

**Introduction**

Nous avons vu, dans le cours de mécanique, qu'un champ magnétique exerce une force sur des particules chargées en mouvement. Si un conducteur, parcouru par un courant électrique, est plongé dans un champ magnétique, les porteurs de charge subissent chacun la force magnétique. Il en résulte que la somme de ces forces, exercées au niveau microscopique, soumet le conducteur à une force résultante macroscopique, appelée **force de Laplace**<sup>1</sup>.

Ce chapitre nécessite une bonne compréhension du cours de Mécanique.

1. Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827). Mathématicien, astronome et physicien français. Il développa les théories de Newton et proposa un mécanisme expliquant la formation du système solaire

**Plan du chapitre 25**

<b>A. Expression de la force de Laplace</b> .....	x
<b>B. Exemple: rails de Laplace</b>	
1. Présentation .....	x
2. Calcul de la résultante .....	x
3. Point d'application .....	x
4. Calcul de la puissance .....	x
5. Conclusion .....	x
<b>C. Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique</b>	
1. Dispositif étudié .....	x
2. Calcul du moment du couple exercé sur la spire .....	x
3. Calcul de la puissance .....	x
4. Moment du couple exercé sur un moment magnétique quelconque .....	x
5. Positions d'équilibre et stabilité .....	x
6. Application aux moteurs .....	x
<b>Méthodes</b> .....	x
<b>Exercices</b> .....	x

## A. Expression de la force de Laplace

Considérons un fil conducteur parcouru par un courant  $I$  (fig. 1) et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Une portion  $d\vec{l}$  de ce conducteur, contenant la charge  $dq$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$ , est soumise à une force élémentaire  $d\vec{F}_L$  donnée par :

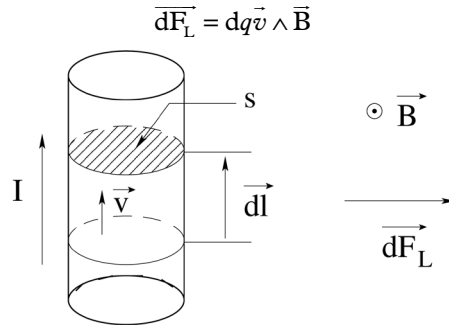


Fig. 1. Conducteur parcouru par un courant  $I$ .

Pour exprimer cette force en fonction de grandeurs directement mesurables, comme l'intensité, considérons une section  $S$  de ce conducteur. La durée  $dt$  nécessaire pour que toute la charge  $dq$  présente dans  $d\vec{l}$  traverse la section  $S$  vérifie :

$$d\vec{l} = \vec{v} dt$$

D'autre part, l'intensité  $I$  est égale à la charge traversant  $S$  par unité de temps. On a donc aussi :

$$dq = Idt$$

ce qui donne :

$$dq\vec{v} = Idt \frac{d\vec{l}}{dt} = Id\vec{l}$$

et donc

$$d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force s'exerce sur les porteurs de charge mobiles et est transmise au conducteur par un mécanisme décrit dans l'exercice 8.

On retiendra donc que :

### Résultat 1

Une portion  $d\vec{l}$  de conducteur filiforme parcourue par un courant  $I$  subit, en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , une force  $d\vec{F}_L$  donnée par :

$$d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$d\vec{l}$  étant orienté dans le même sens que  $I$ .

Cette force est orthogonale au conducteur et au champ magnétique.

On en déduit immédiatement que la force de Laplace subie par un circuit filiforme  $(\Gamma)$ , parcouru par un courant  $I$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , s'écrit :

$$\vec{F}_L = \oint_{\Gamma} Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

**Remarque :** quand un circuit est parcouru par un courant, il crée un champ magnétique. Le champ magnétique à prendre en compte pour le calcul de la force de Laplace est le champ magnétique créé par des sources extérieures au circuit, pas celui créé par le circuit lui-même<sup>2</sup>.

2. En fait, chaque portion de circuit parcourue par un courant crée un champ magnétique et donc exerce une force sur le reste du circuit. Cependant, le reste du circuit exerce aussi une force sur la portion considérée. D'après le principe des actions réciproques, ces forces sont opposées et leur résultante est donc nulle. C'est pourquoi on ne considère que le champ magnétique créé par des sources extérieures au circuit dans l'expression de la force de Laplace. Dans le cas d'un circuit déformable, ces forces intérieures de résultante nulle pourraient cependant déformer le circuit. Cet effet sera considéré comme négligeable dans le reste de ce cours.

## B. Exemple : rails de Laplace

### B.1. Présentation

On considère le dispositif représenté sur la figure 2. Il est constitué d'une barre conductrice rectiligne pouvant se déplacer en translation parallèlement à deux rails parallèles, espacés d'une distance  $l$ , sur lesquels elle est posée. La barre et les deux rails sont reliés à un générateur qui fait circuler un courant  $I$  dans le circuit ainsi formé. L'ensemble est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire, perpendiculaire au plan du circuit.

On cherche à déterminer la résultante et la puissance des forces de Laplace s'exerçant sur la barre.

### B.2. Calcul de la résultante

Dans ce genre de problème, la première chose à faire est d'orienter le circuit, ce qui est fait sur la figure. Il faut bien noter que l'orientation du circuit ne correspond pas forcément au sens réel du courant car celui-ci n'est pas toujours connu ou peut varier au cours du temps. Il s'agit simplement d'un sens conventionnel. Si le sens du courant réel correspond à l'orientation du circuit, alors son intensité est positive. Sinon, elle est négative.

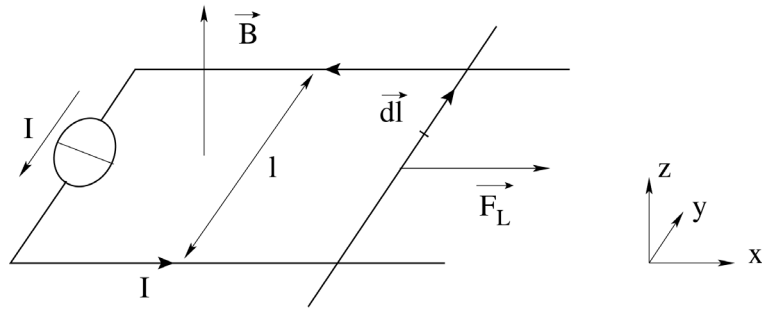


Fig. 2. Dispositif des rails de Laplace.

D'après le paragraphe précédent, la force de Laplace due à  $\vec{B}$  s'exerçant sur la barre s'écrit :

$$\vec{F}_L = \int_{\text{barre}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

L'intégrale sur la barre est en fait limitée à la partie comprise entre les deux rails puisque le courant est nul dans les deux extrémités de la barre dépassant des rails. Ce que l'on appelle « longueur de la barre » dans ce paragraphe doit donc être compris comme étant la longueur comprise entre les deux rails.

Le champ magnétique étant uniforme,  $\vec{B}$  peut être « sorti » de l'intégrale, de même que  $I$ . On a donc :

$$\vec{F}_L = I \left( \int_{\text{barre}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

#### Résultat 2

La force de Laplace s'exerçant sur une barre rectiligne, de longueur  $l$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, s'écrit :

$$\vec{F}_L = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{l} = \int_{\text{barre}} d\vec{l}$  est un vecteur de mêmes direction et longueur que la barre et orienté dans le sens positif choisi.

3. On place le pouce, l'index et le majeur de la main droite à 90° les uns des autres. Le pouce représente alors  $\vec{I}$ , l'index  $\vec{B}$  et le majeur  $\vec{F}_L$ .

4. On ouvre la main droite en plaçant le pouce à plat à 90° des autres doigts.  $\vec{I}$  va du poignet vers le bout des doigts,  $\vec{B}$  est représenté par le pouce et  $\vec{F}_L$  sort de la paume.

5. On rappelle que pour une base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  orthonormée directe, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y &= \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z &= \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x &= \vec{u}_y\end{aligned}$$

6. On a supposé que l'origine de l'axe Ox était prise au niveau du générateur. En fait, la position de l'origine n'a ici aucune importance puisque seule intervient la dérivée de  $\phi$  et donc celle de  $x$ .

La force de Laplace est donc, comme cela a déjà été dit, orthogonale à  $\vec{B}$  et à la barre. Son sens est tel que le trièdre  $(\vec{I}, \vec{B}, \vec{F}_L)$  soit direct. Pour le déterminer, on peut utiliser la règle des 3 doigts<sup>3</sup> ou celle de la main droite<sup>4</sup>.

Avec le système de coordonnées choisi ici, on a<sup>5</sup> :

$$\vec{F}_L = I \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = IB \vec{u}_x$$

### B.3. Point d'application

Par définition, le point d'application de la force de Laplace est le point de la barre par rapport auquel le moment résultant de l'ensemble des forces  $d\vec{F}_L$  est nul.

Considérons le point J, milieu de la barre, et deux points M et N appartenant à la barre et symétriques par rapport à J. Soient  $d\vec{F}_{L,M}$  et  $d\vec{F}_{L,N}$  les forces de Laplace élémentaires s'exerçant sur deux portions de la barre de longueur dl autour de M et N et  $\vec{\Gamma}_{L,M}$  et  $\vec{\Gamma}_{L,N}$  les moments en J correspondants.

D'après le cours de Mécanique, on a :

$$\vec{\Gamma}_{L,M} = \vec{JM} \wedge d\vec{F}_{L,M} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_{L,N} = \vec{JN} \wedge d\vec{F}_{L,N}$$

Or,  $d\vec{F}_{L,M} = d\vec{F}_{L,N}$  et  $\vec{JM} = -\vec{JN}$ , donc

$$\vec{\Gamma}_{L,M} = -\vec{\Gamma}_{L,N}$$

Le moment résultant en J des forces de Laplace s'exerçant en M et N est donc nul. On peut procéder de même pour n'importe quel point M situé sur une moitié de la barre, ce qui permet de conclure que le moment en J des forces de Laplace est nul. On a donc la propriété suivante :

#### Résultat 3

Le point d'application de la force de Laplace s'exerçant sur une barre rectiligne parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique uniforme est le milieu de la barre.

### B.4. Calcul de la puissance

Si on note  $\vec{V} = V\vec{u}_x$  la vitesse de la barre, la puissance  $P_L$  de la force de Laplace s'exprime simplement par :

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{V} = BI/V$$

Dans l'expression précédente, on peut remarquer que la quantité  $B/V$  n'est autre que la dérivée par rapport au temps du flux magnétique  $\phi = Bx$  traversant le circuit auquel appartient la barre mobile<sup>6</sup>. On peut donc aussi exprimer la puissance sous la forme :

$$P_L = I \frac{d\phi}{dt}$$

### B.5. Conclusion

Ce dispositif permet de convertir de l'énergie électrique, fournie par le générateur créant le courant dans le circuit, en énergie mécanique. Un tel dispositif réalisant la transformation d'une forme d'énergie en une autre est appelée un transducteur. Dans ce cas précis, il s'agit d'un premier exemple très rudimentaire de moteur électrique. On verra plus loin des dispositifs permettant de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique.

**Remarque :** La puissance de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule chargée,  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , est nulle car  $\vec{F}$  est orthogonale à  $\vec{v}$ , vitesse de la particule. On pourrait penser qu'il en est de même pour la puissance de la force de Laplace qui trouve son origine dans la force de Lorentz. Ce n'est pas le cas,

car la force de Lorentz a aussi pour conséquence une autre force, parallèle à la barre, et qui agit sur le courant parcourant le circuit. Il s'agit du phénomène d'induction électromagnétique qui sera traité dans la suite de cet ouvrage. Si on sommait les puissances correspondant à ces deux effets, on obtiendrait bien zéro.

## C. Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique

On va établir, dans un premier temps, le résultat dans un cas particulier (spire rectangulaire mobile autour d'un axe). On admettra ensuite sa généralité.

### C.1. Dispositif étudié

On considère une spire rectangulaire, de côtés  $a$  et  $b$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Cette spire est mobile en rotation autour d'un axe  $Oz$  joignant les milieux de deux côtés opposés. Elle est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire perpendiculaire à  $Oz$  (fig. 3). On choisit l'axe  $Ox$  tel que  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ .

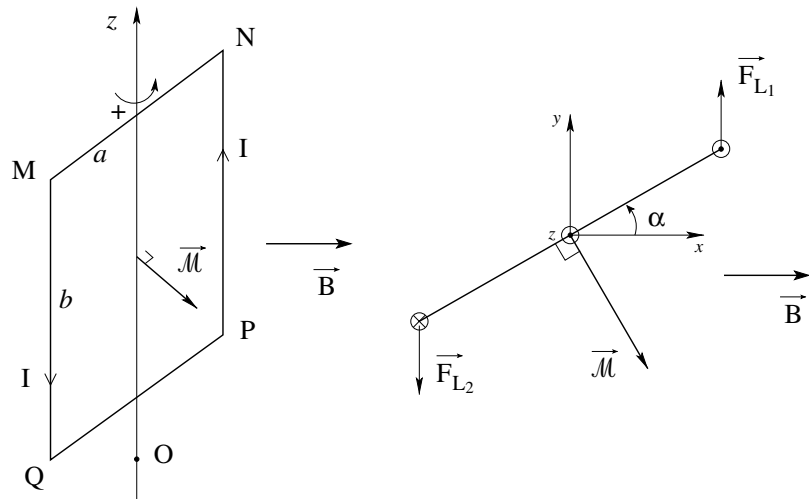


Fig. 3. Spire rectangulaire de moment magnétique  $\vec{M}$  plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .

On a vu que les forces de Laplace sont perpendiculaires au conducteur parcouru par un courant et au champ magnétique. Donc les forces s'exerçant sur les côtés NM et QP sont parallèles à  $Oz$  et ne jouent aucun rôle dans le mouvement de rotation de la spire. Par contre, les forces s'exerçant sur les côtés PN et MQ sont dirigées suivant  $\vec{u}_y$  et peuvent faire tourner le cadre autour de l'axe  $Oz$ .

### C.2. Calcul du moment du couple exercé sur la spire

On exprime tout d'abord la force de Laplace s'exerçant sur le côté PN,  $\vec{F}_{L_1}$ . D'après le résultat 2,

$$\vec{F}_{L_1} = I\vec{PN} \wedge \vec{B} = Ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x = IbB\vec{u}_y$$

Pour le côté MQ, le calcul est identique en remplaçant  $\vec{PN}$  par  $\vec{MQ}$ . La force s'exerçant sur le côté MQ est donc  $\vec{F}_{L_2} = -\vec{F}_{L_1}$ .

7. Attention à ne pas confondre le moment des forces de Laplace avec le moment magnétique du cadre. Bien que portant le même nom, ces deux notions sont très différentes.

8. En fait, comme il a été vu dans le cours de mécanique, le moment d'un couple est indépendant du point ou de l'axe par rapport auquel on le calcule. On a ici particularisé l'axe Oz car c'est autour de cet axe que peut tourner la spire.

9. On rappelle que si  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , alors  $\vec{c}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  et son sens est tel que  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  forme un trièdre direct. Enfin,  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha, \vec{b})$ .

L'ensemble de ces deux forces, de résultante nulle ( $\vec{F}_L = \vec{F}_{L_1} + \vec{F}_{L_2} = \vec{0}$ ), forme un couple de moment<sup>7</sup>  $\Gamma_z$  par rapport à l'axe Oz<sup>8</sup>. D'après le cours de Mécanique, on a :

$$|\Gamma_z| = \|\vec{F}_{L_1}\| d$$

où  $d = a \cos \alpha$  est le bras de levier.

Ici, le moment est de signe positif car le couple tend à faire tourner la spire dans le sens positif défini par l'axe Oz. On a donc :

$$\Gamma_z = IbaB \cos \alpha$$

On peut aussi exprimer  $\Gamma_z$  en fonction du moment magnétique  $\vec{M} = I\vec{S}$  du cadre. On a alors<sup>9</sup> :

$$\Gamma_z = \|\vec{M}\| \|\vec{B}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$$

car  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  est l'angle entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$ .

### C.3. Calcul de la puissance

Ainsi qu'il a été vu dans le cours de Mécanique, la puissance de  $\Gamma_z$  s'écrit

$P_L = \Gamma_z \omega$  où  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  est la vitesse de rotation du cadre. On a donc :

$$P_L = \Gamma_z \frac{d\alpha}{dt} = IbaB \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

On peut ici aussi simplifier cette expression en faisant intervenir le flux  $\theta$  du champ magnétique à travers le cadre. En effet, le champ magnétique étant uniforme, on a  $\phi = BS \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre la normale orientée du cadre et  $\vec{B}$ . Ici, on a donc  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , soit

$$\phi = BS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Bab \sin \alpha$$

et finalement

$$P_L = I \frac{d\phi}{dt}$$

car

$$\frac{d \sin \alpha(t)}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \cdot \cos \alpha(t)$$

On obtient donc la même expression de la puissance que dans le cas des rails de Laplace. Ce n'est bien évidemment pas une coïncidence mais la conséquence d'un théorème qui sort du cadre de cet ouvrage.

### C.4. Moment du couple exercé sur un moment magnétique quelconque

On admettra le résultat général suivant :

#### Résultat 4

Les actions mécaniques s'exerçant sur tout dispositif (bobine, aimant...), décrit par un moment magnétique  $\vec{M}$ , et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire, sont équivalentes à un couple de moment  $\vec{\Gamma}$  tel que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

La résultante de ces actions est donc nulle.

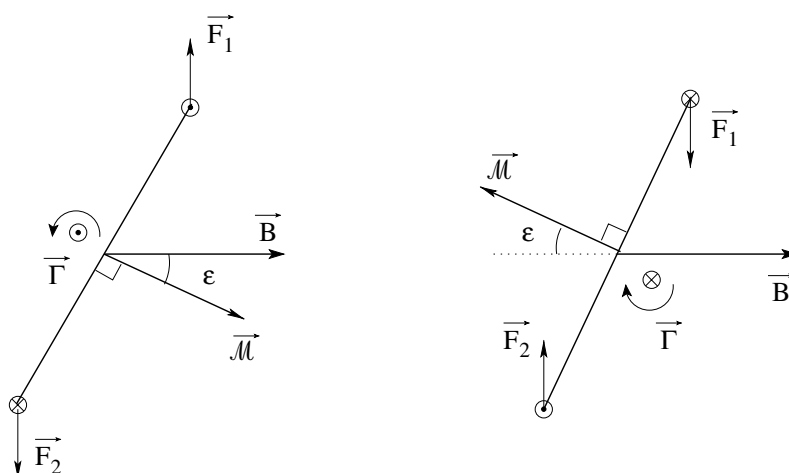
## C.5. Positions d'équilibre et stabilité

D'après le cours de Mécanique, un système est en équilibre si la somme des forces et la somme des moments qui s'exercent sur lui sont toutes les deux nulles. Dans le cas d'un système décrit par son moment magnétique  $\vec{M}$  et soumis à la seule force de Laplace, la première condition est vérifiée et la seconde donne  $\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ . Les positions d'équilibre correspondent donc aux positions pour lesquelles  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, on écarte le dispositif de sa position d'équilibre d'un petit angle  $\varepsilon$ . Si le moment  $\vec{\Gamma}$  tend à ramener le dispositif à l'équilibre, celui-ci est stable. Sinon, il est instable. On voit clairement sur les figures 4 (cas général) et 5 (cas particulier de la spire) que l'équilibre est stable si  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont de même sens.



**Fig. 4.** Quand le moment magnétique et le champ sont de même sens, le couple exercé par  $\vec{B}$  tend à ramener le moment magnétique dans sa position d'équilibre. L'équilibre est donc stable. S'ils sont de sens opposés, une petite modification de position est amplifiée par le couple. L'équilibre est donc instable.



**Fig. 5.** La position d'équilibre stable de la spire correspond au schéma de gauche (champ et moment magnétiques de même sens).

### Résultat 5

Les positions d'équilibre d'un dispositif décrit par un moment magnétique  $\vec{M}$ , et placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$  sont les positions pour lesquelles  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles.

L'équilibre est stable si  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont en plus de même sens.

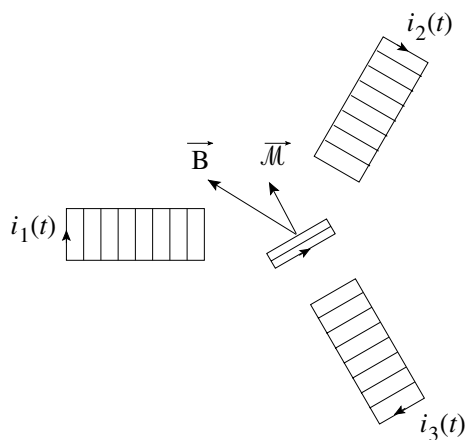
On peut remarquer au passage que la position d'équilibre stable de la spire correspond à celle où le flux magnétique qui la traverse est maximal, la spire étant orientée dans le sens du courant.

Les considérations précédentes rendent compte également du comportement de l'aiguille d'une boussole, qui n'est autre qu'un petit aimant, assimilable à un moment magnétique, qui s'oriente spontanément dans la même direction que le champ magnétique terrestre.

## C.6. Application aux moteurs

On peut utiliser les résultats de ce paragraphe pour concevoir des moteurs électriques. Il est en effet possible de mettre en mouvement un aimant, ou une bobine parcourue par un courant, en la plongeant dans un champ magnétique de direction variable. L'aimant ou la bobine se met alors à tourner pour que son moment magnétique s'aligne avec le champ magnétique.

La figure 6 propose un exemple de moteur dans lequel un ensemble de trois bobines parcourues par des courants alternatifs créent un champ magnétique tournant, c'est-à-dire un champ magnétique de module constant dont la direction varie régulièrement au cours du temps. Un tel dispositif constitue le stator, ou partie fixe, du moteur et peut provoquer la rotation d'un rotor, ou partie mobile, constitué d'un aimant permanent ou d'une bobine parcourue par un courant. Un exemple de moteur sera étudié dans l'exercice 10.



**Fig. 6.** Les courants  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et  $i_3(t)$  parcourant les 3 bobines sont déphasés de  $\frac{2\pi}{3}$  créent un champ tournant au niveau de la bobine de moment magnétique  $\vec{M}$ . Cette dernière est donc entraînée en rotation par le champ magnétique.



## L'essentiel

- Un conducteur, parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, subit de la part de celui-ci une force appelée force de Laplace.
- La force de Laplace élémentaire, notée  $d\vec{F}_L$ , qui s'exerce sur une portion  $d\vec{l}$  d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit:

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

- Dans le cas où le conducteur est une barre rectiligne de longueur  $l$  entièrement plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, la force de Laplace  $\vec{F}_L$  s'exerçant sur la barre s'écrit:

$$\vec{F}_L = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{l}$  est un vecteur de même direction que la barre, de même sens que le courant et tel que  $\|\vec{l}\| = l$ .

Cette force s'applique au milieu de la barre.

- Un système quelconque, pouvant être décrit par son moment magnétique  $\vec{M}$ , et plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , est soumis à un couple (ensemble de forces de résultante nulle) de moment  $\vec{\Gamma}$  tel que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

- Les positions d'équilibre d'un tel système soumis à la seule action du champ magnétique sont les positions où  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles. L'équilibre est stable si, de plus,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont de même sens.

# Mise en œuvre

## Méthode n°1

### Comment calculer la résultante et la puissance d'une force de Laplace s'exerçant sur une barre placée dans un champ magnétique uniforme ?

Soit une barre conductrice de longueur  $l$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  et placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . On cherche la force  $\vec{F}_L$  exercée par  $\vec{B}$  sur cette barre.

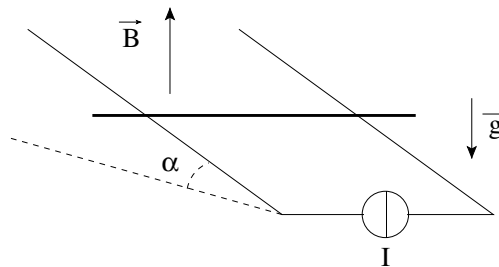
#### → Savoir faire

Tout repose sur la formule  $\vec{F}_L = I\vec{l} \wedge \vec{B}$  qu'il faut savoir utiliser sans erreur.

- ❶ Orienter la barre, et donc le vecteur  $\vec{l}$ , dans le sens choisi pour le courant. Si seule une portion de la barre est parcourue par un courant ou plongée dans un champ magnétique,  $l$  est égale à la longueur de cette portion.
- ❷ La force  $\vec{F}_L$  est orthogonale à la fois à la barre et au champ magnétique.
- ❸ Le sens de  $\vec{F}_L$  est tel que le trièdre  $(\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}_L)$  est direct. On peut le déterminer en utilisant, par exemple, la règle de la main droite.
- ❹ La norme de  $\vec{F}_L$  est donnée par  $\|\vec{F}_L\| = I l B |\sin(\vec{l}, \vec{B})|$ . Dans de nombreux cas, le champ  $\vec{B}$  sera orthogonal à la barre et on aura simplement  $\|\vec{F}_L\| = I l B$ .
- ❺ Enfin, dans le cas le plus fréquent où la barre a un mouvement de translation de vitesse  $\vec{V}$ , la puissance de  $\vec{F}_L$  est  $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{V}$ .

#### → Application

On considère un montage des rails de Laplace incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à un plan horizontal. Sur ces deux rails parallèles se trouve une barre mobile en translation dans la direction des rails. On appelle  $l$  la distance séparant les deux rails et  $m$  la masse de la barre. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, dirigé selon la verticale et indépendant du temps. Un générateur impose un courant  $I$  constant dans le circuit formé par les rails et la barre. On négligera tous les frottements. On prendra  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour l'accélération de la pesanteur.



1. La barre est initialement immobile. Faire un schéma représentant les 3 forces permettant l'équilibre et en déduire le sens du courant circulant dans la barre.
  2. Déterminer la valeur  $I_0$  de l'intensité du courant à l'équilibre.
- A.N :**  $B = 1 \text{ T}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m = 20 \text{ g}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ .

3. On impose maintenant  $I = 1,1 I_0$ . Quel est le mouvement de la barre ? Déterminer son accélération en fonction de  $g$  et de  $\alpha$ .

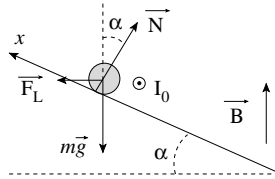
4. Exprimer la puissance de la force de Laplace et calculer son travail pendant une durée  $\Delta t$ .  
**A.N :**  $\Delta t = 1$  s.

### Solution

❶ Les 3 forces agissant sur la barre sont le poids  $m\vec{g}$ , la réaction des rails  $\vec{N}$ , normale au plan des rails et la force de Laplace  $\vec{F}_L$ , orthogonale à la fois à la barre et à  $\vec{B}$ . La barre étant en équilibre, on doit avoir :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_L = \vec{0},$$

ce qui impose le sens de  $\vec{F}_L$  et donc celui de  $I_0$ . Les vecteurs représentant les forces ainsi que le sens de  $I_0$  sont précisés sur le schéma ci-dessous.



❷ En projetant la relation de la question précédente sur le plan des rails, on obtient :

$$F_L \cos \alpha = mg \sin \alpha,$$

soit, comme  $F_L = I_0/B$ ,

$$I_0 = \frac{mg \tan \alpha}{B} = 0,58 \text{ A}$$

❸ Il y a rupture de l'équilibre, la barre monte le long des rails (mouvement dans le sens des  $x$  croissants). Son accélération  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$  est donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_L = m\vec{a}$$

En projetant sur les rails (axe  $Ox$ ), on obtient :

$$1,1I_0/B \cos \alpha - mg \sin \alpha = m\ddot{x}$$

Comme, d'après la question précédente,  $I_0/B = mg \tan \alpha$ , on a finalement :

$$\ddot{x} = 0,1g \sin \alpha = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

On posera dans la suite  $a = 0,1g \sin \alpha$ .

❹ La puissance de la force de Laplace,  $P_L$ , agissant sur la barre animée d'une vitesse  $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$  est donnée par :

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 1,1(I_0/B)\dot{x} \cos \alpha = 1,1(mg \tan \alpha)\dot{x} \cos \alpha = 1,1mg\dot{x} \sin \alpha$$

On obtient  $\dot{x}(t)$  en intégrant  $\ddot{x}$ , ce qui donne

$$\dot{x}(t) = at$$

en prenant l'origine des temps au début du mouvement, de façon à avoir  $\dot{x}(t=0) = 0$ .

Le travail  $W_L$  de  $\vec{F}_L$  entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  est alors donné par:

$$W_L = \int_{t=0}^{\Delta t} P_L dt = 1,1mg a \sin \alpha \int_{t=0}^{\Delta t} t dt = 1,1mg a \sin \alpha \frac{\Delta t^2}{2} = 0,074 \text{ J}$$

## Méthode n°2

### Comment déterminer le mouvement d'une spire mobile autour d'un axe sous l'action d'un champ magnétique ?

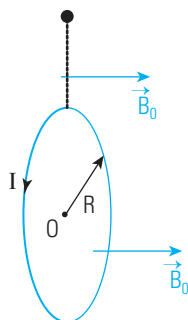
Soit une spire parcourue par un courant  $I$ , ou tout autre dispositif caractérisé par son moment magnétique  $\vec{M}$ , placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  et pouvant tourner autour d'un axe fixe  $\Delta$ . La spire n'est initialement pas dans une position d'équilibre. On cherche à déterminer sa position en fonction du temps, position caractérisée par l'angle  $\theta(t) = (\vec{B}, \vec{M})$ .

#### → Savoir faire

- ① Déterminer le moment des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation,  $\Gamma_\Delta$ . Si  $\vec{u}_\Delta$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ , on a  $\Gamma_\Delta = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta$ .
- ② On applique ensuite le théorème du moment cinétique qui donne :  $J_\Delta \ddot{\theta} = \Gamma_\Delta$ , où  $J_\Delta$  est le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe  $\Delta$ . Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle...

#### → Application

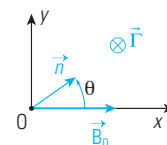
On suspend à un fil sans torsion une spire circulaire de masse  $m$ , de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe du fil, de rayon  $R$ , et parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Elle est plongée dans le champ magnétique terrestre, supposé uniforme, horizontal et de valeur  $B_0$ .



1. Exprimer le moment magnétique de la spire. Quelle est sa position d'équilibre stable ?
2. On l'écarte d'un petit angle  $\theta_0$  à partir de sa position d'équilibre, puis on la lâche à l'instant  $t = 0$  sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement ultérieur de la spire.
3. Montrer que l'on peut mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

#### Solution

① La spire se trouve dans un plan vertical, donc sa normale  $\vec{n}$  orientée (conformément au sens de l'intensité et à la règle du tire-bouchon) est un vecteur unitaire horizontal. Soit  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{n}$  avec l'axe  $(Ox)$  directeur du champ magnétique  $\vec{B}_0$ .



Le moment magnétique de la spire s'écrit :

$$\vec{M} = I\vec{S} = \pi R^2 I \vec{n}.$$

Elle subit une force résultante nulle et un moment résultant :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \text{ soit } \vec{\Gamma} = M \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -MB_0 \sin\theta \vec{u}_z.$$

L'équilibre a lieu lorsque  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ , c'est-à-dire lorsque  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

- Lorsque  $\theta \approx 0$ , le moment tend à faire tourner dans le sens opposé de l'angle : la position  $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable car le moment de la force a tendance à ramener la spire sur sa position d'équilibre.

- Lorsque  $\theta \approx \pi$ , on peut écrire  $\theta = \pi + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \approx 0$ . On a alors :

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{M}B_0 \sin \varepsilon \vec{u}_z$$

et le moment tend à faire tourner dans le même sens que l'angle  $\varepsilon$  : l'équilibre est instable car le moment de la force ne ramène pas la spire sur sa position d'équilibre.

② Le mouvement de la spire ne peut être que de rotation, vu qu'elle ne subit qu'un moment. Écrivons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) de rotation (axe du fil), la variable de rotation étant l'angle  $\theta$  :

$$J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = -\mathcal{M}B_0 \sin \theta \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = -\mathcal{M}B_0 \sin \theta,$$

on obtient l'équation différentielle :  $\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B_0 \sin \theta}{J} = 0$ , soit aux petits angles :  $\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B_0}{J} \theta = 0$ .

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants pour laquelle on sait écrire la solution générale :

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi), \text{ avec } \omega^2 = \frac{\mathcal{M}B_0}{J}.$$

On détermine les constantes  $A$  et  $\phi$  à partir des conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, \theta(0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0.$$

D'où  $\theta_0 = A \cos \phi$  et  $0 = A \sin \phi$ , soit  $\phi = 0$  et  $A = \theta_0$ . La solution s'écrit finalement :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t).$$

Elle correspond physiquement à des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

③ La période du mouvement vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_0}}.$$

En mesurant la période avec un simple chronomètre, et en connaissant les caractéristiques mécanique (moment d'inertie  $J$ ) et électromagnétique (intensité  $I$  et résistance  $R$  donne  $\mathcal{M} = \pi R^2 I$ ), on peut déduire la valeur de  $B_0 = \frac{4\pi^2 J}{\mathcal{M} T^2}$ .

# Exercices

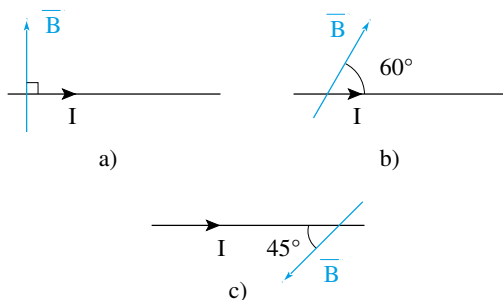
## Vrai/Faux

- 1) La force de Laplace s'exerçant sur une tige rectiligne parcourue par un courant électrique est toujours orthogonale à la tige.
- 2) La force de Laplace est toujours une force motrice.
- 3) Une spire parcourue par un courant électrique et placée dans un champ magnétique uniforme tend à s'orienter de façon à ce que sa normale soit orthogonale au champ.
- 4) L'aiguille d'une boussole est un petit aimant qui s'oriente parallèlement aux lignes de champ magnétique.

## Niveau 1

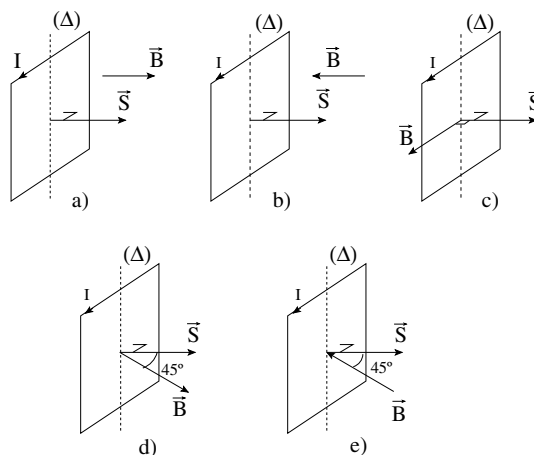
### Ex. 1 Calcul de forces de Laplace

Une portion de conducteur rectiligne, de longueur  $l$ , parcourue par un courant  $I$ , est placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Représenter le vecteur représentant la force de Laplace et calculer sa norme dans les 3 cas suivants. On donne  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $B = 0,5 \text{ T}$  et  $I = 2 \text{ A}$ .



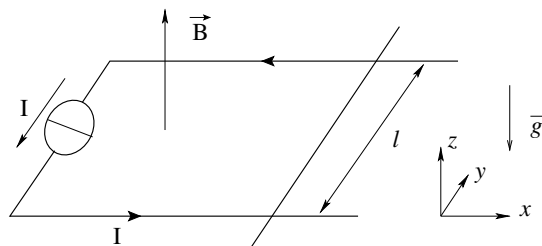
### Ex. 2 Action des forces de Laplace sur une spire

Soit une spire rectangulaire, parcourue par un courant d'intensité  $I$ , pouvant tourner autour d'un axe  $(\Delta)$ . Cette spire est soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et orthogonal à  $(\Delta)$ . On considère les 5 cas représentés sur la figure ci-dessous. Pour chacun de ces cas, on demande de déterminer s'il s'agit d'une position d'équilibre (stable ou instable) et, sinon, le sens dans lequel va s'effectuer la rotation sous l'action des forces de Laplace. Le vecteur  $\vec{S}$  est le vecteur surface du cadre orienté dans le sens du courant  $I$ .



### Ex. 3 Rails de Laplace

On considère le montage classique des rails de Laplace placé dans un plan horizontal, tel que décrit sur la figure ci-dessous. On note  $l$  l'écartement entre les rails et  $m$  la masse de la tige. À  $t = 0$ , la barre est immobile et située en  $x = 0$ . Les frottements seront négligés.

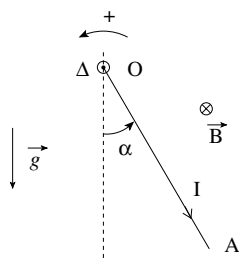


- 1) Faire un schéma en représentant les trois forces s'exerçant sur la tige.
- 2) Déterminer la position de la tige en fonction du temps,  $x(t)$ . On posera  $a = \frac{I/B}{m}$ .
- 3) Exprimer le travail  $W_L$  de la force de Laplace entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  en fonction de  $m$ ,  $a$  et  $\Delta t$ .
- 4) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique. On supposera que la barre a un mouvement de translation et donc que son énergie cinétique de rotation est nulle.
- 5) Modifier l'expression obtenue précédemment pour le travail afin d'y faire apparaître la variation de flux de  $\vec{B}$  entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  et vérifier ainsi la formule donnée en cours.

### Ex. 4 Moment des forces de Laplace sur une tige

Une tige conductrice  $OA$ , homogène, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , est mobile en rotation autour d'un

axe horizontal  $\Delta$ , passant par son extrémité O. Un dispositif non représenté sur la figure permet de faire circuler un courant stationnaire d'intensité  $I$  dans la tige, qui est de plus soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , parallèle à  $\Delta$ . On négligera les frottements. On note  $\alpha$  l'angle entre la verticale et la direction de la tige.



- 1) Quelles sont les trois forces s'exerçant sur la tige ? Déterminer les expressions de leurs moments par rapport à  $\Delta$ .
- 2) Déterminer l'expression de  $\alpha$  lorsque la tige est à l'équilibre,  $\alpha_{eq}$ , en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $I$  et  $B$ .
- 3) A.N :  $B = 0,1 \text{ T}$ ,  $I = 5 \text{ A}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $m = 20 \text{ g}$  et  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## Niveau 2

### Ex. 5 Force de Laplace et fil de torsion

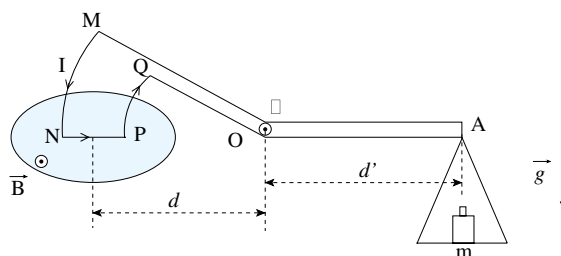
On considère une bobine plate carrée, de côté  $a = 10 \text{ cm}$  et comportant  $N = 100$  spires. Cette bobine est suspendue par le milieu d'un de ses côtés à un fil de torsion de constante  $C$  dans une zone où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et orthogonal au fil. À  $t = 0$ , la bobine est en équilibre. On établit alors un courant d'intensité  $I = 0,3 \text{ A}$  constante dans la bobine. La bobine se met alors en mouvement puis finit par s'immobiliser dans une nouvelle position d'équilibre. On note  $\alpha_{eq}$  l'angle entre la position initiale de la bobine et sa nouvelle position d'équilibre.

- 1) Faire un schéma de la bobine dans sa nouvelle position d'équilibre en indiquant le sens du courant.
- 2) Déterminer l'équation dont est solution  $\alpha_{eq}$ .
- 3) Résoudre numériquement l'équation précédente et déterminer  $\alpha_{eq}$  sachant que  $B = 0,1 \text{ T}$  et  $C = 0,05 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

### Ex. 6 Balance de Cotton

Une balance de Cotton (figure ci-dessous) est un dispositif utilisé autrefois pour la mesure de champs magnétiques dans des zones où ils étaient à peu près uniformes. Elle est constituée d'une tige coudée mobile en rotation autour d'un axe  $\Delta$  passant par O et ortho-

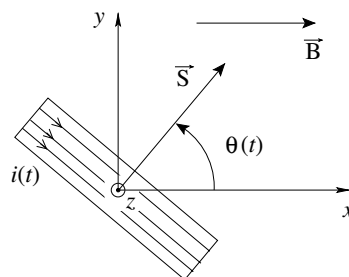
gonal à la figure. Les parties MN et PQ sont des arcs de cercle centrés en O. La partie MNPQ est parcourue par un courant d'intensité  $I$ , créé par un générateur non représenté sur la figure. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est supposé uniforme et localisé dans la zone grisée contenant NP. L'équilibre de la balance est réalisé à l'aide de masses marquées que l'on place dans le plateau situé à l'extrémité A du fléau. À l'équilibre, OA et NP sont horizontaux. On note  $d$  la distance entre O et le milieu de NP, et  $d'$  la distance OA. On posera  $l = NP$ .



- 1) Montrer que les moments par rapport à  $\Delta$  des forces de Laplace s'exerçant sur  $\overline{MN}$  et  $\overline{PQ}$  sont nuls.
- 2) Déterminer le moment par rapport à  $\Delta$  de la force de Laplace s'exerçant sur NP en fonction de  $I$ ,  $B$ ,  $l$  et  $d$ , lorsque l'équilibre est réalisé.
- 3) En déduire la relation existant entre  $B$ ,  $I$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $d'$ ,  $g$  et la masse  $m$  permettant de réaliser l'équilibre.
- 4) A.N :  $d = d'$ ,  $I = 15 \text{ A}$ ,  $m = 11,3 \text{ g}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $l = 7 \text{ cm}$ .

### Ex. 7 Bobine en rotation

On considère une bobine carrée de côté  $a$ , comportant  $N$  spires, en rotation à vitesse constante  $\omega$  autour d'un axe  $Oz$  reliant les milieux de deux côtés opposés (cf. figure). Cette bobine est parcourue par un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$  et plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . À  $t = 0$ , la normale à la bobine,  $\vec{n}$ , est parallèle à  $\vec{B}$  et de même sens.

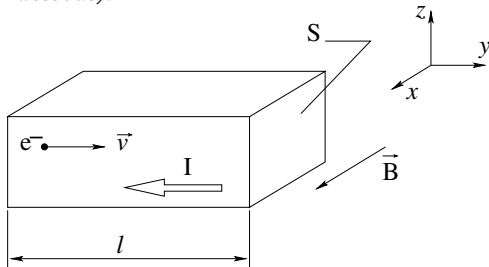


- 1) Soit  $\theta(t)$  l'angle  $(\vec{u}_x, \vec{S})$ . Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\omega$ .
- 2) Déterminer le moment du couple exercé par les forces de Laplace sur la bobine en fonction de  $I_0$ ,  $a$ ,  $B$ ,  $N$ ,  $\omega$  et  $t$ . Ce couple est-il moteur ou résistant ?

3) En déduire l'expression du couple moteur  $\Gamma_m$  nécessaire pour entretenir la rotation de la bobine à vitesse constante. Quelle est sa puissance moyenne ?

### Ex. 8 Effet Hall

On considère un conducteur parallélépipédique de longueur  $l$ , de section  $S$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Ce conducteur est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_x$  orthogonal à  $I$  (cf. figure ci-dessous).



- 1) Exprimer la force de Laplace à laquelle est soumis ce conducteur en fonction de  $I$ ,  $B$  et  $l$ .
- 2) Le courant électrique est assuré par le déplacement d'électrons de charge  $-e$ , se déplaçant à une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_y$ . Exprimer la force  $\vec{f}$  exercée sur un électron par le champ magnétique en fonction de  $e$ ,  $v$  et  $B$ . Quel effet va avoir cette force sur les électrons ?
- 3) À cause de la présence du champ magnétique, il apparaît un excès de charges négatives sur une des faces du conducteur et de charges positives sur l'autre face, de façon à ce que la neutralité globale du conducteur soit respectée. Cette répartition de charges crée un champ électrique  $\vec{E}_H$ . Donner l'expression de  $\vec{E}_H$  en fonction de  $\vec{v}$  et de  $\vec{B}$  pour que les électrons se déplacent bien parallèlement à  $\vec{u}_y$ .
- 4) Exprimer la résultante des forces exercées sur le conducteur (électrons mobiles plus ions fixes) en fonction de  $e$ ,  $v$ ,  $B$ ,  $S$ ,  $l$  et  $n$ , nombre d'électrons, et donc aussi nombre d'ions, par unité de volume.
- 5) Exprimer  $I$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $v$  et  $S$  et retrouver l'expression de la force de Laplace à partir de l'expression établie à la question précédente.

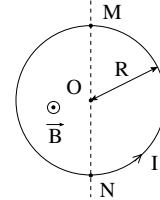
**Remarque :** Le champ électrique  $\vec{E}_H$  crée une différence de potentiel  $U_H$  proportionnelle à  $B$  entre les deux faces du conducteur. La mesure de cette tension permet donc de déterminer le champ magnétique. C'est le principe des sondes à effet Hall.

## Niveau 3

### Ex. 9 Force de Laplace sur une spire circulaire

On considère une spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par un courant constant d'intensité  $I$ .

Cette spire est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, parallèle à son axe. On supposera que le champ magnétique créé par la spire est négligeable devant  $\vec{B}$ . On veut déterminer l'expression de la résultante  $\vec{F}_L$  de la force de Laplace s'exerçant sur une moitié de spire délimitée par un diamètre  $MN$ .



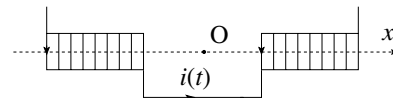
- 1) Déterminer l'expression (norme, direction et sens) de la force  $d\vec{F}_L$  s'exerçant sur une longueur élémentaire de spire  $d\vec{l}$ .
- 2) Montrer sans calcul que  $\vec{F}_L$  est orthogonale à  $MN$ .
- 3) Déterminer l'expression de  $F_L$  en fonction de  $I$ ,  $B$  et  $R$ .
- 4) **A.N :**  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $B = 0,5 \text{ T}$  et  $I = 5 \text{ A}$ .

### Ex. 10 Moteur synchrone (d'après CCP 2004)

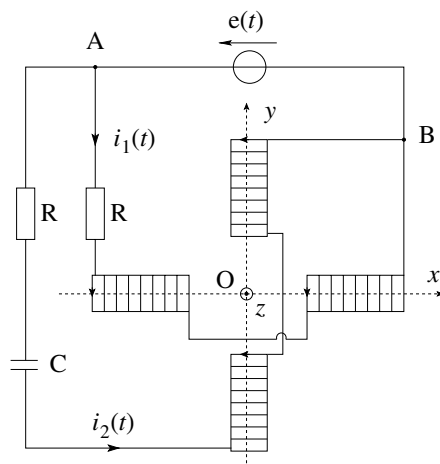
Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

#### A. Production d'un champ tournant

On constitue un système (S) avec deux solénoïdes identiques de même axe  $Ox$  parcourus dans le même sens par le même courant d'intensité  $i$  (figure ci-dessous).



On admet que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé au centre de l'ensemble, O, est de la forme  $\vec{B}(t) = K i(t) \vec{u}_x$ , où  $K$  est une constante. Du point de vue électrique, un tel système est équivalent à une inductance  $L$  et à une résistance  $r$  en série.





On réalise maintenant le système ( $\Sigma$ ), représenté sur la figure ci-dessus, comportant deux systèmes identiques à (S) et d'axes  $Ox$  et  $Oy$  orthogonaux. La fém du générateur s'écrit  $e(t) = E \cos \omega_0 t$ . La capacité  $C$  permet de déphaser les courants  $i_1(t) = I_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$  et  $i_2(t) = I_2 \cos(\omega_0 t - \varphi_2)$  parcourant les deux systèmes (S).

1) Représenter le circuit électrique équivalent au système ( $\Sigma$ ).

2) Écrire les grandeurs complexes correspondant à  $e(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

3) Montrer que  $I_1 = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + L^2 \omega_0^2}}$  et  $\tan \varphi_1 = \frac{L \omega_0}{R+r}$ .

4) Montrer que  $I_2 = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L \omega_0 - \frac{1}{C \omega_0}\right)^2}}$

$$\text{et } \tan \varphi_2 = \frac{L \omega_0 - \frac{1}{C \omega_0}}{R+r}.$$

5) a) En déduire les expressions de  $R$  et  $C$  en fonction de  $L$ ,  $r$  et  $\omega_0$  pour que l'on ait  $I_1 = I_2$  et  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ .

On rappelle que  $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$ .

b) Les conditions de la question précédente sont supposées remplies dans toute la suite de l'exercice. On pose  $I = I_1 = I_2$ . Déterminer  $I$  en fonction de  $E$ ,  $L$  et  $\omega_0$  et montrer qu'on a  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ .

6) a) Déterminer l'expression des composantes sur  $Ox$  et  $Oy$  du champ magnétique en O,  $\vec{B}(t)$ .

b) Déterminer son module  $B_T$  en fonction de  $E$ ,  $K$  et  $L \omega_0$ .

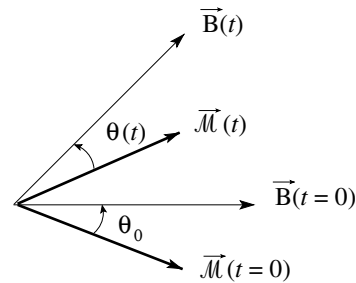
c) Justifier l'appellation de « champ tournant » pour  $\vec{B}(t)$ . À quelle vitesse tourne-t-il ?

### B. Entraînement du rotor

Le rotor, ou partie mobile, du moteur synchrone est

une bobine parcourue par un courant continu et assimilable à un moment magnétique  $\vec{M}$ , de module  $M_0$  constant. Il est placé en O et on le suppose animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante.

Le rotor est soumis au champ magnétique  $\vec{B}(t)$ , de norme constante  $B_T$ , et tournant lui aussi autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\omega_0$ , qui est *a priori* différente de  $\omega$ . On appelle  $\theta(t)$  l'angle  $(\vec{M}, \vec{B})$  et on note  $\theta(t=0) = \theta_0$  (cf. figure ci-dessous).



1) Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $t$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\theta_0$ . En déduire la valeur instantanée  $\vec{\Gamma}(t)$  du moment du couple exercé par  $\vec{B}$  sur le rotor.

2) Calculer la valeur moyenne temporelle de  $\vec{\Gamma}(t)$  dans le cas où  $\omega = \omega_0$ . En déduire que le moteur ne fonctionne correctement que si  $\omega = \omega_0$ . On supposera cette condition vérifiée dans la suite de l'exercice. Exprimer alors  $\Gamma$  en fonction de  $M_0$ ,  $B_T$  et  $\theta_0$ .

3) Quelle est alors la puissance mécanique moyenne fournie,  $P_m$  ? Quelle condition doit vérifier  $\theta_0$  pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?

## Indications

### Ex 3

2) Utiliser le principe fondamental de la dynamique.

### Ex 4

La valeur absolue du moment d'une force par rapport à un axe est égale à la norme de la force multipliée par le bras de levier. Le signe est positif si la force tend à faire tourner le système dans le sens positif choisi dans l'exercice, négatif sinon.

### Ex 5

Un fil de torsion exerce un couple de moment  $-\alpha\alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle dont a tourné le fil.

### Ex 6

Une force dont la droite d'action passe par l'axe a un moment nul par rapport à cet axe.

### Ex 8

Une particule de charge  $q$ , se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  et placée dans une zone où existe un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$ , subit une force  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

### Ex 9

3) Puisqu'on connaît la direction de la résultante, il suffit de sommer les composantes des forces élémentaires parallèles à cette direction.

# Solutions des exercices

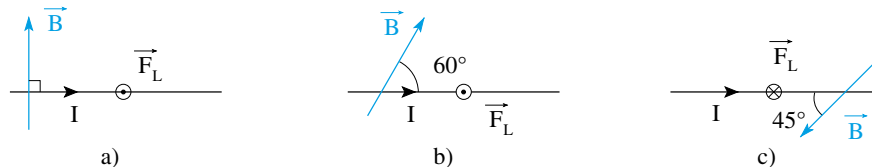
## Exercices de Vrai/Faux

- 1) Vrai.
- 2) Faux. Elle est motrice dans le cas d'un moteur électrique mais on verra d'autres dispositifs dans lesquels son travail est résistant.
- 3) Faux. Le moment magnétique de la spire, parallèle à sa normale, tend à s'orienter parallèlement au champ magnétique.
- 4) Vrai.

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

La force de Laplace s'exerçant sur une tige,  $\vec{F}_L$ , est donnée par  $\vec{F}_L = I\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Elle est donc orthogonale à la fois à la tige et au champ magnétique. Son sens est tel que  $(\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}_L)$  forme un trièdre direct. Les forces de Laplace correspondant aux 3 cas de l'exercice sont représentées sur la figure ci-dessous.



On a de plus  $\|\vec{F}_L\| = F_L = I/B |\sin(\vec{l}, \vec{B})| = 0,1 |\sin(\vec{l}, \vec{B})|$ . Donc,

$$F_{L_a} = 0,1 \times \sin(90^\circ) = 0,1 \text{ N},$$

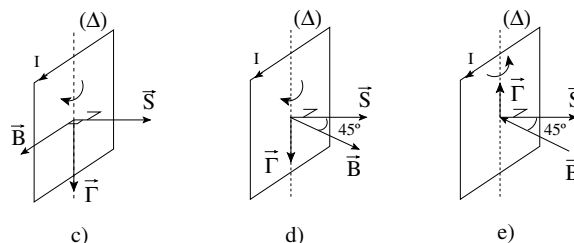
$$F_{L_b} = 0,1 \times \sin(60^\circ) = 0,087 \text{ N},$$

$$F_{L_c} = 0,1 \times \sin(135^\circ) = 0,071 \text{ N},$$

### Exercice 2

L'action des forces de Laplace sur la spire est celle d'un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = I\vec{S} \wedge \vec{B}$ . Les positions d'équilibre correspondent donc aux cas où  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  sont parallèles et on a vu dans le cours que l'équilibre est stable si  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  sont dans le même sens, et instable sinon. Le cas **a)** correspond donc à un équilibre stable et le cas **b)** à un équilibre instable.

Dans les 3 autres cas, la spire est mise en rotation par le champ magnétique dans un sens déterminé par celui de  $\vec{\Gamma}$  comme cela est précisé dans la figure ci-dessous.



### Exercice 3

1) Les trois forces s'exerçant sur la tige sont :

- son poids  $m\vec{g}$ ,
- la réaction des rails,  $\vec{N}$ , orthogonale aux rails,
- la force de Laplace,  $\vec{F}_L = I\vec{l} \wedge \vec{B} = I l B \vec{u}_x$ .

2) Pour obtenir  $x(t)$ , on utilise le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit ici :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_L = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

En projetant sur l'axe  $Ox$ , puisque  $m\vec{g}$  et  $\vec{N}$  sont orthogonaux à cet axe, il reste :

$$\ddot{x} = \frac{F_L}{m} = \frac{I l B}{m} = a$$

On obtient alors  $x(t)$  en intégrant deux fois et en tenant compte des conditions initiales :  $\dot{x}(0) = 0$  et  $x(0) = 0$ , ce qui donne :

$$\dot{x}(t) = at \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

3) Le travail de la force de Laplace s'obtient en intégrant sa puissance entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$ , soit :

$$W_L = \int_{t=0}^{\Delta t} I l B \dot{x}(t) dt = (ma) \int_{t=0}^{\Delta t} t dt = ma^2 \frac{\Delta t^2}{2}$$

4) Le poids et la réaction sont toutes donc orthogonales à la vitesse, donc leur travail est nul. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc, entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  :

$$\frac{1}{2}m(a\Delta t)^2 - 0 = W_L$$

donc

$$W_L = \frac{1}{2}ma^2\Delta t^2$$

5) La variation de flux magnétique  $\Delta\phi$  dans le circuit, entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  est égale à la variation de surface du circuit multipliée par le champ magnétique puisque ce dernier est uniforme et orthogonal au circuit. On a donc :

$$\Delta\phi = Bl(x(\Delta t) - x(0)) = Bl \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{ma}{I} \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2} \frac{ma^2\Delta t^2}{I}$$

D'où on tire,

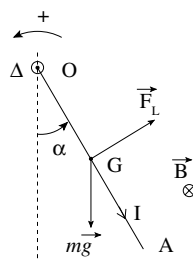
$$W_L = I\Delta\phi$$

et on vérifie donc la formule donnée en cours pour la puissance  $P_L$  de la force de Laplace :  $P_L = I \frac{d\phi}{dt}$  qui donne bien par intégration  $W_L = I\Delta\phi$ .

### Exercice 4

1) La tige est soumise à :

- la réaction de l'axe, qui s'applique en  $O$ , et a donc un moment nul par rapport à l'axe  $\Delta$ ,
- son poids,  $\vec{P} = m\vec{g}$ , qui s'applique au point  $G$ , centre de masse de la tige ;
- la force de Laplace  $\vec{F}_L = I\vec{l} \wedge \vec{B}$ , orthogonale à la tige et qui s'applique en son milieu. La tige étant homogène, le milieu est confondu avec le centre de masse.



La valeur absolue du moment d'une force par rapport à un axe est égale à la norme de la force multipliée par le bras de levier, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de la force et l'axe.

Pour le poids, cette distance vaut  $\frac{1}{2}l \sin \alpha$ . Elle vaut  $\frac{1}{2}$  pour la force de Laplace. Le signe du moment est positif s'il tend à faire tourner la tige dans le sens positif choisi dans l'énoncé, négatif sinon. On a donc, pour le poids :

$$\Gamma_{\text{poids}} = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha$$

et pour la force de Laplace :

$$\Gamma_L = I/B \times \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I l^2 B$$

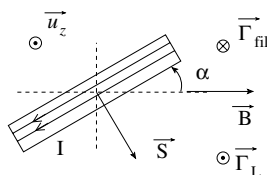
2) À l'équilibre, la somme des moments est nulle, ce qui donne:

$$\sin(\alpha_{\text{eq}}) = \frac{I/B}{mg}$$

$$3) \alpha_{\text{eq}} = a \sin\left(\frac{5 \times 0,1 \times 0,1}{0,02 \times 9,8}\right) = 0,26 \text{ rad} = 15^\circ$$

## Exercice 5

1) Le sens du courant doit être tel que le moment du couple de torsion du fil,  $\vec{\Gamma}_{\text{fil}}$ , et celui des forces de Laplace,  $\vec{\Gamma}_L$  soient de sens opposés. Si on introduit un axe  $Oz$  parallèle au fil, on a, avec les conventions de sens de la figure ci-dessous,  $\vec{\Gamma}_{\text{fil}} = -C\alpha \vec{u}_z$ . Or,  $\vec{\Gamma}_L = NI\vec{S} \wedge \vec{B}$ , où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de la bobine, orienté d'après le sens de  $I$ . On en déduit donc le sens de  $I$ .



2) La bobine étant en équilibre, on a :

$$\vec{\Gamma}_{\text{fil}} + \vec{\Gamma}_L = \vec{0},$$

soit

$$-C\alpha_{\text{eq}} + NIa^2B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{\text{eq}}\right) = 0$$

On a donc

$$C\alpha_{\text{eq}} = NIa^2B \cos(\alpha_{\text{eq}})$$

3) Une résolution numérique donne  $\alpha_{\text{eq}} \approx 30^\circ$ .

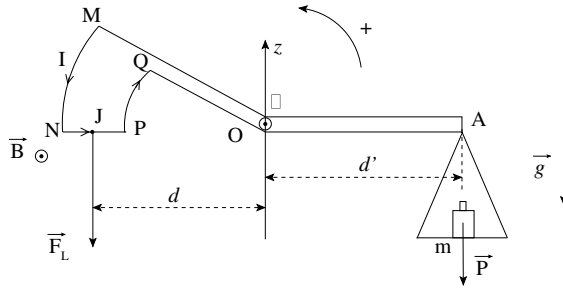
## Exercice 6

1) Considérons une portion élémentaire  $dl$  quelconque sur un des arcs  $\widehat{MN}$  ou  $\widehat{PQ}$ . La force de Laplace élémentaire,  $d\vec{F}_L$  s'exerçant sur  $dl$  s'écrit  $d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Elle est orthogonale à  $dl$  et donc à l'arc de cercle auquel  $dl$  appartient. La droite support de  $d\vec{F}_L$  passe donc par le centre du cercle, c'est-à-dire par le point  $O$ , intersection de l'axe  $\Delta$  avec le plan de figure. Le moment de  $d\vec{F}_L$  par rapport à  $\Delta$  est donc nul.

Le résultat précédent étant valable quelque soit  $dl$ , on en déduit que les forces de Laplace s'exerçant sur  $\widehat{MN}$  et  $\widehat{PQ}$  ont un moment nul par rapport à  $\Delta$ .

2) Soit  $Oz$  un axe vertical dirigé vers le haut. D'après le cours, la force de Laplace  $\vec{F}_L$  s'exerçant sur  $NP$ , s'écrit :

$$\vec{F}_L = I \vec{NP} \wedge \vec{B} = -I/B \vec{u}_z$$



D'autre part, elle s'applique en J, milieu de NP, et tend à faire tourner la balance dans le sens positif correspondant à l'orientation de l'axe  $\Delta$ . Donc, son moment par rapport à  $\Delta$  s'écrit :

$$\Gamma_L = +F_L d = I l B d$$

3) La balance est en équilibre sous l'effet de la force de Laplace exercée sur NP et du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  de la masse  $m$ . La somme des deux moments correspondant par rapport à  $\Delta$  est donc nulle, ce qui donne :

$$I l B d = m g d'$$

soit

$$B = \frac{m g d'}{I l d}$$

$$4) B = \frac{0,0113 \times 9,8}{15 \times 0,07} = 0,1 \text{ T.}$$

## Exercice 7

1) L'angle  $\theta(t)$  et la vitesse de rotation  $\omega$  sont reliés par  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ . La vitesse de rotation  $\omega$  étant constante, on a  $\theta(t) = \omega t + \theta(t=0)$ . Or,  $\theta(t=0) = 0$ , donc

$$\theta(t) = \omega t$$

2) Le moment  $\vec{\Gamma}_L$  du couple correspondant aux forces de Laplace exercées sur le cadre s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B} = N i(t) \vec{S} \wedge \vec{B}$$

Or,

$$\vec{S} = a^2 (\cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{u}_x$$

On a donc, en utilisant  $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x = \vec{0}$  et  $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z$ ,

$$\vec{\Gamma}_L = N i(t) a^2 (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y) \wedge B \vec{u}_x = -N a^2 B I_0 \sin^2(\omega t) \vec{u}_z$$

Le moment est négatif. Les forces de Laplace tendent donc à faire tourner la bobine dans le sens opposé à  $\omega$ . Le couple est donc résistant.

3) La bobine a un mouvement de rotation à vitesse constante autour de l'axe  $Oz$ , son moment cinétique  $L_\Delta$  par rapport à cet axe est donc constant. Or, d'après le cours de Mécanique,

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_z + \Gamma_m = 0$$

Donc

$$\Gamma_m = -\vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_z = N a^2 B I_0 \sin^2(\omega t)$$

On en déduit la puissance moyenne du moteur,  $P_m$  :

$$P_m = \langle \Gamma_m \omega \rangle = N a^2 B I_0 \omega \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} N a^2 B I_0 \omega$$

## Exercice 8

1) D'après le cours, une portion  $d\vec{l} = -dl \vec{u}_y$  du conducteur (le sens de  $d\vec{l}$  est le même que celui de l'intensité) est soumise à la force :

$$d\vec{F}_L = -I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I B d\vec{l} \wedge \vec{u}_z$$

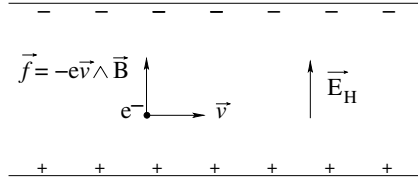
La force de Laplace  $\vec{F}_L$  s'exerçant sur une longueur  $l$  de conducteur est donc :

$$\vec{F}_L = IBl\vec{u}_z.$$

2) Les électrons sont soumis à la force de Lorentz. Donc,

$$\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = ev\vec{B}\vec{u}_z$$

Cette force tend à dévier les électrons vers les  $z$  croissants, d'où l'apparition de charges négatives sur la face supérieure, et de charges positives sur la face inférieure, car le conducteur est globalement neutre.



3) Un électron est soumis à deux forces. L'une,  $\vec{f}$ , est due au champ magnétique et l'autre,  $\vec{f}' = -e\vec{E}_H$  au champ électrique. Pour que la vitesse reste parallèle à  $\vec{u}_y$ , on doit avoir :

$$\vec{f} + \vec{f}' = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

4) Le conducteur est composé d'électrons mobiles, soumis à  $\vec{f} + \vec{f}' = \vec{0}$ , et d'ions fixes, de charge  $+e$ , (ces derniers correspondent aux atomes du conducteur d'où proviennent les électrons mobiles) soumis à la seule force  $\vec{f}'' = +e\vec{E}_H$ , puisque leur vitesse est nulle.

D'autre part, une longueur  $l$  de conducteur représente un volume  $V = Sl$  et contient donc un nombre  $nSl$  d'ions.

La résultante des forces s'exerçant sur le conducteur est donc égale à la résultante des forces s'exerçant sur les seuls ions fixes, soit :

$$\vec{F}_L = nSl\vec{f}'' = +nSle\vec{E}_H = nSlev\vec{B}\vec{u}_z$$

5) En adaptant la démonstration du cours (§A), on peut écrire que la charge  $dq$  traversant une section de conducteur pendant la durée  $dt$  s'écrit d'une part :

$$dq = Idt$$

et d'autre part :

$$dq = v dt S(-ne)$$

Le signe «  $-$  » indique simplement que l'intensité est dirigée dans le sens contraire du déplacement des électrons, ce qui a déjà été pris en compte dans le fléchage de  $I$ . On a donc simplement :

$$I = nevS$$

En remplaçant dans la formule de la question précédente, on obtient donc :

$$\vec{F}_L = Ilb\vec{u}_z,$$

ce qui correspond bien à l'expression de la force de Laplace établie à la première question.

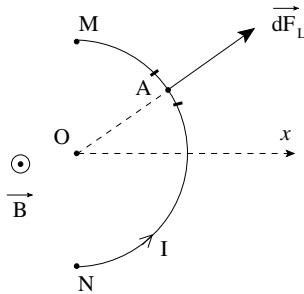
## Exercice 9

1) L'expression de la force élémentaire  $d\vec{F}_L$  s'exerçant sur une longueur  $dl$  autour d'un point A de la spire est  $d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

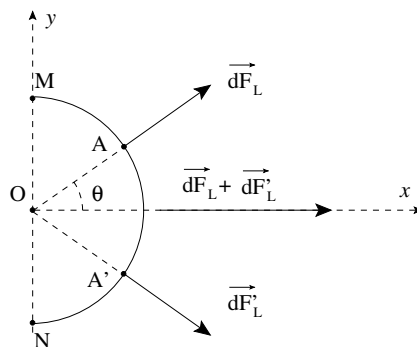
Comme  $d\vec{l}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux, on a  $dF_L = IB dl$ . Cette force est de plus orthogonale à  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  et dirigée vers l'extérieur de la spire étant donné les sens choisis pour  $I$  et  $\vec{B}$  par l'énoncé.

Si on note  $\vec{u}_r = \frac{1}{R}\vec{OA}$ , on a :

$$d\vec{F}_L = IB dl \vec{u}_r$$



2) Considérons deux points A et A' symétriques par rapport à un axe Ox orthogonal à MN. Les deux forces de Laplace s'exerçant en A et A' sont elles aussi symétriques par rapport à Ox. Donc, leur somme est portée par Ox. Ce résultat étant vrai quel que soit le point A, on en déduit que la somme  $\vec{F}_L$  de toutes les forces élémentaires  $d\vec{F}_L$  est portée par l'axe Ox, et est donc orthogonale au diamètre MN.



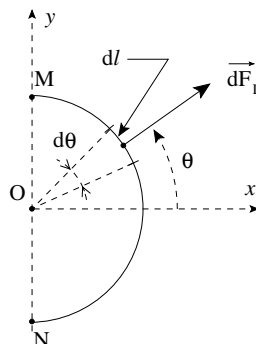
3) Par définition de la résultante, on a :

$$\vec{F}_L = \int_{NM} d\vec{F}_L$$

$d\vec{F}_L$  étant de direction variable, il faudrait a priori intégrer séparément chacune des deux composantes de  $d\vec{F}_L$  sur Ox et Oy puis les ajouter. Cependant, on sait, d'après la question précédente, que  $\vec{F}_L$  est portée par Ox. L'intégrale de la composante sur Oy est donc nulle et il suffit d'intégrer la composante de  $\vec{F}_L$  sur Ox,  $F_{L_x}$ . On a donc :

$$F_{L_x} = \int_{NM} IB d\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = IB \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta dl$$

où  $\theta$  est l'angle  $(\vec{u}_x, d\vec{F}_L)$ .



Il suffit alors d'exprimer dl en fonction de  $\theta$ , soit :

$$dl = R d\theta$$

pour obtenir

$$F_{L_x} = IBR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = IBR [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2IBR$$

et donc

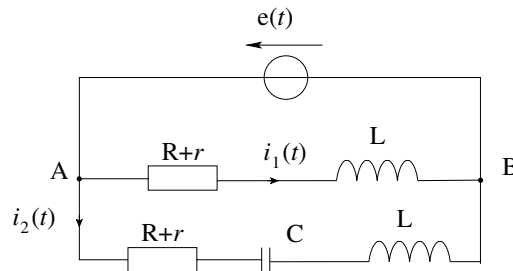
$$\vec{F}_L = 2IBR \vec{u}_x$$

$$4) F_L = 2 \times 5 \times 0,5 \times 0,05 = 0,25 \text{ N.}$$

## Exercice 10

### A. Production d'un champ tournant

1) Le schéma électrique équivalent s'obtient simplement en remplaçant les deux ensembles de deux solénoïdes par une inductance  $L$  en série avec une résistance  $r$ , ce qui donne le circuit suivant :



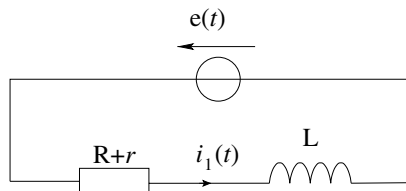
2) Les grandeurs complexes associées aux grandeurs réelles  $e(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sont :

$$\underline{e}(t) = E e^{j\omega_0 t}$$

$$\underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega_0 t - \varphi_1)}$$

$$\underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega_0 t - \varphi_2)}$$

3) On écrit la loi des mailles pour la maille ci-dessous :



ce qui donne :

$$\underline{e}(t) = (R + r + jL\omega_0) \underline{i}_1(t)$$

soit

$$E e^{j\omega_0 t} = (R + r + jL\omega_0) I_1 e^{j(\omega_0 t - \varphi_1)}$$

d'où

$$I_1 e^{-j\varphi_1} = \frac{E}{R + r + jL\omega_0}$$

On en déduit que

$$I_1 = |I_1 e^{-j\varphi_1}| = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + L^2 \omega_0^2}}$$

et que

$$\varphi_1 = -\text{Arg}(I_1 e^{-j\varphi_1}) = \text{Arg}(R + r + jL\omega_0)$$

d'où

$$\tan \varphi_1 = \frac{L\omega_0}{R + r}$$



4) On procède de la même façon que précédemment avec la maille contenant le générateur et le condensateur. On obtient :

$$I_2 e^{-j\varphi_2} = \frac{E}{R + r + j \left( L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right)}$$

d'où on déduit :

$$I_2 = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + \left( L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right)^2}}$$

et

$$\tan \varphi_2 = \frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R+r}$$

5. a) D'après les expressions de  $I_1$  et  $I_2$  déterminées aux questions précédentes, on a :

$$I_1 = I_2 \Leftrightarrow L^2 \omega_0^2 = \left( L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right)^2$$

ce qui donne :

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = \pm L\omega_0$$

La solution positive étant exclue car  $\frac{1}{C\omega_0} \neq 0$ , on en déduit :

$$C = \frac{1}{2L\omega_0^2}$$

D'autre part,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \varphi_2 = \frac{-1}{\tan \varphi_1}$$

En utilisant les expressions obtenues pour  $\tan \varphi_1$  et  $\tan \varphi_2$  ainsi que la relation  $C = \frac{1}{2L\omega_0^2}$  sous la forme  $\frac{1}{C\omega_0} = 2L\omega_0$ , on obtient :

$$\frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{R+r}{L\omega_0}$$

soit

$$L\omega_0 = \pm(R+r)$$

Toutes les grandeurs mises en jeu dans l'égalité précédente étant positives, on en déduit que :

$$R = L\omega_0 - r$$

5. b) Avec  $L\omega_0 = R + r$ , on obtient immédiatement :

$$I = I_1 = \frac{E}{\sqrt{2}L\omega_0}$$

En utilisant en plus  $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = -L\omega_0$  et en injectant ces relations dans les expressions de  $\tan \varphi_1$  et  $\tan \varphi_2$ , on obtient :

$$\tan \varphi_1 = 1 = -\tan \varphi_2$$

soit

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

On a alors :

$$i_1(t) = I \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

6. a) Soit  $\vec{B}_1(t) = KI_1(t)\vec{u}_x$  le champ magnétique créé par l'ensemble des deux solénoïdes d'axe Ox et  $\vec{B}_2(t) = -KI_2(t)\vec{u}_y$  celui créé par les deux autres solénoïdes (le signe « - » vient de l'orientation différente des courants dans les solénoïdes du deuxième ensemble). On a :

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_1(t) + \vec{B}_2(t) = KI \left[ \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_x - \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y \right]$$

6. b)  $B_T = KI \sqrt{\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}$ . Or,

$$\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

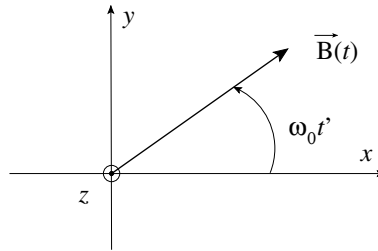
Comme  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , on obtient :

$$B_T = KI = \frac{KE}{\sqrt{2}L\omega_0}$$

6. c) En posant  $\omega_0 t' = \omega_0 t - \frac{\pi}{4}$  (ce qui revient juste à changer l'origine des temps), on a :

$$\vec{B} = B_T \left[ \cos(\omega_0 t')\vec{u}_x - \cos\left(\omega_0 t' + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y \right] = B_T \left[ \cos(\omega_0 t')\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t')\vec{u}_y \right]$$

Le vecteur  $\vec{B}$  tourne donc autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire  $\omega_0$ , comme précisé sur le schéma ci-dessous.



## B. Entraînement du rotor

1) Soit  $\alpha(t)$  l'angle repérant la direction de  $\vec{B}$  au cours du temps. On a  $\alpha(t) = \omega_0 t + \alpha_0$ , où  $\alpha_0 = \alpha(t=0)$ . De même, si on note  $\beta(t)$  l'angle repérant la direction de  $\vec{M}$  au cours du temps, on a  $\beta(t) = \omega t + \beta_0$ . Comme  $\theta(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ , on a :

$$\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t + \alpha_0 - \beta_0 = (\omega_0 - \omega)t + \theta_0$$

D'après le cours,  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ , donc :

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{M}_0 B_T \sin[(\omega_0 - \omega)t + \theta_0] \vec{u}_z$$

2)  $\langle \Gamma \rangle = \mathcal{M}_0 B_T \langle \sin[(\omega_0 - \omega)t + \theta_0] \rangle = 0$  si  $\omega \neq \omega_0$  car la fonction sinus est de moyenne nulle. Le rôle d'un moteur étant de fournir un couple non nul, il faut donc  $\omega = \omega_0$ . On a alors :

$$\langle \Gamma \rangle = \mathcal{M}_0 B_T \sin \theta_0$$

3) La puissance mécanique correspondante est alors  $P_m = \langle \Gamma \rangle \omega = \mathcal{M}_0 B_T \omega \sin \theta_0$ . La machine fonctionne en moteur si cette puissance est positive, c'est-à-dire si la force de Laplace est motrice. La condition mathématique correspondante est :

$$\omega \sin \theta_0 > 0$$

Dans le cas contraire, les forces de Laplace s'opposent au mouvement du rotor. La machine n'a alors plus un rôle moteur mais est utilisée en alternateur, c'est-à-dire qu'elle produit de l'électricité à partir d'un mouvement. C'est le phénomène d'induction électromagnétique.