

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le circuit RLC série comme modèle d'oscillateur amorti. Nous verrons en effet qu'une analogie électromécanique permet d'identifier formellement cet oscillateur amorti (du fait de l'existence d'une résistance dans le circuit) à l'oscillateur mécanique (masse reliée à un ressort et astreinte à se déplacer suivant l'axe horizontal) amorti par frottement visqueux (c'est-à-dire que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse).

Nous étudierons dans un premier temps les différents types de régimes transitoires pouvant apparaître à la mise sous tension d'un tel circuit par exemple.

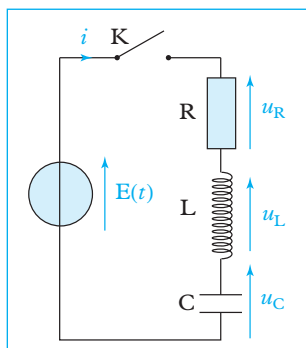
Ensuite nous étudierons le cas particulier très important du régime sinusoïdal permanent, dans lequel le générateur externe délivre un signal sinusoïdal de pulsation ω constante. Ceci nous permettra d'introduire les notions essentielles liées aux régimes sinusoïdaux permanents utilisés dans toute l'électronique et l'électrotechnique et d'étudier les caractéristiques du phénomène de résonance que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique.

Ce chapitre s'adresse aux classes de MPSI, PCSI et PTSI.

Plan du chapitre 7

A. Régimes transitoires d'un circuit RLC série	X
1. Mise en équation. Variables réduites	X
2. Résolution de l'équation différentielle.....	X
3. Étude énergétique	X
4. Analogie avec l'oscillateur harmonique mécanique	X
B. Régime sinusoïdal forcé	
1. Définition. Notation complexe	X
2. Impédance et admittance complexes	X
3. Association de deux impédances	X
C. Circuit RLC série en régime sinusoïdal permanent	
1. Utilisation des diagrammes de Fresnel	X
2. Utilisation des impédances complexes	X
3. Résonance d'intensité et de charge	X
Méthodes	X
Exercices	X

A. Régimes transitoires d'un circuit RLC série



A.1. Mise en équation. Variables réduites

- Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure ci-contre :

- un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RLC ;

- pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;

- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

- Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_C la tension aux bornes du condensateur, u_L la tension aux bornes de l'inductance et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique, le condensateur et la bobine sont étudiés en convention récepteur.

On a donc : $u_R = Ri$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$ avec $i = C \frac{du_C}{dt}$ et la loi d'addition des tensions qui permet d'écrire : $E = u_R + u_L + u_C$.

Lorsque l'on rassemble les différentes relations on obtient l'équation satisfaite par la tension aux bornes du condensateur :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

- On peut définir un certain nombre de variables réduites, avec ou sans dimension, qui permettent de mettre le problème sous forme dite canonique.

Définition 1

On définit la pulsation propre ω_0 du circuit LC, du circuit RLC, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, par la relation :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Définition 2

On définit le facteur d'amortissement λ du circuit RLC, en s^{-1} , par la relation :

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

Afin d'avoir des grandeurs sans dimension, on introduit le coefficient d'amortissement α et le facteur de qualité Q , tels que :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

L'équation du circuit RLC série s'écrit alors sous les formes équivalentes suivantes :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E, \quad \text{ou :} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

A.2. Résolution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$ il faut résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

1. Une équation différentielle est dite homogène lorsque le second membre est identiquement nul.

La solution générale de cette équation est la somme :

– de la solution générale u_1 de l'équation homogène¹ associée :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0.$$

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme : $u_1 = Ae^{rt}$, où A est une constante. L'équation homogène s'écrit alors :

$$LCr^2 u_1 + RCru_1 + u_1 = 0, \text{ puisque : } \frac{d^2 u_1}{dt^2} = r^2 u_1 \text{ et } \frac{du_1}{dt} = ru_1.$$

On voit apparaître le **polynôme caractéristique** $LCr^2 + RCr + 1 = 0$, dont les deux solutions, réelles ou complexes, éventuellement confondues, vont déterminer le type de solution. Les détails sont donnés dans l'application 1.

– d'une solution particulière u_2 de l'équation.

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \text{ avec } \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \frac{du_2}{dt} = 0 \text{ d'où } u_2 = E.$$

2. L'équation différentielle étant du second ordre, il faut connaître deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :

- continuité de u_C à $t = 0$;
- continuité de i à $t = 0$.

Une fois les deux fonctions u_1 et u_2 déterminées, il faut appliquer les conditions initiales². Pour cela il faut utiliser les conditions de continuité de la tension u_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans la bobine. Les deux conditions initiales permettant de résoudre le problème sont donc :

$$u_C(t = 0) = 0 \text{ et } \frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0 \text{ (puisque } i = C \frac{du_C}{dt} \text{)}.$$

Application 1 Les différents régimes solutions

Caractériser les différents régimes solutions d'un circuit RLC série.

Solution

• On s'intéresse dans un premier temps à la solution de l'équation homogène associée. On doit d'abord trouver les racines du polynôme caractéristique, que l'on écrit avec les variables réduites :

$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant réduit vaut : $\Delta' = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1)$. Selon le signe de Δ' , trois cas sont possibles.

• Le **régime apériodique** : $\Delta' > 0$. Cette condition est réalisée pour $\alpha > 1$ soit $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines négatives :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène : $u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$.

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

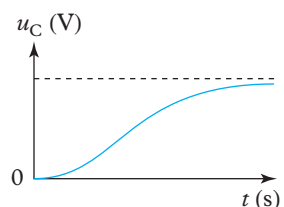
$$(u_C(t = 0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 + E = 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0 \Rightarrow r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \right)$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit les valeurs de A_1 et A_2 .

On en déduit la tension u_C aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = E \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + 1 \right).$$

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$), l'oscillateur est fortement amorti : le régime est dit **apériodique**.



- Le régime **critique**: $\Delta' = 0$. Cette condition est réalisée pour $\alpha = 1$ soit $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Le polynôme caractéristique admet alors une racine double négative: $r = -\lambda = -\omega_0$.

On en déduit la solution générale de l'équation homogène:

$$u_1 = (At + B)e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc:

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = (At + B)e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a:

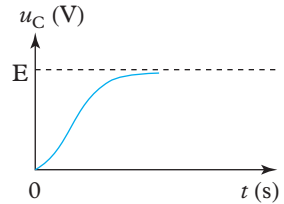
$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow B + E = 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow A - \lambda B = 0 \right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit les valeurs de A et B.

On en déduit la tension u_C aux bornes du condensateur:

$$u_C(t) = E[1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}].$$

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est égal à 1 ($\alpha = 1$), le régime est dit apériodique critique ou **critique**.



- Le régime **pseudo-périodique**: $\Delta' < 0$. Cette condition est réalisée pour $\alpha < 1$ soit $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. En posant $\omega^2 = -\Delta'$, il vient:

$$r_1 = -\lambda - j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + j\omega.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène:

$$u_1 = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc:

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = [A\cos\omega t + B\sin\omega t]e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a:

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow A + E = 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow -\lambda A + \omega B = 0 \right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit les valeurs de A et B.

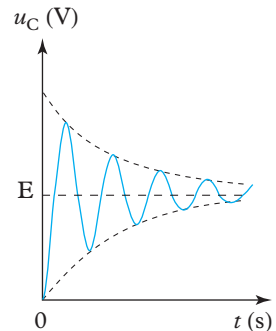
On en déduit la tension u_C aux bornes du condensateur:

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\}.$$

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est strictement inférieur à 1 ($\alpha < 1$), l'oscillateur est faiblement amorti: le régime est dit oscillatoire amorti ou **pseudo-périodique**.

La pseudo-pulsation ω des oscillations vaut:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre du système } (\omega < \omega_0).$$



Remarque: on voit sur les courbes correspondant à chaque type de régime que, la charge du condensateur correspondant à un régime transitoire, lorsque le condensateur est chargé ($t \rightarrow \infty$), le régime permanent est atteint. On a alors $u_C = E$ et $i = 0$.

L'évolution de l'intensité $i(t)$ se déduit directement des analyses précédentes après dérivation, puisque: $i = C \frac{du_C}{dt}$. En particulier l'équation différentielle satisfaite par l'intensité dans le circuit s'écrit:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0.$$

A.3. Étude énergétique

- Lors de la charge du condensateur, l'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

Pour passer à un bilan de puissance, on multiplie par $i = C \frac{du_C}{dt}$:

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + Cu_C \frac{du_C}{dt}.$$

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

– Le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ est la puissance $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive ou négative reçue par la bobine correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique.

– Le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 \right)$ est la puissance $\frac{dE_{\text{elec}}}{dt}$ positive ou négative reçue par le condensateur correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique.

Propriété 1

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à faire varier l'énergie de la bobine et l'énergie du condensateur :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} + \frac{dE_{\text{elec}}}{dt}$$

- En intégrant l'égalité précédente entre l'instant initial $t = 0$ (fermeture de l'interrupteur K) et l'instant final ($t \rightarrow \infty$), on obtient l'égalité traduisant les transferts d'énergie dans le circuit :

$$E_g = E_J + \Delta E_{\text{mag}} + \Delta E_{\text{elec}}$$

Application 2 Bilan énergétique d'un circuit RLC série

Effectuer le bilan énergétique d'un circuit RLC série dont le condensateur est initialement au repos et qui est parcouru par un courant d'intensité initiale nulle. On notera E la fém constante du générateur. On note $t = 0$ l'instant initial où on ferme l'interrupteur.

Solution

- Le bilan énergétique s'obtient par intégration du bilan de puissance : $E_g = E_J + \Delta E_{\text{mag}} + \Delta E_{\text{elec}}$.
- L'énergie électrique E_g fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = E \int_0^t i dt = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CE u_C(t).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension u_C vaut E et le générateur a fourni l'énergie :

$$E_g = CE^2.$$

– L'intensité du courant est nulle à $t = 0$; elle est de nouveau nulle quand $t \rightarrow \infty$. L'énergie magnétique ΔE_{mag} emmagasinée dans l'inductance L entre ces instants est donc nulle. L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine au début du régime transitoire est redonnée à la fin de ce régime lorsque le courant s'arrête.

– La tension aux bornes du condensateur croît de 0 à E . L'énergie électrostatique ΔE_{elec} emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \rightarrow \infty$ est égale à :

$$\Delta E_{\text{elec}} = E_{\text{elec}}(\infty) - E_{\text{elec}}(0) = \frac{1}{2} CE^2.$$

– L'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \rightarrow \infty$ est égale à :

$$E_J = E_g - \Delta E_{\text{elec}} - \Delta E_{\text{mag}} = CE^2 - \frac{1}{2} CE^2 = \frac{1}{2} CE^2.$$

Bilan : au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur. L'énergie magnétique, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge.

A.4. Analogie avec l'oscillateur harmonique mécanique

On a vu dans le chapitre introductif qu'une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k , était animée d'un mouvement oscillant régi

par l'équation harmonique : $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$.

Ici la position du mobile est repérée par rapport à sa position d'équilibre, conformément aux hypothèses du premier chapitre.

Si l'on ajoute une force de frottement de type « visqueux », proportionnelle à la vitesse du système, on obtient, après réarrangement des différents termes, l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

L'analogie formelle avec l'équation homogène régissant le comportement de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série (ou de sa charge puisque $q = Cu_C$) est évidente si on compare à :

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{soit} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Bien que les oscillateurs électrique et mécanique correspondent à des situations physiques a priori très différentes, leurs comportements, décrits par un même « squelette algébrique », sont les mêmes. Le tableau ci-dessous définit les grandeurs analogues.

Grandeurs électriques		Grandeurs mécaniques	
charge du condensateur	q	déplacement de la masse	x
intensité du courant	i	vitesse de la masse	v
inductance propre	L	masse	m
résistance du circuit	R	coefficient de frottement	f
capacité du condensateur	C	inverse de la raideur du ressort	$\frac{1}{k}$
énergie magnétique	$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2$	énergie cinétique	$E_C = \frac{1}{2} mv^2$
électricité électrostatique	$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	énergie potentielle élastique	$E_p = \frac{1}{2} kx^2$
pertes par effet Joule	$P_J = Ri^2$	pertes par frottement	$P_f = fv^2$

On peut alors poser : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \alpha \omega_0 = \frac{f}{2m}$

En fonction de la valeur de α , on retrouve trois régimes d'oscillations : le régime aperiodique ($\alpha > 1$), le régime critique ($\alpha = 1$) et le régime pseudo-periodique ($\alpha < 1$).

B. Régime sinusoïdal forcé

B.1. Définition. Notation complexe

• On sait que les caractéristiques (courants, tensions) d'un circuit linéaire quelconque sont régies par des équations différentielles linéaires. Ceci est vrai dans le cas particulier important où ce circuit est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, c'est-à-dire délivrant un signal du type :

$$e(t) = E \cos(\omega t),$$

dans le cas d'un générateur de tension. La pulsation du signal généré et sa fréquence sont respectivement notées : ω et $f = \omega/2\pi$.

Définition 3

On appelle régime sinusoïdal forcé le régime sinusoïdal permanent associé à la solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle. Les grandeurs électriques i et u sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation ω que le générateur.

Il est important de noter que ce régime particulier est un régime permanent et que l'on considère que le régime transitoire (qui suit par exemple la mise sous tension) est terminé³.

3. Le régime transitoire dépend des conducteurs ohmiques définissant l'amortissement.

4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

• Les équations différentielles auxquelles obéissent les signaux considérés étant linéaires, on peut remarquer que si la famille des fonctions « cosinus » est solution, les fonctions « sinus » le seront également, puisqu'elles ne diffèrent que d'une phase⁴. Donc toute combinaison linéaire est également solution, en particulier la combinaison suivante :

$$\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) \equiv \exp j(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } j^2 = -1.$$

• Considérons le signal sinusoïdal quelconque $S(t)$ sinusoïdal tel que : $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. On simplifie l'étude du régime sinusoïdal permanent en associant à ce signal réel, un signal complexe⁵ :

$$\underline{S}(t) = S_0 \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{S}_0 \exp j(\omega t) \quad \text{avec } \underline{S}_0 \equiv S_0 \exp j\varphi.$$

5. On remarque, en particulier : $\underline{S}(t) = S(t) + j \operatorname{Im}(\underline{S}(t))$.

Définition 4

L'amplitude complexe de la grandeur sinusoïdale $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est : $\underline{S}_0 \equiv S_0 \exp j\varphi$.

Son module est l'amplitude réelle du signal : $|\underline{S}_0| \equiv S_0$.

Son argument est la phase à l'origine des temps : $\arg(\underline{S}_0) \equiv \varphi$.

• Dérivation et intégration. Ces deux opérations sont immédiates avec un signal sinusoïdal :

$$\frac{d\underline{S}(t)}{dt} = \frac{d(\underline{S}_0 \exp j(\omega t))}{dt} = j\omega \underline{S}_0 \exp j(\omega t) = j\omega \underline{S}(t) \text{ et}$$

$$\int \underline{S}(t) dt = \int \underline{S}_0 \exp j(\omega t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{S}_0 \exp j(\omega t) = \frac{1}{j\omega} \underline{S}(t)$$

Techniquement on peut donc remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par des multiplications et des divisions⁶ par le facteur $j\omega$.

6. L'itération de ces opérations est immédiate :

$$\begin{aligned} dt &\leftrightarrow \times j\omega \\ \frac{d^2}{dt^2} &\leftrightarrow (j\omega)^2, \dots, \\ \frac{d^n}{dt^n} &\leftrightarrow (j\omega)^n \end{aligned}$$

B.2. Impédance et admittance complexes

• En régime sinusoïdal forcé, il existe une relation linéaire entre la tension complexe $\underline{u}(t) = U_0 \exp j(\omega t + \varphi)$ et l'intensité complexe $\underline{i}(t) = I_0 \exp j(\omega t + \varphi')$.

Définition 5

L'impédance complexe \underline{Z} d'un circuit, homogène à une résistance, est définie comme le rapport de la tension complexe \underline{u} aux bornes du circuit par l'intensité complexe \underline{i} du courant le traversant :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}.$$

De même l'admittance complexe \underline{Y} du circuit, homogène à une conductance, est définie comme l'inverse de l'impédance complexe \underline{Z} :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

- **Cas d'une résistance R.** La relation entre la tension u aux bornes d'un conducteur ohmique et l'intensité i du courant le traversant est donnée par la loi d'Ohm : $u = Ri$ ce qui se traduit en notations complexes par : $\underline{u} = R\underline{i}$. On en déduit que l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R est égale à sa résistance : $\underline{Z} = R$.

- **Cas d'une capacité C.** La relation entre la tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C et l'intensité i du courant le traversant est donnée par : $i = C \frac{du}{dt}$, ce qui se traduit en notations complexes par : $\underline{i} = Cj\omega \underline{u}$. On en déduit que l'impédance complexe d'un condensateur de capacité C est égale à :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega}.$$

- **Cas d'une inductance L.** La relation entre la tension u aux bornes d'une bobine d'inductance L et l'intensité i du courant la traversant est donnée par : $u = L \frac{di}{dt}$, ce qui se traduit en notations complexes par : $\underline{u} = Lj\omega \underline{i}$. On en déduit que l'impédance complexe d'une bobine d'inductance L est égale à :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = jL\omega.$$

B.3. Association de deux impédances

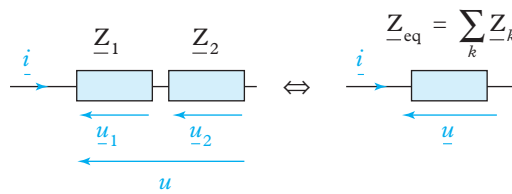
Propriété 2

Les impédances complexes \underline{Z} (admittances complexes \underline{Y}) des dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé se comportent comme les résistances R (conductances G) des conducteurs ohmiques en courant continu.

De manière générale les lois de l'électrocinétique (loi des nœuds, loi des mailles) étudiées pour les dipôles linéaires restent valables en notations complexes. L'application de ces lois générales permet de retrouver les lois d'association de deux impédances (conductances) en série ou en parallèle.

- **Association série.** On considère l'association série de 2 dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 . L'intensité complexe du courant est la même dans toutes les impédances. La tension complexe totale est égale à la somme des tensions complexes \underline{u}_1 et \underline{u}_2 :

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{i} + \underline{Z}_2 \cdot \underline{i} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$$



- **Association parallèle.** On considère l'association parallèle de 2 dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 . La tension complexe est la même aux bornes de chaque impédance. L'intensité complexe du courant totale est égale à la somme des intensités complexes \underline{i}_1 et \underline{i}_2 :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{u} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{u} = \underline{Y}_{eq} \cdot \underline{u} \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2.$$

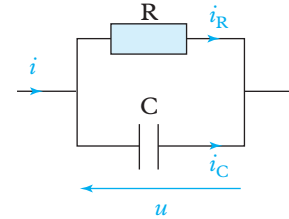
Application 2 Calcul d'une impédance équivalente

Déterminer l'impédance équivalente au circuit constitué par un conducteur ohmique de résistance R en parallèle avec un condensateur de capacité C .

Solution

- L'association parallèle de la résistance R et de la capacité C est équivalente à l'admittance complexe :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$



C. Circuit RLC série en régime sinusoïdal permanent

On reprend le montage constitué d'une bobine d'inductance L , d'un conducteur ohmique de résistance R (incluant éventuellement la résistance r de la bobine) et d'un condensateur de capacité C montés en série.

Le circuit est alimenté par un générateur idéal de tension sinusoïdale de fém $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, relié au circuit RLC par un interrupteur K . Pour $t < 0$ le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

De manière générale on sait qu'un régime transitoire va se manifester avant de s'atténuer en un temps caractéristique, déterminé par l'amortissement dans le circuit. Les caractéristiques de ce régime ayant déjà été étudiées, nous ne nous intéresserons dans la suite qu'au régime sinusoïdal permanent établi.

C.1. Utilisation des diagrammes de Fresnel

- On a vu dans le second chapitre que la méthode des diagrammes de Fresnel consistait à associer à une quantité du type $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ un vecteur, de module U_0 , tournant à la vitesse angulaire ω et accusant un déphasage de ϕ par rapport à un axe de référence : $u(t) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t)$.
- Nous rappelons que l'addition de deux vecteurs tournant à la même vitesse angulaire donne un vecteur tournant à cette même vitesse.
- Il existe des propriétés remarquables dans la construction de Fresnel concernant les dérivées et primitives d'un vecteur.

Dérivée. $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}(t) = -U_0 \omega \sin(\omega t + \phi) = U_0 \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1}(t).$$

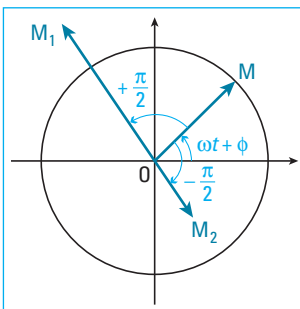
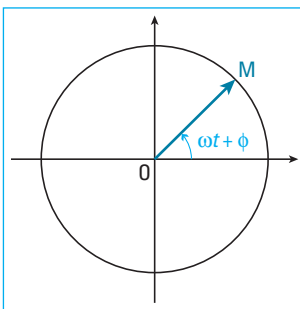
On dit que $\frac{du}{dt}(t)$ est en quadrature avance par rapport à $u(t)$.

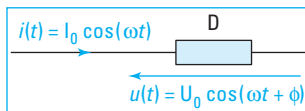
Primitive. $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \int u(t) dt = \frac{U_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{U_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_2}(t)$$

On dit que $\int u(t) dt$ est en quadrature retard par rapport à $u(t)$.

Remarque : sur le schéma on a tenu compte du fait que les normes des trois vecteurs représentés sont *a priori* différentes.





7. On a choisi arbitrairement l'origine des phases pour $i(t)$ et on note ϕ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité.

• **Application aux dipôles fondamentaux.** Considérons un dipôle D dans lequel circule le courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Le régime sinusoïdal permanent, la tension aux bornes est : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$, de même pulsation ω que le courant $i(t)$. Les deux vecteurs de Fresnel associés à $i(t)$ et $u(t)$ sont donc fixes l'un par rapport à l'autre, éventuellement déphasés⁷.

Exemples :

– Résistance pure : $u(t) = Ri(t) = RI_0 \cos(\omega t)$.

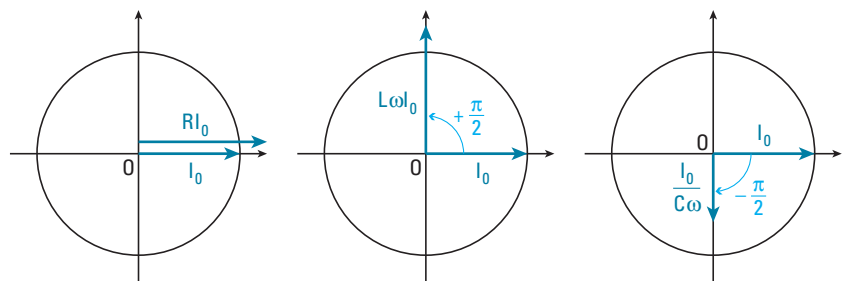
– Bobine pure : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L_0 \omega \sin(\omega t) = L_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

– Condensateur : $i(t) = C \frac{du}{dt}(t) \Rightarrow u(t) = \int \frac{i(t)}{C} dt$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{I_0}{C} \int \cos(\omega t) dt = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_0}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

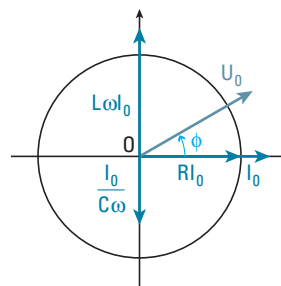
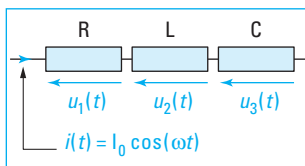
Choisissons l'axe des intensités comme axe de référence. La représentation de Fresnel associée à chacun des dipôles précédents est donnée ci-dessous⁸ :

8. L'axe de l'intensité est l'axe de référence.



• **Application au circuit RLC série.** L'utilisation du diagramme de Fresnel permet de déterminer graphiquement l'amplitude de la tension ainsi que son déphasage par rapport à l'intensité. On note $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$.

L'intensité $i(t)$ étant commune aux trois dipôles, on la prendra comme référence des phases. La loi d'additivité des tensions donne immédiatement l'expression de la tension aux bornes de l'ensemble : $u = u_1 + u_2 + u_3$. Sur le diagramme de Fresnel, cette somme doit être effectuée vectoriellement :



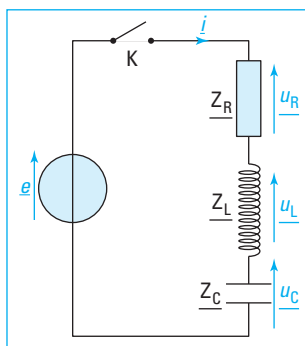
On en déduit les expressions littérales de l'amplitude de la tension (norme du vecteur) et de son déphasage⁹ par rapport à l'intensité :

9. Pour déterminer complètement le déphasage, il faut calculer également son cosinus.

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

C.2. Utilisation des impédances complexes

• On reprend l'association RLC série alimentée par un générateur délivrant une tension sinusoïdale : $e(t) = E \cos(\omega t)$. On cherche à exprimer l'intensité, notée $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$, circulant dans le circuit.



10. L'analogie mécanique de l'intensité est la vitesse.

On adopte la notation complexe et on considère les grandeurs associées :

$$\underline{e}(t) = E \exp j(\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I \exp j(\omega t + \phi) = \underline{I} \exp j(\omega t).$$

• La loi d'additivité des tensions permet d'écrire: $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$. En utilisant les impédances de chaque dipôle, on peut exprimer simplement l'amplitude complexe de l'intensité en fonction des paramètres du circuit :

$$\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C = \underline{Z}_R \cdot \underline{i} + \underline{Z}_L \cdot \underline{i} + \underline{Z}_C \cdot \underline{i}$$

soit $E = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}$ après simplification par $\exp j(\omega t)$.

On remarque que le circuit est équivalent à une impédance unique :

$$E = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I} \quad \text{où} \quad \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

C.2.1. Étude de l'intensité¹⁰

• D'après ce qui précède :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = I \exp j(\phi) \quad \text{avec}$$

$$I = \frac{E}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

On exprime en général ces quantités en fonction de variables adimensionnées telles que : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit, et en faisant intervenir le facteur de qualité du circuit, précédemment défini comme :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}. \quad \text{Il vient alors :}$$

$$I = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = -Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = Q \left(\frac{1}{x} - x\right).$$

C.2.2. Étude de la tension aux bornes de C (ou de la charge¹¹)

11. L'analogie mécanique de la charge est l'élongation.

La relation entre la tension aux bornes du condensateur et l'intensité qui le traverse est :

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

En adoptant les notations complexes, et en notant $\underline{u}_C = \underline{U}_C \exp j(\omega t)$, cette relation prend la forme: $\underline{i} = jC\omega \underline{u}_C$

$$\text{soit } \underline{u}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} = \frac{1}{jC\omega} \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On en déduit l'amplitude U_C et le déphasage ψ de u_C par rapport à la tension du générateur, prise comme référence :

$$U_C = |\underline{U}_C| = \frac{E}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \psi = -\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

En fonction des variables adimensionnées :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{x}{Q}\right)^2 + (1 - x^2)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \psi = -\frac{\frac{x}{Q}}{1 - x^2}.$$

C.3. Résonance d'intensité et de charge

C.3.1. Résonance en intensité (de vitesse)

- L'allure des graphes $I(x)$ et $\phi(x)$ est représentée sur la figure ci-dessous pour différentes valeurs du paramètre Q (facteur de qualité).

12. On peut se limiter à l'étude du dénominateur de $I(x)$, qui fait apparaître la racine de la fonction :

$$1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2, \text{ dont la dérivée :}$$

$$2Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right), \text{ s'annule pour } x = 1.$$

L'analyse de la fonction¹² $I(x)$ montre qu'elle est maximale pour la valeur $x = 1$ et que ce maximum vaut : $I_{\max} = E/R$ quelle que soit la valeur de Q .

On a donc tracé la fonction $I(x)/I_{\max}$. Ce maximum en intensité est caractéristique du phénomène de **résonance** en intensité (en vitesse). On constate plus Q est important, plus le pic est fin.

Pour caractériser la finesse de la résonance on utilise la notion de bande-passante qui correspond au domaine de x (donc de

pulsation) tel que : $I \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. Cette bande-passante se calcule donc simplement en résolvant l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ soit, à la limite, } 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \pm 2.$$

On note x_1 et x_2 les deux racines positives de l'équation précédente :

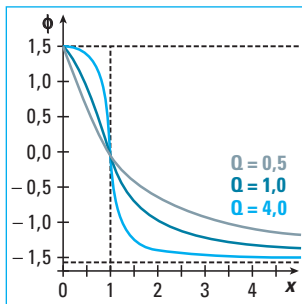
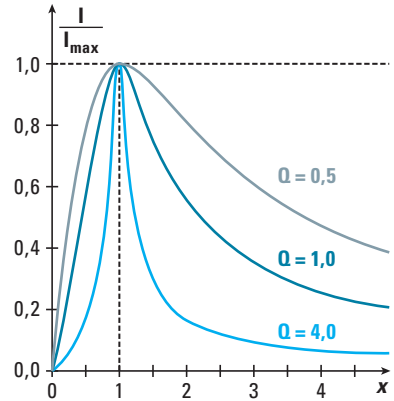
$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \text{ et } x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

La bande-passante est définie par l'intervalle en x entre ces deux bornes :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \text{ soit encore : } \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Propriété 3

La résonance est donc d'autant plus aigüe (bande-passante étroite) que le facteur de qualité est élevé (et donc que l'amortissement est faible).



La phase de l'intensité par rapport à la tension du générateur est représentée sur la figure ci-contre. La phase est nulle pour $x = 1$ quelle que soit la valeur du facteur de qualité.

C.3.2. Résonance en charge (en élancement)

- L'allure des graphes $U_c(x)$ et $\psi(x)$ est représentée ci-dessous pour différentes valeurs du paramètre Q (facteur de qualité). Contrairement au cas de la résonance de vitesse, il existe différents cas suivant la valeur du facteur de qualité :

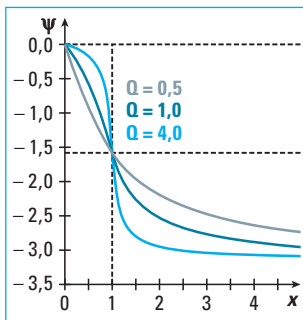
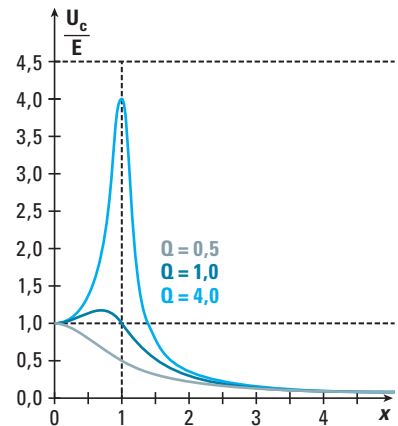
$$U_c = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{x}{Q} \right)^2 + (1 - x^2)^2}} = \frac{E}{\sqrt{f(x)}}, \text{ avec } f(x) = \left(\frac{x}{Q} \right)^2 + (1 - x^2)^2, \text{ dont la dérivée}$$

$$\text{s'écrit : } f'(x) = 2x \left[\left(\frac{1}{Q} \right)^2 - 2(1 - x^2) \right].$$

- si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la seule valeur annulant la dérivée est $x = 0$ (ce qui correspond à un maximum comme le montrerait l'étude de la dérivée seconde f'').
- si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, les valeurs annulant la dérivée sont $x = 0$ (minimum local) et

$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (maximum); cette dernière valeur correspond à la résonance de charge ou résonance en élongation dans l'analogie mécanique.

Remarque importante : contrairement au cas de la résonance d'intensité, la résonance de charge (lorsqu'elle existe) se produit pour une valeur de x inférieure à 1, soit pour une pulsation inférieure à la pulsation propre.



La phase de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension du générateur est représentée sur la figure ci-contre. On remarque qu'elle se déduit de la phase de l'intensité par une translation le long de l'axe des ordonnées d'une valeur de $-\pi/2$: $\psi = \phi - \frac{\pi}{2}$.

La phase vaut donc $-\pi/2$ pour $x = 1$ quelle que soit la valeur du facteur de qualité.

L'essentiel

✓ Étude des régimes transitoires d'un circuit RLC série

- Pour l'étude du régime transitoire du circuit RLC, on introduit les variables réduites :

Pulsation propre (rad · s ⁻¹)	Facteur d'amortissement (s ⁻¹)	Coefficient d'amortissement (sans dimension)	Facteur de qualité (sans dimension)
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\lambda = \frac{R}{2L}$	$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}$	$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

La pulsation propre ω_0 est la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement.

- La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

- En fonction de la valeur de α (ou, ce qui est équivalent, de la valeur de Q), on distingue trois régimes différents.

Régime apériodique : $\alpha > 1$ ou $Q < \frac{1}{2}$ (fort amortissement)	Solution de l'équation homogène ($\Delta > 0$) : $u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$, avec r_1 et r_2 racines réelles du polynôme caractéristique.	
Régime critique : $\alpha = 1$ ou $Q = \frac{1}{2}$ (amortissement critique)	Solution de l'équation homogène ($\Delta = 0$) : $u_1 = (At + B)e^{rt}$, avec r racine double du polynôme caractéristique.	
Régime pseudo-périodique : $\alpha < 1$ ou $Q > \frac{1}{2}$ (amortissement faible)	Solution de l'équation homogène ($\Delta < 0$) : $u_1 = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\lambda t}$, avec $r_1 = -\lambda + j\omega$ et $r_2 = -\lambda - j\omega$ racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique.	

- Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique E_{elec} dans la capacité. L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans l'inductance, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge.

✓ Régime sinusoïdal forcé

- À toute grandeur sinusoïdale $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ on associe la grandeur complexe : $\underline{S}(t) = S_0 \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{S}_0 \exp j(\omega t)$.

L'amplitude complexe est : $\underline{S}_0 \equiv S_0 \exp j\varphi$. Elle est caractérisée par son module S_0 et son argument φ .

- À l'opération de dérivation on associe l'opération : $\times j\omega$. À l'opération d'intégration on associe l'opération : $\times \frac{1}{j\omega}$. Techniquement cela permet de simplifier la résolution des équations différentielles régissant tout circuit.

- L'impédance complexe \underline{Z} d'un circuit, homogène à une résistance, est définie comme le rapport de la tension complexe \underline{u} aux bornes du circuit par l'intensité complexe \underline{i} du courant le traversant : $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$.

- L'admittance complexe \underline{Y} du circuit, homogène à une conductance, est définie comme l'inverse de l'impédance complexe \underline{Z} : $\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

	Résistance R	Capacité C	Inductance L
Impédance complexe	R	$\frac{1}{jC\omega}$	$jL\omega$
Admittance complexe	G	$jC\omega$	$\frac{1}{jL\omega}$

- Les impédances complexes \underline{Z} (admittances complexes \underline{Y}) des dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé se comportent comme les résistances R (conductances G) des conducteurs ohmiques en courant continu.

✓ Circuit RLC série en régime sinusoïdal permanent

- La tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale :

$e(t) = E \cos(\omega t)$, vérifie l'équation différentielle $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E \cos(\omega t)$. La solution u_1 de l'équation homogène correspond au régime transitoire.

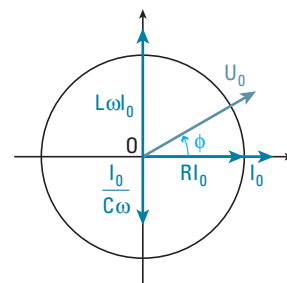
La solution particulière sinusoïdale u_2 correspond au régime sinusoïdal permanent. En supposant que le régime transitoire est terminé (c'est-à-dire suffisamment amorti) on notera :

$$u_2(t) = u_c(t) = U_c \cos(\omega t + \psi).$$

On s'intéresse à la détermination de $u_c(t)$ et $i = C \frac{du_c}{dt} = I \cos(\omega t + \phi)$. Pour cela, deux méthodes sont possibles.

- Méthode graphique : diagrammes de Fresnel. On associe un vecteur tournant à chaque grandeur sinusoïdale. Tous les vecteurs tournant à la même vitesse angulaire ω ils sont fixes les uns par rapport aux autres.

On choisit un signal de référence (de préférence un signal commun) et on trace les autres signaux en tenant compte des déphasages par rapport au signal de référence. Ainsi à la tension totale aux bornes d'un circuit RLC série on associe le vecteur en gris sur la figure suivante, dont la longueur et le déphasage par rapport à l'axe de référence correspondent à son amplitude et à sa phase respectivement.



- Méthode des nombres complexes. On utilise les impédances (ou admittances) complexes de chaque dipôle et les lois générales de l'électrocinétique (valables comme en régime continu).

- Étude de la résonance d'intensité. L'amplitude complexe de l'intensité s'écrit : $\underline{I} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$.

Son module passe par un maximum pour : $\omega = \omega_0$, c'est le phénomène de résonance. Pour cette valeur le déphasage est nul. La finesse du pic de résonance est inversement proportionnelle au facteur de qualité. On la caractérise par la bande-passante, domaine de pulsation pour lequel l'intensité est supérieure à la moitié de sa valeur maximale : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

- Étude de la résonance de charge. La tension aux bornes du condensateur (ou la charge de manière équivalente) s'écrit : $\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$. Son module passe également par un maximum si le facteur de qualité du circuit est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est le phénomène de résonance de

charge, qui se produit pour une pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ inférieure à ω_0 .

Si le facteur de qualité est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ il n'y a pas de résonance.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment résoudre une équation différentielle linéaire à second membre constant ?

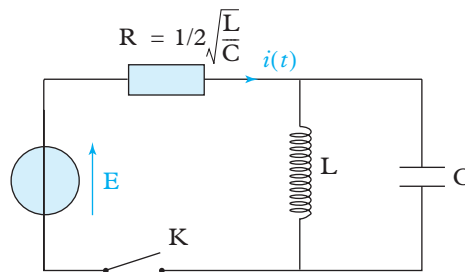
L'étude d'un régime transitoire fait systématiquement appel à la résolution d'une équation différentielle. On se propose de résoudre cette équation.

→ Savoir faire

- ❶ Chercher la solution particulière constante qui vérifie l'équation différentielle avec second membre.
- ❷ Injecter une solution exponentielle du type Ae^{rt} dans l'équation différentielle dont le second membre a été annulé (équation homogène). Le coefficient r vérifie une équation appelée polynôme caractéristique.
- ❸ Déterminer la ou les valeurs de r qui sont racines du polynôme caractéristique. Construire la solution sans second membre, de la forme :
 - Ae^{rt} pour une équation du premier ordre ;
 - $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ pour une équation du second ordre admettant deux racines réelles ou complexes conjuguées ;
 - $(A + Bt) e^{rt}$ pour une équation du second ordre admettant une racine double.
- ❹ Déterminer la ou les constantes d'intégration de la solution générale, qui est la somme de la solution particulière établie au ❶ et de la solution sans second membre établie au ❸. Cette étape nécessite de connaître les conditions initiales données par les relations de continuité.

→ Application

On considère le circuit ci-dessous, dont l'interrupteur K est fermé à l'instant initial.



La mise en équation du circuit et la recherche des conditions initiales conduisent, pour l'intensité dans la branche principale, à :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

Déterminer l'expression de $i(t)$.

Solution

- ❶ La solution particulière constante est :

$$i_2(t) = \frac{E}{R}.$$

- ② L'équation sans second membre s'écrit :

$$LC \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 = 0.$$

On injecte la solution type Ae^{rt} dans cette équation :

$$LCr^2 Ae^{rt} + \frac{L}{R} r Ae^{rt} + Ae^{rt} = 0.$$

- ③ Comme Ae^{rt} ne s'annule pas (car $A = 0$ est une solution sans intérêt), le polynôme caractéristique est donc :

$$LCr^2 + \frac{L}{R} r + 1 = 0.$$

Son discriminant vaut : $\Delta = \frac{L^2}{R^2} - 4LC$, c'est-à-dire zéro compte tenu du choix des composants.

Le polynôme caractéristique admet une racine double (régime critique) :

$$\alpha = -\frac{1}{2RC}.$$

Replacée dans la solution, cette racine double conduit à :

$$i_1(t) = (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

- ④ La solution générale est donc :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R} + (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

En $t = 0+$, on détermine les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{R} = \frac{E}{R} + A \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{R^2C} = B - \frac{A}{2RC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{E}{R^2C} \end{cases}.$$

Soit en remplaçant ces valeurs dans la solution générale :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{Et}{R^2C} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right),$$

d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{t}{RC} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)\right).$$

Méthode n°2

Comment utiliser les nombres complexes pour étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé ?

Soit un circuit linéaire soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω . On se propose d'utiliser les nombres complexes pour déterminer la solution sinusoïdale permanente de l'équation.

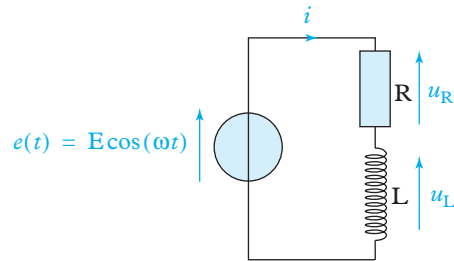
→ Savoir faire

- ❶ Établir l'équation différentielle avec second membre qui caractérise le circuit.
- ❷ Construire une équation complexe dont la partie réelle est l'équation précédente (la partie imaginaire n'est pas utile en tant que telle, mais elle permet de simplifier le calcul).
- ❸ Injecter une solution complexe de la forme $\underline{x}(t) = X_0 \exp j(\omega t + \phi)$ dans l'équation.
- ❹ Factoriser l'amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 \exp j\phi$. Son expression ne fait plus intervenir le temps.
- ❺ Déterminer l'amplitude X_0 de la solution réelle et sa phase ϕ :

$$X_0 = |\underline{X}_0| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{X}_0).$$

→ Application

Donner l'expression de l'amplitude du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit schématisé ci-contre en fonction de la pulsation ω du générateur de tension :



Solution

- ❶ La loi des mailles conduit à l'équation différentielle :

$$e(t) = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R} \cos(\omega t).$$

- ❷ L'équation complexe associée est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{e}{R} = \frac{E}{R} e^{j\omega t}.$$

- ❸ On factorise l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = I_0 e^{j\phi}$ et on simplifie :

$$\frac{L}{R} j\omega I_0 e^{j(\omega t + \phi)} + I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{E}{R} e^{j\omega t}.$$

- ❹ On factorise l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = I_0 e^{j\phi}$ et on simplifie :

$$\underline{I}_0 \left(\frac{L}{R} j\omega + 1 \right) = \frac{E}{R}, \text{ d'où : } \underline{I}_0 = \frac{E}{R + jL\omega}.$$

- ❺ Le module de \underline{I}_0 est l'amplitude demandée :

$$I_0 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

La durée $\tau = \frac{L}{R}$ qui apparaît dans l'équation est celle à l'issue de laquelle le régime transitoire disparaît.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Oscillations d'un circuit LC

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ est initialement chargé sous une tension $U_0 = 6 \text{ V}$. On le connecte à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 25 \text{ mH}$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.
- Déterminer $u(t)$. Exprimer la fréquence des oscillations et l'amplitude de celles-ci.
- Déterminer $i(t)$. Quelle est alors l'amplitude de l'intensité ?
- Exprimer l'énergie du condensateur et celle de la bobine au cours du temps. Vérifier que l'énergie totale reste constante.

Ex. 2 Régime critique

Le condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, initialement chargé sous une tension est connecté à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance $L = 25 \text{ mH}$ et de résistance R .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.
- Le régime étudié est le régime critique. Déterminer R . Exprimer alors $u(t)$. Tracer $u(t)$.
- En déduire l'intensité $i(t)$. Tracer $i(t)$.
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R ?

Ex. 3 Régime pseudo-périodique

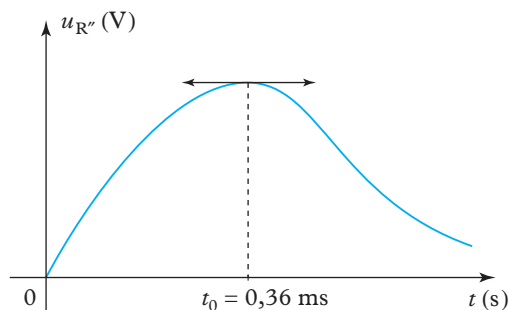
On reprend l'étude de l'exercice 3, mais la résistance de la bobine est maintenant R' .

Le régime étudié est pseudo-périodique et la pseudo-période vaut $T = 5 \text{ ms}$.

- Déterminer la résistance R' .
- Déterminer numériquement $u(t)$.

Ex. 3 Régime apériodique

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, chargé sous la tension U_0 , se décharge dans une bobine d'inductance $L = 2 \text{ mH}$ et de résistance R'' . Le régime est apériodique et l'on a enregistré l'évolution de la tension aux bornes de la résistance R'' .

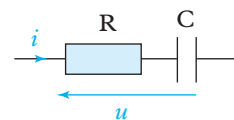


On observe un maximum de $u_{R''}$ à l'instant $t_0 = 0,36 \text{ ms}$. Déterminer R'' .

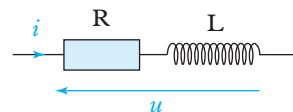
Ex. 5 Calculs d'impédances

Déterminer l'impédance complexe Z des montages ci-dessous. En déduire l'impédance réelle Z et l'avance de phase ϕ de la tension sur le courant.

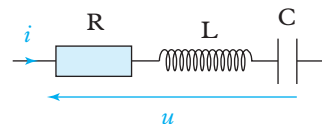
a)



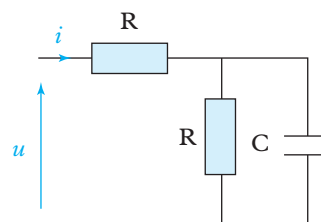
b)



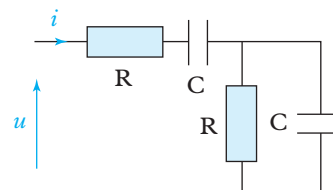
c)

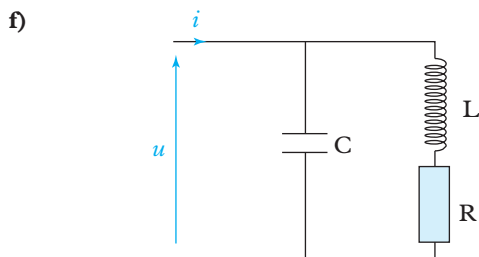


d)



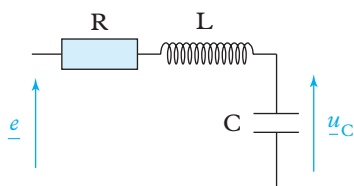
e)





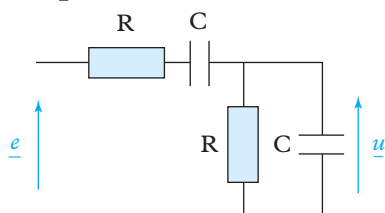
Ex. 6 Diviseur de tension

a) On étudie le circuit RLC série où la tension appliquée est \underline{e} en notations complexes. On mesure la tension aux bornes du condensateur.



Exprimer \underline{u}_C et retrouver l'expression du cours permettant de déterminer la résonance tension aux bornes du condensateur.

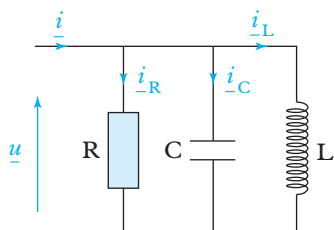
b) On étudie le montage ci-dessous. Déterminer \underline{u} en fonction de \underline{e} .



Niveau 2

Ex. 7 Circuit RLC parallèle

a) Exprimer la tension \underline{u} aux bornes du circuit schématisé ci-après. En déduire \underline{i}_R .



Vérifier que l'étude de la résonance tension \underline{u} (ou de la résonance courant \underline{i}_R dans la résistance), lorsqu'on applique un courant sinusoïdal en notation complexe $\underline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ est identique à celle de la résonance courant dans le circuit RLC série. Exprimer alors ω_0 , pulsation propre, et Q , facteur de qualité du circuit RLC parallèle (et $\alpha' = \frac{1}{2Q}$, coefficient d'amortissement).

b) Appliquer le théorème de division de courant et déterminer le courant complexe \underline{i}_L en fonction de \underline{i} .

Utiliser ω_0 et Q (ou α') et vérifier que l'étude de la résonance de \underline{i}_L est la même que celle de la tension \underline{u}_C aux bornes du condensateur.

Ex. 8 Résonance aiguë

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une bobine réelle d'inductance L et de résistance r . On observe une résonance aiguë.

Le générateur de tension sinusoïdale branché aux bornes du circuit délivre une tension d'amplitude E_0 indépendante de la fréquence.

On constate qu'à faibles fréquences, la tension aux bornes de C possède l'amplitude: $E_0 = 6 \text{ V}$

Cette amplitude passe par un maximum pour la fréquence de résonance $f_r = 800 \text{ Hz}$: $U_{\max} = 75 \text{ V}$.

À la fréquence $f = 1600 \text{ Hz}$, cette amplitude vaut: $U_0 = 5,9 \text{ V}$.

a) Quel est le facteur de qualité Q du circuit? En déduire le coefficient d'amortissement.

b) Quelle est la pulsation propre ω_0 ?

c) Déterminer L et r sachant que $C = 200 \text{ nF}$.

d) Vérifier alors qu'à la fréquence $f = 1600 \text{ Hz}$, on a bien l'amplitude $U_0 = 5,9 \text{ V}$ pour la tension aux bornes du condensateur.

Déterminer alors l'avance de phase de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension délivrée par l'alimentation du circuit.

Ex. 9 Influence de la capacité

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en utilisant une bobine d'inductance L et de résistance R .

On note Q le facteur de qualité, ω_0 la pulsation propre ($\omega_0 = 2\pi f_0$) et ω_r la pulsation de résonance ($\omega_r = 2\pi f_r$).

a) Exprimer Q , ω_0 et ω_r en fonction de L , R et C .

b) On peut faire varier la capacité C . Expérimentalement, on mesure la fréquence de résonance f_r en fonction de C .

Quelle courbe doit-on tracer pour avoir une relation linéaire?

Montrer qu'à partir de ce tracé, on peut déterminer l'inductance L et la résistance R de la bobine.

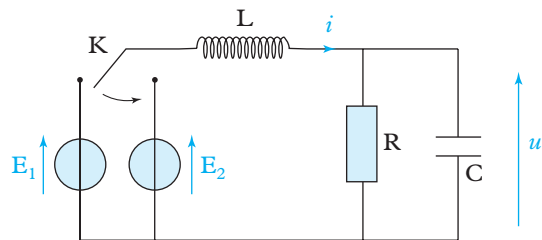
Ex. 10 Deux générateurs : régime transitoire

Le circuit ci-dessous est branché depuis longtemps sur le générateur de tension constante $E_1 = E_0$. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K sur le générateur sinusoïdal $E_2 = E_0 \cos(\omega t)$.

a) Déterminer $u(t)$ pour $t > 0$ dans le cas où :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

b) Étudier le régime sinusoïdal permanent et tracer la courbe de résonance tension.



Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

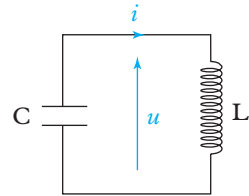
Exercice 1

a) Dans le circuit LC, les caractéristiques du condensateur et de la bobine s'écrivent :

$$i = -C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad u = L \frac{di}{dt}.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .



L'équation différentielle du second ordre vérifiée par u et donc :

$$u = -LC \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \text{soit : } LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0.$$

b) • La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow B = 0. \end{cases}$$



L'équation différentielle étant du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

La loi d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

• La fréquence des oscillations du circuit LC est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 318 \text{ Hz}.$$

L'amplitude de la tension est : $U_0 = 6 \text{ V}$.



On a l'égalité : $f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega}$.

c) La loi d'évolution de l'intensité i du courant est :

$$i(t) = -C \frac{du}{dt} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t).$$

L'amplitude de l'intensité est : $I_0 = U_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 20 \text{ mA}$.

- d) • L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u(t)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

- L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

- L'énergie totale stockée dans le circuit à l'instant t vaut :



L'énergie totale stockée dans le circuit est égale à l'énergie initiale du condensateur. En l'absence de résistance, cette énergie reste constante car il n'y a pas de perte par effet Joule.

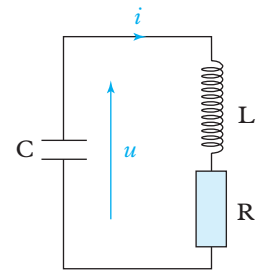
Exercice 2

- a) Les notations utilisées sont indiquées sur le schéma ci-contre. La loi des mailles donne :

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri, \text{ avec } i = -C \frac{du}{dt}.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .



L'équation différentielle du second ordre vérifiée par u est donc :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

- b) On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

– Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle est :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 0$ (régime critique). On en déduit :

$$\Delta = R^2 C^2 - 4LC = 0, \text{ soit } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \, \Omega.$$

Le polynôme caractéristique admet la racine double :

$$r = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = -\omega_0.$$

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow A - \omega_0 B = 0, \text{ d'où : } A = U_0 \omega_0. \end{cases}$$

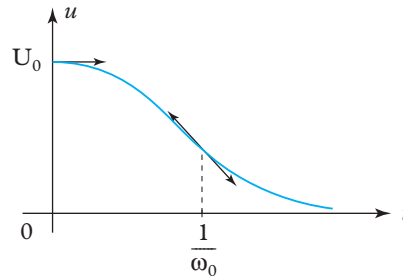


L'équation différentielle étant du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

– La loi d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = U_0(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'allure de la courbe est :



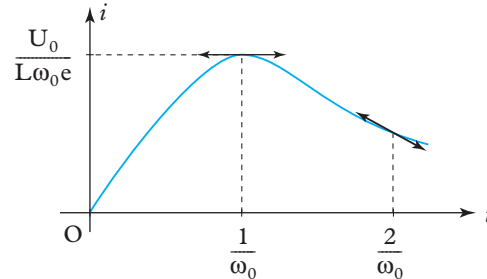
c) • La loi d'évolution de l'intensité i est :

$$i = -C \frac{du}{dt} = CU_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}, \text{ soit : } i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\omega_0 t}.$$

En régime critique, l'intensité i croît au début de la décharge du condensateur, puis décroît jusqu'à s'annuler. Le maximum de i est donné par :

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t} - \frac{U_0}{L} \omega_0 t e^{-\omega_0 t} = 0, \text{ soit : } t = \frac{1}{\omega_0}.$$

💡 D'après la relation entre i et u , $\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} = 0$. Le maximum de i est donc point d'inflexion pour u .



d) L'énergie électrostatique initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C U_0^2 = 180 \mu\text{J}.$$

💡 L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est nulle au début et à la fin de la décharge du condensateur ($i(0) = 0$ et $i(\infty) = 0$).

Exercice 3

a) En régime pseudo-périodique, le discriminant Δ du polynôme caractéristique est négatif. Celui-ci admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r = \frac{-R'C \pm j\sqrt{4LC - R'^2 C^2}}{2LC} = -\frac{R'}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}}.$$

La pseudo-pulsation ω du circuit vaut alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}} = \frac{2\pi}{T}, \text{ d'où : } R' = 2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}}.$$

A.N. $R' = 77,8 \Omega$.



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent : $r = \lambda \pm j\omega$, où λ est le facteur d'amortissement du circuit et ω sa pseudo-pulsation.

b) La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{R'}{2L}t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow \omega B - \frac{R'}{2L}A = 0, \text{ d'où : } B = \frac{R'U_0}{2L\omega}. \end{cases}$$

Numériquement : $A = 6$; $B = 7,43$; $\omega = 1\,257 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La loi numérique d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = 6e^{-1\,556t}(6 \cos(1\,257t) + 7,43 \sin(1\,257t)), \text{ avec } t \text{ en s et } u \text{ en V.}$$

Exercice 4

Le montage est identique à celui des exercices 2 et 3. Pour un raisonnement complet, se reporter à la question **a)** et au début de la question **b)** de l'exercice 2.

• En régime apériodique, le discriminant Δ du polynôme caractéristique est positif. Celui-ci admet donc deux racines réelles :

$$r_1 = -\frac{R''}{2L} + \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{R''}{2L} - \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}.$$



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent : $r = -\lambda \pm \omega$, où λ est le facteur d'amortissement du circuit et $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A + B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} U_0 \\ B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} U_0 \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u est :

$$u(t) = \frac{U_0}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}).$$

• La tension aux bornes de la résistance R'' a pour expression :

$$u_{R''} = R''i = -R''C \frac{du}{dt} = \frac{R''CU_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t}).$$

La tension est maximale lorsque la dérivée de $u_{R''}$ s'annule, c'est-à-dire à l'instant t_0 tel que :

$$r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} = 0.$$

En posant : $r_1 = -\lambda + \omega$ et $r_2 = -\lambda - \omega$, et l'équation à résoudre devient :

$$-(\lambda + \omega)e^{-\omega t_0} + (\lambda - \omega)e^{\omega t_0} = 0,$$

d'où en introduisant les fonctions hyperboliques :

$$2\lambda \operatorname{sh}(\omega t_0) - 2\omega \operatorname{ch}(\omega t_0) = 0, \text{ soit : } \operatorname{th}(\omega t_0) = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

 Les fonctions hyperboliques sont définies par :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

La résolution numérique de cette équation en ω donne : $\omega = 4\,027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

 Graphiquement, on détermine l'abscisse du point d'intersection des courbes (avec $X = 10^{-3} \omega$) :

$$Y_1 = \operatorname{th}(0,36X) \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{X^2}}}.$$

La résistance R'' s'obtient alors par la relation :

$$\lambda = \frac{R''}{2L} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}, \text{ soit : } R'' = 2L\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} = 225 \, \Omega.$$

Exercice 5

 En série, les impédances s'ajoutent; en parallèle les admittances s'ajoutent.

a) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \operatorname{Arctan}(RC\omega) - \frac{\pi}{2} = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right). \end{cases}$$

 Cette avance de phase est négative quelle que soit la valeur de ω . Le dipôle est globalement capacitif, ce qui est logique d'après sa constitution; l'intensité est en avance sur la tension.

b) On a : $\underline{Z} = R + jL\omega$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right). \end{cases}$$

c) On a : $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right). \end{cases}$$



Le signe de l'avance de phase est à présent fonction de la pulsation ω . Le comportement global (inductif ou capacitif) dépend de la pulsation.

d) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R(2 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega}$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = R \sqrt{\frac{4 + R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{RC\omega}{2}\right) - \text{Arctan}(RC\omega). \end{cases}$$

e) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3jRC\omega}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$, d'où :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{(1 - R^2 C^2 \omega^2)^2 + 9R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

On peut écrire aussi : $\underline{Z} = R \frac{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}{1 + jRC\omega}$, d'où :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{RC\omega - \frac{1}{RC\omega}}{3}\right) - \text{Arctan}(RC\omega).$$



Pour exprimer l'argument d'un nombre complexe, penser à l'écrire de manière à ce que sa partie réelle soit positive.

f) • On a : $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$, d'où :

$$|\underline{Z}| = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On en déduit :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{R^2 + L^2 \omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

• Pour exprimer $\arg(\underline{Z})$, on modifie son expression de manière à faire apparaître des complexes à partie réelle positive :

$$|\underline{Z}| = \frac{R + jL\omega}{jC\omega \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right]}.$$

On en déduit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right).$$

Exercice 6

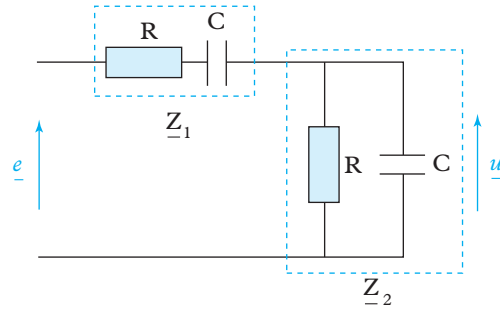
a) Un diviseur de tension entre le condensateur d'une part et l'association série {résistance + bobine} d'autre part donne :

$$\underline{u}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On retrouve bien le résultat intermédiaire obtenu dans le cours lors de l'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur. En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R}$, on a en effet :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\alpha\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + 2j\alpha x}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

b) On substitue à l'association série $\{R + C\}$ une impédance \underline{Z}_1 et à l'association parallèle $\{R//C\}$ une impédance \underline{Z}_2 :



On a d'après le théorème de division de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + 1} \underline{e},$$

d'où :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}, \text{ avec } \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega.$$



Il faut veiller à n'appliquer le diviseur de tension qu'à des dipôles parcourus par le même courant. C'est bien le cas de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 dans ce circuit.

On en tire :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}, \text{ d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{e}}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 7

a) Déterminons l'admittance du circuit (association parallèle) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right).$$

On en déduit :

$$\underline{u} = \frac{\underline{i}}{\underline{Y}}, \text{ d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{i}}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

Le courant dans la résistance vaut alors :

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{u}}{R} = \frac{\underline{i}}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

Posons : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q' = \frac{1}{2\alpha'} = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

 On a : $Q' = \frac{1}{Q}$, où Q est le facteur de qualité du circuit RLC série.

On obtient alors :

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{i}}{1 + jQ' \left(x - \frac{1}{x} \right)}.$$

L'étude de la résonance de \underline{i}_R est analogue à celle de la résonance courant dans le circuit RLC série.

b) Le théorème de division de courant s'écrit :

$$\underline{i}_L = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} \underline{i} = \frac{\underline{i}}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}.$$

On a donc, avec les notations réduites :

$$\underline{i}_L = \frac{\underline{i}}{1 - x^2 + 2j\alpha'x}.$$

L'étude de la résonance de \underline{i}_L est similaire à celle de la résonance tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série.

Exercice 8

a) Le facteur de qualité Q , aussi appelé facteur de surtension, vérifie la relation :

$$Q = \frac{U_0(\omega_0)}{E_0}, \text{ où } E_0 \text{ est l'amplitude basses fréquences de la tension aux bornes de } C.$$

Lorsque la résonance est aiguë, la pulsation ω_{\max} correspondante est très proche de la pulsation propre ω_0 .

On peut donc considérer en bonne approximation que :

$$Q \approx \frac{U_{\max}}{E_0} = 12,5 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2Q} = 0,04.$$

 Contrairement à la résonance intensité, la résonance tension ne se fait pas pour une pulsation égale à la pulsation propre ω_0 .

b) Plus la résonance est aiguë, plus la fréquence de résonance est voisine de la fréquence propre :

$$f_0 \approx f_r = 800 \text{ Hz, d'où : } \omega_0 = 2\pi f_0 = 5\,027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) On a : $LC\omega_0^2 = 1$, d'où : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,198 \text{ H}.$

 On préfère souvent retenir l'expression de la pulsation propre ω_0 sous la forme $LC\omega_0^2 = 1$.

Par ailleurs : $Q = \frac{L\omega_0}{r}$, d'où : $r = \frac{L\omega_0}{Q} = 79,6 \, \Omega.$

d) • L'amplitude de U_0 s'écrit en fonction de la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Pour $f = 1\,600\text{ Hz}$, on a : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 2$, d'où : $U_0 = 5,92\text{ V}$.

On retrouve bien le résultat expérimental.

- L'avance de phase ϕ est donnée par la relation :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(Q \frac{1-x^2}{x}\right) = -3,08\text{ rad, soit : } \phi = -177^\circ.$$

Exercice 9

a) On a : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

On en déduit :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

b) Quand C varie, pour vérifier une relation linéaire, il faut tracer f_r^2 en fonction de $\frac{1}{C}$. En effet :

$$\omega_r = 2\pi f_r, \text{ d'où : } f_r^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}\right).$$

Lorsqu'on trace la droite $f_r\left(\frac{1}{C}\right)$:

- la pente est $\frac{1}{4\pi^2L}$, d'où la détermination de L ;
- l'ordonnée à l'origine est $-\frac{R^2}{8\pi^2L^2}$, d'où la détermination de R connaissant l'inductance L .

Exercice 10

a) Pour $t > 0$, on a : $E_2 = L\frac{di}{dt} + u$, avec $i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}$.



On applique une fois la loi des mailles et une fois la loi des nœuds au circuit étudié.

On en déduit donc l'équation différentielle vérifiée par u :

$$E_2 = LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} + u,$$

encore écrite :

$$\tau^2\frac{d^2u}{dt^2} + \tau\frac{du}{dt} + u = E_0\cos(\omega t).$$

- Recherche de la solution u_1 , de l'équation homogène :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau^2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{r}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = \frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = -\frac{3}{\tau^2} < 0.$$

La solution correspondant au régime transitoire (pseudo-périodique) est donc :

$$u_1(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right)\right].$$

- Recherche de la solution particulière u_2 sinusoïdale :

$$\underline{u}_2[-\omega^2\tau^2 + j\omega\tau + 1] = E_0 e^{j\omega t}, \text{ d'où : } \underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau}.$$

La solution réelle $u_2(t)$ est la partie réelle de la solution complexe $\underline{u}_2(t)$:

$$\underline{u}_2(t) = \frac{E_0 [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)](1 - \omega^2\tau^2 - j\omega\tau)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2},$$

d'où :

$$u_2(t) = \text{Re}[\underline{u}_2(t)] = \frac{E_0}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} [(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)].$$



Pour déterminer la solution particulière sinusoïdale $u_2(t)$ on utilise toujours les nombres complexes.

- Écriture de la solution complète :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) \right] + \frac{E_0 [(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)]}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

- Les constantes A et B intervenant dans l'expression du régime transitoire se déterminent grâce aux conditions initiales.

– La tension aux bornes du condensateur est continue. On a donc :

$$u(0) = E_0 = A + \frac{E_0(1 - \omega^2\tau^2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}, \text{ d'où : } A = \frac{E_0\omega^4\tau^4}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

– L'intensité i dans la bobine est continue. À $t = 0$, on a :

$$i(0) = \frac{E_0}{R} \text{ et } u(0) = E_0, \text{ d'où : } \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

On en déduit :

$$-\frac{A}{2\tau} + \frac{\sqrt{3}}{2\tau}B + \frac{E_0\omega^2\tau}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} = 0, \text{ d'où : } B = \frac{3}{\sqrt{3}}E_0\omega^2\tau^2 \frac{(\omega^2\tau^2 - 2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

b) Le régime sinusoïdal permanent correspond à la solution particulière sinusoïdale u_2 . On détermine l'amplitude U_{20} et la phase ϕ en utilisant l'écriture complexe \underline{u}_2 :

$$\underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau} = \underline{U}_2 e^{j\omega t}.$$

- L'amplitude réelle est le module de l'amplitude complexe :

$$U_{20} = |\underline{U}_2| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \omega^2\tau^2 + \omega^4\tau^4}}.$$

On pose : $x = \omega\tau$. L'amplitude U_{20} s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{U_{20}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \text{ avec } f(x) = 1 - x^2 + x^4.$$

La fonction f passe par un minimum en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors :

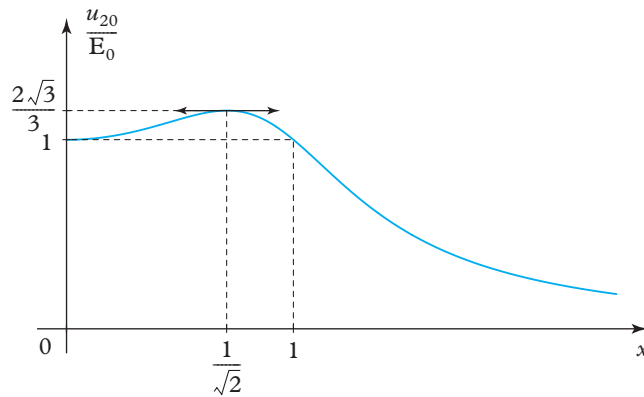
$$\left(\frac{U_{20}}{E_0}\right)_{\max} = \frac{U_{20}}{E_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15.$$



On détermine très simplement le sens de variation de la fonction f en étudiant le signe de sa dérivée.



Le minimum de la fonction f correspond au maximum de la fonction U_{20} .



- La phase est l'argument de l'amplitude complexe :

$$\phi = \arg(\underline{U}_2) = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - \omega^2 \tau^2}{\omega \tau}\right).$$

💡 On obtient cette expression en multipliant d'abord le numérateur et le dénominateur par j .

On pose : $x = \omega \tau$. La phase ϕ s'écrit alors sous la forme :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x} - x\right).$$

La fonction ϕ décroît entre les valeurs 0 (pour $x = 0$) et (pour $x \rightarrow +\infty$).

