

# Mouvement de particules chargées

## Introduction

C'est dans les grands accélérateurs de particules que des découvertes fondamentales sur la structure de la matière ont été faites : les chocs de particules ont permis de mettre en évidence les quarks dans les années 70. Le but de ce chapitre n'est pas de reprendre une étude des chocs entre particules dans les accélérateurs, mais de comprendre comment les particules chargées se meuvent lorsqu'elles sont plongées dans un champ électromagnétique.

La force de Lorentz, d'intensité très supérieure au poids à l'échelle microscopique, met les particules en mouvement ou modifie leurs mouvements. Le champ électrostatique permet d'augmenter leur vitesse, le champ magnétique les dévie.

À partir d'hypothèses simplificatrices (champs uniformes et stationnaires), ce chapitre permet de comprendre les causes du mouvement de particules chargées.

### Plan du chapitre 13

<b>A. La force de Lorentz</b> .....	x
<b>B. Champ électrostatique uniforme</b>	
1. Équations horaires et trajectoire .....	x
2. Étude énergétique .....	x
<b>C. Champ magnétique uniforme</b>	
1. Équations horaires et trajectoire .....	x
2. Étude énergétique .....	x
<b>Méthodes</b> .....	x
<b>Exercices</b> .....	x

1. Nous avons déjà rencontré les deux termes de cette force. La force de Coulomb est en fait une partie de la force générale de Lorentz.

2. Le module de la vitesse des particules reste très petit devant la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

3. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour ce qui est de l'étude du mouvement de particules chargées. En effet, la durée de cette étude n'excède jamais quelques secondes, durée négligeable devant celle caractéristique de rotation de la Terre.

4. Voir l'exercice 1 dont les résultats permettent de justifier cette approximation.

5. Il y a « statique » dans « électrostatique », c'est-à-dire indépendant du temps.

## A. La force de Lorentz

C'est la force qu'exerce un champ électromagnétique sur une charge électrique  $q$ . Son expression générale<sup>1</sup> comprend les effets du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

### Définition 1

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  exerce sur une particule de charge  $q$  et possédant la vitesse  $\vec{v}$  la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$\vec{f}$  force en newton (N)  
 $q$  charge en coulomb (C)  
 $\vec{E}$  champ électrostatique ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ )  
 $\vec{v}$  vitesse ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )  
 $\vec{B}$  champ magnétique (T)

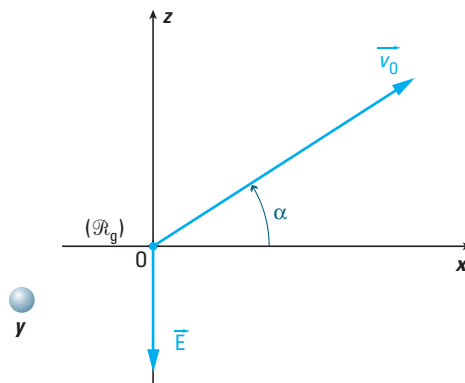
Pour étudier le comportement des particules chargées sous l'action de cette force, on se place dans le cadre de la mécanique newtonienne, ou classique<sup>2</sup>. On appliquera le principe fondamental de la mécanique (PFD) à la particule dans un référentiel galiléen, et en excluant tout changement de référentiel<sup>3</sup>.

Dans les études suivantes, on négligera l'action du poids dont le module reste négligeable<sup>4</sup> devant celui de toute force électromagnétique électrique ou magnétique.

## B. Champ électrostatique uniforme

La particule chargée est plongée dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  uniforme<sup>5</sup> et on néglige la pesanteur. Ce mouvement est étudié dans le vide.

### B.1. Équations horaires et trajectoire



L'étude du mouvement d'une particule chargée de masse  $m$  et charge  $q$  dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = -E\vec{e}_z$  est tout à fait similaire à celle effectuée dans le chapitre dynamique lors de l'étude du mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur uniforme. On reprend donc la démarche.

- Système étudié : point matériel de charge  $q$  et masse  $m$ .
- Référentiel galiléen d'étude :  $\mathcal{R}_g(0 ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- Bilan des forces appliquées à M :
  - force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E} = -qE\vec{e}_z$
  - poids négligeable

- PFD appliquée à M donc  $\mathcal{R}_g$ :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = q\vec{E}$$

$$\text{soit } \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

En intégrant entre 0 et  $t$ :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \frac{q}{m} \vec{E}t$$

En intégrant à nouveau entre 0 et  $t$ :

$$\overline{\text{OM}}(t) - \underbrace{\overline{\text{OM}}(t=0)}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{q}{m} \vec{E} \frac{t^2}{2}$$

En projetant sur  $\vec{e}_x$ :  $x = v_0 t \cos \alpha$

En projetant sur  $\vec{e}_z$ :  $z = -\frac{q}{m} E \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$



En projetant sur  $\vec{e}_y$ , on a:  $y = 0$ .

En éliminant le temps, on obtient l'équation horaire:

$$z = -\frac{qE}{2m} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + \frac{v_0 (\sin \alpha) x}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

La trajectoire est un arc de parabole si  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$

$$z = -\frac{qE}{2m} t^2 + v_0 t$$

La trajectoire est la droite (Oz).

#### Loi 1

Une particule chargée plongée dans un champ électrostatique uniforme décrit une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires, une droite décrite de manière uniformément accélérée dans le cas contraire<sup>6</sup>.

6. Dans les chambres à brouillard ou les chambres à bulles, on a le tracé des trajectoires (circulaires ou paraboliques) des particules. Cela permet de remonter à des connaissances sur la particule (énergie, rapport  $q/m...$ ), et par exemple séparer des isotopes.

7. Par définition  $dV = \vec{E} \cdot d\overline{\text{OM}}$  est la variation élémentaire de potentiel électrostatique.

## B.2. Étude énergétique

La puissance  $\mathcal{P}$  de la force de Coulomb vaut:  $\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ . Elle est non nulle: l'énergie cinétique de la particule chargée change lors de son parcours.

On utilise le TEC  $\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c_2} - \mathcal{E}_{c_1} = \mathcal{W}(\vec{F})$

$$\text{soit } \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\overline{\text{OM}} = q \int_1^2 dV = q[V]_1^2 = q(V_2 - V_1)$$

Si la particule se déplace vers les potentiels décroissants ( $V_1 > V_2$ ), sa charge étant positive ( $q > 0$ ), alors la vitesse de la particule augmente, le travail de  $\vec{f}$  est positif et le déplacement de la particule est spontané.

On peut aussi écrire:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = E_c + E_p.$$

On retrouve le fait que l'énergie mécanique est conservée, vu que la seule force qui travaille est la force de Coulomb, conservative et associée à l'énergie potentielle électrostatique<sup>8</sup>:

$$E_p = qV$$

#### Loi 2

La vitesse  $v$  de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle  $E_p = qV$ .

8. L'ensemble de ces résultats n'est valable que dans le cadre de la mécanique classique (non relativiste). On propose, dans l'exercice 2, d'étudier les limites quantitatives de cette hypothèse.

## C. Champ magnétique uniforme

La particule chargée est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire, la pesanteur restant négligée. Il n'y a pas de champ électrostatique. On considère que le mouvement a lieu dans le vide.

### C.1. Équations horaires et trajectoire

On choisit le repère de telle façon que le champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme soit porté par l'axe  $(Oz)$  :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , avec  $B > 0$  (fig. 1). La particule se trouvant au point O à l'origine des dates  $t = 0$ . La vitesse initiale est  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_y$ .

9. On peut toujours choisir l'axe  $(Ox)$  orthogonal au plan  $(O; \vec{B}, \vec{v}_0)$ , c'est-à-dire aux deux vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{v}_0$ .

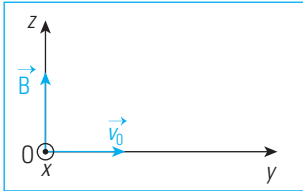


Fig. 1. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est porté par  $(Oz)$ .

#### C.1.1. Lois horaires du mouvement

Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen, on applique le PFD à la particule M de masse  $m$  et charge  $q$  :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = q\vec{v}(m)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les projections sur  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{ce qui donne : } \begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y & (1) \\ m\dot{v}_y = -qBv_x & (2) \\ m\dot{v}_z = 0 & (3) \end{cases}$$

En dérivant (1) et en utilisant (2) :

$$m\ddot{v}_x = qB\dot{v}_y = -\frac{q^2B^2}{m}v_x \text{ soit : } \ddot{v}_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$$

En posant  $\omega_0 = \frac{qB}{m}$  la pulsation propre (appelée pulsation cyclotron), on obtient :

$$\ddot{v}_x + \omega_0^2 v_x = 0$$

La solution s'écrit :  $v_x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ .

Or les CI sont :  $v_x(t=0) = 0$

$$\frac{dv_x}{dt}(t=0) = \omega_0 v_y(0) = \omega_0 v_0$$

ce qui donne :  $A = 0$

$$B\omega_0 = \omega_0 v_0 \Leftrightarrow B = v_0$$

Ainsi :  $v_x(t) = v_0 \sin(\omega_0 t)$  (4).

En reportant dans (2), on a :

$$\dot{v}_y = -\omega_0 v_x = -\omega_0 v_0 \sin\omega_0 t$$

En intégrant :

$$\begin{aligned} v_y(t) - v_y(t=0) &= \int_0^t -\omega_0 v_0 \sin\omega_0 t \, dt \\ \nearrow v_0 &= [v_0 \cos\omega_0 t]_0^t \\ &= v_0(\cos\omega_0 t - 1) \end{aligned}$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \quad (5)$$

En intégrant (3), on a :

$$v_z = \text{cste} = v_z(t=0) = 0 \quad (6)$$

En intégrant (4) entre 0 et  $t$ , on a :

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_0 \sin \omega_0 t \, dt$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & 0 \\ x(t) &= -\frac{v_0}{\omega_0} [\cos \omega_0 t]_0^t \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} [1 - \cos \omega_0 t]$$

En intégrant (5) entre 0 et  $t$ , on a :

$$y(t) - y(0) = \int_0^t v_0 \cos(\omega_0 t) \, dt$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & 0 \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

En intégrant (6), on a :

$$\begin{aligned} z(t) - z(0) &= 0 \\ z(t) &= 0 \end{aligned}$$

### C.1.2 Trajectoire

On peut écrire :  $-\frac{v_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t = x - \frac{v_0}{\omega_0}$  et  $\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = y$ .

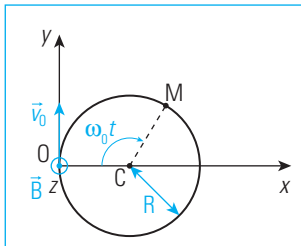
En sommant les carrés de ces 2 équations :

$$\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \left(x - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + y^2$$

$$\text{soit } \left(x - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2.$$

La trajectoire est donc un cercle se trouvant dans le plan  $(Oxy)$ , de centre

$$C\left(\frac{v_0}{\omega_0}, 0, 0\right) \text{ et rayon } R = \frac{v_0}{\omega_0}.$$



**Fig. 2.** Le point M décrit un cercle de centre C.

#### Loi 3

La particule chargée décrit un cercle de manière uniforme dans un plan orthogonal au champ magnétique.

$$\text{Le rayon } R \text{ du cercle est } R = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{mv_0}{qB}.$$

## C.2. Étude énergétique

La puissance  $\mathcal{P}$  de la force de Lorentz vaut :

$$\mathcal{P} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0.$$

En effet, le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  est orthogonal à chacun des deux vecteurs qui le constitue, donc à  $\vec{v}$ , et le produit scalaire avec  $\vec{v}$  est nul.

Par conséquent, la force magnétique ne travaille pas et l'application du théorème de l'énergie cinétique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la trajectoire donne :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_f = \int_1^2 \mathcal{P} \, dt = 0, \text{ soit } v_2 = v_1.$$

**10.** La force ne travaille pas, mais change la direction du vecteur vitesse, sans en changer le module. N'oublions pas que pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération n'est pas nulle.

#### Loi 4

Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse  $v$  constante<sup>10</sup>.

## L'essentiel

### ✓ Champ électromagnétique ( $\vec{E}$ , $\vec{B}$ )

Le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) exerce sur une particule de charge  $q$  et possédant la vitesse  $\vec{v}$  la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

### ✓ Champ électrostatique $\vec{E}$

- Dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$ , une particule chargée  $q$  décrit :
  - une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires ;
  - une droite de manière uniformément accélérée si la vitesse initiale et le champ électrostatique sont colinéaires.
- La vitesse  $v$  de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle  $E_p = qV$ .

### ✓ Champ magnétique $\vec{B}$

- Dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , la particule chargée décrit un cercle de rayon  $R = \frac{mv_0}{qB}$  dans un plan orthogonal au champ magnétique si la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique.
- Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse  $v$  constante.

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Valeur limite du champ électrostatique

On souhaite connaître la valeur limite  $E$  du champ électrostatique pour laquelle le poids n'est plus négligeable. On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ .

Pour quelles valeurs de  $E$  le poids dépasse-t-il le centième de la force de Coulomb ?

Faire l'application numérique.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

### Ex. 2 Vitesse relativiste d'un électron

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ .

1) On souhaite connaître la valeur limite  $U$  de la tension pour laquelle un électron, initialement sans vitesse, acquiert une vitesse relativiste. Pour quelles valeurs de  $U$  la vitesse de l'électron dépasse-t-elle le centième de la vitesse  $c$  de la lumière ?

Faire l'application numérique.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Refaire l'application numérique pour un proton de masse  $m' = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

2) On applique la tension  $\frac{U}{1000}$  pour accélérer l'électron, puis celui-ci quitte la région où existe le champ électrostatique et entre dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au vecteur vitesse.

Pour quelles valeurs de  $B$  le poids dépasse-t-il le centième de la force de Lorentz ?

Faire l'application numérique pour l'électron, puis pour le proton. Conclure.

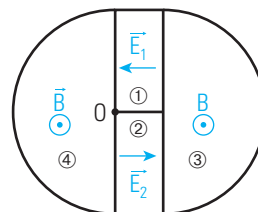
## Niveau 2

### Ex. 3 Un cyclotron

Le cyclotron est schématisé ci-dessous. On lâche au point O une particule de charge  $q > 0$  sans vitesse initiale, et on cherche à connaître son mouvement ultérieur. En vue de dessus, les zones demi-circulaires sont plongées dans un champ magnétique uniforme de module  $B$ , et entre ces zones, une bande de largeur  $d$

est plongée dans un champ électrostatique de module  $E$ , mais dont le sens change :

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E.$$



1) Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région ① avant qu'elle ne pénètre la région ③ où règne le champ magnétique ? Calculer la vitesse  $v_1$  de la charge  $q$  lorsqu'elle pénètre dans cette région ③.

2) Dans cette région ③, quelle est la nature du mouvement ? Déterminer la trajectoire parcourue ainsi que ses caractéristiques.

3) Lorsque la particule pénètre dans la région ②, quelle est sa vitesse ? Lorsqu'elle en sort, quelle est sa vitesse  $v_2$  ?

4) Après  $n$  passages dans une des régions ① ou ②, quelle est la vitesse  $v_n$  de la particule et les caractéristiques de la trajectoire parcourue dans celle des régions ③ ou ④ dans laquelle elle se trouve ?

5) On peut mesurer le temps passé par la particule dans l'une des régions ③ ou ④. Montrer que cette durée reste constante au cours du mouvement et permet de calculer le rapport  $q/m$ .

## Niveau 3

### Ex. 4 Conduction du cuivre

On étudie dans ce modèle la conduction dans les métaux (ici, le cuivre). La portion de conducteur étudiée est rectiligne et cylindrique de rayon  $R$ .

La densité du cuivre est  $d$  et sa masse molaire atomique  $M$ . On note  $N$  le nombre d'Avogadro. On suppose que chaque atome de cuivre peut libérer un électron de conduction de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ . On note  $\rho_0$  la masse volumique de l'eau.

Données :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, N = 6,02 \cdot 10^{23}, M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}, R = 0,5 \text{ mm}, E = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, d = 8,95, \rho_0 = 1 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}, h = 2,2 \cdot 10^{-15} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

1) Déterminer l'expression de  $n$ , nombre de porteurs de charges mobiles par unité de volume. Faire l'application numérique.

2) On suppose que le courant dans le conducteur est imposé par une source de tension continue : le champ électrostatique  $\vec{E}$  dans le cuivre est uniforme et stationnaire. On modélise les interactions entre le réseau cristallin et les charges mobiles par une force de frottements de type fluide et de coefficient  $h$ .

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'une charge mobile ?

b) Montrer qu'après un régime transitoire dont on déterminera l'ordre de grandeur de la durée  $\tau$ , la vitesse de la charge mobile devient égale à une constante  $v_0$  dont on donnera l'expression. Faire les applications numériques. Discuter.

3) Dans toute la suite, on se place en régime permanent établi. On étudie dans cette question la densité de courant dans le cuivre.

a) Pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$ , quelle charge  $dq$  traverse une section droite  $s$  de ce conducteur ?

b) En déduire la densité de courant  $j$  définie par la quantité de charge qui traverse l'unité de surface du conducteur par unité de temps.

4) La conductivité  $\gamma$  du cuivre est définie par la relation  $j = \gamma E$ . Calculer cette grandeur dans ce modèle grossier.

Comparer avec la vraie valeur  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Conclure.

## Ex. 5 Vitesse et trajectoire d'une particule

On considère une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  plongée dans un champ électromagnétique stationnaire et uniforme :

$$\vec{E} = E\vec{u}_x \text{ et } \vec{B} = B\vec{u}_z,$$

sachant qu'à  $t = 0$ , elle se trouve à l'origine  $O$  du repère et avec la vitesse initiale :

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x.$$

1) Déterminer les équations différentielles satisfaites par les composantes du vecteur vitesse.

2) Trouver la loi  $z(t)$ .

3) Intégrer une fois les deux équations restantes, et calculer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales.

4) En déduire l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la coordonnée  $y$ .

5) Écrire la solution générale  $y_0(t)$  de l'équation précédente sans second membre, puis chercher une solution particulière  $y_1(t)$  de l'équation « complète » sous la forme d'un polynôme du premier degré (loi affine du temps).

6) Écrire la solution générale  $y(t)$  de l'équation de la question 4) et calculer les constantes d'intégration.

7) En déduire la loi  $x(t)$ .

8) Tracer l'allure de la trajectoire.

## Indications

### Ex 2

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

### Ex 3

Faire un raisonnement par récurrence.



# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

La force de Coulomb a pour intensité, pour un électron :

$$F = |\vec{F}| = |q|E = eE.$$

Le poids  $P = mg$  dépasse un centième de la force de Coulomb lorsque  $P > \frac{F}{100}$  soit :

$$E < \frac{100 \, mg}{e}.$$

**A.N. :**  $E < 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ V/m}$ .

C'est une valeur extrêmement faible. Les champs électrostatiques résiduels dans l'air ambiant ont un ordre de grandeur de quelques volts par mètre, et ceux avec lesquels on crée les mouvements de particules afin de les étudier sont bien supérieurs. Le poids reste donc infinitésimal devant toute force de Coulomb.

### Exercice 2

1) On applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, entre l'état initial dans lequel est l'électron au repos et l'état final dans lequel il possède la vitesse  $v$  après avoir été accéléré sous la tension  $U$  :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = e(V_B - V_A) = eU, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

On étudie le cas où :  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} > \frac{c}{100}$ , soit  $U > \frac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}$ .

**A.N. :** pour l'électron  $U > 25,6 \text{ V}$  et pour le proton  $U > 47 \text{ kV}$ .

Il est donc très simple de rendre un électron relativiste, ce qui est plus compliqué pour le proton.

2) On applique la tension  $U' = \frac{U}{1\,000}$  à la particule, avec :

$$U > \frac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}, \text{ soit } U' = \frac{mc^2}{2 \cdot 10^7 e}.$$

On a alors :  $\frac{1}{2}mv^2 = eU' = \frac{mc^2}{2 \cdot 10^7}$  soit  $v = 9,5710^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cette vitesse ne dépend pas de la masse et sa valeur est la même pour l'électron et le proton, au vu du cahier des charges.

La valeur de la force de Lorentz est :  $F = evB$ , le poids valant  $P = mg$ .

Le poids dépasse le centième de la force de Lorentz lorsque :

$$mg > \frac{evB}{100}, \text{ soit } B < \frac{100 \, mg}{ev}.$$

**A.N. :** pour l'électron  $B < 5,9 \cdot 10^{-14} \text{ T}$  et pour le proton  $B < 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ T}$ .

Dans les études du mouvement des particules, on travaille avec des champs magnétiques nécessairement supérieurs à  $0,1 \text{ T}$ , afin de négliger l'effet du champ magnétique terrestre dont l'ordre de grandeur est de quelques  $10^{-5} \text{ T}$ . Le poids reste donc très négligeable devant la force de Lorentz.

## Exercices de niveau 2

### Exercice 3

1) Le poids étant négligé devant la force électrostatique, on écrit le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :  $m\vec{a} = q\vec{E}$ , et donc l'accélération  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$  est uniforme. Comme la vitesse initiale est nulle, la primitive de l'accélération est :

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t.$$

Le mouvement est donc rectiligne uniformément accéléré.

Prenons l'axe (Ox) dans le sens du mouvement ; la position est :

$$x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + x(t=0) = \frac{qE}{2m}t^2.$$

Lorsque la particule atteint la limite de la région ①,  $x = d$ , et donc :

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{2md}{qE}}.$$

La vitesse vaut alors :  $v_1 = v(t_1) = \frac{qE}{m}t_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$ .

2) La particule pénètre dans la région ③ dans laquelle règne un champ magnétique uniforme avec un vecteur vitesse orthogonal au champ magnétique.

Le problème se situe dans le cadre du cours (on n'en rappelle que les résultats, la démonstration étant consultable dans le cours).

Le mouvement est circulaire et effectué à vitesse uniforme et le rayon du cercle est donné par :

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_1}{qB}.$$

3) Compte tenu de ce qui précède, la vitesse n'a pas changé dans la région ③ et lorsque la particule pénètre dans la région ②, sa vitesse est  $v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$ .

Dans la région ②, le mouvement de la particule reste uniformément accéléré, mais la vitesse initiale est  $v_1$ , la vitesse finale étant nommée  $v_2$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les deux positions extrêmes, c'est-à-dire à l'entrée et à la sortie de la région ②. La force électrostatique effectue un travail moteur  $W$  (positif) que l'on exprime :

$$W = \int_{\text{②}} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{②}} qE \times dl = qE \times d,$$

et le théorème de l'énergie cinétique prend la forme :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W = qEd, \text{ soit } v_2^2 = v_1^2 + \frac{2qEd}{m} = \frac{4qEd}{m}.$$

Au final :  $v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}$ .

4) La particule a effectué deux passages dans l'une ou l'autre des régions ① ou ② et sa vitesse est :

$$v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}} = \sqrt{2 \times \frac{2W}{m}}.$$

Lorsqu'elle n'avait effectué qu'un seul passage, elle valait :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} = \sqrt{1 \times \frac{2W}{m}}.$$

À chaque passage, son énergie cinétique augmente de la quantité  $W$ , de sorte qu'après  $n$  passages, on a :

$$\frac{1}{2} m v_2 = n \times W, \text{ donc } v = v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}.$$

5) Après  $n$  passages dans l'une des régions ① ou ②, la particule effectue un mouvement circulaire uniforme dans l'une ou l'autre des parties ③ ou ④. Le rayon de ce cercle est :

$$R_n = \frac{mv_n}{qB}.$$

Dans la région ③ ou ④ dans laquelle la particule se trouve, elle effectue un demi-cercle de rayon  $R_n$  à la vitesse  $v_n$ . Le temps mis pour faire ce trajet est :

$$t_n = \frac{\pi R_n}{v_n}, \text{ c'est-à-dire } t_n = \frac{\pi}{v_n} \times \frac{mv_n}{qB} = \frac{\pi m}{qB}.$$

Cette durée est indépendante de  $n$ . Lorsqu'on la mesure, on peut remonter au rapport  $\frac{q}{m} = \frac{\pi}{rB}$ .

## Exercices de niveau 3

### Exercice 4

1)  $n$  est le nombre de porteurs de charge contenus dans un volume de  $1 \text{ m}^3$ . La masse volumique du cuivre est  $\rho_0 d$  et ce volume unité a une masse  $m = \rho_0 d$ .

Le nombre de moles qu'il contient est donc :

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho_0 d}{M},$$

et le nombre d'atomes correspondant est égal à celui des porteurs de charges, car un électron est libéré par atome :

$$n = \frac{\rho_0 d}{M} \times N.$$

**A.N. :**  $n = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

2) a) On néglige le poids (cf. exercice 1). L'électron mobile est donc soumis à la force de Coulomb  $\vec{F} = -e\vec{E}$  exercée par le champ électrostatique  $\vec{E}$  et à la force de frottements de type fluide  $\vec{f} = -h\vec{v}$ .

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, on trouve l'équation différentielle satisfaite par la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{f} = -e\vec{E} - h\vec{v}, \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h}{m} \vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}.$$

b) C'est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec un second membre constant. Sa solution générale est la somme de la solution général  $\vec{v}_1(t)$  de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière  $\vec{v}_2$  de l'équation différentielle complète :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) + \vec{v}_2.$$

– L'équation différentielle sans second membre est du type :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{0}, \text{ avec } \frac{1}{\tau} = \frac{h}{m}.$$

Sa solution s'écrit  $\vec{v}_1(t) = \vec{K} e^{-\frac{t}{\tau}}$ , où  $\vec{K}$  est un vecteur constant déterminé à partir des conditions initiales.

– La solution particulière est cherchée de la même forme mathématique que le second membre : une constante. En supposant que  $\vec{v} = \vec{v}_2$  est constant, on trouve :

$$\vec{v}_2 = \frac{-e\vec{E}}{h}.$$

– La solution complète s'écrit alors :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) + \vec{v}_2 = \vec{K}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\vec{E}}{h}.$$

Le premier terme est de type exponentiel décroissant avec la constante de temps  $\tau$  : au bout d'une durée  $t \geq 5\tau$ ,  $\|\vec{v}_1(t)\| \leq \frac{\|\vec{K}\|}{100}$  et on peut considérer que ce terme est devenu nul. Au-delà de cette durée, il reste le terme constant  $\vec{v}_2 = -\frac{e\vec{E}}{h}$ , dont la norme est la vitesse  $v_0$  cherchée :

$$v_0 = \frac{eE}{h}.$$

**A.N.** :  $v_0 = 7,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $5\tau = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ .

Le régime transitoire est tellement rapide que l'observateur n'aura pas le temps de le voir : les horloges atomiques, les plus précises, ne mesurent pas de durée inférieure à  $10^{-15} \text{ s}$ .

**3) a)** Les charges mobiles qui traversent la surface  $s$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  se trouvent à une distance inférieure à  $v_0 dt$  de la section ( $v_0$  est la vitesse des particules). Il s'agit donc des charges comprises dans le cylindre droit de section  $s$  et de hauteur  $v_0 dt$ .

Comme le cuivre compte  $n$  charges mobiles par unité de volume, le nombre  $dN$  de charges se trouvant dans ce cylindre est  $dN = n dV$ , où  $dV$  est le volume du cylindre :

$$dV = s v_0 dt, \text{ donc } dN = n s v_0 dt.$$

Chaque particule possédant la charge  $e$  (en valeur absolue), la charge  $dq$  qui traverse la section  $s$  pendant  $dt$  vaut :

$$dq = e dN = e n s v_0 dt.$$

**b)** La quantité de charge qui traverse la section  $s$  par unité de temps est  $\frac{dq}{dt}$ . Si on veut connaître celle qui traverse l'unité de surface, on pose  $s = 1$  et il vient :

$$j = \left( \frac{dq}{dt} \right)_{s=1} = e n v_0.$$

**4)** On a déjà obtenu les relations  $v_0 = \frac{eE}{h}$  et  $j = e n v_0$ , donc :

$$j = e n v_0 = \frac{eE}{h} = \frac{ne^2}{h} E \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{ne^2}{h} = \frac{N \rho_0 e^2}{M h}.$$

Numériquement, on obtient :  $\gamma \approx 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . La vraie valeur  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  est 57 fois plus importante : le modèle est vraiment trop simpliste pour approcher la réalité de suffisamment près !

## Exercice 5

**1)** Le poids est négligeable devant toute force électromagnétique (cf. exercices 1 et 2). La seule force qui s'applique est la force de Lorentz généralisée  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

Le principe fondamental s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Pour projeter cette équation vectorielle sur les axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , on exprime chacun des vecteurs sous forme de vecteur colonne :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}; \vec{E} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}; \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B v_y \\ -B v_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les projections sur les axes s'écrivent alors :

- sur  $(Ox)$ ,  $m \frac{dv_x}{dt} = qE + qB v_y$ ; **(1)**

- sur (Oy),  $m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x$ ; (2)

- sur (Oz),  $m \frac{dv_z}{dt} = 0$ . (3)

2) L'équation (3) peut être résolue immédiatement :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = A, \text{ puis } z(t) = At + A',$$

où A et A' sont deux constantes que les conditions initiales permettent de déterminer.

À l'instant  $t = 0$ , on a  $z = 0$  et  $\frac{dz}{dt} = 0$ , ce qui donne :

$$A = A' = 0 \text{ et } z(t) = 0.$$

3) En remarquant que  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , les deux équations (1) et (2) deviennent :

- $m \frac{d^2x}{dt^2} = qE + qB \frac{dy}{dt}$ ; (1')

- $m \frac{d^2y}{dt^2} = -qB \frac{dx}{dt}$ . (2')

Elles sont directement intégrables par rapport au temps, donc :

- $m \frac{dx}{dt} = qEt + qBy + K_1$ ;

- $m \frac{dy}{dt} = -qBx + K_2$ .

Les constantes  $K_1$  et  $K_2$  sont déterminées grâce aux conditions initiales ; à  $t = 0$ , on a :

$$x = y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 0.$$

On obtient  $K_1 = mv_0$  et  $K_2 = 0$ , et l'on peut écrire :

- $m \frac{dx}{dt} = qEt + qBy + mv_0$ ; (1'')

- $m \frac{dy}{dt} = -qBx$ . (2'')

4) De (2''), on obtient  $x = -\frac{m}{qB} \frac{dy}{dt}$  que l'on injecte dans (1'') pour trouver :

$$m \frac{d}{dt} \left( -\frac{m}{qB} \frac{dy}{dt} \right) = qEt + qBy + mv_0, \text{ soit } \frac{d^2y}{dt^2} + \left( \frac{qB}{m} \right)^2 y = -\frac{q^2EB}{m^2} t - \frac{qBv_0}{m} \quad (4)$$

5) L'équation sans second membre est une équation du second ordre linéaire usuelle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left( \frac{qB}{m} \right)^2 y = 0,$$

dont la solution générale, connue, s'écrit :

$$y_0(t) = C \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) + C' \sin\left(\frac{qB}{m} t\right), \text{ où } C \text{ et } C' \text{ sont des constantes.}$$

On cherche la solution particulière sous la forme :

$$y_1(t) = \alpha t + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes.}$$

On voit que  $\frac{d^2y_1}{dt^2} = 0$ , et en remplaçant dans l'équation (4), il vient directement :

$$y_1(t) = -\frac{E}{B} t - \frac{mv_0}{qB}.$$

6) La solution générale  $y(t)$  de l'équation « complète » est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation « complète » :

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = C \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) + C' \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) - \frac{E}{B} t - \frac{mv_0}{qB}.$$

On peut maintenant calculer les constantes d'intégration C et C' en utilisant les conditions initiales; à l'instant  $t = 0$ , on a :

$$y = 0 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 0, \text{ donc } C = \frac{mv_0}{qB} \text{ et } C' = \frac{mE}{qB^2},$$

et l'on obtient enfin :

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = \frac{mv_0}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) - 1 \right] + \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) - \frac{E}{B} t.$$

7) Pour déterminer la loi  $x(t)$ , on n'a pas besoin de résoudre une nouvelle équation différentielle (bien que cette méthode aboutisse), car elle est directement obtenue à partir de l'équation (2'') :

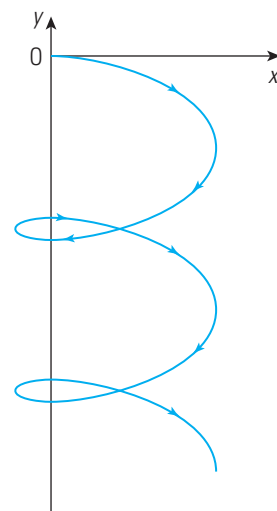
$$x(t) = -\frac{m}{qB} \frac{dy}{dt} = -\frac{m}{qB} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{mv_0}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) - 1 \right] + \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) - \frac{E}{B} t \right\},$$

on peut vérifier que les conditions initiales  $x(t=0) = 0$  et  $\frac{dx}{dt}(t=0) = v_0$  sont bien satisfaites.

8) On a donc :

- $x(t) = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) + \frac{mE}{qB^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) \right];$
- $y(t) = \frac{mv_0}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) - 1 \right] + \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) - \frac{E}{B} t;$
- $z(t) = 0.$

Le mouvement est plan, mais la trajectoire n'est pas « classique » (donc connue *a priori*). On trace donc son allure en utilisant une calculatrice graphique.

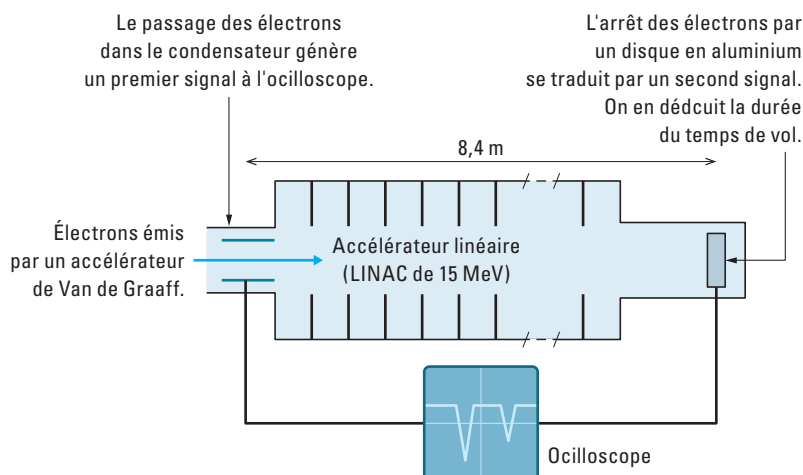


# Approche documentaire

## À propos de la limite relativiste

**William Bertozzi, en 1964, décrit, dans un article intitulé « speed and kinetic energy of relativistic electrons » publié dans la revue American Journal of Physics, Vol. 32, Issue 7, pp. 551-555, une expérience permettant de mesurer la vitesse d'électrons dont on connaît l'énergie cinétique.**

Des électrons provenant d'un accélérateur de Van De Graaff entrent dans un accélérateur linéaire (linac) de longueur  $L = 8,4$  m ; ils apparaissent à l'entrée sous forme d'impulsion de durée très courte  $t = 3 \cdot 10^{-9}$  s. En branchant un oscilloscope aux entrée et sortie de l'accélérateur linéaire, on voit apparaître deux impulsions, une correspondant aux électrons entrant et une aux électrons sortant. Connaissant la longueur  $L$  de l'accélérateur et le temps  $T$  de traversée de cet accélérateur, on en déduit la vitesse des électrons.



L'énergie cinétique est connue à l'aide de la connaissance des champs électriques servant à accélérer les électrons.

Les résultats obtenus par W. Bertozzi sont regroupés dans le tableau 1 :

$E_c$ (MeV)	$T$ (s)
0,5	$3,23 \times 10^{-8}$
1,0	$3,08 \times 10^{-8}$
1,5	$2,92 \times 10^{-8}$
4,5	$2,84 \times 10^{-8}$
15,0	$2,80 \times 10^{-8}$

1) Afin de comprendre les limites de la mécanique Newtonienne, on trace la courbe donnant le rapport vitesse théorique newtonienne sur célérité de la lumière  $(v_{th}/c)^2$ , en fonction de l'énergie cinétique,  $v_{th}$  provenant directement de l'énergie cinétique et on compare à la courbe donnant le

carré du rapport de la vitesse expérimentale sur la célérité de la lumière en fonction de l'énergie cinétique. Conclusion.

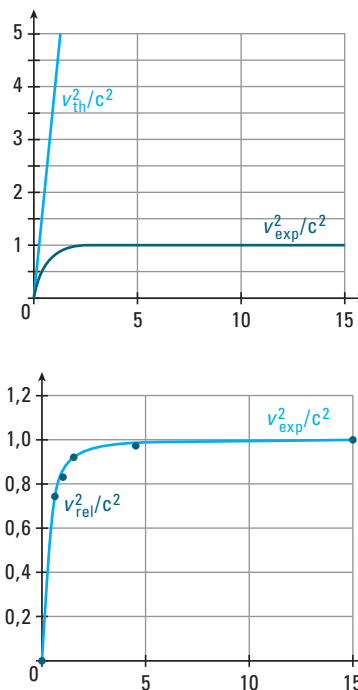
2) La relativité restreinte, établie par Albert Einstein en 1905, modifie la théorie newtonienne en faisant apparaître le facteur de Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  et l'énergie de masse  $mc^2$ ; ainsi l'énergie cinétique s'écrit  $\varepsilon_c = (\gamma - 1)mc^2$ .

Compléter le graphe précédent avec la courbe donnant le carré du rapport de la vitesse relativiste sur la célérité de la lumière en fonction de l'énergie cinétique. Conclusion.

3) Pourquoi W. Bertozzi a-t-il préféré mesurer aussi l'énergie cinétique des particules plutôt que de la déduire du champ électrique de l'accélérateur?

## Solution

1) 2)



On constate que la mécanique Newtonienne ne représente pas l'expérience alors que la relativité le fait très bien et permet aussi de mettre en évidence que la célérité de la lumière est la limite à toute vitesse.

3) La détermination de l'énergie cinétique à l'aide du champ électrique ou de la différence de potentiel de l'accélérateur suppose qu'il n'y a pas de perte d'énergie des électrons, que la force exercée est  $f = qE$  quel que soit la vitesse de l'électron... Comme l'objectif de l'expérience est de valider la relativité, il est préférable de faire une mesure de l'énergie cinétique : c'est ce qui a été fait en mesurant l'élévation de température du disque d'aluminium recevant les électrons, puisque quasiment toute l'énergie cinétique est transformée en chaleur lors de l'impact sur l'aluminium. Cette méthode a permis de retrouver les énergies théoriques avec seulement 10 % d'erreur.