

Induction électromagnétique dans un circuit fixe

Introduction

En 1820, Oersted a montré qu'un courant électrique crée un champ magnétique. Après cette découverte, des expériences ont été menées pour essayer de mettre en évidence l'effet inverse, c'est-à-dire la création d'un courant électrique par un champ magnétique. C'est ainsi que Faraday découvrit en 1831 le phénomène d'induction électromagnétique, qui fait l'objet de ce chapitre ainsi que du suivant.

Ce chapitre nécessite bien sûr une bonne connaissance du cours sur les circuits électriques.

Plan du chapitre 24

A. Généralités

- | | |
|--|---|
| 1. Expérience historique de Faraday..... | x |
| 2. Quelques autres expériences | x |
| 3. Lois générales..... | x |

B. Auto-induction

- | | |
|--|---|
| 1. Flux propre..... | x |
| 2. Inductance propre | x |
| 3. Force électromotrice d'auto-induction | x |
| 4. Schéma électrique équivalent..... | x |
| 5. Étude énergétique | x |

C. Induction mutuelle entre deux circuits

- | | |
|--|---|
| 1. Coefficient d'inductance mutuelle | x |
| 2. Schéma électrique équivalent à deux circuits couplés | x |
| 3. Étude énergétique | x |
| 4. Relation entre inductances propres et inductance mutuelle | x |
| 5. Principe du transformateur..... | x |
| 6. Quelques autres applications de l'induction..... | x |

Méthodes	x
----------------	---

Exercices	x
-----------------	---

A. Généralités

1. Michael Faraday (1791-1867).

Physicien anglais dont les travaux concernèrent l'électromagnétisme. Il découvrit le principe du blindage utilisé dans la cage de Faraday. Il mit également en évidence l'induction électromagnétique et l'utilisa pour construire le premier générateur de courant alternatif. Il fut aussi l'un des fondateurs de l'électrochimie. Son nom a été donné à l'unité de capacité électrique, le farad.

2. Un galvanomètre est un ampèremètre permettant la mesure de courants très faibles.

A.1. Expérience historique de Faraday¹

Faraday plaça deux bobines l'une à côté de l'autre. La première était parcourue par un courant électrique et la deuxième, plongée dans le champ magnétique créé par la première, était simplement reliée à un galvanomètre² (fig. 1). Lors de cette expérience, il constata que, lorsqu'un courant permanent parcourait la première bobine, le galvanomètre ne détectait rien dans la seconde. Par contre, lors de l'établissement ou de l'interruption du courant dans la première bobine, un courant apparaissait pendant un bref instant dans la deuxième bobine.

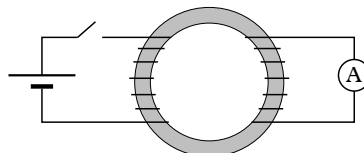


Fig. 1. Faraday enroula deux bobines autour d'un anneau de fer doux, permettant d'amplifier les effets magnétiques. Lorsqu'un courant permanent circule dans la bobine de gauche, aucun courant ne circule dans celle de droite. Par contre, lors de l'établissement ou de l'arrêt du courant dans la bobine de gauche, on détecte brièvement la présence d'un courant dans la bobine de droite.

Cette expérience démontra que la **variation** du champ magnétique traversant un circuit électrique crée un courant électrique dans ce circuit.

A.2. Quelques autres expériences

A.2.1. Mouvement d'un aimant près d'une bobine

3. L'aimant peut très bien être remplacé par une autre source de champ magnétique, comme une bobine parcourue par un courant électrique.

Lorsque l'on approche ou que l'on éloigne un aimant³ d'une bobine reliée à un galvanomètre, on constate qu'un courant électrique induit apparaît dans cette bobine. Cet effet est évidemment de même nature que celui du paragraphe précédent puisque le déplacement de l'aimant modifie le champ magnétique \vec{B} qu'il crée au niveau de la bobine : plus les mouvements de l'aimant sont rapides, plus le courant induit est intense.

Cette expérience permet de plus de mettre en évidence un point important. On constate en effet que le champ magnétique induit \vec{B}' créé par la bobine parcourue par le courant induit tend à s'opposer à la variation du champ inducteur \vec{B} (fig. 2).

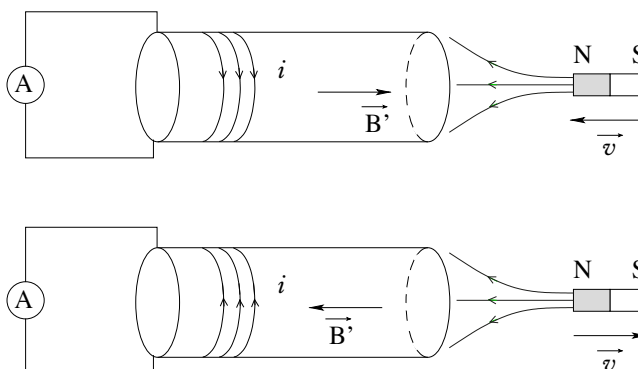


Fig. 2. Le courant induit par un aimant dans une bobine change de sens selon que l'on approche ou que l'on éloigne l'aimant de la bobine. Dans les deux cas, le champ magnétique \vec{B}' créé par ce courant s'oppose aux variations de celui créé par l'aimant à l'intérieur de la bobine.

A.2.2. Rotation d'une bobine dans un champ magnétique uniforme et stationnaire

Lorsque, dans un champ magnétique extérieur \vec{B} , uniforme et stationnaire, on met en rotation, avec une vitesse de rotation ω , une bobine reliée à un oscilloscope, on constate qu'une force électromotrice (fém) de pulsation ω apparaît aux bornes de la bobine (fig. 3). Si celle-ci était reliée à un circuit électrique, il apparaîtrait donc un courant dans ce circuit⁴.

4. C'est le principe de l'alternateur, qui permet de créer un courant électrique à partir d'un mouvement.

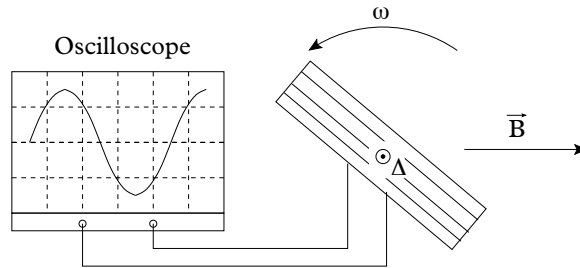


Fig. 3. Lorsqu'une bobine est en rotation autour d'un axe Δ dans un champ magnétique, une fém variable e apparaît à ses bornes.

Cette constatation ne peut s'expliquer par une quelconque variation du champ magnétique extérieur traversant la bobine. Par contre, le flux du champ magnétique à travers la bobine varie puisque l'angle entre \vec{B} et le vecteur surface \vec{S} de la bobine varie. C'est cette **variation de flux** qui est responsable de l'apparition de la fém induite e .

A.3. Lois générales

A.3.1. Loi de Faraday

Afin d'expliquer les résultats de ses expériences, Faraday introduisit la loi qui porte désormais son nom.

Résultat 1

Soit un circuit⁵ fermé et orienté Γ traversé par un flux magnétique ϕ . Toute variation de ce flux provoque l'apparition dans le circuit d'une force électromotrice e , appelée force électromotrice induite, donnée par :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

La force électromotrice induite est fléchée dans le sens positif qui a été choisi pour le circuit. Elle s'exprime en volts (V).

5. On n'étudie ici que l'induction dans un circuit filiforme. En fait, le phénomène d'induction existe aussi au sein de conducteurs massifs dans lesquels il crée des courants, appelés courants de Foucault (d'après Léon Foucault, physicien et astronome français du XIX^e siècle).

A.3.2. Remarques

La variation de flux peut avoir de multiples causes. Elle peut être due à une variation du champ magnétique⁶ mais aussi à un mouvement du circuit pouvant faire varier sa surface ou l'angle entre cette surface et le vecteur champ magnétique⁷. Dans ce chapitre, on se limitera à l'étude des circuits fixes plongés dans des champs magnétiques variables. L'étude des circuits mobiles fera l'objet du chapitre suivant.

La fém induite étant égale à l'opposé de la dérivée du flux magnétique par rapport au temps, elle est d'autant plus élevée que le flux varie rapidement. Dans le cas d'une variation sinusoïdale, la fém est proportionnelle à la fréquence. En effet, si $\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t)$, on a $e(t) = \phi_0 \omega \sin(\omega t)$.

Dans le cas d'une bobine, le flux à travers la bobine est égal au flux à travers une spire multiplié par le nombre de spires⁸.

6. On verra en deuxième année que la variation du champ magnétique crée un champ électrique. C'est l'action de ce champ électrique sur les porteurs de charge qui est responsable des phénomènes d'induction dans ce cas.

7. On détaillera dans le chapitre suivant le phénomène physique responsable de l'induction dans ce cas.

8. Cette affirmation n'est vraie que si le champ magnétique est le même pour toutes les spires. Ce sera toujours le cas ici.

9. On rappelle que lorsqu'un circuit a été orienté, l'intensité du courant est positive s'il circule dans le sens correspondant à l'orientation du circuit et négative sinon.

Le sens du fléchage de la force électromotrice induite est celui dans lequel le circuit a été orienté⁹. Ainsi qu'il a été vu dans le chapitre 25, l'orientation du circuit donne aussi le signe du flux.

A.3.3. Exemple

Considérons une spire orientée, de surface S et de résistance R , plongée dans un champ magnétique variable et uniforme $\vec{B}(t)$, perpendiculaire à la surface de la spire comme sur la figure 4.

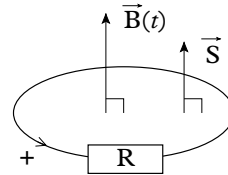


Fig. 4. Spire plongée dans un champ magnétique variable. \vec{S} est le vecteur surface de la spire.

La variation de \vec{B} crée donc dans la spire une fém $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = +BS$, compte tenu de l'orientation de la spire. On a donc, en notant i le courant induit :

$$e = -S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad i = \frac{e}{R} = -\frac{S}{R} \frac{dB}{dt}$$

Le schéma électrique équivalent à la spire est représenté sur la figure 5. Le sens du courant représenté sur le schéma est le sens positif choisi. Si le calcul de l'intensité donne un nombre négatif, le courant réel ira dans l'autre sens.

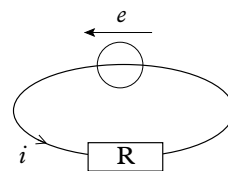


Fig. 5. Schéma électrique équivalent à la spire.

A.3.4. Loi de Lenz

La loi de Lenz est une loi qualitative permettant de déterminer sans calcul le sens du courant induit. On a vu, dans l'expérience du paragraphe A.2.1, que le champ magnétique induit créé par la bobine tendait à s'opposer à la variation du champ magnétique inducteur créé par l'aimant au niveau de la bobine. Ce résultat est général et constitue la loi de Lenz.

Résultat 2

Le courant induit tend, par ses effets, à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Cette opposition peut prendre deux formes suivant la cause du phénomène d'induction :

- Dans le cas d'un circuit fixe placé dans un champ magnétique inducteur $\vec{B}(t)$ dépendant du temps, le champ magnétique induit $\vec{B}'(t)$, créé par le courant induit, est orienté de telle façon que le champ magnétique total $\vec{B} + \vec{B}'$ varie le moins possible.
- Dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps, les forces de Laplace correspondant au courant induit s'opposent au mouvement du circuit.

La loi de Lenz est juste une conséquence de la loi de Faraday et n'est donc jamais indispensable pour déterminer une fém ou un courant induit. Néanmoins, elle permet de vérifier le signe de ce courant ou de cette fém, et est

donc très utile dans la résolution des problèmes mettant en jeu l'induction.

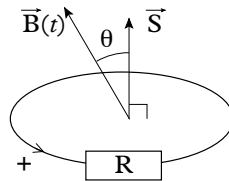
Si l'on reprend l'exemple du paragraphe A.3.3, on vérifie bien que, si $\vec{B}(t)$ diminue au cours du temps, on a alors $\frac{dB}{dt} < 0$ et donc $e > 0$ et $i > 0$. Le champ magnétique \vec{B}' créé par la spire est donc dirigé dans le sens de \vec{S} ¹⁰ et s'oppose bien à la diminution de $\vec{B}(t)$.

10. Ce que l'on peut obtenir en utilisant, par exemple, la règle de la main droite, comme pour une bobine.

Application 1 Loi de Faraday et loi de Lenz

On considère une spire orientée, de surface S , de résistance R , plongée dans un champ magnétique variable $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 e^{-t/\tau}$. On note θ l'angle (\vec{S}, \vec{B}) entre \vec{B} et \vec{S} , le vecteur surface de la spire.

1. Déterminer le flux ϕ de \vec{B} à travers la spire et en déduire l'expression de la fém induite e .
2. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant dans la spire.
3. **A.N.** : $B_0 = 1 \text{ T}$, $\tau = 0,1 \text{ s}$, $S = 10 \text{ cm}^2$, $R = 3 \Omega$, $\theta = 30^\circ$. Exprimer numériquement $i(t)$.
4. Vérifier la cohérence du résultat avec la loi de Lenz.



Solution

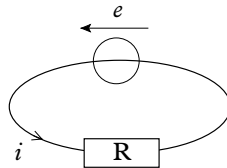
1. Le champ magnétique étant uniforme et la surface S étant plane, on a :

$$\phi = BS \cos \theta = B_0 S e^{-t/\tau} \cos \theta$$

et donc

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0 S}{\tau} e^{-t/\tau} \cos \theta$$

2. Le schéma équivalent à la spire plongée dans le champ magnétique variable est le suivant :



La loi des mailles donne alors $e = Ri$ soit :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B_0 S}{R\tau} e^{-t/\tau} \cos \theta$$

$$3. i = \frac{1 \times 0,001}{3 \times 0,1} e^{-\frac{t}{0,1}} \cos(30^\circ) = 2,9 \cdot 10^{-3} e^{-10t} \text{ A}$$

4. L'intensité est positive, donc le courant circule dans le sens indiqué par la flèche sur le schéma équivalent. Le champ \vec{B}' qu'il crée est dirigé dans le sens de \vec{S} et s'oppose à la diminution de \vec{B} . La loi de Lenz est donc vérifiée.

B. Auto-induction

On parle d'auto-induction lorsque le flux magnétique à l'origine de l'induction dans un circuit est créé par le circuit lui-même.

B.1. Flux propre

Soit un circuit Γ , fixe et indéformable, parcouru par un courant d'intensité i . Ce circuit crée un champ magnétique \vec{B} auquel correspond un flux ϕ_p à travers Γ .

Ce flux magnétique, créé par un circuit à travers lui-même, est appelé **flux propre**.

S'il existe à proximité de Γ d'autres sources de champ magnétique (bobines, aimants...), ces sources créent aussi des flux magnétiques à travers Γ . Le flux magnétique total à travers le circuit Γ est alors la somme de son flux propre et des flux extérieurs.

B.2. Inductance propre

On a vu, dans le chapitre présentant le champ magnétique, que le champ créé par un circuit est proportionnel à l'intensité $i(t)$ parcourant ce circuit. Le champ \vec{B} créé par un circuit Γ en un point M à l'instant t peut donc se mettre sous la forme :

$$\vec{B}(M, t) = k(M) i(t) \vec{u}(M)$$

où $k(M)$ est le coefficient de proportionnalité, qui dépend de la forme du circuit et de la position du point M , et où $\vec{u}(M)$ est un vecteur unitaire indiquant la direction du champ au point M considéré.

Supposons maintenant que Γ soit un circuit plan délimitant une surface S . Par définition, le flux propre de Γ s'écrit :

$$\phi_p(t) = \iint_S \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = i(t) \iint_S k(M) \vec{u}(M) \cdot d\vec{S}$$

La valeur de l'intégrale $\iint_S k(M) \vec{u}(M) \cdot d\vec{S}$ ne dépend que de la forme du circuit Γ ¹¹. C'est l'**inductance propre** du circuit, que l'on note généralement L .

L'inductance propre d'un circuit est toujours positive, ce que l'on peut vérifier sur la **figure 6**. Si l'intensité i est positive, alors le sens du champ magnétique créé par le circuit, que l'on peut déterminer en utilisant par exemple la règle de la main droite, est le même que celui de la normale positive au circuit. Le flux propre est donc positif. Si i devient négative, le sens de \vec{B} s'inverse et le flux propre devient négatif. Dans les deux cas, i et ϕ_p sont de même signe : L est donc positive.

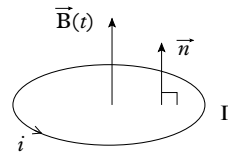


Fig. 6. Le flux propre à travers un circuit et l'intensité ont le même signe.

On retiendra le résultat suivant :

Résultat 3

Le flux propre ϕ_p à travers un circuit est proportionnel à l'intensité i parcourant ce circuit. Le coefficient de proportionnalité est appelé inductance propre et noté L . On a donc :

$$\phi_p = Li$$

La valeur de L ne dépend que de la forme du circuit. Elle est toujours positive et s'exprime en henry¹², de symbole H .

11. Ce résultat reste vrai même si Γ n'est pas plan, et que la surface S n'est alors pas définie de façon unique, car le flux du champ magnétique est le même à travers toutes les surfaces délimitées par un même contour.

12. Joseph Henry (1797-1878). Physicien américain. Il effectua de nombreux travaux sur l'électromagnétisme et particulièrement sur l'induction, où il introduisit la notion d'auto-induction. Il travailla aussi sur le télégraphe et les observations météorologiques.

L'inductance propre est aussi appelée coefficient d'auto-inductance ou coefficient de « self » et, parfois, simplement inductance ou « self ».

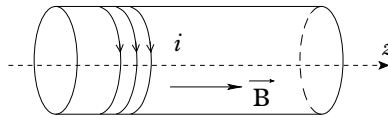
Le henry est une unité grande par rapport aux valeurs habituelles des inductances, c'est pourquoi on utilise souvent le mH. Des méthodes permettant la mesure de L seront développées en exercice.

Application 2 Inductance propre d'un solénoïde infini

On considère un solénoïde de grande longueur d , de section S , d'axe Oz , comportant N spires. On rappelle que, dans l'approximation du solénoïde « infini », le champ magnétique créé à l'intérieur s'écrit :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{d} i \vec{u}_z$$

où i est l'intensité du courant dans le solénoïde et μ_0 la perméabilité du vide.



1. Déterminer le flux propre dans le solénoïde et en déduire son inductance L .

2. **A.N.** : $S = 20 \text{ cm}^2$, $N = 200$, $d = 40 \text{ cm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. Calculer L .

Solution

1. Le flux propre ϕ_p à travers une spire de solénoïde est simplement égal au produit de la norme de \vec{B} par la surface S d'une section de solénoïde, puisque \vec{B} est parallèle à l'axe du solénoïde et orienté dans le sens positif. On a donc :

$$\phi_p = BS = \mu_0 \frac{NS}{d} i$$

Le flux propre à travers l'ensemble du solénoïde, ϕ_p , est donc :

$$\phi_p = N\phi_p = \mu_0 \frac{N^2 S}{d} i$$

On en déduit :

$$L = \frac{\phi_p}{i} = \mu_0 \frac{N^2 S}{d}$$

2. L'application numérique donne $L = 0,25 \text{ mH}$.

B.3. Force électromotrice d'auto-induction

Lorsque l'intensité du courant électrique traversant un circuit varie, son flux propre varie aussi. Il apparaît donc dans ce circuit une fém d'auto-induction donnée par la loi de Faraday.

Résultat 4

La force électromotrice d'auto-induction e , existant dans un circuit d'inductance L , parcouru par un courant d'intensité variable $i(t)$, s'écrit :

$$e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Cette fém d'auto-induction existe dans tout circuit parcouru par un courant variable. Cependant, elle est souvent négligeable sauf dans les bobines, où elle est, entre autres, responsable du retard de l'établissement du régime permanent pour $i(t)$ (régime transitoire du circuit RL).

B.4. Schéma électrique équivalent

Comme dans le cas d'une induction causée par un champ magnétique extérieur, la prise en compte de l'auto-induction se fait en ajoutant dans le circuit un générateur de fém e , fléché dans le sens positif choisi pour le circuit.

Considérons par exemple le cas le plus répandu en pratique où les phénomènes d'auto-induction sont localisés dans une bobine (figure 7). Le schéma équivalent est obtenu simplement en remplaçant la bobine par un générateur de fém $e(t) = -L \frac{di}{dt}$.

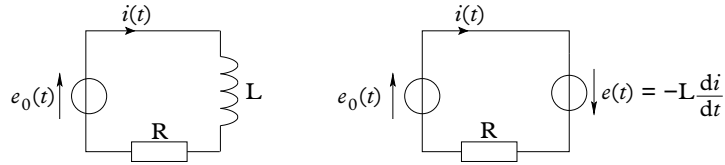


Fig. 7. Exemple de circuit siège d'un phénomène d'auto-induction (à gauche) et son schéma équivalent (à droite).

La loi des mailles donne alors :

$$e + e_0 = Ri$$

soit,

$$e_0 = Ri + L \frac{di}{dt}$$

On retrouve ainsi une formule qui a déjà été vue dans le cours portant sur les circuits électriques en régime transitoire.

B.5. Étude énergétique

On peut retrouver l'expression de l'énergie stockée dans une bobine en effectuant un bilan énergétique sur le circuit de la [figure 7](#). On part pour cela de la loi des mailles, que l'on multiplie par i , pour faire apparaître une égalité en termes de puissance, ou bilan de puissance. Cela donne¹³ :

$$e_0 i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

La tension e_0 est la tension aux bornes du générateur mais est aussi la tension aux bornes du dipôle R-L, en convention récepteur. $e_0 i$ représente donc la puissance reçue par ce dipôle.

Afin d'avoir un bilan énergétique entre deux instants consécutifs t et $t + dt$, multiplions la puissance par dt . Il vient :

$$e_0 i dt = Ri^2 dt + d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Cette équation s'interprète de la façon suivante : l'énergie élémentaire $e_0 i dt$ cédée par le générateur entre les instants t et $t + dt$ est égale à la somme de l'énergie élémentaire dissipée par effet Joule, $Ri^2 dt$, et de la variation de l'énergie emmagasinée par la bobine d'inductance L , $d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$.

Résultat 5

L'énergie magnétique U_m stockée dans une bobine d'inductance L ¹⁴ parcourue par un courant i s'écrit $U_m = \frac{1}{2} Li^2$.

Remarque : L'énergie stockée étant proportionnelle à i^2 , il ne peut y avoir de discontinuité de courant dans un circuit possédant une inductance propre. En effet, si cela arrivait, il y aurait une discontinuité de l'énergie stockée. Donc, la puissance, égale à la dérivée de l'énergie par rapport au temps, serait infinie, ce qui est impossible.

¹³ On rappelle que, pour une fonction quelconque $x(t)$, on a :

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = 2x(t) \frac{dx(t)}{dt}.$$

¹⁴ Ce résultat est vrai pour tout circuit présentant une inductance propre L . On n'a parlé ici que de bobines parce que c'est le cas le plus répandu.

C. Induction mutuelle entre deux circuits

C.1. Coefficient d'inductance mutuelle

15. En pratique, ce seront généralement deux bobines.

Soient deux circuits¹⁵ Γ_1 et Γ_2 parcourus respectivement par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

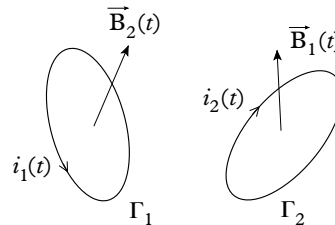


Fig. 8. Deux circuits en induction mutuelle.

Le circuit Γ_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ et donc un flux magnétique ϕ_{12} à travers Γ_2 . Par un raisonnement tout à fait similaire à celui du paragraphe B.2, on montre que ϕ_{12} est proportionnel à i_1 . On peut donc écrire :

$$\phi_{12} = M_{12} i_1$$

où M_{12} est un coefficient dépendant uniquement de la forme des circuits et de leur position l'un par rapport à l'autre.

De même, le circuit Γ_2 crée à travers Γ_1 un flux magnétique ϕ_{21} qui s'écrit :

$$\phi_{21} = M_{21} i_2$$

16. Ce résultat constitue le théorème de Neumann, que nous admettrons sans démonstration.

On peut, d'autre part, montrer que $M_{12} = M_{21}$.¹⁶

On retiendra donc le résultat suivant :

Résultat 6

Soient deux circuits Γ_1 et Γ_2 parcourus par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, et ϕ_{12} (resp. ϕ_{21}) le flux magnétique créé par Γ_1 (resp. Γ_2) à travers Γ_2 (resp. Γ_1). Il existe un coefficient M , appelé **coefficient d'inductance mutuelle** tel que :

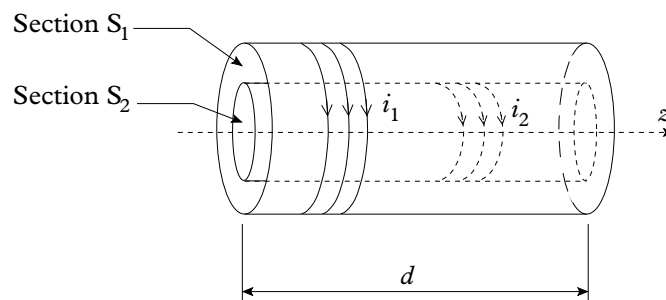
$$\phi_{12} = M i_1 \text{ et } \phi_{21} = M i_2$$

La valeur de M dépend uniquement de la forme des circuits et de leur position. Son signe dépend des sens positifs choisis pour les circuits et est donc arbitraire. M s'exprime en henry.

M est souvent appelée simplement « inductance mutuelle » ou « mutuelle ».

Application 3 Coefficient d'inductance mutuelle entre deux solénoïdes

On considère deux bobines longues, ou solénoïdes, Γ_1 et Γ_2 , de même axe Oz et de même longueur d , disposées comme indiqué sur la figure ci-dessous. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires.



1. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux solénoïdes.
2. On se place dans le cas où Γ_1 et Γ_2 ont même rayon (les deux bobinages sont alors imbriqués l'un dans l'autre et $S_1 = S_2 = S$). Exprimer M en fonction de L_1 et L_2 , inductances propres de Γ_1 et Γ_2 (cf. Application 2).
3. Calculer M avec $N_1 = N_2 = 200$, $d = 40$ cm, $S_1 = S_2 = 20$ cm², $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Solution

1. Soit $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} i_1 \vec{u}_z$ le champ magnétique créé par Γ_1 dans l'approximation du solénoïde « infini » et ϕ_{12} le flux de \vec{B}_1 à travers S_2 . On a :

$$\phi_{12} = B_1 N_2 S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S_2 i_1$$

et donc :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S_2$$

On aurait aussi pu procéder en calculant le flux créé par Γ_2 à travers Γ_1 , ϕ_{21} . Comme le champ magnétique créé par un solénoïde infini est nul à l'extérieur de ce solénoïde, on a :

$$\phi_{21} = B_2 N_1 S_2$$

et donc :

$$\phi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S_2 i_2$$

Ce qui donne bien la même expression pour M .

2. Si $S_1 = S_2 = S$, on a $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S$. Or, $L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{d} S$ et $L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{d} S$. On en déduit que :

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

3. $M = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{200^2}{0,4} \times 20 \cdot 10^{-4} = 0,25$ mH.

C.2. Schéma électrique équivalent à deux circuits couplés

Considérons deux circuits Γ_1 et Γ_2 couplés par une inductance mutuelle M et comportant chacun une inductance propre. Un exemple de cette situation est représenté sur la [figure 9](#), où le couplage est symbolisé par la double flèche.

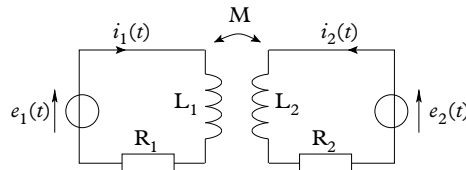


Fig. 9. Exemple de deux circuits couplés par une inductance mutuelle M .

Soit ϕ_1 le flux magnétique à travers le premier circuit. Ce flux est la somme du flux propre ϕ_p et du flux ϕ_{21} créé par le deuxième circuit. On a donc :

$$\phi_1 = \phi_p + \phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$$

La fém d'induction $e_{\text{ind},1}$ dans le premier circuit s'écrit donc :

$$e_{\text{ind},1} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

La situation est similaire pour le deuxième circuit dans lequel existe une fém induite $e_{\text{ind},2}$ donnée par :

$$e_{\text{ind},2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

On peut donc représenter les deux circuits sous la forme du schéma équivalent de la figure 10.

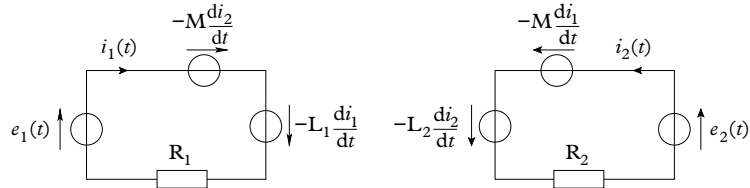


Fig. 10. Schéma équivalent à deux circuits couplés par une inductance mutuelle M .

La loi des mailles, écrite pour chacun des deux circuits, donne les deux équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} e_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ e_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

C.3. Étude énergétique

On peut procéder comme au paragraphe B.5 pour déterminer l'énergie stockée par l'ensemble des deux circuits couplés. En multipliant la première équation par i_1 et la seconde par i_2 , on obtient :

$$\begin{cases} e_1(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ e_2(t)i_2(t) = R_2 i_2^2(t) + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations multipliées par dt et en remarquant que :

$$L i \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) \quad \text{et} \quad M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} = \frac{d}{dt} (M i_1 i_2)$$

on obtient le bilan d'énergie :

$$e_1(t)i_1(t)dt + e_2(t)i_2(t)dt = R_1 i_1^2(t)dt + R_2 i_2^2(t)dt + d \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + d \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + d(M i_1 i_2)$$

On interprète cette équation d'une façon similaire à celle du paragraphe B.5. En effet, le terme $e_1(t)i_1(t)dt + e_2(t)i_2(t)dt$ représente l'énergie fournie pendant dt aux circuits par les générateurs. Cette énergie est en partie dissipée par effet Joule (terme $R_1 i_1^2(t)dt + R_2 i_2^2(t)dt$) et en partie stockée sous forme magnétique (terme $d \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + d \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + d(M i_1 i_2)$).

Le terme $M i_1 i_2$ est l'énergie correspondant au couplage des deux circuits.

Résultat 7

L'énergie magnétique U_m de deux circuits Γ_1 et Γ_2 couplés par un coefficient d'inductance mutuelle M s'écrit :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

C.4. Relation entre inductances propres et inductance mutuelle

On établira en deuxième année que l'énergie électromagnétique, et en particulier l'énergie stockée dans une bobine, ou dans un ensemble de deux circuits couplés, est toujours positive.

On a donc :

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0$$

En posant $x = \frac{i_1}{i_2}$, l'équation précédente permet d'affirmer que le trinôme du second degré $\frac{1}{2}L_1 x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2$ est toujours positif ou nul et donc que son discriminant Δ est négatif ou nul, soit $\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0$, ce qui donne :

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

La valeur absolue de M est donc toujours inférieure ou égale à $\sqrt{L_1 L_2}$, valeur qui est obtenue lorsque le couplage entre les deux circuits est total, c'est-à-dire que toutes les lignes de champ, autrement dit tout le flux, créées par le premier circuit traversent le second. Un cas particulier correspondant à cette situation a été traité dans l'Application 3.

C.5. Principe du transformateur

C.5.1. Description – Modèle du transformateur parfait

Un transformateur est constitué par deux bobinages, appelés respectivement primaire et secondaire, enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique (figure 11). L'intérêt du tore est de canaliser les lignes de champ du champ magnétique créé par le primaire (à gauche du schéma), afin que ces lignes de champ traversent le secondaire (à droite du schéma).

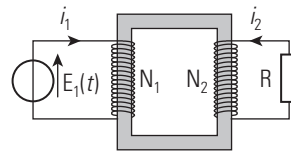


Fig. 11. Schéma de principe d'un transformateur.

Dans un schéma électrique, un transformateur peut être représenté par un des deux symboles de la figure 12.



Fig. 12. Symboles électriques du transformateur.

Dans le cas du modèle du transformateur parfait, on considère que les résistances des bobinages sont nulles et que le couplage est parfait, c'est-à-dire que le flux magnétique à travers une spire du secondaire est le même qu'à travers une spire du primaire (aucune ligne de champ ne sort du tore).

Le primaire est branché aux bornes d'un générateur de fém $E_1(t)$ et le secondaire est relié à un récepteur modélisé ici par une résistance R . On note N_1 et N_2 les nombres de spires du primaire et du secondaire et $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les tensions aux bornes du primaire et du secondaire. Le schéma équivalent au transformateur est représenté sur la figure 13.

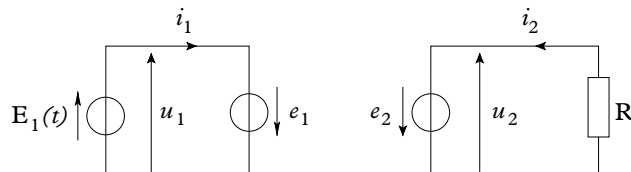


Fig. 13. Schéma électrique équivalent à un transformateur parfait. $e_1(t)$ et $e_2(t)$ représentent les fém induites au primaire et au secondaire.

C.5.2. Tension de sortie

Par définition du transformateur parfait, le flux magnétique φ à travers une spire du primaire est le même que celui à travers une spire du secondaire. En désignant par $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les fém induites au primaire et au secondaire, on a :

$$e_1(t) = -N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Or, $e_1(t) = -u_1(t)$ et $e_2(t) = -u_2(t)$, donc :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_1(t)}{N_1} = \frac{u_2(t)}{N_2}$$

D'où le résultat :

Résultat 8

Les tensions en entrée et en sortie d'un transformateur parfait, $u_1(t)$ et $u_2(t)$, sont reliées par :

$$u_2(t) = \frac{N_2}{N_1} u_1(t)$$

où N_1 et N_2 sont les nombres de spires du primaire et du secondaire.

Remarque : Ce dispositif étant basé sur l'induction, qui nécessite un flux variable, il ne fonctionne pas pour des tensions continues.

Une étude plus approfondie du transformateur sera menée en exercice.

C.5.3. Utilisation

Il existe de nombreuses utilisations aux transformateurs. Par exemple, le transport d'énergie électrique se fait par des lignes à haute tension, ce qui permet de réduire les pertes par effet Joule pour une puissance transportée donnée. Un transformateur « élévateur de tension » crée la haute tension nécessaire avant transport et un transformateur « abaisseur de tension » la diminue sur le site de consommation.

C.6. Quelques autres applications de l'induction

Il existe de nombreuses autres applications de l'induction électromagnétique dans un circuit fixe. On peut citer par exemple :

- **les plaques de cuisson par induction :** un champ magnétique variable, généré par la plaque de cuisson, crée un courant dans le fond de la casserole (courant de Foucault) qui chauffe celle-ci, et donc son contenu, par effet Joule. Cet exemple est traité en exercice.
- **la radio-identification ou RFID** (Radio Frequency Identification). C'est une méthode permettant la transmission à distance d'informations placées sur de petits marqueurs, par exemple des étiquettes adhésives (étiquettes antivol, forfaits dans certaines stations de ski...). Ces informations peuvent être lues lorsque l'étiquette passe près d'un lecteur, qui est un système actif fournissant de l'énergie au marqueur par induction. Ce dernier, composé le plus souvent d'une puce électronique et d'une antenne, peut alors envoyer l'information qu'il contient.
- **les détecteurs de métaux :** une bobine crée un champ magnétique variable et, si un morceau de métal se trouve à proximité, il se crée en son sein un courant. Ce courant crée lui-même un champ magnétique variable qui est détecté via la fém qu'il crée dans une bobine située dans le détecteur.

à venir

Fig. 14. Étiquette RFID.

L'essentiel

- ✓ Lorsqu'un circuit électrique est traversé par un flux magnétique variable $\phi(t)$, il apparaît dans ce circuit une fém $e(t)$ donnée par la **loi de Faraday**:

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ce phénomène est appelé **induction électromagnétique**.

- ✓ La **loi de Lenz** affirme que les effets de l'induction (force de Laplace ou champ magnétique créé par le courant induit) s'opposent à la cause de l'induction. Ceci permet de vérifier le signe de la fém trouvée par la loi de Faraday.
- ✓ Lorsque le flux magnétique créant l'induction est créé par le circuit lui-même, on parle d'**auto-induction**. Ce flux, ϕ_p , est proportionnel au courant $i(t)$ circulant dans le circuit. On note L le coefficient de proportionnalité, appelé **inductance propre**. On a alors:

$$e(t) = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

L'énergie magnétique U_m stockée dans le circuit s'écrit:

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2$$

- ✓ Lorsque deux circuits, Γ_1 et Γ_2 , parcourus respectivement par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, créent l'un dans l'autre des flux magnétiques $\phi_{12}(t)$ et $\phi_{21}(t)$, on a:

$$\phi_{12}(t) = M i_1(t) \quad \text{et} \quad \phi_{21}(t) = M i_2(t)$$

où M est le coefficient d'**inductance mutuelle** entre les deux circuits.

Les fém $e_1(t)$ et $e_2(t)$ apparaissant dans Γ_1 et Γ_2 s'écrivent donc:

$$e_1(t) = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -M \frac{di_1}{dt}$$

L'énergie $U_{m,c}$ correspondant au couplage est $U_{m,c} = M i_1 i_2$.

- ✓ Un transformateur est constitué de deux bobines, le primaire et le secondaire, reliées par une carcasse en matériau ferromagnétique permettant un bon couplage entre les deux bobines. Dans le cas d'un transformateur parfait, le rapport des tensions $u_2(t)$ au secondaire et $u_1(t)$ au primaire est égal au rapport des nombres de spires:

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment calculer l'intensité induite dans un circuit électrique placé dans un champ magnétique variable?

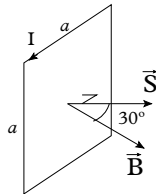
→ Savoir faire

Il suffit de savoir utiliser la loi de Faraday et la loi des mailles.

- ❶ Le circuit doit être orienté. On détermine alors le flux magnétique $\phi(t)$ le traversant puis la fém induite $e(t)$ en appliquant la loi de Faraday. Le sens du fléchage de $e(t)$ doit être celui choisi pour le circuit.
- ❷ On écrit ensuite la loi des mailles, en utilisant la notation complexe dans le cas d'un régime sinusoïdal.

→ Application

On considère une bobine carrée fixe de côté a , comportant N spires, de résistance R , possédant une inductance propre L . La bobine est plongée dans un champ magnétique uniforme variable, $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire faisant un angle θ avec le vecteur surface de la bobine. Les deux extrémités du fil la constituant sont reliées entre elles (bobine en court-circuit).



1. Déterminer la fém $e(t)$ induite dans la bobine et représenter le schéma électrique équivalent.
2. Déterminer l'expression de l'intensité efficace I_{eff} circulant dans la bobine.

Solution

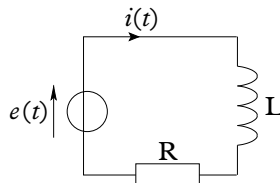
- ❶ Soit ϕ le flux du champ magnétique à travers la bobine. On a :

$$\phi = Na^2 B \cos \theta$$

Donc, d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Na^2 \frac{dB}{dt} \cos \theta = -Na^2 B_0 \omega \cos \theta \cos(\omega t)$$

On en déduit le schéma équivalent :



- ❶ On est en régime sinusoïdal. On va donc utiliser la notation complexe et poser :

$$\underline{e}(t) = e_0 \exp(j\omega t) = -Na^2 B_0 \omega \cos \theta \exp[j(\omega t)]$$

$$\underline{i}(t) = i_0 \exp[j(\omega t + \varphi)]$$

On obtient en écrivant la loi des mailles pour le schéma équivalent :

$$e_0 \exp(j\omega t) = Ri_0 \exp[j(\omega t + \varphi)] + Li_0 \frac{d(\exp[j(\omega t + \varphi)])}{dt}$$

soit

$$e_0 = Ri_0 \exp(j\varphi) + j\omega Li_0 \exp(j\varphi)$$

d'où

$$i_0 \exp(j\varphi) = \frac{e_0}{R + jL\omega}$$

Comme $I_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{|i_0 \exp(j\varphi)|}{\sqrt{2}}$, on a :

$$I_{\text{eff}} = \frac{Na^2 B_0 \omega \cos \theta}{\sqrt{2(R^2 + L^2 \omega^2)}}$$

Méthode n°2

Comment traiter un problème comportant deux circuits couplés?

→ Savoir faire

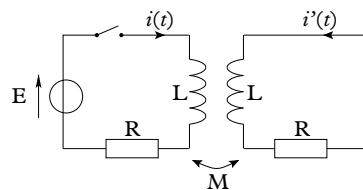
Soient deux circuits électriques couplés par une inductance mutuelle M . On cherche à déterminer les intensités circulant dans les deux circuits.

❶ Refaire les schémas des deux circuits, sans la double flèche symbolisant le couplage, mais en ajoutant dans chacun un générateur de tension idéal de fém égale à $-M \frac{di_k}{dt}$, où i_k est l'intensité circulant dans l'autre circuit.

❷ Écrire la loi des mailles dans chacun des deux circuits. On obtient ainsi un système de deux équations différentielles à deux inconnues que l'on peut résoudre. Dans le cas d'un régime sinusoïdal, il est évidemment plus simple d'utiliser la notation complexe.

→ Application

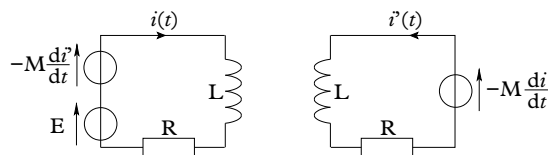
On s'intéresse au régime transitoire existant dans les deux circuits couplés ci-dessous lorsque l'on ferme l'interrupteur. La fém E du générateur du circuit de gauche est indépendante du temps.



1. Écrire les équations différentielles vérifiées par i et i' .
2. En déduire deux équations indépendantes en posant $I = i + i'$ et $J = i - i'$.
3. Déterminer I et J , puis i et i' , sachant que l'interrupteur a été fermé à $t = 0$.

Solution

❶ Les schémas équivalents aux deux circuits couplés sont tracés ci-après. Les générateurs correspondant aux couplages ont été fléchés dans le sens positif qui avait été choisi pour les intensités dans les circuits (le signe de M tient compte du choix des sens positifs).



Les lois des mailles donnent les deux équations cherchées :

$$\begin{cases} E = Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \\ 0 = Ri' + L \frac{di'}{dt} + M \frac{di}{dt} \end{cases}$$

② En additionnant et en soustrayant les deux équations de la question précédente, on obtient :

$$\begin{cases} E = R(i + i') + L \frac{d(i + i')}{dt} + M \frac{d(i' + i)}{dt} \\ E = R(i - i') + L \frac{d(i - i')}{dt} + M \frac{d(i' - i)}{dt} \end{cases}$$

soit, en posant, $I = i + i'$ et $J = i - i'$:

$$\begin{cases} E = RI + (L + M) \frac{dI}{dt} \\ E = RJ + (L - M) \frac{dJ}{dt} \end{cases}$$

③ Pour résoudre la première équation, on commence par résoudre l'équation sans second membre, de solution $I_1(t)$, en posant $\tau_1 = \frac{L + M}{R}$, soit :

$$I_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

où A est une constante. On détermine ensuite une solution particulière I_2 de l'équation avec second membre. Le plus simple ici est de chercher une constante. On obtient alors :

$$I_2 = \frac{E}{R}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$I(t) = I_1 + I_2 = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E}{R}$$

On détermine A en utilisant les conditions initiales qui s'écrivent ici $i(0) = i'(0) = 0$ puisque l'interrupteur était ouvert pour $t < 0$ et que la présence d'une inductance L dans chacun des deux circuits impose la continuité du courant. On a donc $I(0) = 0$, ce qui donne $A = -\frac{E}{R}$ et donc :

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$$

On procède exactement de la même façon pour la deuxième équation avec $\tau_2 = \frac{L - M}{R}$. On obtient ainsi :

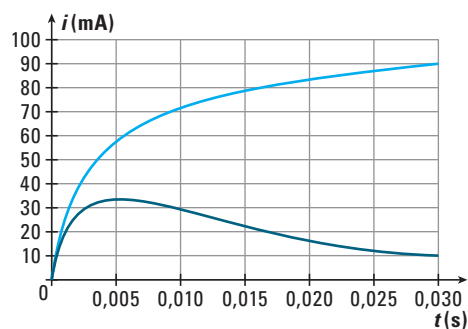
$$J(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Rq : τ_2 est bien positif car la relation $M^2 \leq L_1 L_2$ entraîne ici $|M| \leq L$.

On détermine alors simplement les courants $i(t)$ et $i'(t)$:

$$\begin{cases} i(t) = \frac{I+J}{2} = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \\ i'(t) = \frac{I-J}{2} = \frac{E}{2R} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \end{cases}$$

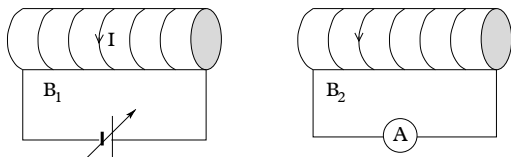
L'induction n'est sensible qu'en régime variable. Au bout d'une durée grande devant τ_1 et τ_2 , on a simplement $i = \frac{E}{R}$ et $i' = 0$. Le graphique ci-dessous représente $i(t)$ (en bleu clair) et $i'(t)$ (en bleu foncé) pour $E = 10 \text{ V}$, $R = 100 \, \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ et $M = 0,8 \text{ H}$.



Exercices

Vrai/Faux

Les questions 1 à 4 se rapportent à la figure ci-dessous où B_1 et B_2 sont deux solénoïdes. B_1 est relié à un générateur de courant continu et B_2 à un ampèremètre.



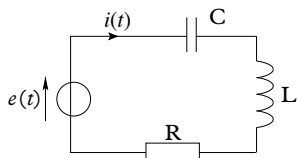
- 1) Le courant I dans B_1 étant constant, un courant circule dans B_2 dans le sens indiqué sur la figure.
- 2) Un courant circule dans B_2 dans le sens indiqué lorsque I augmente.
- 3) Un courant circule dans B_2 dans le sens indiqué lorsqu'on éloigne B_2 de B_1 .
- 4) Un courant circule dans B_2 dans le sens indiqué lorsque B_2 tourne autour de son axe.
- 5) L'inductance d'une bobine augmente quand le courant qui la traverse augmente.
- 6) Un transformateur parfait comporte 100 spires au primaire et 200 spires au secondaire. La tension aux bornes du primaire est $u_1(t) = u_0 + u_1 \cos(\omega t)$. La tension aux bornes du secondaire sera :

$$u_2(t) = 2u_1 \cos(\omega t).$$

Niveau 1

Ex. 1 Mesure d'une inductance propre

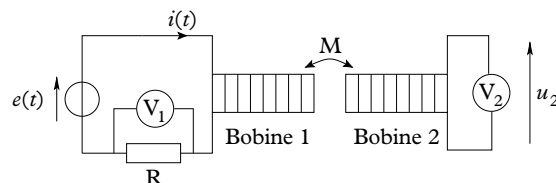
On réalise le circuit décrit dans la figure ci-dessous. La tension $e(t)$ aux bornes du générateur a pour expression $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ avec ω réglable par l'utilisateur. La capacité C est supposée précisément connue.



1. Exprimer l'intensité complexe du courant $i(t)$, en fonction de e_0 , ω , R , L et C .
2. Déterminer la fréquence f_0 correspondant à la résonance (amplitude de $i(t)$ maximale) en fonction de L et C . Que vaut alors le déphasage φ entre $i(t)$ et $e(t)$?
3. Dédire des questions précédentes une méthode de mesure de l'inductance L à partir de mesures effectuées à l'oscilloscope.
4. **A.N.** : Calculer L pour $C = 2 \mu\text{F}$ et $f_0 = 7,4 \text{ kHz}$.

Ex. 2 Mesure d'une inductance mutuelle (1)

Afin de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines, on réalise le montage ci-dessous où la première bobine est reliée en série avec un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω et avec une résistance. Deux voltmètres permettent de mesurer les tensions aux bornes de la résistance et de la deuxième bobine.



1. Quelle est l'intensité du courant circulant dans la deuxième bobine ?
2. Exprimer la tension $u_2(t)$ aux bornes de la deuxième bobine en fonction de M et de $i(t)$, intensité du courant circulant dans la première bobine.
3. Soit $u_1(t) = Ri(t)$ la tension aux bornes de la résistance. Exprimer $u_2(t)$ en fonction de M , R et $u_1(t)$ et en déduire l'expression de M en fonction de R , ω , U_1 et U_2 où U_1 et U_2 sont les valeurs mesurées par les voltmètres V_1 et V_2 .
4. **A.N.** : Calculer M avec $U_1 = 3 \text{ V}$, $\omega = 4\pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $R = 100 \Omega$ et $U_2 = 5 \text{ V}$.

Ex. 3 Auto-induction et induction mutuelle

Soit un solénoïde de rayon $R = 10 \text{ cm}$, de longueur $d = 1 \text{ m}$ et comportant $N = 500$ spires par mètre. On considère que le champ qu'il crée est le même que celui que créerait un solénoïde infini comportant le même nombre de spires par mètre.

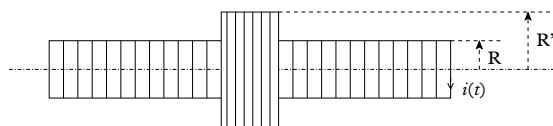
1. Établir la formule donnant l'inductance L de ce solénoïde et la calculer. On donne la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.
2. On note $i(t)$ le courant circulant dans ce solénoïde. Déterminer la fém d'auto-induction, $e(t)$, dans les 3 cas suivants :

a) $i = \text{cste} = 1 \text{ A}$.

b) i passe de 1 A à 0 A en $0,5 \text{ s}$ de façon linéaire.

c) $i(t) = 2 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (en A).

3. On place autour de ce solénoïde une bobine plus courte, de même axe, de rayon $R' = 20 \text{ cm}$ et comportant $N' = 100$ spires. Exprimer le flux Φ créé par le solénoïde à travers la bobine lorsqu'il est parcouru par un courant i (on suppose que les deux bobines sont orientées dans le même sens).

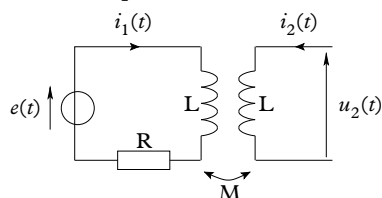


4. En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle, M , en fonction de d , N , N' et R et le calculer.
 5. Déterminer la fém induite dans la bobine, $e'(t)$, dans les 3 cas suivants :
 - a) $i = \text{cste} = 1 \text{ A}$.
 - b) i passe de 1 A à 0 A en 0,5 s de façon linéaire.
 - c) $i(t) = 2\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (en A).
 6. Le solénoïde est parcouru par un courant $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ et la bobine par un courant $i'(t) = i'_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression de l'énergie magnétique moyenne, $\langle U_m \rangle$, stockée dans le solénoïde puis de celle correspondant au couplage, $\langle U_c \rangle$. Les calculer pour $i_0 = 1 \text{ A}$, $i'_0 = 0,1 \text{ A}$ et $\varphi = 60^\circ$.
- On rappelle que $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$.

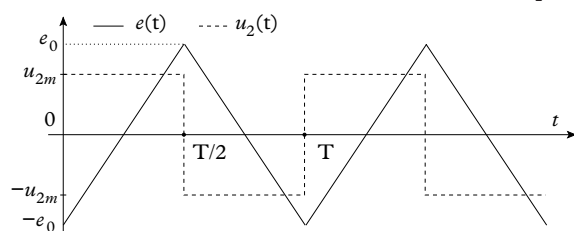
Niveau 2

Ex. 4 Mesure d'une inductance mutuelle (2)

On considère les deux circuits couplés de la figure ci-dessous. Le générateur de fém $e(t)$ fournit un signal triangulaire, de période T et d'amplitude e_0 . Les deux bobines sont identiques, d'inductance L . On note M leur coefficient de couplage. La deuxième bobine est en circuit ouvert ($i_2 = 0$).



1. Écrire les deux équations reliant $u_2(t)$, $e(t)$, $i_1(t)$, R , L et M .
2. On mesure les courbes suivantes pour $e(t)$ et $u_2(t)$.

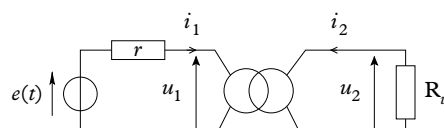


Donner l'expression de $e(t)$ pour t compris entre 0 et $\frac{T}{2}$.

3. Déterminer la forme de $i_1(t)$ pour t compris entre 0 et $\frac{T}{2}$, et en déduire la condition portant sur T , L et R pour que la tension $u_2(t)$ ait la forme mesurée.
4. On se place à un instant t compris entre 0 et $\frac{T}{2}$. Exprimer $\frac{de}{dt}$ en fonction de R , M et u_{2m} , amplitude de $u_2(t)$. En déduire l'expression de M en fonction de R , T , e_0 et u_{2m} .
5. **A.N. :** Calculer M pour $R = 2 \text{ k}\Omega$, $T = 2 \text{ ms}$, $e_0 = 10 \text{ V}$ et $u_{2m} = 25 \text{ mV}$.

Ex. 5 Transformateur

On considère un transformateur parfait comportant N_1 spires au primaire et N_2 spires au secondaire. On note $L_1 = N_1^2 L_0$ et $L_2 = N_2^2 L_0$ les inductances propres des deux bobinages du primaire et du secondaire. L_0 est une constante ne dépendant que de la géométrie des bobines. Le primaire est relié à un générateur de fém $e(t)$ et de résistance interne r et le secondaire à une charge modélisée par une résistance R_u . On note u_1 la tension d'entrée et u_2 la tension de sortie. Toutes les tensions et intensités sont alternatives, de valeur moyenne nulle.



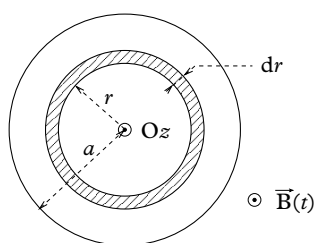
1. En utilisant le fait que le couplage magnétique est total entre le primaire et le secondaire pour un transformateur parfait, donner l'expression de l'inductance mutuelle M entre le primaire et le secondaire en fonction de N_1 , N_2 et L_0 .
2. Représenter le schéma électrique équivalent au circuit ci-dessus et écrire deux équations reliant les tensions u_1 et u_2 aux intensités i_1 et i_2 .
3. Retrouver l'expression de $\frac{u_2}{u_1}$ vue en cours à partir des équations de la question précédente. On posera $m = \frac{N_2}{N_1}$.
4. On suppose maintenant que $R_u = 0$ (sortie en court-circuit). Déterminer i_2 en fonction de i_1 et m . On admettra que ce résultat reste vrai pour $R_u \neq 0$.
5. Montrer que la puissance P_1 fournie par le générateur est égale à la puissance P_2 reçue par la charge.
6. On cherche dans cette question à déterminer la valeur de m telle que, pour un générateur donné, la charge reçoive une puissance maximale.
 - a) Exprimer u_1 en fonction de $e(t)$, r et i_1 et en déduire u_2 en fonction de m , $e(t)$, r et i_2 .
 - b) Exprimer i_2 en fonction de m , $e(t)$, r et R_u et en déduire la puissance P_2 reçue par la charge en fonction des mêmes variables.

c) Sachant que la fonction $x \rightarrow \frac{a}{x} + bx$ est minimale pour $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, déterminer m pour que P_2 soit maximale. On dit qu'on a réalisé une adaptation d'impédance.

Niveau 3

Ex. 6 Plaque à induction

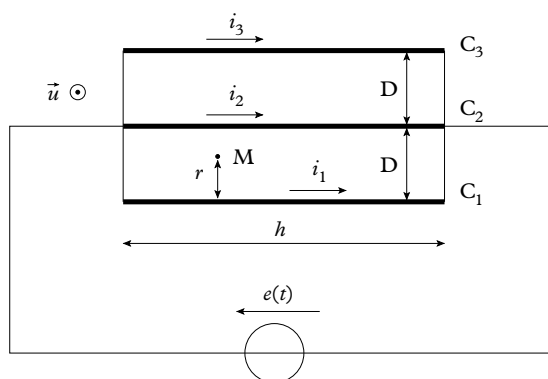
On cherche dans cet exercice à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction. On assimile le fond de la casserole à un cylindre de rayon a , d'épaisseur h et d'axe Oz . La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. Pour étudier les courants créés dans le fond de la casserole, on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe Oz , d'épaisseur h et de largeur dr . On admettra que la conductance électrique dG (inverse de la résistance) d'une de ces spires, de rayon r , s'écrit $dG = \frac{h}{2\pi r} \gamma dr$, où γ est la conductivité du métal utilisé.



1. Exprimer le courant élémentaire di induit dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance dG .
2. En déduire la puissance moyenne dP dissipée par effet Joule dans une spire.
3. Déterminer alors la puissance totale, P , dissipée dans le fond de la casserole en fonction de B_0 , ω , h , γ et a .
4. **A.N.** : Calculer P avec $\gamma = 10^7$ S/m, $h = 5$ mm, $a = 10$ cm, $B_0 = 0,1$ T, $\omega = 100\pi$ rad/s.

Ex. 7 Intensités dans trois conducteurs parallèles

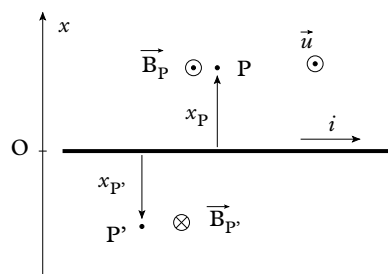
On dispose de 3 conducteurs cylindriques identiques, C_1 , C_2 et C_3 , de rayon a , de longueur h et de résistance R . Ces 3 conducteurs sont disposés parallèlement entre eux dans un même plan et espacés d'une distance D . Ils sont branchés en parallèle à un même générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω . On se propose de montrer que, à cause des phénomènes d'induction, l'intensité dans le conducteur central est différente de celle dans les deux autres.



On note i_2 l'intensité dans le conducteur central et $i_1 = i_3$ l'intensité dans les deux autres conducteurs. Un point M du plan des conducteurs est repéré par sa distance r à l'axe de C_1 . On note \vec{u} un vecteur unitaire orthogonal au plan des conducteurs et dirigé vers l'avant de la figure.

On admettra que le champ magnétique \vec{B}_P créé par un conducteur cylindrique parcouru par un courant i en un point P extérieur au conducteur, repéré par son abscisse x_p (positive ou négative) suivant un axe orthogonal au conducteur (cf. figure ci-dessous), s'écrit :

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 i}{2\pi x_p} \vec{u}$$



1. Montrer que le champ magnétique au point M , \vec{B}_M , s'écrit :

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_3}{2D-r} \right) \vec{u}$$

2. On considère la surface élémentaire dS , de largeur dr et de longueur h , parallèle aux conducteurs et contenant le point M . On oriente cette surface de façon à ce que $d\vec{S}$ et \vec{u} soient de même sens. En considérant que le champ magnétique est constant sur cette surface, exprimer son flux $d\phi$ en fonction de μ_0 , i_1 , i_2 , r , h et dr .
3. Soit la surface plane S , de longueur h , délimitée par C_1 et C_2 . Pour tout point M sur cette surface, on a donc $a \leq r \leq D - a$. Montrer que le flux ϕ du champ magnétique à travers S s'écrit :

$$\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D-a}{a} \right) + i_1 \ln \left(\frac{D+a}{2D-a} \right) \right]$$

4. Simplifier l'expression de ϕ sachant que $a \ll D$. On utilisera cette expression dans la suite de l'exercice.

5. On considère la maille formée par C_1 , C_2 et les conducteurs qui les relient. Représenter le schéma électrique équivalent et déterminer une relation entre R , i_1 , i_2 et ϕ .

6. On pose, en notation complexe, $i_1(t) = I_1 e^{j\omega_1 t}$, $i_2(t) = I_2 e^{j\omega_2 t}$ et $\phi(t) = \phi_0 e^{j\omega t}$. Exprimer ϕ_0 en fonction, entre autres, de I_1 et I_2 puis montrer que :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$$

où ω_1 et ω_2 sont des constantes à déterminer.

7. Avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\frac{R}{h} = 10^{-3} \Omega/\text{m}$ et $D = 10a$,

calculer $\left| \frac{I_2}{I_1} \right|$ ainsi que le déphasage φ de i_2 par rapport

à i_1 dans les 2 cas suivants :

a) $\omega \ll \omega_1$ et $\omega \ll \omega_2$.

b) $\omega = 2000\pi \text{ rad/s}$.

Indications

Ex 2

3) Un voltmètre mesure la valeur efficace de la tension.

Ex 3

3) Le champ magnétique est nul à l'extérieur d'un solénoïde « infini ».

Ex 4

3) $i_1(t)$ est la somme d'une exponentielle et d'une fonction affine. Pour que $u_2(t)$ ait la forme mesurée, l'exponentielle doit être négligeable.

Ex 7

1) Le champ magnétique créé par un ensemble de plusieurs sources est la somme des champs magnétiques créés par chacune des sources prise séparément.

3) Le flux total ϕ est la somme des flux élémentaires $d\phi$ sur la surface S . On l'obtient donc en intégrant $d\phi$ pour r variant entre a et $D - a$.

Solutions des exercices

Vrai/Faux

- 1) **Faux.** I étant constant, le flux magnétique à l'intérieur de B_2 ne varie pas, donc il n'existe pas de courant induit.
- 2) **Faux.** Il existe bien un courant puisque le champ magnétique créé par B_1 varie, ce qui fait varier le flux à l'intérieur de B_2 . Cependant, avec les sens des courants indiqués sur la figure, les champs magnétiques créés par les deux solénoïdes ont le même sens. Le champ magnétique créé par le courant induit dans B_2 ne s'oppose donc pas à l'augmentation de celui créé par B_1 , ce qui est contraire à la loi de Lenz.
- 3) **Vrai.** Le sens du courant de B_2 est alors tel qu'il s'oppose à la diminution du flux.
- 4) **Faux.** Faire tourner B_2 autour de son axe ne change pas le flux magnétique. Il n'y a donc pas de courant induit dans B_2 .
- 5) **Faux.** L'inductance est indépendante du courant.
- 6) **Vrai.** La composante continue, u_0 , ne donne lieu à aucun phénomène d'induction et n'existe donc pas au secondaire. La composante variable, $u_1 \cos(\omega t)$, est multipliée par le rapport des nombres de spires, donc par 2.

Exercices niveau 1

Exercice 1

- 1) La loi des mailles permet d'écrire :

$$e_0 e^{j\omega t} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}(t)$$

et donc :

$$\underline{i}(t) = \frac{e_0 e^{j\omega t}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

- 2) Le module i_0 de $\underline{i}(t)$ est égal à l'amplitude de $i(t)$. On a ainsi :

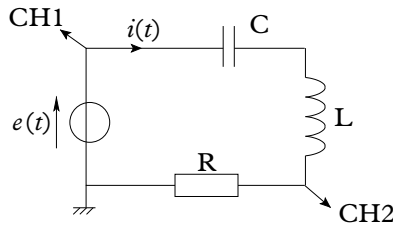
$$i_0 = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

qui est maximal pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour $\omega = \omega_0$, on a $\underline{i}(t) = \frac{e_0 e^{j\omega t}}{R} = \frac{e(t)}{R}$. R est réel, donc le déphasage φ entre $i(t)$ et $e(t)$ est nul pour cette pulsation.

- 3) Pour connaître L , il suffit donc de connaître la pulsation pour laquelle $e(t)$ et $i(t)$ sont en phase. Pour cela, on branche l'oscilloscope de façon à visualiser simultanément la tension aux bornes du générateur et de la résistance comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



On se place alors en mode XY. Une ellipse s'affiche sur l'écran et devient un segment de droite pour $\omega = \omega_0$.

$$4) L = \frac{1}{4\pi^2 \times 7400^2 \times 2 \cdot 10^{-6}} = 0,23 \text{ mH.}$$

Exercice 2

1) La deuxième bobine n'est reliée qu'à un voltmètre, qui est équivalent à un circuit ouvert. Le courant circulant dans la deuxième bobine est donc nul.

2) Il existe dans la deuxième bobine une fém induite, $e_2(t)$, égale à la tension aux bornes de la bobine. Son expression est :

$$u_2(t) = e_2(t) = -M \frac{di}{dt}$$

Remarque : si le courant n'avait pas été nul, il aurait fallu prendre en compte la résistance du bobinage, r . La tension aux bornes de la bobine aurait alors été $e_2(t) - r i_2(t)$, où $i_2(t)$ aurait été l'intensité du courant circulant dans la bobine.

3) D'après la question précédente et $i(t) = \frac{u_1(t)}{R}$, il vient :

$$u_2(t) = -\frac{M}{R} \frac{du_1(t)}{dt}$$

Or, $u_1(t)$ est de la forme $u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ où U_1 est la tension efficace mesurée par V_1 . Donc :

$$u_2(t) = \frac{M}{R} U_1 \omega \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

Le voltmètre V_2 mesurant la valeur efficace U_2 de $u_2(t)$, on a finalement :

$$U_2 = \frac{M \omega U_1}{R}$$

et donc

$$M = \frac{R U_2}{\omega U_1}$$

$$4) M = \frac{100 \times 5}{4\pi \cdot 10^4 \times 3} = 1,3 \text{ mH.}$$

Exercice 3

1) D'après l'Application 2, on a :

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{d} = 10 \text{ mH}$$

2) D'après le cours, $e(t) = -L \frac{di}{dt}$. On a donc pour les trois cas de l'énoncé :

a) $e(t) = 0$ puisque i est constant.

b) $i(t) = 1 - 2t$ (en A), donc $e(t) = 2L = 20 \text{ mV}$.

c) $e(t) = -0,01 \times 2 \times 100\pi \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -6,3 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (en V).

3) Le champ magnétique créé par le solénoïde est uniforme et parallèle à l'axe à l'intérieur du solénoïde. Par contre, il est nul à l'extérieur. Pour exprimer le flux à travers une spire de la bobine, il ne faut donc pas multiplier B par la surface de la section de la bobine, πR^2 , mais par la surface πR^2 d'une section du solénoïde. Le flux ϕ s'écrit donc :

$$\phi = N'B\pi R^2 = \mu_0 \frac{NN'\pi R^2}{d} i$$

4) Par définition de M, on a :

$$M = \frac{\phi}{i} = \mu_0 \frac{NN'\pi R^2}{d} = 2 \text{ mH}$$

5) D'après le cours, $e'(t) = -M \frac{di}{dt}$. On a donc pour les trois cas de l'énoncé :

a) $e'(t) = 0$ puisque i est constant.

b) $i(t) = 1 - 2t$, donc $e'(t) = 2M = 4 \text{ mV}$.

c) $e'(t) = -0,002 \times 2 \times 100\pi \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -1,3 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (en V).

6) D'après le cours, on a :

$$\langle U_m \rangle = \frac{1}{4} Li_0^2 = 2,5 \text{ mJ}$$

et donc, puisque $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}$:

$$U_m = \frac{1}{4} Li_0^2 = 2,5 \text{ mJ}$$

Pour l'énergie de couplage,

$$U_c = Mii' = Mi_0 i'_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} Mi_0 i'_0 [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

et donc, puisque $\cos(2\omega t + \varphi) = 0$:

$$\langle U_c \rangle = \frac{1}{2} Mi_0 i'_0 \cos(\varphi) = 0,05 \text{ mJ}$$

Exercices niveau 2

Exercice 4

1) On écrit les lois des mailles :

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

et donc, puisque $i_2 = 0$:

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt} \\ u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2) D'après la courbe, on a, pour $0 < t < \frac{T}{2}$, $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$.

3) Plaçons-nous à un instant t compris entre 0 et $\frac{T}{2}$. On a alors $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$, donc de la forme $e(t) = at + b$. L'intensité $i(t)$ est donc solution de l'équation :

$$at + b = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt}$$

La solution de cette équation est la somme de :

- la solution générale de l'équation sans second membre, de la forme $i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$;
- une solution particulière de l'équation avec second membre. Le second membre étant une fonction affine, cette solution sera de la forme $At + B$.

On aura donc finalement :

$$i_1(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + At + B$$

D'autre part, on sait que $u_2(t) = M \frac{di_1}{dt}$. D'après la courbe mesurée, $u_2(t)$ est constante entre 0 et $\frac{T}{2}$, il doit donc en être de même pour $\frac{di_1}{dt}$. Pour que cela soit le cas, l'exponentielle doit être rapidement négligeable. On doit donc avoir $\tau \ll T$, c'est-à-dire :

$$\frac{L}{R} \ll T$$

Remarque : R ne doit pas non plus être trop grand, sinon $u_2(t)$ sera trop faible pour être mesuré.

4) Pour $0 < t < \frac{T}{2}$, on a $u_2(t) = u_{2m}$ et donc $\frac{di_1}{dt} = \frac{u_{2m}}{M} = \text{cste}$. En dérivant l'équation $e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt}$ par rapport au temps, on obtient donc :

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di_1}{dt} = \frac{Ru_{2m}}{M}$$

car $\frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0$.

Or, $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$, donc $\frac{de}{dt} = \frac{4e_0}{T}$. On en déduit finalement :

$$M = \frac{RTu_{2m}}{4e_0}$$

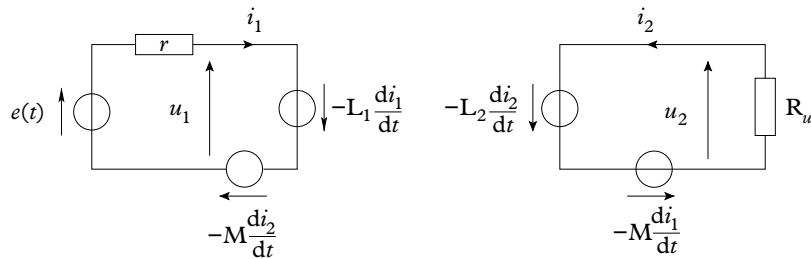
5) L'application numérique donne $M = 2,5 \text{ mH}$.

Exercice 5

1) Dans le cas d'un couplage parfait, on a $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Donc ici :

$$M = N_1 N_2 L_0$$

2) Pour obtenir le schéma électrique, on remplace les bobines du primaire et du secondaire par deux générateurs représentant les fém dues à l'auto-induction et à l'induction mutuelle, ce qui donne le schéma ci-dessous.



En écrivant la loi des mailles, on a immédiatement :

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

3) En remplaçant L_1 , L_2 et M par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = N_1^2 L_0 \frac{di_1}{dt} + N_1 N_2 L_0 \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = N_2^2 L_0 \frac{di_2}{dt} + N_1 N_2 L_0 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement :

$$u_2 = \frac{N_2}{N_1} u_1 = m u_1$$

4) Si la sortie est en court-circuit, $u_2 = 0$ et la loi des mailles au secondaire donne :

$$N_2 \frac{di_2}{dt} + N_1 \frac{di_1}{dt} = 0$$

On a donc en intégrant :

$$N_2 i_2 + N_1 i_1 = K$$

où K est une constante. Or, les valeurs moyennes de i_1 et i_2 étant nulles, on a $K = 0$ et finalement :

$$i_2 = -\frac{1}{m} i_1$$

5) La puissance P_1 fournie par le générateur s'écrit $P_1 = u_1 i_1$.

La charge reçoit la puissance $P_2 = -u_2 i_2 = m u_1 \frac{i_1}{m} = u_1 i_1 = P_1$.

La totalité de la puissance fournie par le générateur est donc reçue par la charge.

Dans le cas d'un transformateur réel, une partie de la résistance est perdue par effet Joule à cause, d'une part, des résistances des fils constituant les bobinages et, d'autre part, des courants de Foucault créés dans la carcasse métallique servant à canaliser les lignes de champ.

6. a) On a $u_1 = e - r i_1 = e + m r i_2$. Comme $u_2 = m u_1$, on en déduit :

$$u_2 = m e + m^2 r i_2$$

b) D'après la question précédente et $u_2 = -R_u i_2$, on a :

$$i_2 = -\frac{m e}{R_u + m^2 r}$$

On en déduit l'expression de P_2 en fonction de e :

$$P_2 = -u_2 i_2 = R_u i_2^2 = R_u \left(\frac{m e}{R_u + m^2 r} \right)^2 = \frac{R_u e^2}{\left(\frac{R_u}{m} + m r \right)^2}$$

c) La puissance reçue par la charge est donc maximale, à e donné, quand $\left(\frac{R_u}{m} + m r \right)$ est minimal, c'est-à-dire pour :

$$m = \sqrt{\frac{R_u}{r}}$$

Exercices niveau 3

Exercice 6

1) Le flux magnétique ϕ traversant une spire varie et crée donc une fém $e(t)$ donnée par :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(B_0 \cos(\omega t) \pi r^2)}{dt} = B_0 \omega \sin(\omega t) \pi r^2$$

La spire étant assimilée à un circuit filiforme de conductance dG , on a, en notant di l'intensité du courant qui la parcourt :

$$di(t) = e(t)dG = \frac{1}{2}B_0 h \gamma \omega \sin(\omega t) r dr$$

2) La puissance moyenne, dP , dissipée par effet Joule dans une spire, est égale à la puissance fournie par la fém induite, soit :

$$dP = e(t)di(t) = \frac{1}{2}B_0^2 \omega^2 \pi r^3 dr \sin^2(\omega t) = \frac{1}{4}B_0^2 \omega^2 \pi h \gamma r^3 dr$$

3) La puissance totale s'obtient en intégrant dP sur le fond de la casserole c'est-à-dire en faisant varier r de 0 à a .

$$P = \int_0^a dP = \frac{1}{4}B_0^2 \omega^2 \pi h \gamma \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{16}B_0^2 \omega^2 \pi h \gamma a^4$$

$$4) P = \frac{0,01 \times \pi^3 \times 5 \cdot 10^{-3} \times 10^7 \times 10^{-4}}{16} = 970 \text{ W.}$$

Exercice 7

1) Le champ magnétique \vec{B}_M est la somme des trois champs créés au point M par les 3 conducteurs. D'après la formule donnée dans l'énoncé, le champ créé par C_1 est dirigé dans le sens de \vec{u} alors que ceux créés par C_2 et C_3 sont dirigés dans le sens contraire. D'autre part, les distances de M à C_1 , C_2 et C_3 sont respectivement r , $D-r$ et $2D-r$. On a donc :

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_3}{2D-r} \right) \vec{u}$$

2) \vec{B}_M et $d\vec{S}$ sont parallèles et de même sens, on a donc simplement, avec $i_1 = i_3$:

$$d\phi = B_M dS = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_1}{2D-r} \right) dr$$

3) Le flux ϕ est égal à l'intégrale de $d\phi$ sur S, soit :

$$\phi = \int_{r=a}^{D-a} \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(\frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{D-r} - \frac{i_1}{2D-r} \right) dr = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left(i_1 [\ln(r)]_a^{D-a} + i_2 [\ln(D-r)]_a^{D-a} + i_1 [\ln(2D-r)]_a^{D-a} \right)$$

ce qui donne :

$$\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[i_1 \ln\left(\frac{D-a}{a}\right) + i_2 \ln\left(\frac{a}{D-a}\right) + i_1 \ln\left(\frac{D+a}{2D-a}\right) \right]$$

et donc :

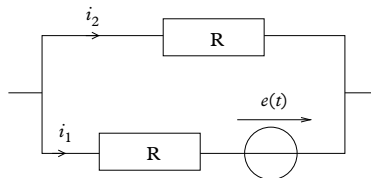
$$\phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln\left(\frac{D-a}{a}\right) + i_1 \ln\left(\frac{D+a}{2D-a}\right) \right]$$

4) En négligeant a devant D , on a l'expression approchée :

$$\phi \simeq \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln\left(\frac{D}{a}\right) - i_1 \ln 2 \right]$$

5) Chaque conducteur possède une résistance R et l'induction crée une fém $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$.

On a donc le schéma électrique équivalent suivant, dans lequel le fléchage du générateur correspond au sens positif de la surface S :



La loi des mailles donne :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -Ri_2 + Ri_1$$

6) On a, d'après l'expression de ϕ :

$$\phi_0 = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(I_1 - I_2) \ln\left(\frac{D}{a}\right) - I_1 \ln 2 \right]$$

En injectant cette expression dans la loi des mailles écrites à la question précédente, on obtient :

$$-j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(I_1 - I_2) \ln\left(\frac{D}{a}\right) - I_1 \ln 2 \right] = -RI_2 + RI_1$$

d'où :

$$I_2 \left[R + \frac{\mu_0 h}{2\pi} j\omega \ln\left(\frac{D}{a}\right) \right] = I_1 \left[R + \frac{\mu_0 h}{2\pi} j\omega \ln\left(\frac{D}{2a}\right) \right]$$

On a donc :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{2\pi R}{\mu_0 h \ln\left(\frac{D}{a}\right)} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{2\pi R}{\mu_0 h \ln\left(\frac{D}{2a}\right)}$$

7. a) Si $\omega \ll \omega_1$ et $\omega \ll \omega_2$, on a :

$$\frac{I_2}{I_1} \simeq \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{j\frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\ln\left(\frac{D}{2a}\right)}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}$$

$$\text{Donc } \left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \frac{\ln\left(\frac{D}{2a}\right)}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)} = 0,7 \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

b) On a $\frac{\mu_0 h}{2\pi R} = 2 \cdot 10^{-4}$ s.i. et donc, pour 2000π rad/s :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 + j0,4\pi \ln 5}{1 + j0,4\pi \ln 10}$$

D'où l'on tire :

$$\left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \sqrt{\frac{1 + (0,4\pi \ln 5)^2}{1 + (0,4\pi \ln 10)^2}} = 0,74$$

et

$$\varphi = \text{Arg}(1 + j0,4\pi \ln 5) - \text{Arg}(1 + j0,4\pi \ln 10) = \text{Arctan}(0,4\pi \ln 5) - \text{Arctan}(0,4\pi \ln 10) = -7,2^\circ$$

