \frac{1}{2} J \omega_0^2.$$

Toute l'énergie cinétique que possédait la spire a donc été convertie en chaleur lors du freinage.

Exercice 3

1) Le rail mobile est soumis à son poids. Il va donc se mettre en mouvement.

Ce rail est placé dans un circuit conducteur fermé. Sa mobilité est alors source de courant induit dans le circuit. Ce rail parcouru par le courant induit placé dans le champ magnétique \vec{B} est soumis à la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, cette force s'oppose au mouvement de la barre et est dirigée selon \vec{u}_z .

Il faut maintenant réaliser une étude plus poussée pour connaître l'évolution du mouvement du rail.

2) a) En prenant l'origine de l'axe Oz au niveau de la résistance et en notant z la coordonnée de la tige sur cet axe, la surface S du circuit constitué des deux rails, de la tige mobile et de la résistance s'écrit $S = -lz$ car $z < 0$.

Compte tenu de l'orientation du circuit et du sens de \vec{B} , le flux magnétique ϕ dans le circuit s'écrit :

$$\phi = +BS = -Blz.$$

On a donc :

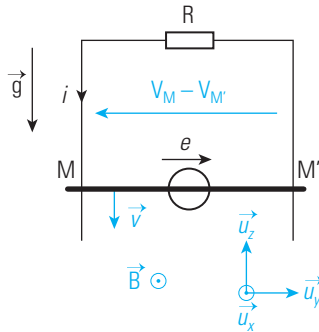
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Bl \frac{dz}{dt}.$$

La tige tombant vers le bas, sa vitesse \vec{v} s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = -v(t) \vec{u}_z.$$

avec $v(t) > 0$. On a donc finalement :

$$e = -Blv(t)$$



b) Le rail est placé dans un montage constitué d'une résistance R et de conducteurs fixes de résistance négligeable devant R .

Le rail, de résistance négligeable, est équivalent à un générateur de tension parfait.

On a : $V_M - V_{M'} = -e = -Ri(t)$ dans le sens indiqué sur le schéma.

On en déduit l'équation électrique :

$$e = Ri(t) = -v(t)Bl. \quad (1)$$

c) Afin d'établir l'équation mécanique, il faut étudier les forces qui s'exercent sur le rail.

Le rail est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et à la force de Laplace, puisqu'il est parcouru par un courant $i(t)$, $\vec{F}_L = \int_M^{M'} i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t)Bl\vec{u}_z$ où $d\vec{l} = dy\vec{u}_y$ est orienté dans le sens M vers M' .



On met en œuvre la méthode pour vérifier le sens du courant.

Dans cet exemple, $v(t)$ est supposé positif et le courant induit est donc négatif. On retrouve donc une force de Laplace orientée dans le sens inverse du poids qui s'oppose donc aux causes du mouvement.

La loi de Lenz est bien vérifiée.

On applique la deuxième loi de Newton au rail :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_L = [-mg - i(t)Bl] \vec{u}_z.$$

Avec la notation $\vec{v} = -v(t)\vec{u}_z$, on en déduit l'équation mécanique :

$$-m \frac{dv}{dt} = -mg - i(t)Bl. \quad (2)$$

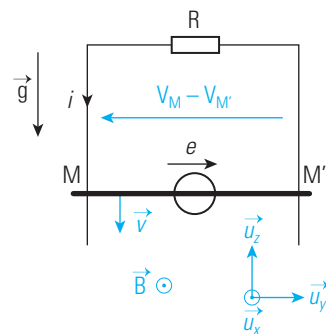
d) À partir des équations (1) et (2), on obtient par substitution :

$$\frac{mR}{(Bl)^2} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{-mg}{Bl}. \quad (3)$$

e) L'équation (3) est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre $i_g(t) = A e^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$ et de la solution particulière de l'équation avec second membre $i_p(t) = \frac{-mg}{Bl}$.

Alors : $i(t) = i_g(t) + i_p(t) = A e^{-t/\tau} - \frac{mg}{Bl}$.

Or le courant est nul à l'instant $t = 0$ car la barre est immobile à cet instant.



On en déduit : $A = \frac{mg}{Bl}$.

$$\text{D'où : } i(t) = \frac{-mg}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$$

d) On déduit de l'équation (1) : $v(t) = \frac{-R}{Bl} i(t) = \frac{mgR}{(Bl)^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

3) La puissance des forces de Laplace est de la forme :

$$P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -i(t)Bl\vec{u}_z \cdot -v(t)\vec{u}_z = i(t)Blv(t) = -R[i(t)]^2.$$

On note que cette puissance est égale à celle dissipée par effet Joule dans le résistor. On peut en conclure qu'il y a transfert d'énergie.

L'énergie mécanique reçue par le rail du fait de son mouvement est transformée en énergie électrique qui est fournie au circuit extérieur.

Le circuit extérieur étant une résistance, elle dissipe cette énergie sous forme thermique (effet Joule).

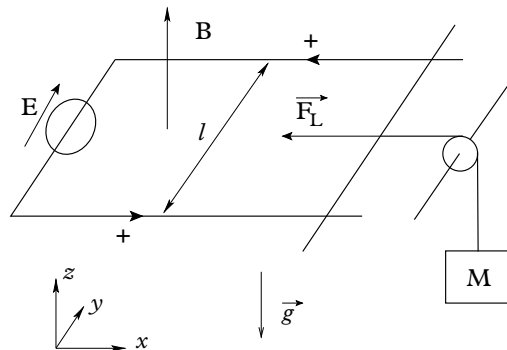
Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) La force pouvant soulever la masse est la force de Laplace \vec{F}_L qui s'écrit :

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \wedge \vec{B} = iBl\vec{u}_x$$

avec l'orientation positive du circuit indiquée sur la figure de l'énoncé. On en déduit que i doit être négative et donc que le générateur doit être branché comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Pour pouvoir soulever la masse, la force de Laplace doit être supérieure à son poids. On doit donc avoir $iBl > Mg$. À l'instant où la masse se met en mouvement, il n'y a pas encore de phénomène d'induction puisque la barre était immobile, on a donc simplement $E = Ri$. On en déduit donc la valeur minimale E_{\min} de E :

$$E_{\min} = \frac{MgR}{lB}.$$

2) On suppose maintenant que la condition de la question précédente est satisfaite et que la masse est en mouvement à une vitesse $\vec{v} = -v(t)\vec{u}_z$ avec $v(t) > 0$.

Équation électrique : la barre, en mouvement avec une vitesse $\vec{v}_b = -v(t)\vec{u}_z$, est alors le siège d'un fém induite $e(t)$ telle que :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = +Blv(t).$$

La loi des mailles donne alors l'équation électrique :

$$Blv - E = Ri.$$

Équation mécanique : on applique le pfd à la barre en projection sur l'axe Ox. Les forces à prendre en compte sont la force de Laplace et la tension du fil, dont la norme est égale à Mg. On a donc l'équation mécanique suivante :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -M \frac{dv}{dt} = i l B + Mg .$$

3) L'équation électrique donne $i = \frac{Blv - E}{R}$. En remplaçant dans l'équation mécanique et en posant $\tau = \frac{MR}{(Bl)^2}$, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(Bl)^2}{MR} v = \frac{E/B}{MR} - g .$$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme : $v_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ où A est une constante.

Une solution particulière de l'équation avec second membre s'écrit :

$$v_l = \frac{E/B - MRg}{(Bl)^2} .$$

On a donc $v(t) = v_1(t) + v_l$, ce qui, en tenant compte de la condition initiale $v(0) = 0$, donne :

$$v(t) = v_l (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) .$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, on a bien $v \rightarrow v_l$.

4) On se place maintenant à un instant t grand devant τ , de sorte que $v \simeq v_l$.

La puissance fournie au système est celle délivrée par le générateur, soit, en tenant compte du fait que le générateur est branché dans le sens négatif du circuit :

$$P_{\text{fournie}} = -Ei = -E \frac{Blv_l - E}{R} = -\frac{E}{R} \left(\frac{E/B - MRg}{(Bl)} - E \right) = \frac{MgE}{Bl} .$$

On note au passage qu'une fois la vitesse limite atteinte, on a $i = -\frac{Mg}{Bl}$.

La puissance utile est la puissance servant à hisser la masse M, on a donc :

$$P_{\text{utile}} = Mg v_l = Mg \frac{E/B - MRg}{(Bl)^2} .$$

La différence entre les deux puissances est $P_{\text{fournie}} - P_{\text{utile}} = R \left(\frac{Mg}{Bl} \right)^2 = Ri^2 = P_J$, puissance dissipée par effet Joule. Le bilan de puissance est donc le suivant :

$$P_{\text{fournie}} = P_{\text{utile}} + P_J .$$

La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule et en partie utilisée pour monter la masse M.

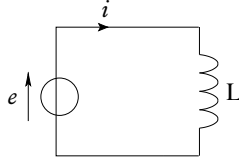
Exercice 5

1) On a toujours $e = -Bav$. Si on néglige l'inductance propre L, comme $R = 0$, on aurait une intensité infinie. On ne peut donc pas négliger L.

2) L'exercice étant peu guidée, on va utiliser la méthode générale pour résoudre ce genre de problème, c'est-à-dire chercher une équation électrique et une équation mécanique.

La loi des mailles sur le circuit équivalent (figure ci-dessous) donne :

$$e = L \frac{di}{dt} = -Bav = -Ba \frac{dx}{dt} .$$



On a donc, en intégrant, $i = -\frac{Ba}{L}x + K$. Comme $i = 0$ pour $x = 0$, on en déduit $K = 0$. L'équation électrique s'écrit donc :

$$i = -\frac{Ba}{L}x.$$

L'expression de la force de Laplace $\overline{F_L}$ est toujours $\overline{F_L} = ia\overline{B u_x}$. On en déduit donc l'équation mécanique en écrivant le pfd projeté sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = iaB.$$

En remplaçant i par son expression en fonction de x , on a :

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(Ba)^2}{L}x.$$

En posant $\omega_0 = \frac{Ba}{\sqrt{mL}}$, on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

3) La solution de l'équation du mouvement est de la forme : $x(t) = K' \cos(\omega_0 t + \varphi)$. En utilisant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0$, on obtient :

$$\begin{cases} 0 = K' \cos \varphi \\ v_0 = -K' \omega_0 \sin \varphi \end{cases}$$

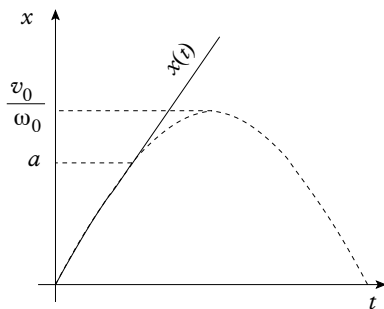
ce qui donne $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $K' = -\frac{v_0}{\omega_0}$. La solution est donc :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

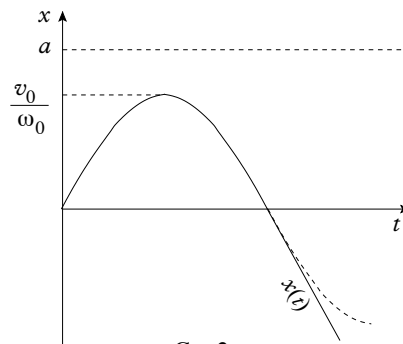
Les expressions ci-dessus ne concernent que le cas $0 < x < a$. En dehors de cette zone, il faut distinguer deux cas.

Cas 1 : $\frac{v_0}{\omega_0} \geq a$. Le cadre entre alors complètement dans le champ magnétique. Le flux magnétique devient alors constant et la force de Laplace nulle. Pour $x \geq a$, le cadre a alors un mouvement rectiligne uniforme.

Cas 2 : $\frac{v_0}{\omega_0} \leq a$. La spire pénètre dans le champ magnétique jusqu'à la position $x = \frac{v_0}{\omega_0}$ puis revient en arrière jusqu'à $x = 0$. Le flux magnétique est alors nul et le reste. Le cadre a alors un mouvement rectiligne uniforme vers la gauche à la vitesse $\vec{v} = -v_0 \overline{u_x}$.



Cas 1



Cas 2

Exercice 6

1) Lorsque le cadre oscille, la surface immergée dans le champ magnétique varie. La variation du flux magnétique ϕ correspondante génère donc une fém et un courant induits. Plus précisément, on a :

$$\phi = Ba \left(\frac{a}{2} + x \right) \quad \text{et} \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba \frac{dx}{dt}.$$

On en déduit :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{Ba}{R} \frac{dx}{dt} = -\frac{Ba\dot{x}}{R}.$$

2) À l'équilibre, le cadre n'est soumis qu'à son poids et à la tension du ressort. La somme des forces étant nulle à l'équilibre, on a donc $mg = kX_0$.

3) Lorsque le cadre oscille, il est soumis à :

- son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$,
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(x + X_0)\vec{u}_x$,
- la force de Laplace \vec{F}_L .

La force de Laplace \vec{F}_{QP} s'exerçant sur le côté QP s'écrit :

$$\vec{F}_{QP} = i\vec{QP} \wedge \vec{B} = iaB\vec{u}_x.$$

La force de Laplace est nulle sur le côté MN qui n'est pas plongé dans le champ magnétique. Les forces de Laplace qui s'exercent sur les côtés MQ et PN se compensent car $\vec{MQ} = -\vec{PN}$. On a donc finalement $\vec{F}_L = \vec{F}_{QP} = iaB\vec{u}_x$.

Remarque : on a vu à la première question que i et \dot{x} sont de signes opposés. La force de Laplace s'oppose donc à la vitesse, ce qui est en accord avec la loi de Lenz.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur Ox , on obtient :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + X_0) + mg + iaB.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer i par son expression en fonction de \dot{x} et à utiliser la relation $mg = kX_0$ pour obtenir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(aB)^2}{mR} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

4) Avec les valeurs numériques fournies par l'énoncé, l'équation devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 8x = 0.$$

L'équation caractéristique associée s'écrit $x^2 + 4x + 8 = 0$ et son discriminant vaut $\Delta = -16 = 16j^2$. On a donc deux solutions complexes conjuguées : $-2 + 2j$ et $-2 - 2j$.

La solution de l'équation différentielle est donc de la forme : $x(t) = Ae^{-2t} \cos(2t + \varphi)$, où A et φ sont des constantes fixées par les conditions initiales.

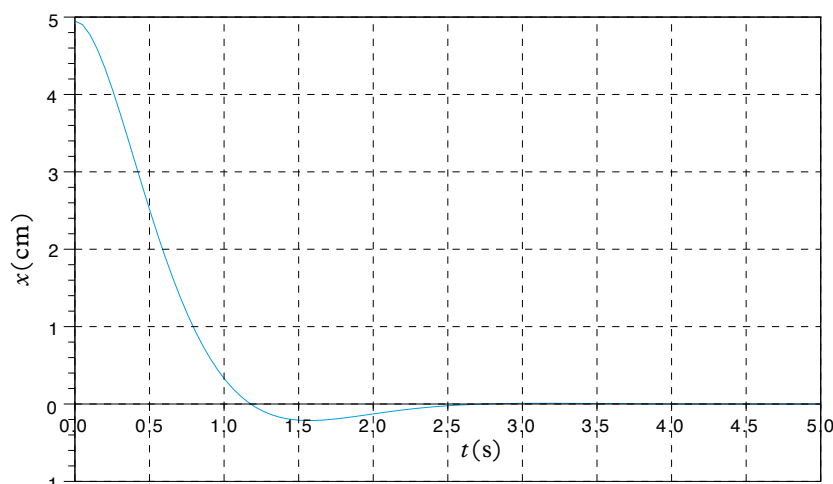
À $t = 0$, le cadre était immobile, donc $\dot{x}(0) = 0$, à la position $x(0) = \frac{a}{2}$. On a donc ;

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = A \cos(\varphi) \\ 0 = \cos \varphi + \sin \varphi \quad \text{car } \dot{x}(t) = -2Ae^{-2t} [\cos(2t + \varphi) + \sin(2t + \varphi)] \end{cases}$$

On a donc $\tan \varphi = -1$ soit $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ et $A = \frac{a}{\sqrt{2}} = 7 \text{ cm}$. La solution s'écrit donc :

$$x(t)_{cm} = 7e^{-2t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Le tracé de la courbe ci-dessous montre que le cadre s'immobilise rapidement dans sa position d'équilibre.



Exercice 7

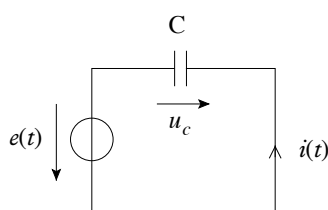
1) Le flux magnétique à travers le circuit pour un angle θ , $\phi(\theta)$, est égal au flux ϕ_0 pour $\theta = 0$ auquel on retranche le flux correspondant à la portion de disque $OO'A$. La surface de cette portion de disque étant égale à $\frac{1}{2}\theta l^2$, on a :

$$\phi(\theta) = \phi_0 - \frac{1}{2}\theta l^2 B.$$

Le flux ϕ_0 est inconnu mais on sait qu'il est constant. On peut donc calculer e avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\theta} l^2 B.$$

2) Le schéma électrique équivalent comprend seulement un générateur correspondant à la fém d'induction et le condensateur puisqu'on néglige toute résistance.



On a donc $e = u_c$ et $i = C \frac{du_c}{dt}$. On en déduit donc :

$$i = C \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} C B l^2 \ddot{\theta}.$$

3) D'après la formule vue en cours, la force de Laplace \overline{F}_L s'exerçant sur la tige s'écrit :

$$\overline{F}_L = i \overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = i l \overline{u_r} \wedge B \overline{u_z} = -i l B \overline{u_\theta}.$$

La tige mobile est plongée dans un champ magnétique uniforme. Le point d'application de la force de Laplace est donc le milieu G de la tige.

4) La puissance P_L de \overline{F}_L s'écrit :

$$P_L = \overline{F}_L \cdot \overline{v_G}$$

où $\overline{v_G} = \frac{1}{2} l \dot{\theta} \overline{u_\theta}$ est la vitesse du point d'application G de la force. On a donc finalement :

$$P_L = -\frac{1}{4} C B^2 l^4 \ddot{\theta} \dot{\theta}.$$

Remarque : on aurait aussi pu déterminer le moment $\Gamma_L = -\frac{1}{2}iBl^2$ de la force de Laplace par rapport à l'axe Oz et écrire que $P_L = \Gamma_L \dot{\theta}$.

5) On détermine de la même façon la puissance du poids, P_p :

$$P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v}_G.$$

L'angle $(\vec{g}, \vec{u}_\theta)$ vaut $\theta + \frac{\pi}{2}$, on a donc:

$$P_p = mg \frac{1}{2} l \dot{\theta} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} mgl \dot{\theta} \sin \theta.$$

6) L'énergie cinétique de la tige est donnée par:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2.$$

7) On applique le théorème de la puissance cinétique:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_p + P_L$$

qui donne:

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} mgl \dot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{4} CB^2 l^4 \ddot{\theta} \dot{\theta}.$$

On en déduit l'équation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mg}{\frac{1}{3}ml + \frac{1}{4}CB^2l^3}}.$

Dans le cas des petites oscillations, on a $\sin \theta \simeq \theta$. L'équation du mouvement devient:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

dont la solution est de la forme: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. La pulsation des petites oscillations de la tige est donc bien ω_0 .

Exercice 8

1) Les équations du paragraphe B.2.3 deviennent en notation complexe:

$$-m\omega^2 \underline{x} = i\underline{B} - k\underline{x} - h j \omega \underline{x} \quad \text{et} \quad \underline{E} = R\underline{i} + L j \omega \underline{i} + B l j \omega \underline{x}.$$

2) La première équation donne:

$$\underline{x} = \frac{i\underline{B}}{k + h j \omega - m\omega^2}.$$

En remplaçant \underline{x} par son expression en fonction de \underline{i} dans la seconde équation, on a:

$$\underline{E} = R\underline{i} + jL\omega \underline{i} + \frac{j\omega(lB)^2}{k + h j \omega - m\omega^2} \underline{i}$$

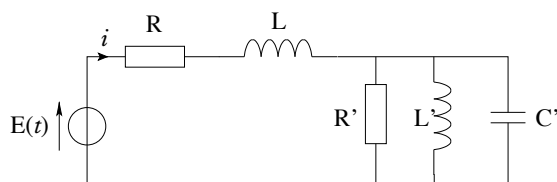
soit:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{k}{j\omega(lB)^2} + \frac{h}{(lB)^2} + \frac{j m \omega}{(lB)^2}}$$

ce qui est bien de la forme demandée à condition de poser:

$$R' = \frac{(lB)^2}{h}, \quad L' = \frac{(lB)^2}{k} \quad \text{et} \quad C' = \frac{m}{(lB)^2}.$$

3) Le schéma équivalent est tracé ci-dessous. L'impédance motionnelle correspond aux trois dipôles R' , L' et C' en parallèle et est elle-même en série avec R et L .



Exercices de niveau 3

Exercice 9

A. 1) En notant \vec{e}_x et \vec{e}_y les vecteurs directeurs des axes Ox et Oy , on a :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \\ \vec{e}_2 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\vec{e}_x - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

On a alors $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$. Les composantes de \vec{B} sur Ox et Oy sont donc :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= KI_M \begin{vmatrix} \cos(\omega_s t) - \frac{1}{2}\cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \end{vmatrix} \\ \vec{B} &= KI_M \begin{vmatrix} \cos(\omega_s t) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\omega_s t - \pi) = \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2}\cos(\omega_s t) = \frac{3}{2}\cos(\omega_s t) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(-2)\sin(\omega_s t - \pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sin(\omega_s t) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

A. 2) En posant $\vec{e}_r = \cos(\omega_s t)\vec{e}_x + \sin(\omega_s t)\vec{e}_y$, on a $\vec{B} = \frac{3}{2}KI_M\vec{e}_r$. Comme $\|\vec{e}_r\| = 1$, il vient :

$$B = \vec{B} = \frac{3}{2}KI_M.$$

D'autre part, l'angle entre \vec{e}_x et \vec{e}_r est égal à $\omega_s t$. Il varie donc régulièrement avec t . \vec{B} est donc un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω_s .

On a $\omega_s = 2\pi \times 50 \text{ rad/s} = 50 \text{ tr/s} = 3\,000 \text{ tr/min}$.

B. 1) Le champ \vec{B} étant uniforme et la bobine étant constituée de N spires, on a :

$$\phi = N\vec{B} \cdot \vec{S} = N\vec{B} \cdot S\vec{n} = NBS\cos(\vec{B}, \vec{n})$$

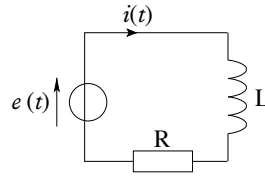
d'où :

$$\phi = NBS\cos(\theta - \alpha) = \phi_M \cos[(\omega_s - \omega)t] = \phi_M \cos(\omega_r t)$$

où $\phi_M = NSB$.

B. 2) On a immédiatement : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \phi_M \omega_r \sin(\omega_r t)$.

B. 3. a) Le rotor est équivalent au circuit électrique ci-dessous :



La loi des mailles donne :

$$e(t) = \phi_M \omega_r \sin(\omega_r t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}.$$

B. 3. b) On pose $i(t) = I_0 e^{j(\omega_r t + \chi)}$ et $\underline{e}(t) = \phi_M \omega_r e^{j(\omega_r t - \frac{\pi}{2})} = -j\phi_M \omega_r e^{j\omega_r t}$ de façon à ce que $\text{Re}(\underline{e}(t)) = e(t)$. On a alors :

$$-j\phi_M \omega_r = Ri + jL\omega_r i$$

soit :

$$\underline{i} = \frac{-j\phi_M \omega_r}{R + jL\omega_r}$$

donc :

$$I_0 = \frac{\phi_M \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$$

et

$$\chi = \text{Arg}(\underline{i}) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arg}(R + jL\omega_r) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega_r}{R}\right).$$

Finalement,

$$i(t) = \frac{\phi_M \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}} \cos\left[\omega_r t - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega_r}{R}\right)\right] = \frac{\phi_M \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}} \sin\left[\omega_r t - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega_r}{R}\right)\right]$$

et $\psi = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega_r}{R}\right).$

C. 1) On a, d'après le cours :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = Ni\vec{S} \wedge \vec{B} = NiSB \sin(\theta - \alpha) = I_0 \phi_M \sin(\omega_r t) \sin(\omega_r t - \psi).$$

C. 2) $\Gamma_{em} = \langle \Gamma \rangle = I_0 \phi_M \langle \sin(\omega_r t) \sin(\omega_r t - \psi) \rangle = \frac{I_0 \phi_M}{2} \langle \cos(\psi) - \cos(2\omega_r t - \psi) \rangle.$

Comme $\langle \cos(2\omega_r t - \psi) \rangle = 0$, on a :

$$\Gamma_{em} = \frac{\phi_M}{2} \frac{\phi_M \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2 \omega_r^2}{R^2}}} = \left(\frac{\phi_M^2}{2L}\right) \frac{RL\omega_r}{R^2 + (L\omega_r)^2}.$$

C. 3) À l'arrêt, $\omega = 0$ donc $g = 1$. Si $\omega = \omega_s$, alors $g = 0$.

C. 4) On a $\omega_r = g\omega_s$ et donc :

$$\Gamma_{em} = \Gamma_0 \frac{RgL\omega_s}{R^2 + g^2(L\omega_s)^2}.$$

C. 5) Au démarrage, $g = 1$ et donc $\Gamma_d = \Gamma_0 \frac{RL\omega_s}{R^2 + (L\omega_s)^2}.$

C. 6) On met Γ_{em} sous la forme $\Gamma_{em}(g) = \frac{g}{\frac{R}{L\omega_s} + \frac{L\omega_s}{R}g^2}.$ D'après le résultat donné dans l'énoncé,

$\Gamma_{em}(g)$ est maximal pour :

$$g = g_{max} = \sqrt{\frac{R}{L\omega_s} \frac{R}{L\omega_s}} = \frac{R}{L\omega_s}.$$

C. 7. a) $\Gamma_d = 100 \frac{4 \times 40}{16 + 40^2} \approx 10 \text{ N.m.}$

$g_{\max} = \frac{4}{40} = 0,1$

$\Gamma_{\max} = 100 \frac{4 \times 0,1 \times 40}{16 + 16} = 50 \text{ N.m.}$

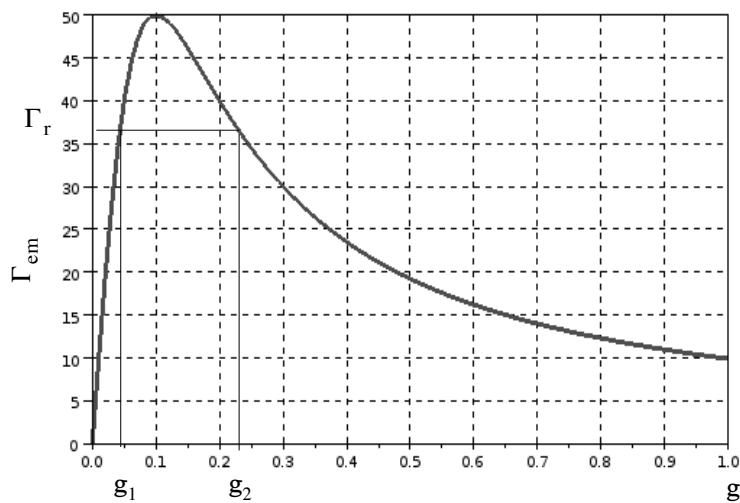
C. 7. b) $g_{\max} = 0,1 = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = \frac{3\,000 - n}{3\,000}$ et donc $n = 2\,700 \text{ tr/min.}$

C. 7. c) $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{\phi_M \omega_r}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$. De plus, $\omega_r = g \omega_s$ et $g = g_{\max} = \frac{R}{L \omega_s}$, donc $I_{\text{eff}} = \frac{\phi_M \frac{R}{L}}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{\phi_M}{2L}$.

De plus, $\phi_M = \sqrt{2 \Gamma_0 L}$, donc $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{2L}}$.

Comme $L \omega_s = 40 \, \Omega$ et $\omega_s = 100\pi \text{ rad/s}$, on en déduit $L = 0,13 \text{ H}$ et $I_{\text{eff}} = 20 \text{ A}$.

C. 8)



C. 9. a) Si $\Gamma_r > \Gamma_d$, le moteur ne démarre pas.

C. 9. b) Dans le cas où $\Gamma_d < \Gamma_r < \Gamma_{\max}$, deux points de la courbe, d'abscisses g_1 et g_2 , correspondant à deux valeurs de ω sont possibles (cf. courbe ci-dessus).

C. 9. c) Pour étudier la stabilité d'un point de fonctionnement, on cherche à déterminer l'évolution du système si on se trouve à proximité du point considéré.

Pour le point g_1 , si ω augmente, alors $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$ diminue et Γ_{em} aussi, entraînant une diminution de ω . Le point de fonctionnement est donc stable.

Au contraire, pour g_2 , une augmentation de ω entraîne une augmentation de Γ_{em} , ce qui renforce l'augmentation de ω . Ce point de fonctionnement est donc instable.

D. Puissance et rendement

D. 1) $P_{\text{meca}} = \Gamma_{\text{em}} \omega = \frac{\Gamma_0 R L \omega_r \omega}{R^2 + (L \omega_r)^2}$ et $P_J = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{\Gamma_0 R L \omega_r^2}{R^2 + (L \omega_r)^2}$.

D. 2) Le rendement η est défini par $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}$. On a donc :

$$\eta = \frac{P_{\text{meca}}}{P_{\text{em}}} = \frac{P_{\text{meca}}}{P_{\text{meca}} + P_J} = \frac{\omega}{\omega + \omega_r} = \frac{\omega}{\omega_s}$$

D. 3) $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = 1 - \eta$, donc, puisque $g = 0,05$, on en déduit que $\eta = 0,95$.