

M1 - ENS Lyon
Symétries et Particules
Année 2012 - 2013- Semestre 2b
TD 1 : Ordres de grandeurs et symétries

1 Ordres de grandeur

- 1- – Quelle distance parcourt une particule ultrarelativiste en 1 ns ?

$$l = 3.10^8 * 10^{-9} = 0.3m$$

- Quelle durée met une particule de masse nulle pour traverser un proton ?

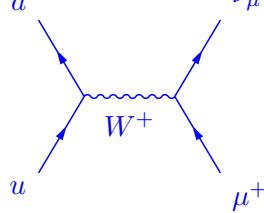
$$\text{taille d'un proton } d = 1fm = 10^{-15}m \text{ donc } t = \frac{10^{-15}}{3.10^8} = 3.10^{-24}s$$

- 2- Le muon a un temps de vie de $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. De nombreux muons sont produits lors d'interaction dans la haute atmosphère de particules cosmiques énergétiques. Pourquoi peut-on les détecter au sol ? Peut-on envisager de fabriquer un collisionneur à muons, et quels en seraient les avantages et les inconvénients ?

Energie typique des muons cosmiques 1 à 10 GeV $\Rightarrow \gamma = E/m = 10 \text{ GeV}/100 \text{ MeV} = 100 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.9999$ On peut considérer que les particules se déplacent à la vitesse de la lumière. Leur trajet $l = \beta\gamma c\tau = 100 \times 3 \cdot 10^8 \times 2.2 \cdot 10^{-6} = 66km$ bien plus grand que l'épaisseur de l'atmosphère (même avec 7km pour 1 GeV, une grande partie arrive jusqu'à nous). Un collisionneur à muons est donc possible, mais il faut produire, focaliser le faisceau et l'accélérer sans trop perdre par désintégration mais cela permettrait de dépasser la limite en énergie due à la radiation synchrotron des collisionneurs e^+e^- car cette perte est proportionnelle à m^2 , tout en gardant une particule non composite comme projectile.

- 3- Comparer les temps de vie des divers mésons suivants, déduire la nature des forces à l'oeuvre, et proposer un schéma de désintégration :
- π^+ (contenu en quarks $u\bar{d}$) $M = 140\text{MeV}$, $c\tau = 7,8\text{m}$

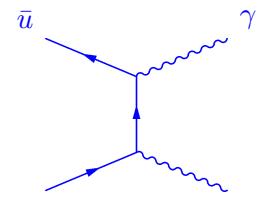
Le temps de vie du π^+ est $2,6 \times 10^{-8}$ s. Il s'agit d'un temps relativement long. La désintégration se fait par interaction faible :



Notez que le τ est trop lourd ($1.7 \text{ GeV}/c^2$) et que le spin du pion valant 0, et le neutrino de spin 1/2 et de masse nulle dans le modèle standard est donc d'hélicité gauche. Il faut donc un anti-lepton gauche. Or les interactions faibles violant la parité, une particule de spin 1/2 est gauche, une anti-particule de spin 1/2 est droite. Les leptons chargés sont massifs donc peuvent avoir une composante de l'autre hélicité et d'autant plus que le masse est grande .

- π^0 (quarks $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$) $M = 135 \text{ MeV}$, $\tau = 8,4 \times 10^{-17} \text{ s}$

Désintégration rapide : électromagnétique.

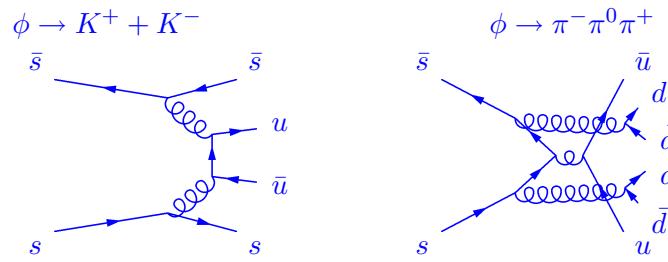


Notons que la désintégration en e^+e^- est supprimée. A haute énergie, l'interaction électromagnétique conserve l'hélicité qui tend à se confondre avec la chiralité. Les couplages photon-lepton-lepton possibles sont avec 2 leptons identiques de même hélicité (chiralité) ou avec 2 antileptons de même hélicité ou avec un lepton et un antilepton d'hélicité différente (voir Quarks et Lepton d'Halzen et Martin section 6.6). Cette conservation de l'hélicité n'est vérifiée qu'à des termes d'ordre $m_{lepton}/energie$ près.

Le π^0 a $J^{PC} = 0^{-+}$, son moment cinétique total est $J = 0 = L + S$, en tant que combinaison de 2 quarks de spin $\frac{1}{2}$, il ne peut y avoir que $S = 0$ ou 1 et donc $S = L = 0$ ou $S = L = 1$ par combinaison des moments cinétiques. La parité du système e^+e^- est -1 et doit correspondre à $(-1)^{L+1}$, ce qui ne permet que la combinaison $L = S = 0$. Dès lors, la désintégration du π^0 en e^+e^- n'est possible qu'en se désintégrant en 2 fermions de même hélicité. Or ce couplage est supprimé par un facteur $\frac{m_e}{energie} = \frac{m_e}{m_\pi/2} = \frac{0.5}{67.5} = 7 \times 10^{-3}$ et donc au carré : $\left(\frac{m_e}{m_\pi/2}\right)^2 = 6 \times 10^{-5}$ et le taux de branchement du π^0 en e^+e^- est de 6.46×10^{-8} .

- ϕ (état lié $s\bar{s}$) $M = 1,02 \text{ GeV}$, $\Gamma = 4,4 \text{ MeV}$. On signale que $M_{K^\pm} = 494 \text{ MeV}$.

$\tau = \hbar/\Gamma = 6.58 \times 10^{-22} / 4.4 = 1.5 \times 10^{-22} \text{ s}$. Il s'agit donc d'une désintégration forte. $\phi \rightarrow K^+ + K^-$ (La désintégration en 3 pions semble plus favorable cinématiquement mais nécessite des gluons suffisamment durs pour créer des paires $q\bar{q}$. De tels gluons ne couplent que très faiblement. Typiquement un graphe de Feynman que l'on peut couper en ne coupant que les lignes de gluons est supprimé pour cette raison (règle de OZI du nom des 3 physiciens qui l'ont remarqué))



- J/ψ (état lié $c\bar{c}$) $M = 3,1 GeV$, $\Gamma = 90 \text{ keV}$. On signale que $M_{D^0} = 1,9 GeV$.

Le temps de vie est long on a une désintégration faible. En effet : $J/\psi \rightarrow D^+ + D^-$ impossible à cause de la masse des D, la désintégration en 3 Kaons est supprimée par OZI) il reste donc la désintégration faible en 2 leptons ou deux quarks.

- 4- Ecrire le carré de la charge de l'électron en unité sans dimension.

$$\alpha = e^2 / 4\pi \varepsilon_0 \hbar c = 1/137$$

2 Groupes $SU(2)$ et $SU(3)$

- 1- On considère la matrice $U(\theta, \vec{u}) = e^{-i\theta \sum_a u_a \sigma_a / 2}$ où σ_i sont les matrices de Pauli et \vec{u} , un vecteur unitaire. Montrer que $U(\theta, \vec{u}) = \cos \frac{\theta}{2} - i\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned}
 [\sigma_a, \sigma_b] &= 2i \sum_c \epsilon_{abc} \sigma_c = \sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a \\
 \{\sigma_a, \sigma_b\} &= 2\delta_{ab} I = \sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a \\
 \Rightarrow \sigma_a \sigma_b &= \frac{1}{2} ([\sigma_a, \sigma_b] + \{\sigma_a, \sigma_b\}) = \sum_c i \epsilon_{abc} \sigma_c + \delta_{ab} I \\
 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) &= \left(\sum_i a_i \sigma_i \right) \left(\sum_j b_j \sigma_j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \sigma_i \sigma_j \\
 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_i \sum_j a_i b_j \left[\sum_k i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I \right] = (\vec{a} \cdot \vec{b}) I + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \\
 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \vec{a}^2 I = \vec{a}^2 \\
 \Rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2 &= I \\
 e^{-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \Rightarrow e^{-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n}}{(2n)!} I - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \\
 \Rightarrow e^{-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2} &= \cos(\theta/2) - i\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \sin(\theta/2)
 \end{aligned}$$

- 2- Montrer que dans $SU(2)$, $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$, et exprimer les états du produit tensoriel en fonction des états de la somme directe des représentations irréductibles. On précisera la symétrie des états correspondants aux représentations irréductibles.

On combine deux représentations irréductibles de $SU(2)$, dont le module de représentation est donné par les vecteurs propres des opérateurs J_i^2 et J_{z_i} dans chacune des deux représentations notés $|j_1 m_1\rangle$ et $|j_2 m_2\rangle$ avec $j_i(j_i + 1)$ et m_i les valeurs propres correspondantes pour J_i^2 et J_{z_i} . Le produit direct de deux représentations irréductibles de $SU(2)$ admet un module de représentation donné par les vecteurs propres des opérateurs J^2 et J_z dont les $j(j+1)$ valeurs propres possibles correspondent aux valeurs de j allant de $|j_1 - j_2|$ à $j_1 + j_2$. Pour chaque valeur de j , il y a $2j+1$ vecteurs propres de valeur propre m de J_z allant de $-j$ à $+j$.

Dans le cas de deux représentations de dimension 2, que l'on peut associer à la combinaison de deux spins $\frac{1}{2}$, on obtient les valeurs de $j=1, 0$ avec $m' = -1, 0, 1$ pour $j' = 1$ (un triplet) et $m' = 0$ pour $j'=0$ (un état singlet). On a donc $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$. On y combine un 3^{eme} spin $\frac{1}{2}$. En le combinant avec $j' = 1$, on obtient $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ avec respectivement 4 vecteurs propres de J_z pour $j = \frac{3}{2}$, de valeurs propres $m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, et 2 vecteurs propres de J_z pour $j = \frac{1}{2}$, de valeurs propres $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

En combinant le 3^{eme} spin $\frac{1}{2}$ avec $j' = 0$, on obtient un deuxième doublet de vecteurs propres avec les valeurs propres $j = \frac{1}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. On retrouve bien une somme directe d'une représentation de dimension 4 et de 2 représentations de dimension 2.

On consulte les tables de coefficients de Clebsch-Gordan pour exprimer les fonctions d'ondes associées.

On construit d'abord la fonction d'onde associée à deux spins $\frac{1}{2}$.

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |1 1\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 0\rangle + |0 0\rangle)$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1 0\rangle - |0 0\rangle)$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |1 - 1\rangle$$

On combine le 3^{eme} avec le triplet et le singlet. Le nombre entre parenthèses étant la valeur de j' .

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 1\rangle = |\frac{3}{2} \frac{3}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 - 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}(0)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 - 1\rangle = |\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0)\rangle$$

Donc,

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2} \frac{3}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle + |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(0)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle - |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(0)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle + |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle) = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle - |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |0 0\rangle) = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0)\rangle$$

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle |1 - 1\rangle = |\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1)\rangle$$

Les états du quadruplet sont symétriques. $|\frac{3}{2} \frac{3}{2}(1)\rangle, |\frac{3}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle, |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle, |\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1)\rangle$

Les états du doublet correspondant à $j'=1$ sont mixed-symétriques : $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(1)\rangle, |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1)\rangle$

Les états du doublet correspondant à $j'=0$ sont mixed-antisymétriques : $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}(0)\rangle, |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0)\rangle$

- 3- On veut déterminer les constantes de structures de $SU(3)$, c'est à dire les f_{abc} tels que $[\lambda_a/2, \lambda_b/2] = if_{abc}\lambda_c/2$. Où les λ_i sont les matrices de Gell-Mann génératrices de $SU(3)$.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Combien y a-t-il de constantes f_{abc} ?

$8 \times 8 \times 8 = 512$

- Montrer que les matrices de Gell-Mann obéissent à la normalisation $\text{tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Konecker.

Produit de matrices $C_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$

Trace = somme des éléments diagonaux, pour un produit : $\sum_i C_{ii} = \sum_i \sum_k A_{ik}B_{ki}$: commutatif en AB.

Les matrices de Gell-Mann sont soit symétriques $A_{ij} = A_{ji}$ soit antisymétriques $A_{ij} = -A_{ji}$.

Les matrices symétriques sont $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$ et λ_8 , les matrices antisymétriques sont λ_2, λ_5 et λ_7 .

La trace du produit d'une matrice symétrique par une matrice antisymétrique est nulle.

La trace du produit de 2 matrices symétriques vaut $\sum_i \sum_k A_{ik}B_{ik}$ et correspond à la somme des produits des éléments de matrices. Parmi $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$ et λ_8 , seules λ_3 et λ_8 ont des éléments de matrice non nuls au mêmes endroit et

$$\text{Tr}(\lambda_3 \lambda_8) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

La trace du produit de 2 matrices antisymétriques vaut $-\sum_i \sum_k A_{ik}B_{ik}$ et correspond à l'opposé de la somme des produits des éléments de matrices. Les 3 matrices λ_2, λ_5 et λ_7 ont leurs éléments de matrices non nuls à des positions différentes.

Donc $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 0$ si $i \neq j$

Il nous reste à calculer $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_i)$. Les matrices $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$ et λ_8 sont symétriques et leurs éléments sont réels. Donc $\text{Tr}(\lambda_i^2) = \sum_i \sum_k A_{ik}^2$.

Les matrices $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_6 ont tous leurs éléments non nuls sauf deux qui valent 1 et donc leur trace vaut $1^2 + 1^2 = 2$

$$\text{Tr}(\lambda_8^2) = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 2^2) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 4) = 2$$

Les matrices λ_2, λ_5 et λ_7 sont antisymétriques et leurs éléments sont imaginaires purs. Donc $\text{Tr}(\lambda_i^2) = -\sum_i \sum_k A_{ik}^2 = \sum_i \sum_k |A_{ik}|^2$.

Leurs éléments sont tous nuls sauf deux dont le module vaut 1 donc leur trace vaut $1^2 + 1^2 = 2$

On a donc bien $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$.

- En déduire que $f_{abc} = \frac{-i}{4} \text{Tr}(\lambda_c [\lambda_a, \lambda_b])$ et que f_{abc} est totalement antisymétrique.

$$\begin{aligned}
\text{Par définition : } [\lambda_a/2, \lambda_b/2] &= i \sum_c f_{abc} \lambda_c / 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_c f_{abc} \lambda_c = \frac{-i}{4} [\lambda_a, \lambda_b] \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \lambda_d \sum_c f_{abc} \lambda_c = \frac{-i}{4} \lambda_d [\lambda_a, \lambda_b] \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_c f_{abc} \lambda_d \lambda_c \right) = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b]) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_c f_{abc} \text{Tr} (\lambda_d \lambda_c) = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_c f_{abc} 2\delta_{dc} = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b]) \\
&\Rightarrow f_{abd} = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b])
\end{aligned}$$

Pour prouver que f_{abd} est totalement antisymétrique, on utilise les propriétés suivantes des traces et des commutateurs :

$$\left\{
\begin{array}{l}
[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \\
[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C = [AB, C] + [CA, B] \\
\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \text{ et donc la trace d'un commutateur est toujours nulle.}
\end{array}
\right.$$

Si on permute a et b, le commutateur change de signe. On a bien $f_{abd} = -f_{bad}$.

$$\text{Si on permute b et d, } f_{adb} = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_b [\lambda_a, \lambda_d]) = \frac{-i}{4} \text{Tr} ([\lambda_a, \lambda_d] \lambda_b) = \frac{-i}{4} \text{Tr} ([\lambda_a, \lambda_d \lambda_b]) + \frac{i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b]) = -f_{abd}$$

$$\text{Si on permute a et d, } f_{dba} = \frac{-i}{4} \text{Tr} (\lambda_a [\lambda_d, \lambda_b]) = \frac{-i}{4} \text{Tr} ([\lambda_d, \lambda_b] \lambda_a) = \frac{-i}{4} \text{Tr} ([\lambda_d \lambda_a, \lambda_b]) + \frac{i}{4} \text{Tr} (\lambda_d [\lambda_a, \lambda_b]) = -f_{abd}$$

– Calculer les f_{abc} .

$$\begin{aligned}
f_{123} &= 1 \\
f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 Isospin

- 1- On note p_α^\dagger et p_α les opérateurs de création et d'annihilation d'un proton dans l'état $|\alpha\rangle$. On note n_α^\dagger et n_α les opérateurs de création et d'annihilation d'un neutron dans l'état $|\alpha\rangle$. Ces opérateurs vérifient les relations d'anticommutations $\{p_\alpha, p_\beta^\dagger\} = p_\alpha p_\beta^\dagger + p_\beta^\dagger p_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$, $\{p_\alpha^\dagger, p_\beta^\dagger\} = 0$, $\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$ et des relations similaires pour n_α^\dagger et n_α . Les opérateurs concernant un proton anticommutent avec ceux concernant un neutron.
- Donner l'expression de l'opérateur T_+ échangeant un neutron par un proton.

$$T_+ = \sum_\alpha p_\alpha^\dagger n_\alpha$$

– Donner l'expression de l'opérateur T_- échangeant un proton par un neutron.

$$T_- = \sum_{\alpha} n_{\alpha}^{\dagger} p_{\alpha}$$

- Calculer $T_3 = [T_+, T_-]$.

$$\begin{aligned}
T_3 &= [T_+, T_-] \\
&= T_+ T_- - T_- T_+ \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} p_{\alpha}^{\dagger} n_{\alpha} n_{\beta}^{\dagger} p_{\beta} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} n_{\alpha}^{\dagger} p_{\alpha} p_{\beta}^{\dagger} n_{\beta} \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(p_{\alpha}^{\dagger} (n_{\alpha} n_{\beta}^{\dagger}) p_{\beta} - n_{\alpha}^{\dagger} (p_{\alpha} p_{\beta}^{\dagger}) n_{\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(p_{\alpha}^{\dagger} (\delta_{\alpha\beta} - n_{\beta}^{\dagger} n_{\alpha}) p_{\beta} - n_{\alpha}^{\dagger} (\delta_{\alpha\beta} - p_{\beta}^{\dagger} p_{\alpha}) n_{\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(p_{\alpha}^{\dagger} \delta_{\alpha\beta} p_{\beta} - p_{\alpha}^{\dagger} n_{\beta}^{\dagger} n_{\alpha} p_{\beta} - n_{\alpha}^{\dagger} \delta_{\alpha\beta} n_{\beta} + p_{\beta}^{\dagger} n_{\alpha}^{\dagger} n_{\beta} p_{\alpha} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} \left(p_{\alpha}^{\dagger} p_{\beta} - n_{\alpha}^{\dagger} n_{\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \left(p_{\alpha}^{\dagger} p_{\alpha} - n_{\alpha}^{\dagger} n_{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

- Calculer $[T_3, T_+]$ et $[T_3, T_-]$

$$\begin{aligned}
[p_\alpha^\dagger p_\alpha, p_\beta^\dagger n_\beta] &= p_\alpha^\dagger p_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta - p_\beta^\dagger n_\beta p_\alpha^\dagger p_\alpha \\
&= p_\alpha^\dagger p_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta - p_\beta^\dagger p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta \\
&= p_\alpha^\dagger p_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta + p_\alpha^\dagger p_\beta^\dagger p_\alpha n_\beta \\
&= p_\alpha^\dagger \{p_\alpha, p_\beta^\dagger\} n_\beta \\
&= \delta_{\alpha\beta} p_\alpha^\dagger n_\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[n_\alpha^\dagger n_\alpha, p_\beta^\dagger n_\beta] &= n_\alpha^\dagger n_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta - p_\beta^\dagger n_\beta n_\alpha^\dagger n_\alpha \\
&= n_\alpha^\dagger n_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta + p_\beta^\dagger n_\alpha^\dagger n_\beta n_\alpha - p_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} n_\alpha \\
&= n_\alpha^\dagger n_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta + n_\alpha^\dagger p_\beta^\dagger n_\alpha n_\beta - p_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} n_\alpha \\
&= n_\alpha^\dagger n_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta - n_\alpha^\dagger n_\alpha p_\beta^\dagger n_\beta - p_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} n_\alpha \\
&= -\delta_{\alpha\beta} p_\beta^\dagger n_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T_3, T_+] &= \sum_\alpha \sum_\beta [p_\alpha^\dagger p_\alpha, p_\beta^\dagger n_\beta] - \sum_\alpha \sum_\beta [n_\alpha^\dagger n_\alpha, p_\beta^\dagger n_\beta] \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} p_\alpha^\dagger n_\beta + \sum_\alpha \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} p_\beta^\dagger n_\alpha \\
&= 2 \sum_\alpha p_\alpha^\dagger n_\alpha \\
&= 2T_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[p_\alpha^\dagger p_\alpha, n_\beta^\dagger p_\beta] &= p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta - n_\beta^\dagger p_\beta p_\alpha^\dagger p_\alpha \\
&= p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta + n_\beta^\dagger p_\alpha^\dagger p_\beta p_\alpha - n_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} p_\alpha \\
&= p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta + p_\alpha^\dagger n_\beta^\dagger p_\alpha p_\beta - n_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} p_\alpha \\
&= p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta - p_\alpha^\dagger p_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta - n_\beta^\dagger \delta_{\alpha\beta} p_\alpha \\
&= -\delta_{\alpha\beta} n_\beta^\dagger p_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[n_\alpha^\dagger n_\alpha, n_\beta^\dagger p_\beta] &= n_\alpha^\dagger n_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta - n_\beta^\dagger p_\beta n_\alpha^\dagger n_\alpha \\
&= n_\alpha^\dagger n_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta - n_\alpha^\dagger n_\beta^\dagger p_\beta n_\alpha \\
&= n_\alpha^\dagger n_\alpha n_\beta^\dagger p_\beta + n_\alpha^\dagger n_\beta^\dagger n_\alpha p_\beta \\
&= n_\alpha^\dagger \{n_\alpha, n_\beta\} p_\beta \\
&= \delta_{\alpha\beta} n_\alpha^\dagger p_\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T_3, T_-] &= \sum_\alpha \sum_\beta [p_\alpha^\dagger p_\alpha, n_\beta^\dagger p_\beta] - \sum_\alpha \sum_\beta [n_\alpha^\dagger n_\alpha, n_\beta^\dagger p_\beta] \\
&= -\sum_\alpha \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} n_\beta^\dagger p_\alpha - \sum_\alpha \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} n_\alpha^\dagger p_\beta \\
&= -2 \sum_\alpha n_\alpha^\dagger p_\alpha \\
&= -2T_-
\end{aligned}$$

- Quelle est l'algèbre engendrée par les opérateurs $t_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}T_+$, $t_- = \frac{1}{\sqrt{2}}T_-$, $t_3 = \frac{1}{2}T_3$

$$\begin{aligned}
[t_+, t_-] &= \frac{1}{2}[T_+, T_-] = \frac{1}{2}T_3 = t_3 \\
[t_3, t_+] &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}[T_3, T_+] = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}2T_+ = t_+ \\
[t_3, t_-] &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}[T_3, T_-] = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(-2)T_- = -t_-
\end{aligned}$$

C'est l'algèbre $SU(2)$ de l'isospin.

- 2-** Le proton et le neutron sont des états d'isospin $I = 1/2$. Les Δ des états d'isospin $I = 3/2$, de masse $M = 1,232\text{GeV}$, et les pions, des états d'isospin $I = 1$.
- Comparer les amplitudes des processus
$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$
en fonction de l'amplitude des processus idéaux $\mathcal{M}_{3/2}$ et $\mathcal{M}_{1/2}$

On a trouvé en **2.2-** la combinaison de 3 spins $\frac{1}{2}$, ici on a 3 isospins $\frac{1}{2}$, ce qui donne la même chose. Plus précisément, on a une combinaison du pion (isospin $j=1$, $m=-1,0,1$) avec un proton (isospin $j=1/2$ $m=+1/2$) ou un neutron (isospin $j=1/2$ $m=-1/2$)

$p + \pi^+$ correspond à $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 1\rangle = |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle$

$p + \pi^-$ correspond à $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle |1 -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$

$n + \pi^0$ correspond à $|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle |1 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$

Puisque l'interaction forte conserve l'isospin, $\langle \frac{3}{2}m | \mathcal{M} | \frac{1}{2}m \rangle = 0$

On a $\mathcal{M}_{3/2} = \langle \frac{3}{2}m | \mathcal{M} | \frac{3}{2}m \rangle$ et $\mathcal{M}_{1/2} = \langle \frac{1}{2}m | \mathcal{M} | \frac{1}{2}m \rangle$ donc :

$$\langle \pi^+ + p | \mathcal{M} | \pi^+ + p \rangle = \mathcal{M}_{3/2}$$

$$\langle \pi^- + p | \mathcal{M} | \pi^- + p \rangle = \frac{1}{3}\mathcal{M}_{3/2} + \frac{2}{3}\mathcal{M}_{1/2}$$

$$\langle \pi^- + p | \mathcal{M} | \pi^0 + n \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_{1/2}$$

- dans le cas où l'énergie dans le centre de masse vaut 1,232GeV (voir les données expérimentales de la Figure 1, montrer que

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} &= \frac{|\langle \pi^+ + p | \mathcal{M} | \pi^+ + p \rangle|^2}{|\langle \pi^- + p | \mathcal{M} | \pi^- + p \rangle|^2 + |\langle \pi^0 + n | \mathcal{M} | \pi^- + p \rangle|^2} \\ &= \frac{|\mathcal{M}_{3/2}|^2}{\frac{1}{9}|\mathcal{M}_{3/2} + 2\mathcal{M}_{1/2}|^2 + \frac{2}{9}|\mathcal{M}_{3/2} - \mathcal{M}_{1/2}|^2} \\ &\simeq \frac{9|\mathcal{M}_{3/2}|^2}{3|\mathcal{M}_{3/2}|^2} \end{aligned}$$

Le Δ est connu de $I=3/2$, donc $\mathcal{M}_{3/2} \gg \mathcal{M}_{1/2}$ pour $E_{CM}=1,232$ GeV.

Références

- [1] JB Zuber, *Introduction à la théorie des groupes et de leur représentations*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/09/29/68/PDF/cel-41.pdf>
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008, (p134)

Matrices de Pauli

$$\begin{aligned} \sigma_x &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \sigma_i^\dagger &= \sigma_i = \sigma_i^{-1}, e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \theta + i(\hat{\theta} \cdot \vec{\sigma}) \sin \theta \end{aligned}$$

Symmetries

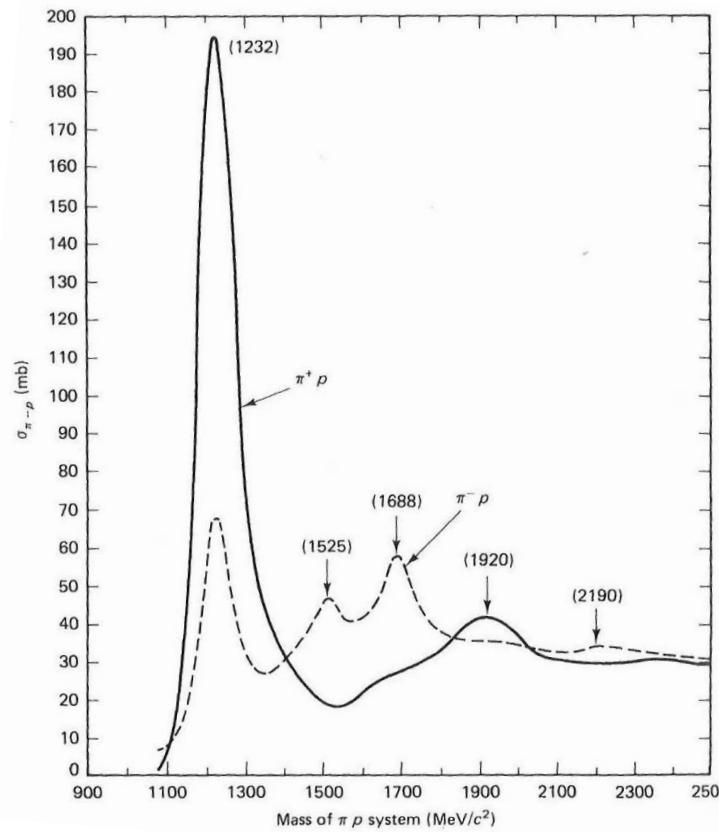


FIG. 1 – Section efficace totale mesurée de diffusion pion sur proton [1] en fonction de la masse invariante du système.

Citation: J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), PR D **86**, 010001 (2012) (URL: http://pdg.lbl.gov)

$J/\psi(1S)$ DECAY MODES

Mode	Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level
Γ_1 hadrons	(87.7 \pm 0.5) %	
Γ_2 virtual $\gamma \rightarrow$ hadrons	(13.50 \pm 0.30) %	
Γ_3 ggg	(64.1 \pm 1.0) %	
Γ_4 γgg	(8.8 \pm 1.1) %	
Γ_5 $e^+ e^-$	(5.94 \pm 0.06) %	
Γ_6 $e^+ e^- \gamma$	[a] (8.8 \pm 1.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_7 $\mu^+ \mu^-$	(5.93 \pm 0.06) %	

Decays involving hadronic resonances

Γ_8 $\rho\pi$	(1.69 \pm 0.15) %	
Γ_9 $\rho^0\pi^0$	(5.6 \pm 0.7) $\times 10^{-3}$	S=2.4
Γ_{10} $a_2(1320)\rho$	(1.09 \pm 0.22) %	
Γ_{11} $\omega\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$	(8.5 \pm 3.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_{12} $\omega\pi^+\pi^-\pi^0$	(4.0 \pm 0.7) $\times 10^{-3}$	
Γ_{13} $\omega\pi^+\pi^-$	(8.6 \pm 0.7) $\times 10^{-3}$	S=1.1
Γ_{14} $\omega f_2(1270)$	(4.3 \pm 0.6) $\times 10^{-3}$	
Γ_{15} $K^*(892)^0\bar{K}^*(892)^0$	(2.3 \pm 0.7) $\times 10^{-4}$	
Γ_{16} $K^*(892)^{\pm}\bar{K}^*(892)^{\mp}$	(1.00 \pm 0.22) $\times 10^{-3}$	
Γ_{17} $K^*(892)^{\pm}\bar{K}^*(800)^{\mp}$	(1.1 \pm 1.0) $\times 10^{-3}$	
Γ_{18} $\eta K^*(892)^0\bar{K}^*(892)^0$	(1.15 \pm 0.26) $\times 10^{-3}$	
Γ_{19} $K^*(892)^0\bar{K}_2^*(1430)^0 + c.c.$	(6.0 \pm 0.6) $\times 10^{-3}$	
Γ_{20} $K^*(892)^0\bar{K}_2^*(1770)^0 + c.c. \rightarrow K^*(892)^0 K^- \pi^+ + c.c.$	(6.9 \pm 0.9) $\times 10^{-4}$	
Γ_{21} $\omega K^*(892)\bar{K} + c.c.$	(6.1 \pm 0.9) $\times 10^{-3}$	
Γ_{22} $K^+\bar{K}^*(892)^- + c.c.$	(5.12 \pm 0.30) $\times 10^{-3}$	
Γ_{23} $K^+\bar{K}^*(892)^- + c.c. \rightarrow K^+ K^- \pi^0$	(1.97 \pm 0.20) $\times 10^{-3}$	
Γ_{24} $K^+\bar{K}^*(892)^- + c.c. \rightarrow K^0 K^\pm \pi^\mp$	(3.0 \pm 0.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_{25} $K^0\bar{K}^*(892)^0 + c.c.$	(4.39 \pm 0.31) $\times 10^{-3}$	
Γ_{26} $K^0\bar{K}^*(892)^0 + c.c. \rightarrow K^0 K^\pm \pi^\mp$	(3.2 \pm 0.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_{27} $K_1(1400)^{\pm} K^{\mp}$	(3.8 \pm 1.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_{28} $\bar{K}^*(892)^0 K^+ \pi^- + c.c.$	seen	
Γ_{29} $\omega\pi^0\pi^0$	(3.4 \pm 0.8) $\times 10^{-3}$	
Γ_{30} $b_1(1235)^{\pm} \pi^{\mp}$	[b] (3.0 \pm 0.5) $\times 10^{-3}$	
Γ_{31} $\omega K^\pm K_S^0 \pi^\mp$	[b] (3.4 \pm 0.5) $\times 10^{-3}$	
Γ_{32} $b_1(1235)^0 \pi^0$	(2.3 \pm 0.6) $\times 10^{-3}$	
Γ_{33} $\eta K^\pm K_S^0 \pi^\mp$	[b] (2.2 \pm 0.4) $\times 10^{-3}$	
Γ_{34} $\phi K^*(892)\bar{K} + c.c.$	(2.18 \pm 0.23) $\times 10^{-3}$	

M1 - ENS Lyon
 Symétries et Particules
 Année 2012 - 2013- Semestre 2b
TD 2 : Interaction Faible

Rappels matrices gamma

Les matrices γ sont des matrices 4×4

$$\gamma^0 = \gamma_0 \equiv \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \gamma^i = -\gamma_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma^5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \vec{\Sigma} &\equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \\ \sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ \not{a} &\equiv a_\mu\gamma^\mu \end{aligned}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I_4 & (\gamma^i)^2 &= -I_4 & (\gamma^5)^2 &= I_4 & ; \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 (\mu = 0, 1, 2, 3) \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 & \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i & \gamma^{5\dagger} &= \gamma^5 \end{aligned}$$

Quelques relations :

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 & ; \quad \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu &= 0 \\ \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} & ; \quad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} &= 2a \cdot b \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu & ; \quad \gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu &= -2\not{a} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu &= 4g^{\nu\lambda} & ; \quad \gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu &= 4a \cdot b \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu & ; \quad \gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu &= -2\not{a}\not{b}\not{c} \end{aligned}$$

Traces des matrices gamma : la trace du produit d'un nombre impair de matrices γ est nulle.
 On a $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$; $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$; $\text{Tr}(I_4) = 4$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} & ; \quad \text{Tr}(\not{a}\not{b}) &= 4a \cdot b \\ \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) &= 4[g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}] & ; \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] & ; \\ \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma_\nu) &= 0 & ; \quad \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma & ; \quad \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \end{aligned}$$

Relations avec les spineurs :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^\dagger\gamma^0 & \bar{v} &= v^\dagger\gamma^0 \\ (\not{p} - mc)u &= 0 & (\not{p} + mc)v &= 0 \\ \bar{u}(\not{p} - mc) &= 0 & \bar{v}(\not{p} + mc) &= 0 \\ \bar{u}u &= 2mc & \bar{v}v &= -2mc \\ \sum_{s=\uparrow,\downarrow} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} &= \not{p} + mc & \sum_{s=\uparrow,\downarrow} v^{(s)}\bar{v}^{(s)} &= \not{p} - mc \end{aligned}$$

$$\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a c)]$$

$$\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{v}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{v}_a \Gamma_2 u_b]^* = \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a - m_a c)]$$

$$\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^* = \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a c)]$$

$$\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{v}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{v}_a \Gamma_2 v_b]^* = \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a - m_a c)]$$

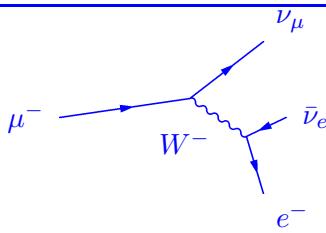
où Γ_1 et Γ_2 sont des matrices 4×4 et où $\bar{\Gamma}_i \equiv \gamma^0 \Gamma_i^\dagger \gamma^0$

4 Taux de désintégration du muon

Un muon d'impulsion q se désintègre en $e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ par l'interaction faible. Le μ en se transformant en ν_μ (d'impulsion p_1) par l'émission d'un W^- virtuel (= hors-couche, l'énergie P_W^0 et l'impulsion \vec{P} du W sont telle que $(P^0)^2 - |\vec{P}|^2 \ll m_W^2$). Le W se désintègre rapidement en $e\bar{\nu}_e$, d'impulsions p_2 et p_3 .

On veut calculer le taux de désintégration du μ . On va négliger les masses des fermions dans l'état final, on travaille dans le référentiel du μ , et on néglige P^2 par rapport à m_W^2 dans le propagateur du W .

- 1-** Dessiner le diagramme de Feynman.



- 2-** Ecrivez l'élément de matrice $\mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$, en négligeant l'impulsion du W , c'est à dire, on utilise l'approximation d'interaction de contact entre quatre fermions gauches. Vous obtenez $\mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$ de $\mathcal{M}(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)$ (du cours).

$$\mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma^5) v_{\nu_e}]$$

- 3-** Démontrer une des formules de Casimir.

Je considère la formule :

$$A = \sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^*$$

Puisque les éléments entre crochets sont des nombres complexes (matrice 1×1), on peut écrire :

$$[\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^* = [\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^\dagger$$

et donc

$$\begin{aligned} [\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^* &= \left[u_a^\dagger \gamma^0 \Gamma_2 v_b \right]^\dagger \\ &= v_b^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^{0\dagger} u_a \\ &= v_b^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u_a \\ &= v_b^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u_a \\ &= \bar{v}_b \bar{\Gamma}_2 u_a \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{v}_b \bar{\Gamma}_2 u_a] \\ &= \sum_{spin_a} \bar{u}_a \Gamma_1 \left[\sum_{spin_b} v_b \bar{v}_b \right] \bar{\Gamma}_2 u_a \\ &= \sum_{spin_a} \bar{u}_a \Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 u_a \end{aligned}$$

En utilisant le fait que les spineurs sont à 4 composantes et que $Q \equiv \Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2$ est une matrice 4×4 , on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{spin_a} \sum_{i,j=1}^4 \bar{u}_{ai} Q_{ij} u_{aj} \\ &= \sum_{spin_a} \sum_{i,j=1}^4 Q_{ij} u_{aj} \bar{u}_{ai} \\ &= \sum_{i,j=1}^4 Q_{ij} \left[\sum_{spin_a} u_a \bar{u}_a \right]_{ji} \end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne ci-dessus est possible car les composantes sont de simples nombres et que le produit des nombres est commutatif. À la troisième ligne, on considère la matrice 4×4 dont l'élément ji est donné par des produits de la composante j de u_a par la composante i de \bar{u}_a . On profite du fait qu'on a 2 sommes sur les indices des matrices 4×4 et spineurs pour passer du produit de matrice $1 \times 4 * 4 \times 4 * 4 \times 1$ à une trace d'un produit de matrice $4 \times 4 * 4 \times 4$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^4 Q_{ij} [\not{p}_a + m_a c]_{ji} \\ &= \text{Tr}[Q(\not{p}_a + m_a c)] \\ &= \text{Tr}[\Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a c)] \end{aligned}$$

- 4- Mettez l'élément de matrice au carré pour un muon non polarisé.

Pour un muon non polarisé, on doit faire la moyenne sur les 2 états de polarisation du muon (facteur 1/2). On doit aussi faire la somme sur tous les états finals de polarisation (sans faire la moyenne). D'où,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\text{all spins}} \mathcal{M}^*(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) \mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) \\ &= \frac{G_F^2}{4} \sum_{\text{all spins}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu]^* [\bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma^5) v_{\nu_e}] [\bar{u}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) v_{\nu_e}]^* \\ &= \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) (\not{p}_\mu + m_\mu c) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_\mu}] \text{Tr} [\gamma_\sigma (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \not{p}_e] \end{aligned}$$

où on a utilisé :

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^\alpha (1 - \gamma^5)} &= \gamma^0 [\gamma^\alpha (1 - \gamma^5)]^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 (1 - \gamma^{5\dagger}) \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^{5\dagger} \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^\alpha - \gamma^0 \gamma^5 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^\alpha + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^\alpha + \gamma^5 \gamma^\alpha \\ &= \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^5 \\ &= \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \end{aligned}$$

Le terme en m_μ correspond à la trace du produit d'un nombre impair de matrice gamma. Sa trace est donc nulle. Il reste à calculer les traces :

$$\text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \not{p}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_\mu}] = p_{\mu\delta} p_{\nu_{\mu\kappa}} \text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \gamma^\delta \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \gamma^\kappa]$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \gamma^\delta \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \gamma^\kappa] &= \text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\kappa] \\ &= 2 \text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\kappa] \\ &= 2 \text{Tr} [(1 + \gamma^5) \gamma^\sigma \gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\kappa] \\ &= 8 (g^{\sigma\delta} g^{\alpha\kappa} - g^{\sigma\alpha} g^{\delta\kappa} + g^{\sigma\kappa} g^{\delta\alpha} + i\varepsilon^{\sigma\delta\alpha\kappa}) \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{Tr} [\gamma^\sigma (1 - \gamma^5) \not{p}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_\mu}] = 8 \left(p_{\nu_\mu}^\sigma p_\mu^\alpha + p_{\nu_\mu}^\alpha p_\mu^\sigma - (p_{\nu_\mu} \cdot p_\mu) g^{\sigma\alpha} + i\varepsilon^{\sigma\delta\alpha\kappa} p_{\mu\delta} p_{\nu_{\mu\kappa}} \right)$$

De même (en se rappelant que $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123}$)

$$\text{Tr} [\gamma_\sigma (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \not{p}_e] = 8 \left(p_{e\sigma} p_{\nu_{e\alpha}} + p_{e\alpha} p_{\nu_{e\sigma}} - (p_{\nu_e} \cdot p_e) g_{\sigma\alpha} - i\varepsilon_{\sigma\beta\alpha\tau} p_{\nu_e}^\beta p_e^\tau \right)$$

Ne sont non nuls que les termes correspondant à la contraction de 2 tenseurs symétriques ou de 2 tenseurs antisymétriques. Les produits symétriques donnent :

$$64 [2(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e}) + 2(p_{\nu_\mu} \cdot p_{\nu_e})(p_\mu \cdot p_e) - 4(p_{\nu_\mu} \cdot p_\mu)(p_{\nu_e} \cdot p_e) + 4(p_{\nu_\mu} \cdot p_\mu)(p_{\nu_e} \cdot p_e)]$$

En utilisant $\varepsilon^{\sigma\delta\alpha\kappa} \varepsilon_{\sigma\beta\alpha\tau} = \varepsilon^{\sigma\alpha\delta\kappa} \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\tau} = 2(\delta_\beta^\delta \delta_\tau^\kappa - \delta_\tau^\delta \delta_\beta^\kappa)$, les produits antisymétriques donnent :

$$64 [2 ((p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e}) - (p_{\nu_\mu} \cdot p_{\nu_e})(p_\mu \cdot p_e))]$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{4} 64 [4(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e})] \\ &= 64 G_F^2 (p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e}) \end{aligned}$$

5- L'espace de phase à n particules en sortie est donné par l'expression :

$$d^{3n} \Phi_n(q; p_1, p_2, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4 \left(q - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_i c^3}{(2\pi)^3 2E_i}$$

où $p_i = (E_i, c\vec{p}_i)$ est le quadrivecteur d'une particule sortante et q est le quadrivecteur de l'état initial. On rappelle que pour une particule de masse m , $\int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^4) = \frac{d^3 \vec{p} c^3}{2E}$. La largeur de désintégration du muon en unité naturelle ($c = 1, \hbar = 1$) dans son référentiel est donnée par $d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} d\Phi_3$,

Toutes les particules de l'état final ont une masse nulle. On a :

$$\begin{aligned} d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e \nu_\mu) &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \left[(2\pi)^4 \delta^4 (q - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3 (2\pi)^3} \right] \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2 (2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1 (2\pi)^3} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \left[(2\pi)^4 \delta^4 (q - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \delta(p_3^2) 2\pi \right] \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2 (2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1 (2\pi)^3} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} (2\pi) \delta((q - p_1 - p_2)^2) \frac{E_1 dE_1 d\Omega_1}{2(2\pi)^3} \frac{E_2 dE_2 d\Omega_2}{2(2\pi)^3} \end{aligned}$$

Il est utile de définir $x_i = 2E_i/m_\mu$. Vérifier que dans ce cas

$$p_i \cdot p_j = \frac{m_\mu^2}{2} (1 - x_k)$$

pour $i \neq j \neq k$.

$$p_i \cdot p_j = \frac{1}{2}(p_i + p_j)^2 - p_i^2 - p_j^2 = \frac{1}{2}(p_\mu - p_k)^2 = \frac{m_\mu^2}{2}(1 - 2\frac{p_k \cdot p_\mu}{m_\mu^2} + \frac{p_k^2}{m_\mu^2}) = \frac{m_\mu^2}{2}(1 - 2\frac{E_k}{m_\mu})$$

Dans le référentiel où le muon est au repos $p_\mu = (m_\mu, \vec{0})$ donc $p_k \cdot p_\mu = E_k m_\mu$

On néglige les masses des particules sortantes donc $p_i^2 = p_j^2 = p_k^2 = m^2 = 0$

La conservation de l'énergie-impulsion implique $p_\mu = p_1 + p_2 + p_3$

- 6-** Expliquer pourquoi x_i doit être compris entre 0 et 1.

L'énergie minimale d'un produit de sortie est nulle. L'énergie maximale disponible est la masse du muon mais la conservation de l'impulsion implique qu'une seule particule ne peut en emporter qu'au plus la moitié.

- 7-** Montrer que $|\mathcal{M}|^2$ ne dépend pas des directions des particules finales dans le référentiel propre du muon.

$|\mathcal{M}|^2$ est proportionnel à $(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e})$ et $p_\mu = p_{\nu_\mu} + p_e + p_{\nu_e}$. Dans le référentiel propre du muon, $p_\mu \cdot p_{\nu_e} = m_\mu E_{\nu_e}$ et

$$\begin{aligned} (p_{\nu_\mu} + p_e)^2 &= m_e^2 + 2p_{\nu_\mu} \cdot p_e \\ &= 2p_{\nu_\mu} \cdot p_e \\ &= (p_\mu - p_{\nu_e})^2 \\ &= m_\mu^2 - 2p_\mu \cdot p_{\nu_e} \end{aligned}$$

où on a négligé la masse de l'électron. On en déduit que $p_{\nu_\mu} \cdot p_e = \frac{m_\mu^2}{2} - p_\mu \cdot p_{\nu_e} = \frac{m_\mu^2}{2} - m_\mu E_{\nu_e}$ et donc :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 64G_F^2(p_{\nu_\mu} \cdot p_e)(p_\mu \cdot p_{\nu_e}) \\ &= 64G_F^2 \left(\frac{m_\mu^2}{2} - m_\mu E_{\nu_e} \right) m_\mu E_{\nu_e} \\ &= 64G_F^2 m_\mu^2 E_{\nu_e} \left(\frac{m_\mu}{2} - E_{\nu_e} \right) \end{aligned}$$

ne dépend d'aucun angle.

- 8-** On peut faire les intégrales sur les angles de $d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$ en utilisant la fonction δ restante. La direction de \vec{p}_1 est libre (peut servir pour définir l'axe des z), donc $\int d\Omega_1 \rightarrow 4\pi$. On définit $\cos\theta_2$ tel que $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = E_1 E_2 \cos\theta_2$, donc

$$\begin{aligned} d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \delta(m_\mu^2(1 - (x_1 + x_2) + \frac{x_1 x_2}{2}(1 - \cos\theta_2))) \frac{(4\pi)(2\pi)}{4(2\pi)^5} E_1 dE_1 E_2 dE_2 d\cos\theta_2 \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \frac{1}{2(2\pi)^3} E_1 dE_1 E_2 dE_2 \frac{2}{m_\mu^2 x_1 x_2} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_1 dE_2 = \frac{|\mathcal{M}|^2 m_\mu}{32(2\pi)^3} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

9- Montrer que $1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 \leq 2 - x_1$.

$$\begin{aligned}0 &= (q - p_1 - p_2)^2 \\&= m_\mu^2 - 2m_\mu E_1 - 2m_\mu E_2 + 2p_1 \cdot p_2 \\&= m_\mu^2(1 - x_1 - x_2 + (1 - x_3)) \\&= m_\mu^2(2 - x_1 - x_2 - x_3)\end{aligned}$$

Donc, $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ et chaque x_i doit être entre 0 et 1. Donc,

$$\begin{aligned}0 &\leq x_3 \leq 1 \\1 &\leq 2 - x_3 \leq 2 \\1 &\leq x_1 + x_2 \leq 2 \\1 - x_1 &\leq x_2 \leq 2 - x_1\end{aligned}$$

Comme $0 \leq x_1 \leq 1$, $2 - x_1 \geq 1$.

10- Montrer que $|\mathcal{M}|^2 = 16G_F^2 m_\mu^4 x_1(1 - x_1)$. Préciser quelle particule est la particule 1.

En prenant pour particule 1, le $\bar{\nu}_e$, on a d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= 64G_F^2 m_\mu^2 E_1 \left(\frac{m_\mu}{2} - E_1 \right) \\&= 64G_F^2 m_\mu^2 m_\mu x_1 \frac{1}{2} \left(\frac{m_\mu}{2} - \frac{m_\mu}{2} x_1 \right) \\&= 16G_F^2 m_\mu^4 x_1(1 - x_1)\end{aligned}$$

11- Obtenez

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

$$d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{|\mathcal{M}|^2 m_\mu}{32(2\pi)^3} dx_1 dx_2 = \frac{G_F^2 m_\mu^5 x_1 (1-x_1)}{2(2\pi)^3} dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_0^1 \frac{m_\mu^5 G_F^2 (1-x_1)x_1}{16\pi^3} dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \\ &= \frac{m_\mu^5 G_F^2}{16\pi^3} \int_0^1 (1-x_1)x_1^2 dx_1 \\ &= \frac{m_\mu^5 G_F^2}{16\pi^3} \left[\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{m_\mu^5 G_F^2}{16\pi^3} \frac{1}{12} \\ &= \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^3}\end{aligned}$$

12- Quelle est son temps de vie en secondes ?

$$\tau_\mu = \Gamma^{-1} = \frac{192\pi^3 \times 6.58212 \ 10^{-25} \text{GeV s}}{(0,105 \text{GeV})^5 \times (1.166 \ 10^{-5} \text{GeV}^{-2})^2} = 2.2 \ 10^{-6} \text{ s} \ (\text{il faut réintroduire } \hbar \text{ pour les unités})$$

5 Symétries C, P et T

- 1- Préciser le moment orbital et le spin des mesons π^0 ($J^{PC} = 0^{-+}$), ρ^0 ($J^{PC} = 1^{--}$) et a_1 ($J^{PC} = 1^{++}$).

Pour les mésons $P = (-1)^{L+1}$, donne la parité de L et $C = (-1)^{S+L}$ donne celle de L+S. Donc on a :

Particule	$L + S$	L	S
π^0	pair	0	0
ρ^0	impair	0	1
a_1	pair	1	1

- 2- Le η se désintègre principalement en $\eta \rightarrow 2\gamma(39\%)$, $\eta \rightarrow 3\pi(56\%)$, $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma(5\%)$. Pourquoi le mode en 2π est-il interdit ? Pouvez-vous expliquer pourquoi le mode en 3π a un rapport d'embranchement comparable au mode en 2γ ?

La parité $G = C \cdot R_2$ où R_2 correspond à une rotation de 180° autour de l'axe 2 d'isospin. Cela correspond à transformer I_3 en $-I_3$. En général la valeur propre de G est pour les mésons $(-1)^{S+L+I}$. Les interactions fortes conservent la parité G. Le η a $L=0$, $S=0$ et $J^{PC} = 0^{-+}$ et $I=0$. Le η est un état propre de G de valeur propre +1. Le pion est un triplet d'isospin, mais a les mêmes autres nombres quantiques. Le π est un état propre de G de parité -1.

Parité de $2\pi = +1$ et la parité de l' η est -1. Comme L et S=0 pour le π , pas possible de construire une état de L=1 qui donne J=0. Impossible par interaction électromagnétique et forte.

Parité de $3\pi = -1$, mais $G = (-1)^3 = -1$ alors qu'elle vaut +1 pour η donc pas OK pour les interactions fortes. : seules les interactions électromagnétiques sont permises.

$C(2\gamma) = (-1)^2 = 1$ Ok $P_\gamma = -1$ mais $P(2\gamma) * (-1)^L = -1$, avec L=1 est possible car $S_\gamma = 1$, donc on peut avoir J=0 avec L=1 et S=1, la désintégration électromagnétique est possible.

6 Symétrie CP

- 1- En étudiant la désintégration du muon ($\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$) et en vous rappelant qu'il n'existe que des neutrinos d'hélicité gauche et des anti-neutrinos d'hélicité droite, montrez que si \hat{P} et \hat{C} sont brisées par l'interaction faible, la combinaison $\hat{C}\hat{P}$ est, a priori, conservée.

Si on applique \hat{C} à cette réaction, on transforme les neutrinos d'hélicité gauche en anti-neutrinos de même hélicité ce qui est impossible. De même, l'application de \hat{P} conserve la charge mais inverse l'hélicité ce qui est également impossible. Par contre, l'application de $\hat{C}\hat{P}$ va donner les bonnes hélicités.

- 2-** Les kaons neutres produits par interaction forte ne sont pas états propres de la combinaison de symétries discrètes $\hat{C}\hat{P}$. On pose¹ que $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$, et on rappelle que les kaons neutres ont une parité intrinsèque négative.

- a) Définissez les états propres de CP , K_1^0 et K_2^0 , à partir des états propres de l'interaction forte K^0 et \bar{K}^0 , en choisissant comme convention :

$$\hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle \text{ et } \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle.$$

On a

$$\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

puisque les kaons neutres ont une parité négative. On peut poser

$$|K^0\rangle = \cos\theta|K_1^0\rangle + \sin\theta|K_2^0\rangle \text{ et } |\bar{K}^0\rangle = -\sin\theta|K_1^0\rangle + \cos\theta|K_2^0\rangle$$

puisqu'on passe d'une base orthonormée à une autre par une rotation. En appliquant $\hat{C}\hat{P}$, on obtient :

$$\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = \cos\theta\hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle + \sin\theta\hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = \cos\theta|K_1^0\rangle - \sin\theta|K_2^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle = \sin\theta|K_1^0\rangle - \cos\theta|K_2^0\rangle.$$

Cette relation est vérifiée par $\theta = \pi/4 \pmod{\pi}$ soit

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \text{ et } |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$$

- b) Quelles sont les désintégrations possibles des kaons neutres ? A quels états propres de $\hat{C}\hat{P}$ correspondent-elles ?

Les kaons neutres se désintègrent principalement en $\pi^0 + \pi^0$ ou en $\pi^+ + \pi^-$. Écrivons la conservation du moment cinétique dans ces désintégrations. On a :

$$\vec{J}_K = \vec{J}_\pi + \vec{J}_\pi + \vec{l}_{\pi,\pi} \iff \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{l}_{\pi,\pi}$$

soit $\vec{l}_{\pi,\pi} = 0$. La parité de ces états est donnée par celle du moment angulaire donc ces états sont pairs. De plus, ils sont états propres de \hat{C} avec la valeur propre $+1$ ($\pi_0 + \pi_0$) ou $(-1)^l = +1$ ($\pi_+ + \pi_-$). Ils sont donc états propres de $\hat{C}\hat{P}$ avec la valeur propre $+1$.

Les modes de désintégration à trois pions sont eux états propres de $\hat{C}\hat{P}$ avec la valeur propre -1 . Si on conserve $\hat{C}\hat{P}$, K_1^0 peut donc se désintégrer en 2π ce qui n'est pas le cas de K_2^0 .

- c) Pourquoi associe-t-on K_L^0 à K_2^0 et K_S^0 à K_1^0 ? Comment se manifeste la brisure de $\hat{C}\hat{P}$ et en quoi cela affecte-t-il la définition des états K_L^0 et K_S^0 ?

¹En fait, c'est une convention. On peut aussi poser : $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$, mais alors il faut changer les définitions de K_1^0 et K_2^0 qui en découlent.

La désintégration en 3π est beaucoup plus longue que la désintégration en 2π . La durée de vie de K_2^0 est donc beaucoup plus grande que celle de K_1^0 ce qui explique l'identification de ces particules à K_L^0 et K_S^0 . La brisure de $\hat{C}\hat{P}$ se traduit par la possibilité de K_L^0 de se désintégrer en 2π . On peut donc écrire

$$|K_L^0\rangle \approx |K_2^0\rangle + \varepsilon|K_1^0\rangle$$

à un (petit) facteur de normalisation près.

7 Production et régénération des mésons K neutres.

Les mésons les plus légers sont les mésons π et K , de masse $m_\pi \simeq 140 MeV/c^2$ et $m_K \simeq 500 MeV/c^2$. Les baryons les plus légers sont les nucléons, le Λ et les Σ , de masse $m_N \simeq 940 MeV/c^2$, $m_\Lambda \simeq 1115 MeV/c^2$ et $m_\Sigma \simeq 1190 MeV/c^2$. On rappelle les étrangetés de ces particules :

$$S(\Lambda) = S(\Sigma^+) = S(\Sigma^0) = S(\Sigma^-) = -1$$

$$S(K^0) = S(K^+) = +1$$

$$S(\bar{K}^0) = S(K^-) = -1$$

1- Quels sont les couples particule/anti-particule ?

Les couples particule/anti-particule sont (K^0, \bar{K}^0) et (K^+, K^-) . Attention, les Σ^\pm ont tous les deux des étrangetés de -1 et ne sont pas anti-particules l'un de l'autre.

2- Ecrire les réactions de production des mésons K^+ et K^0 à partir d'un faisceau de pions. Ecrire les réactions de production des mésons K^- et des \bar{K}^0 .

On considère les différentes réactions permettant de produire des K . On va montrer que les réactions faisant intervenir des $K^{0,+}$ permettent de ne faire intervenir qu'une seule particule supplémentaire alors que deux particules sont nécessaires pour la création des K^-, \bar{K}^0 .

Réaction	$C_i \rightarrow C_f$	$B_i \rightarrow B_f$	$E_i \rightarrow E_f$	C_X	B_X	E_X
$\pi^- + p \rightarrow K^0 + X$	$-1 + 1 \rightarrow 0 + C_X$	$0 + 1 \rightarrow 0 + B_X$	$0 + 0 \rightarrow +1 + E_X$	0	+1	-1
$\pi^- + p \rightarrow K^+ + X$	$-1 + 1 \rightarrow +1 + X$	$0 + 1 \rightarrow 0 + B_X$	$0 + 0 \rightarrow 1 + X$	-1	+1	-1
$\pi^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + X$	$-1 + 1 \rightarrow 0 + C_X$	$0 + 1 \rightarrow 0 + B_X$	$0 + 0 \rightarrow -1 + E_X$	0	+1	+1
$\pi^- + p \rightarrow K^- + X$	$-1 + 1 \rightarrow -1 + C_X$	$0 + 1 \rightarrow 0 + B_X$	$0 + 0 \rightarrow -1 + X$	+1	+1	+1

Quelles sont les particules avec une étrangeté de -1 ? On a $\Sigma^{+,0}$, Λ . Pour la première réaction, on peut produire un Λ ou un Σ^0 qui ont tous les deux une charge nulle et un nombre baryonique de +1. Pour la seconde réaction, on peut produire un Σ^- qui a la bonne charge et le bon nombre baryonique.

Qu'en est-il pour les deux dernières équations ? On doit produire une particule d'étrangeté +1 c'est à dire $K^{0,+}$ ou $\bar{\Sigma}$. Cependant ces particules n'assurent pas la conservation du nombre baryonique et ne peuvent donc être produites seules.

3- On veut produire des mésons K^+ ou K^0 en bombardant de la matière par un faisceau de π . Quelle énergie doit on choisir si on veut éviter de produire aussi des K^- et des \bar{K}^0 .

Comme démontré à la question précédente, les réactions que l'on peut considérer sont

$$\begin{array}{lll} \pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda & \pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^- \\ \pi^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + K^0 + n & \pi^- + p \rightarrow K^+ + K^- + n \end{array}$$

Les réactions indiquées sur la première ligne fournissent des particules dont la masse est plus faible que celles produites dans les réactions de la seconde ligne. Ainsi, ces réactions possèdent une énergie seuil plus faible. Si on utilise des pions avec une énergie intermédiaire, on ne peut produire que des K^+ et des K^0 et pas des K^- et des \bar{K}^0 .

Calculons les énergies des réactions de créations de deux et trois particules. On utilise la masse invariante entre le référentiel du laboratoire avant la réaction et le référentiel du centre de masse après la réaction. On a donc^a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \left(\sum E_i \right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i \right)^2 \\ &= (T_\pi + m_\pi + m_p)^2 - p_\pi^2 \\ &= (T_\pi + m_\pi + m_p)^2 - T_\pi(T_\pi + 2m_\pi) \\ &= (m_\pi + m_p)^2 + 2T_\pi m_p \end{aligned}$$

alors que

$$\mathcal{M}_f = \left(\sum m_i \right)^2$$

pour l'énergie correspondant à l'énergie seuil. Dans le cas de la réaction $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$, on trouve

$$T = \frac{(m_K + m_\Sigma)^2 - (m_\pi + m_p)^2}{2m_p} = \frac{(500 + 1190)^2 - (140 + 940)^2}{2 \times 940} \approx 899 \text{ MeV}$$

alors que pour $\pi^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + K^0 + n$, on obtient

$$T_\pi = \frac{(m_{\bar{K}} + m_K + m_n)^2 - (m_\pi + m_p)^2}{2m_p} = \frac{(500 + 500 + 940)^2 - (140 + 940)^2}{2 \times 940} \approx 1,38 \text{ GeV}$$

Il existe une large plage d'énergies des pions incidents qui ne donnent que les particules désirées.

^aOn a

$$p_\pi^2 = E_\pi^2 - m_\pi^2 = (E_\pi - m_\pi)(E_\pi + m_\pi) = T_\pi(T_\pi + 2m_\pi)$$

4- Dans le système des kaons neutres, on a $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$, Les états propres de $\hat{C}\hat{P}$ sont définis par

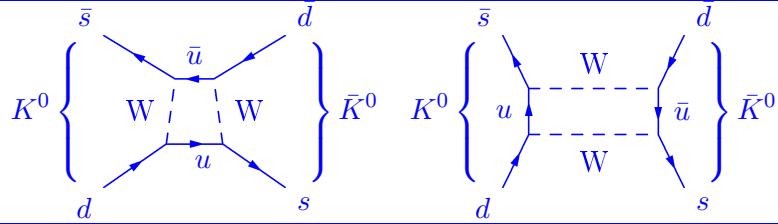
$$\hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle \text{ et } \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle.$$

Soit

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \text{ et } |\bar{K}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

Si on produit des faisceau de K^0 , les K_1 vont se désintégrer plus vite. On doit donc observer des désintégrations en 2π près de la source et des désintégrations en 3π loin de la source (Gell-Mann & Pais, 1955). Le K_2 a été observé à BNL en 1956 (Lederman et al.). $\tau_1 = 0.895 \times 10^{-11} \text{ s}$ (qq mm) et $\tau_2 = 5.11^{-8} \text{ s}$ (qq m !)

Le mélange entre K^0 et \bar{K}^0 est possible car l'interaction faible ne conserve ni l'isospin ni l'étrangeté. Dessiner des diagrammes de Feynman représentant la transformation d'un K_0 en \bar{K}^0 .



5- Quel est le principe de fonctionnement d'un "régénérateur de K_S^0 " ?

Le faisceau de K^0 peut s'interpréter comme un faisceau composé à part égale de $|K_1^0\rangle$ et de $|K_2^0\rangle$. Après une propagation sur une distance importante, les $|K_1^0\rangle$ dont la durée de vie est beaucoup plus courte ont disparu. Dès qu'on introduit un écran sur le trajet de ce faisceau, il faut repasser dans la base K^0, \bar{K}^0 qui est la bonne base vis à vis de l'interaction forte. L'état entrant dans le régénérateur est

$$|X^{in}\rangle = |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

A la sortie du régénérateur, on obtient un état $|X^{out}\rangle$ tel que

$$|X^{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|f|^2 + |\bar{f}|^2}}(f|K^0\rangle + \bar{f}|\bar{K}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{|f|^2 + |\bar{f}|^2}} \left(\frac{f + \bar{f}}{\sqrt{2}}|K_2^0\rangle + \frac{f - \bar{f}}{\sqrt{2}}|K_1^0\rangle \right)$$

où f et \bar{f} sont les transmissions des K^0 et des \bar{K}^0 à travers le régénérateur.

On peut obtenir à la sortie une quantité importante de $|K_1^0\rangle$ si f et \bar{f} sont très différentes.

8 Introduction

L'article proposé est l'un des deux articles publiés en même temps, annonçant la découverte d'une résonance mince pouvant s'interpréter comme une résonance $c\bar{c}$.

Cette découverte a valu le prix Nobel aux deux représentants des groupes expérimentaux : Burton Richter[2] et Samuel C. C. Ting[1] en 1976. Cette découverte s'est faite simultanément au SPEAR, collisionneur e^+e^- du SLAC en Californie et à l'AGS, synchrotron à protons du laboratoire national de Brookhaven (BNL) dans l'état de New York dans une expérience de type cible fixe où un faisceau de protons était envoyé sur une cible de Beryllium.

Nous étudierons en particulier l'article du groupe de S.C.C. Ting [1] dont la description expérimentale est un peu plus fournie. Aucun des deux groupes ne recherchait un quatrième quark.

Les résonances, aujourd'hui appelées mésons vecteurs ρ, ω, ϕ , avaient été découvertes à des masses de l'ordre de 1 GeV et des largeurs $\Gamma_\rho=100$ MeV, $\Gamma_\omega=10$ MeV, $\Gamma_\phi=5$ MeV. Toutes avaient $J(\text{spin})=1$, $C(\text{Conjugaison de charge})=-1$ et $P(\text{parité})=-1$, comme le photon, elles étaient considérées comme des photons massifs ! Le groupe de S.C.C. Ting recherchait ces "photons" et voulait isoler leur désintégration en e^+e^- (*quel est leur rapport de branchements dans ce mode ?*) pour étudier comment la photoproduction de ces résonances suivie de la désintégration en e^+e^- interférait avec la production directe de paires $\gamma \rightarrow e^+e^-$, afin de mesurer l'amplitude de production de ces résonances. Ils étudiaient ces résonances dans un faisceau de $10^{11}\gamma/\text{s}$ à DESY à l'aide d'un spectromètre permettant une résolution en masse de 5 MeV/c² permettant aussi de distinguer les paires e^+e^- des paires de $\pi^+\pi^-$ avec un pouvoir discriminant $\gg 10^8$.[3] (*D'où vient cette nécessité ?*)

Taux de branchements : $\pi^+\pi^-$ et e^+e^- .	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>e^+e^-</th> <th>pions</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ρ</td> <td>4.510^{-5}</td> <td>0.989</td> </tr> <tr> <td>ω</td> <td>7.310^{-5}</td> <td>0.98</td> </tr> <tr> <td>ϕ</td> <td>$\Gamma = 1.27 \text{ keV}$</td> <td>$\Gamma = 4.26 \text{ MeV}$</td> </tr> </tbody> </table>		e^+e^-	pions	ρ	4.510^{-5}	0.989	ω	7.310^{-5}	0.98	ϕ	$\Gamma = 1.27 \text{ keV}$	$\Gamma = 4.26 \text{ MeV}$	D'où la nécessité de discriminer entre
	e^+e^-	pions												
ρ	4.510^{-5}	0.989												
ω	7.310^{-5}	0.98												
ϕ	$\Gamma = 1.27 \text{ keV}$	$\Gamma = 4.26 \text{ MeV}$												

La question du nombre de "photons massifs" de ce type, motiva la construction d'une nouvelle expérience auprès de l'accélérateur AGS de protons de 28.5 GeV de BNL afin de traquer de nouvelles résonances de ce type jusqu'à des masses de 5 GeV, produite lors d'interactions fortes $p+p \rightarrow V^0 + X \rightarrow e^+e^- + X$ (où V^0 est utilisé pour représenter une particule neutre qui se désintègre avec une topologie observée dans le détecteur qui ressemble à la lettre V).

C'est ce dispositif qui va permettre la découverte du J .

9 Un peu d'histoire

9.1 Angle de Cabibbo

En 1963, Cabibbo avait introduit le doublet u, d' pour tenir compte de la désintégration des particules étranges [4]. En suggérant que les quarks états propres de propagation (masse) étaient différents des états propres de l'interaction faible, cela permettait d'expliquer les désintégrations du type $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, sans remettre en cause le schéma organisant les fermions gauches en doublets de l'interaction faible $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, dont les seules transitions possibles étaient entre les membres d'un même doublet.

Cabibbo fait l'hypothèse que le courant faible couple au doublet $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{cases}.$$

Le rapport des largeurs partielles $\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \sim \tan^2 \theta_c$ correspond à un angle θ_c de 13.15° .

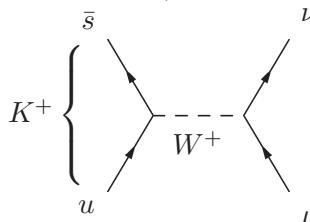


FIG. 2 – Désintégration $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$

9.2 Mécanisme de Glashow - Iliopoulos - Maiani

Les prédictions de taux de désintégration du $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ si l'on ne considère que les transitions $u \leftrightarrow d'$ sont beaucoup plus élevées que l'observation expérimentale $\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma^{\text{tot}}(K_L^0)} = (9.1 \pm 1.9) \cdot 10^{-9}$.

L'introduction d'un quark c , complétant un doublet faible avec le s' , rendait un nouveau diagramme possible, dont l'amplitude aurait annulé totalement le diagramme déjà imaginé, si ce n'avait été pour la différence de masse des quarks u et c . En 1970, Glashow - Iliopoulos - Maiani prédisent l'existence d'un quatrième quark [5].

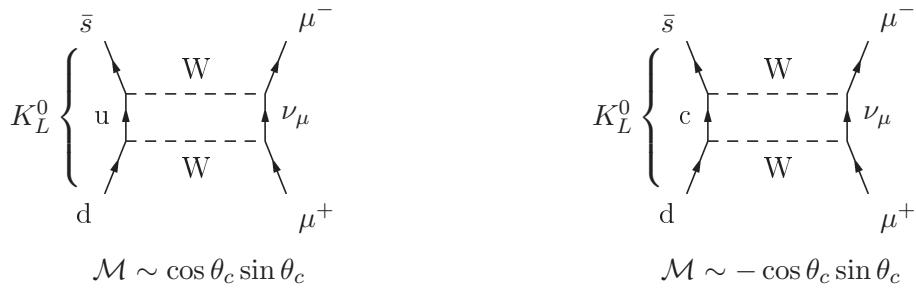


FIG. 3 – Deux contributions à la désintégration $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Ce mécanisme n'a pas été pris au sérieux avant la découverte en 1974 de la résonance $c\bar{c}$, car il nécessitait l'invention d'une nouvelle particule, pour régler un problème particulier d'une théorie qui demandait encore largement à être validée par l'expérience.

Entretemps, Kobayashi et Maskawa avaient déjà théoriquement introduit une 3^eme famille de quarks,

seule façon d'introduire une phase complexe dans la matrice de rotation de Cabibbo, phase qui permettait d'introduire naturellement la violation de CP dans les interactions faibles.

10 Dispositif expérimental

La zone expérimentale avec les arrivées de vaisseau est schématisée sur la figure 4. Le détecteur de l'expérience est entouré et agrandi sur la figure 5.

Les deux plans de détection jouent un rôle différent. Les aimants (notés M pour "magnet") défléchissent les particules chargées dans le plan vertical. Pour pouvoir les suivre et mesurer leur quantité de mouvement, le dispositif est incliné verticalement de 10.33° . Le détecteur est composé de deux bras identiques disposés chacun à 14.6° horizontalement de chaque côté de la ligne de faisceau. Il intercepte donc seulement les paires de particules émises de la cible dans ces directions.

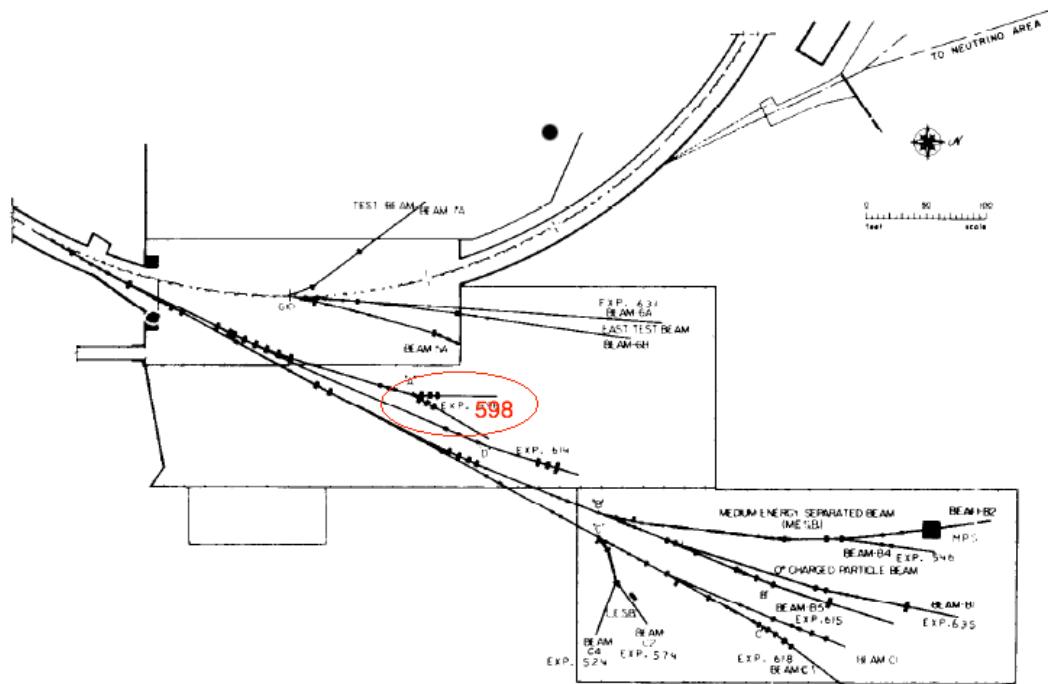


FIG. 4 – Le hall expérimental est auprès de l'AGS. L'expérience 598, entourée, est au bout de la station A

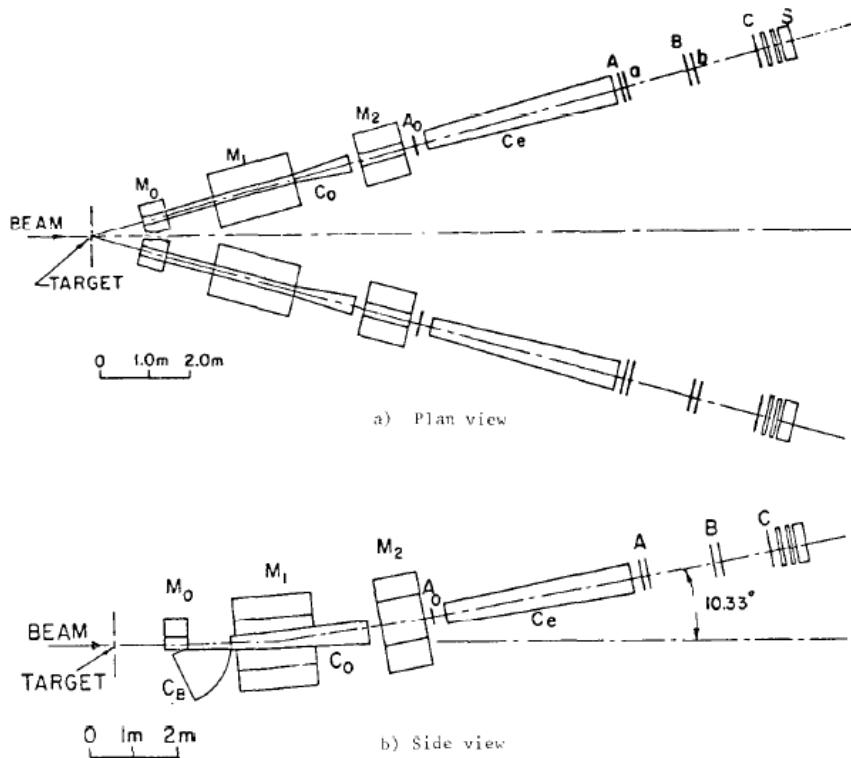


FIG. 5 – Schéma du dispositif expérimental. Les parties marquées M sont des aimants dipolaires, les A₀, A, B, et C sont des chambres à fil proportionnelles (8000 fils en tout), les parties marquées a, b sont des hodoscopes 8x8, S désigne 3 stations de calorimètres au verre au plomb. C_B, C₀, et C_e sont des compteurs Čerenkov

10.1 Le spectromètre

Composé des aimants et des chambres à fil, il permet de mesurer la quantité de mouvement des particules qui traversent le détecteur. Le sens de la courbure détermine la charge. En effet, la trajectoire est mesurée par les plans de chambre à fil notées A₀, A, B, et C dans la figure 5. Les 11 plans de fils de 20 μm de diamètre espacés de 2 cm ainsi que leurs orientations sont schématisés dans la figure 7. Une particule chargée ionise le gaz de la chambre à fils qu'elle traverse. Les fils sont mis sous haute tension positive et les électrons libérés se déplacent dans le champ créé vers le fil le plus proche (lignes de champ voir figure 6).

Ils ionisent eux-aussi le gaz, et une avalanche se forme qui va donner un signal électrique collecté sur les fils d'anode. Les ions, eux se déplacent - plus lentement vers les plans de cathode. La charge totale collectée est proportionnelle à l'énergie déposée par ionisation tant que la tension reste en-dessous d'un certain seuil. Au-dessus, de ce seuil, le passage d'une particule ionisante provoque des claquages (chambres à étincelles, compteurs geiger).

Le nombre de plans touchés permet d'éliminer le bruit de fond de conversions de photons de basse énergie qui ne laissent du signal que dans quelques plans. Le rayon de courbure de la trajectoire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique des aimants est relié à la quantité de mouvement par $p_{\perp} (\text{GeV}/c) = 0.3 \cdot Q(e) \cdot B(T) \cdot R(m)$. La mesure de la masse invariante de la paire e^+e^- nécessite la connaissance de la quantité de mouvement de chacun des électrons. La résolution spatiale d'une chambre à fil est de l'espacement divisé

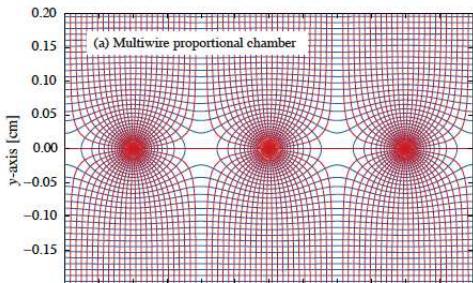


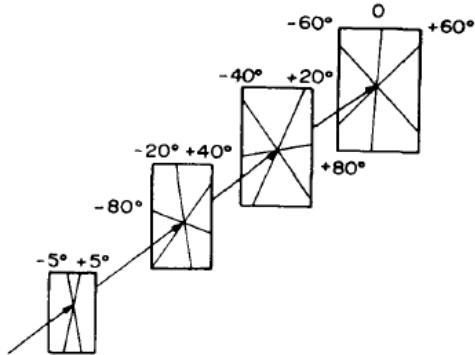
FIG. 6 – Champ électrique dans une chambre à fils

champ magnétique des aimants est relié à la quantité de mouvement par $p_{\perp} (\text{GeV}/c) = 0.3 \cdot Q(e) \cdot B(T) \cdot R(m)$. La mesure de la masse invariante de la paire e^+e^- nécessite la connaissance de la quantité de mouvement de chacun des électrons. La résolution spatiale d'une chambre à fil est de l'espacement divisé

par $\sqrt{12}$, ici ~ 6 mm. Pour rappel la variance d'une distribution uniforme entre $-d/2$ et $d/2$, normalisée à 1 ($f(x)=1/d$ sur l'intervalle et 0 ailleurs) vaut $\sigma^2 = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \left(\int_{-d/2}^{d/2} x \cdot f(x) \cdot dx \right)^2$, donc $\sigma = d/\sqrt{12}$

10.2 L'hodoscope

Un hodoscope (a,b) sur la figure 5 est habituellement composé de scintillateurs organiques. Les scintillateurs, matériaux qui réagissent au passage d'une particule ionisante par l'émission de lumière, sont très utile pour déclencher l'acquisition de donnée car leur signal lumineux est émis en ~ 0.1 ns, ce qui permet une prise de décision rapide, basée sur la coïncidence du signal observé et de l'arrivée d'un paquet de protons sur la cible.



10.3 Compteurs Čerenkov

Une particule chargée émet de la radiation Čerenkov, lorsque celle-ci va plus vite que la vitesse de phase de la lumière dans le milieu qu'elle traverse. L'angle θ_c d'émission de la radiation par rapport à la direction de la particule, pour une particule de vitesse βc dans un milieu d'index de réfraction n est $\cos \theta_c = 1/(n\beta)$. Le seuil d'émission est donc $\beta_{\text{seuil}} = 1/n$ et $\gamma_{\text{seuil}} = n/\sqrt{n^2 - 1}$. Comme $\gamma = \frac{E}{m}$, les seuils d'émission sont différents pour des particules de masses différentes. En particulier, les compteurs Čerenkov peuvent être réglés de façon à ne pas être sensibles aux pions mais bien aux électrons. L'indice de réfraction de C_B est choisi de façon à être sensible aux électrons au-dessus de 10 MeV et insensible aux pions en dessous de 2.7 GeV. Les compteurs sont remplis d' H_2 et leurs fenêtres d'entrée et de sortie sont de 125 et 250 μm . Le nombre de photons produit par intervalle de longueur et d'énergie E du photon pour une particule de charge Q vaut :

$$\frac{d^2N}{dxdE} = \frac{\alpha Q^2}{\hbar c} \sin^2 \theta_c \simeq 370 \sin^2 \theta_c(E) eV^{-1} cm^{-1}.$$

La lumière produite est réfléchie sur un miroir sphérique et renvoyée vers un photomultiplicateur. La tension de celui-ci doit être ajustée pour être efficace pour un électron, mais pas bruyant, car dans la zone de faisceau le niveau de radiation est très élevé et il faut éviter les coïncidences fortuites. Les photomultiplicateurs sont réglés de tels sorte que le passage d'un électron produise un signal de 8 photoélectrons.

FIG. 7 – Orientation relative des fils des différentes stations de chambres à fils

10.4 Calorimètres

Placés derrière les autres détecteurs, les calorimètres mesurent l'énergie des particules en les faisant interagir dans un matériau dense et si possible scintillant et transparent. Le nombre de particules produites lors de l'interaction (électromagnétique pour les e^- et γ et hadronique pour les hadrons) est proportionnel à l'énergie de la particule. Ces particules vont elles-même interagir dans le milieu. Les particules chargées produisent de la lumière (scintillation et/ou Čerenkov) et celle-ci est collectée. Après calibration avec des faisceaux d'énergie connue, l'intensité lumineuse collectée permet de mesurer l'énergie de la particule incidente. Afin de capturer toute la gerbe de particule il faut prévoir plusieurs (habituellement entre 5 et 8) longueurs d'interactions nucléaires. La figure 9 montre pour quels éléments cette longueur est la plus faible et donc la plus intéressante du point de vue du coût en détecteur. Les matériaux choisis ici sont du plexiglas au plomb et du verre au plomb (PbO , qui est transparent mais d'un Z plus élevé que le Si et plus dense que la silice). Il y a 10 longueurs d'interaction de telle sorte que toute l'énergie des particules sera contenue. Chaque détecteur est segmenté en environ 100 cellules afin de mesurer la direction de la trajectoire des électrons.

Pour calibrer la réponse du calorimètre aux électrons il faut pouvoir injecter un faisceau d'électron dans la ligne de faisceau. La calibration est faite au moyen de la désintégration en vol de $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$ ($\tau = 10^{-19} s$). Dans le bras où la polarité des aimants est prévue pour sélectionner les charges négatives, le e^+ est défléchi vers l'extérieur. La coïncidence entre le Čerenkov où il est mesuré et les hodoscopes et les autres Čerenkov permet de s'assurer qu'on a un faisceau pur d'électron pour calibrer (au moyen de la quantité de mouvement reconstruite grâce au spectromètre)

10.5 Blindage

Toutes les secondes 10^{12} protons arrivent sur une cible dont la longueur est de 10% de la longueur de collision. Il y a donc autant de particules qui arrivent dans la zone expérimentale. Pour protéger les détecteurs et les physiciens, ils ont dû récupérer plus de blocs de bétons que n'étaient disponibles à BNL ! Il leur a fallu 10 000 tonnes de béton, 100 tonnes de plomb, 5 tonnes d'uranium et 5 tonnes de savon(!) (au-dessus de C_0 , entre M1 et M2 et autour de l'entrée de C_e pour stopper les neutrons lents). Même comme ça le niveau de radiation dans la zone une heure après l'arrêt de faisceau était de 50 mSv/h (2.5 fois la dose annuelle admise pour un travailleur du nucléaire en France !)

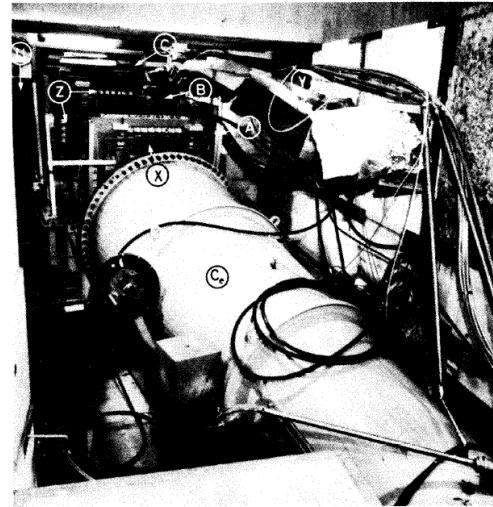


Fig. 9: End view of one arm, showing part of the Čerenkov counter C_e , the chambers A, B, C, with part of the 8000 amplifiers X, cables Y, and hodoscopes Z. The lead-glass counter is at the end of chamber U.

FIG. 8 – Photo du compteur Čerenkov C_e , avec les chambres multi-fils (A,B,C) à l'arrière et des plans d'hodoscope (Z). Tout à l'arrière on devine le calorimètre au verre plombé (U)

Si et plus dense que la silice). Il y a 10 longueurs d'interaction de telle sorte que toute l'énergie des particules sera contenue. Chaque détecteur est segmenté en environ 100 cellules afin de mesurer la direction de la trajectoire des électrons.

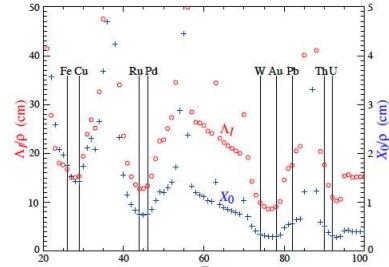


Figure 28.21: Nuclear interaction length λ_I/ρ (circles) and radiation length X_0/ρ (+ s) in cm for the chemical elements with $Z > 20$ and $\lambda_I < 50$ cm.

FIG. 9 – Longeur d'interaction nucléaire divisée par la masse volumique (λ_I/ρ) et de radiation (électromagnétique) X_0/ρ (pour les éléments au-dessus de $Z=20$)

11 Questions

- 1- Pourquoi choisir des collisions proton-noyau plutôt qu'un faisceau e^+e^- ? Quels sont les problèmes inhérents aux deux options?

Avec une collision proton-noyau, on peut couvrir plusieurs énergie de centre de masse des interactions élémentaires. De plus, les particules recherchée sont produites via l'interaction forte, c'est donc plus efficace. Le problème est de tenir le flux de particules produites lors de ces collisions.

- 2- La cible choisie pour le faisceau de proton est du beryllium. Pourquoi ce choix plutôt que du plomb ou du tungstène?

On emploie des cibles en beryllium car elles chauffent moins et donc risquent moins de fondre. Leur A faible fait qu'il y a moins de nucleons de basse énergie par interaction, sa capacité calorifique entre 20°C et la moitié de la température de fusion est 5 fois plus élevée que celle du tungstène par exemple, et il est facile à refroidir.

- 3- Pourquoi choisir 14.6° comme angle par rapport à la ligne de faisceau? (Quelle est l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse à laquelle le taux de production du V^0 inconnu sera le plus élevé? Pour un V^0 produit par un faisceau de protons de 28.5 GeV dans le référentiel du laboratoire. Avec cette énergie cinétique dans le centre de masse, à quel angle sont émis la paire d'électrons recherchée et produite par désintégration?)

La production est maximale à la résonnance qui correspond à la particule produite au repos dans le référentiel propre. Si on se limite aux désintégrations e^+e^- partant à 90° (moins de contamination due aux restes de la collision plus sur l'avant), ces électrons émergeront à un angle de 14.6° dans le laboratoire (où les protons ont une énergie de 28.3 GeV).

- 4- Vu sa position, à quoi peut bien servir le compteur C_B ?

Le compteur Cerenkov C_B sert à détecter les électrons provenant de la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+e^-$. Un électron est détecté dans C_B , l'autre part dans le spectromètre avec des caractéristiques de ce fait connue. Cela permet d'étalonner le spectromètre avec des électrons connus.

- 5- Quelles sont les hypothèses faites sur ce que peut être la résonance?

Les particules charmés ou les a (un truc qui a à voir avec l'unification électrofaible d'après le papier référencé dans l'article) ou le boson Z^0 .

Références

- [1] J.J Aubert et al., Experimental Observation of a Heavy Particle J, *Physical Review Letters*, **33**, 1404, 1974.
- [2] J.-E. Augustin et al., Discovery of a Narrow Resonance in $e^+ e^-$ Annihilation, *Physical Review Letters*, **33**, 1406, 1974.
- [3] S. C. C. Ting, The discovery of the J particle : A personal recollection, *Review of Modern Physics*, **49**, 1977.
- [4] N. Cabibbo, Unitary symmetry and leptonic decays *Physical Review Letters*, **10**, 531, 1963.
- [5] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry, *Physical Review*, **D2**, 1585, 1970.
- [6] Particle Data Group, Review of Particle Physics, *Journal of Physics*, **G37**, sections 27-28, 2010.

12 Règles de Feynman

12.1 Rappel des règles de Feynman pour QED

Nous rappelons les règles de Feynman pour QED. Pour QCD et l’interaction faible, le schéma de calcul est le même, seules changent les expressions des vertex et des propagateurs. Les vertex pour toutes les interactions du modèle standard sont donnés dans la section **12.2**.

- 1- A chaque ligne externe, associer un quadri-vecteur énergie-impulsion p_1, \dots, p_n et rajouter une flèche² indiquant la direction positive dans le temps³. A chaque ligne interne associer un quadri-vecteur énergie-impulsion q_1, \dots, q_n .
- 2- Les lignes externes contribuent des facteurs :
 - Electrons $\begin{cases} \text{Entrant : } u \text{ flèche vers le vertex} \\ \text{Sortant : } \bar{u} \text{ flèche sortant du vertex} \end{cases}$
 - Positrons $\begin{cases} \text{Entrant : } \bar{v} \text{ flèche sortant du vertex} \\ \text{Sortant : } v \text{ flèche vers le vertex} \end{cases}$
 - Photons $\begin{cases} \text{Entrant : } \epsilon_\mu \\ \text{Sortant : } \epsilon_\mu^* \end{cases}$
- 3- Vertex : Chaque vertex contribue un facteur $i g \gamma^\mu$ où $g = -q\sqrt{4\pi/\hbar c}$ où q est la charge de la particule (et non de l’anti-particule). Pour les leptons chargés $q = -e$ et donc $g = \sqrt{4\pi\alpha}$ mais pour les quarks u on a $q=2e/3$ et pour les quarks de type d on a $q=-e/3$
- 4- Propagateurs : chaque ligne interne contribue un facteur $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$ pour les fermions et $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$ pour les photons (avec les indices se contractant avec ceux des lignes fermioniques que le propagateur connecte).
- 5- Conservation de l’énergie et de l’impulsion : Pour chaque vertex on écrit une fonction delta de la forme $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$ où les k sont les énergies-impulsions entrantes dans le vertex (un signe moins pour les énergies-impulsions sortantes)
- 6- Intégrer sur les énergies-impulsions internes : pour chaque q_i écrire un facteur $\frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$
- 7- Simplifier la fonction δ : Le résultat incluera un facteur $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ correspondant à la conservation énergie-impulsion globale. Simplifier ce facteur et multiplier par i pour obtenir \mathcal{M}
- 8- Antisymétrisation : Inclure un signe moins entre deux diagrammes qui ne diffèrent que par l’échange de deux électrons (ou positrons) entrants (ou sortants), ou par l’échange d’un électron entrant avec un positon sortant (ou vice-versa).

²différente de la flèche dénotant le courant fermionique.

³Cette flèche du temps permet de distinguer les lignes entrantes des lignes sortantes.

12.2 Règles de Feynman (à l'arbre)

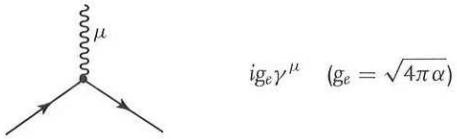
12.2.1 lignes

	ligne externe entrante	ligne externe sortante
scalaire (spin 0)	rien	rien
fermion (spin $\frac{1}{2}$)	u	\bar{u}
anti fermion (spin $\frac{1}{2}$)	\bar{v}	v
vecteur (spin 1)	ϵ_μ	ϵ_μ^*
ligne interne (propagateur)		
scalaire (spin 0)		$\frac{i}{q^2 - m^2}$
fermion (spin $\frac{1}{2}$)		$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}$
vecteur sans masse (spin 1)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
vecteur massif (spin 1)		$\frac{-ig_{\mu\nu} + i\frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}$

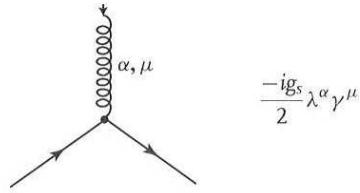
12.2.2 vertex

Les vertex sont tirés de D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008 (annex D.3).

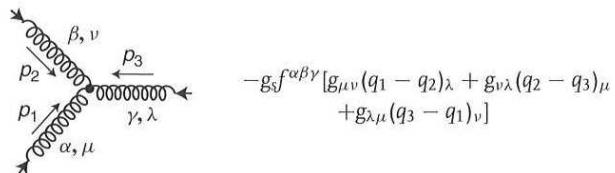
QED



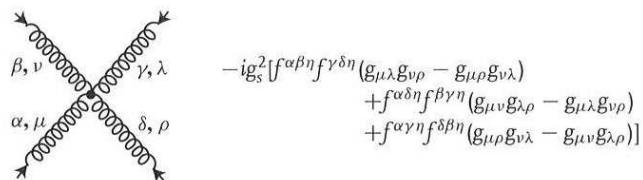
QCD



$$\frac{-ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu$$



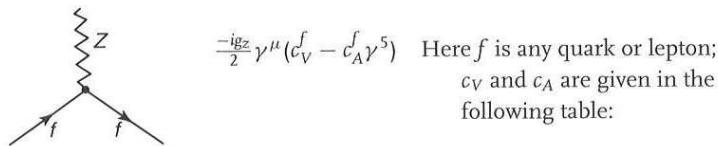
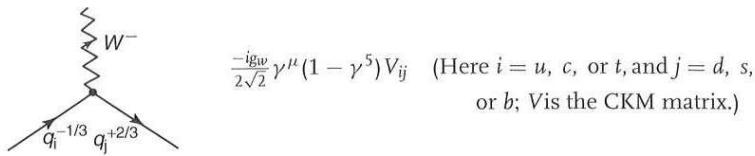
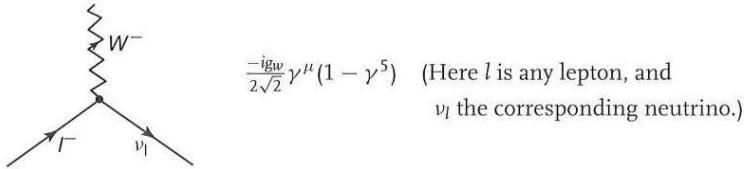
$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(q_1 - q_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q_2 - q_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_3 - q_1)_\nu]$$



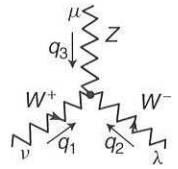
$$-ig_s^2 [f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\delta\beta\eta} (g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]$$

Intéraction faible

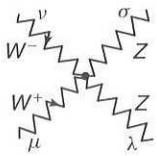
$$g_w = \frac{g_e}{\sin \theta_w}; \quad g_z = \frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}.$$



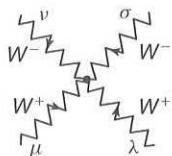
f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$



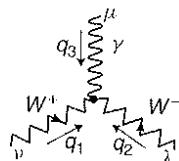
$$ig_w \cos \theta_w [g_{v\lambda} (q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu} (q_2 - q_3)_v + g_{\mu\nu} (q_3 - q_1)_\lambda]$$



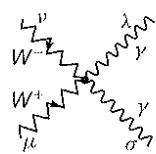
$$-ig_w^2 \cos^2 \theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{v\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{v\lambda})$$



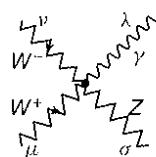
$$ig_w^2 (2g_{\mu\lambda}g_{v\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{v\lambda})$$



$$ig_e [g_{v\lambda} (q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu} (q_2 - q_3)_v + g_{\mu\nu} (q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$-ig_e^2 (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{v\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{v\lambda})$$



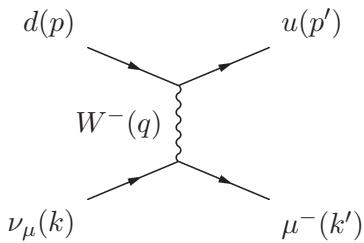
$$-ig_e g_w \cos \theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{v\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{v\lambda})$$

13 Interactions neutrino-quark

- 1- Les faisceaux de neutrinos produits en laboratoire sont en général des faisceaux de neutrinos muoniques. Expliquer les raisons de ce choix.

Les particules pouvant être accélérées sont les particules chargées. Un faisceau de neutrinos est obtenu à partir d'un faisceau de particules chargées se désintégrant en neutrinos. Pour avoir le temps d'accélérer une particule, il faut qu'elle ne se désintègre pas trop rapidement. Parmi les particules chargées, seuls les pions et muons sont utilisables. Pour avoir des faisceau de neutrinos d'énergie connues, il faut que la désintégration de la particule chargée se fasse en 2 corps. Il ne reste donc que le pion qui convient et qui se désintègre en muon+neutrino.

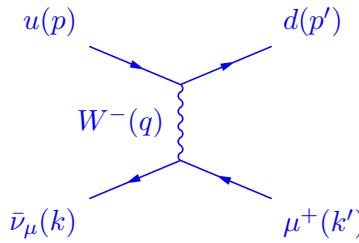
- 2- On considère un flux de neutrino muonique traversant une cible matérielle. L'interaction par courant chargé (CC) du neutrino est gouverné par le diagramme suivant :



Ecrire l'élément de matrice correspondant.

$$\mathcal{M} = \bar{u}_\mu \left(-i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \right) u_{\nu_\mu} \frac{-i(g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / m_W^2)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}_u \left(-i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right) u_d V_{ud} \text{ où } V_{ud} \text{ est une composante de la matrice CKM.}$$

- 3- Donner le diagramme de Feynmann pour l'interaction CC entre antineutrino muonique et quark.



- 4- En supposant que $q^2 \ll m_W^2$, en négligeant les masses et en ne tenant pas compte de la matrice CKM, le carré de l'élément de matrice sommé sur les spins pour l'interaction $\nu_\mu d$ s'écrit : $|\mathcal{M}_{\nu d}|^2 = 64G_F^2(k.p)(k'.p')$ où G_F est la constante de Fermi. En déduire le même carré pour l'interaction $\bar{\nu}_\mu u$.

Le diagramme est identique mais la ligne muonique est orientée en sens inverse. Du coup, dans l'élément de matrice, la position du neutrino est interverti avec celle du muon. Avec les notations des diagrammes ci-dessus, cela revient à échanger k et k' . Et donc $|\mathcal{M}_{\bar{\nu} u}|^2 = 64G_F^2(k'.p)(k.p')$

- 5- La section efficace différentielle de la réaction s'écrit : $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2$ où s est le carré de l'énergie de la collision dans le centre de masse de la collision. Calculer $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu d)$ et $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}_\mu u)$. On notera θ l'angle fait, dans le référentiel du centre de masse, entre la direction du neutrino incident et la direction du quark sortant. On négligera les masses.

$$s = (k + p)^2 = 2k.p = (k' + p')^2 = 2k'.p' \text{ donc } \frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu d) = \frac{G_F^2 s}{4\pi^2}. \text{ On a aussi } k + p = k' + p', \text{ donc } k - p' = k' - p \text{ et donc } k.p' = k'.p \text{ (on néglige les masses). Dans le centre de masse } k.p' = E_{\bar{\nu}} E_d - E_{\bar{\nu}} E_d \cos(\theta) = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s}}{2} (1 - \cos(\theta)) = \frac{s}{4} (1 - \cos(\theta)). \text{ Donc } \frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}_\mu u) = \frac{G_F^2 s}{16\pi^2} (1 - \cos(\theta))^2$$

- 6- En déduire le rapport $\frac{\sigma(\nu d)}{\sigma(\bar{\nu} u)}$.

On intègre sur l'angle solide et donc $\sigma(\nu d) = \frac{G_F^2 s}{\pi}$ et $\sigma(\bar{\nu} u) = \frac{G_F^2 s}{8\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(\theta))^2 \sin(\theta) d\theta$ et par changement de variable $u = \cos(\theta)$, l'intégrale se réécrit : $\int_{-1}^1 (1-u)^2 du = \int_{-1}^1 (1+u^2) du = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ d'où $\sigma(\bar{\nu} u) = \frac{G_F^2 s}{3\pi}$ et $\frac{\sigma(\nu d)}{\sigma(\bar{\nu} u)} = 3$

- 7- Que faudrait-il prendre en compte pour passer de $\frac{\sigma(\nu d)}{\sigma(\bar{\nu} u)}$ à $\frac{\sigma(\nu N)}{\sigma(\bar{\nu} N)}$ où N est un nucléon ?

Les distributions de partons $u(x, y), d(x, y), \dots$

- 8- Si l'on refait le même exercice avec les courants neutres, quel paramètre physique supplémentaire va intervenir ?

L'angle de Weinberg θ_W par le fait que le couplage Zqq fait intervenir $\sin^2 \theta_W$ et que $M_W = M_Z \cos \theta_W$

L'image matière montre les rapports de section efficace neutrino-neutrinos et les antineutrinos. Ces rapports sont prédicts par la théorie électrofaible. Ils dépendent de l'angle de Weinberg.

Au milieu des années 70, ces rapports avaient été mesurés avec Gargamelle au CERN et HPWF au FNAL. Le résultat de FNAL était incompatible avec la théorie électrofaible. Celui du CERN l'était mais la valeur de l'angle Weinberg ($\sin^2 \theta_W = 0.23$) n'était pas la bonne.

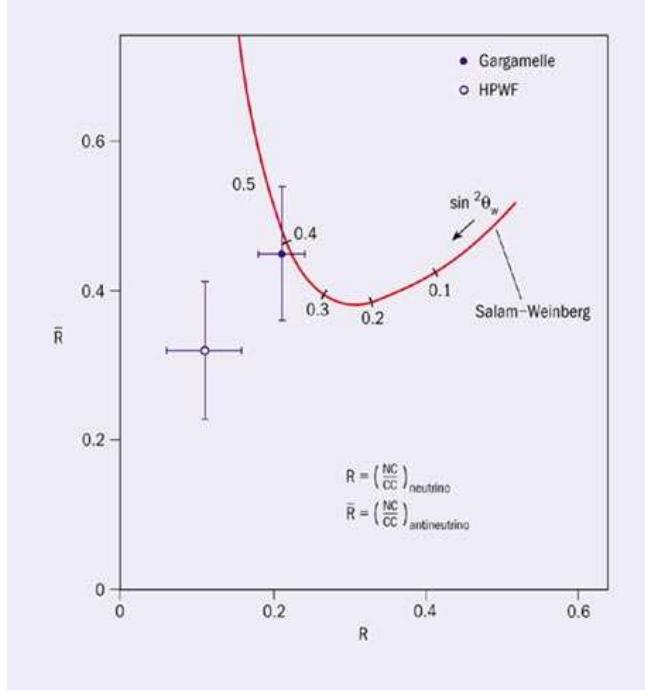


FIG. 10 – Valeurs des rapports NC/CC mesurés par les expériences Gargamelle et HPWF comparées aux prédictions du Modèle Standard.

Références

- [1] F. J. Hasert *et al.* [Gargamelle Neutrino Collaboration], *Observation of Neutrino Like Interactions Without Muon Or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment*, Phys. Lett. B **46**, 138 (1973).
- [2] F. J. Hasert *et al.* [Gargamelle Neutrino Collaboration], *Observation of Neutrino Like Interactions without Muon or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment*, Nucl. Phys. B **73** (1974) 1.
- [3] D. Haidt, *The discovery of neutral currents*, Eur. Phys. J. C **34** (May 2004) 25.
- [4] CERN courrier spécial issue 2003, <http://cerncourier.com/cws/article/cern/28875>
- [5] F. Halzen and A. Martin *Quarks and leptons*, Wiley Ed., 1984 (chap 12).

14 Fonctions d'onde

- 1-** Dans $SU(3)$, $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$. Le décuplet a une fonction d'onde symétrique. Quel peut être son spin ? Comment imaginer que cela ne viole pas le principe de Pauli ?

On a les Δ dans le décuplet. Symétrique en échange des quarks, symétrique en spin (donc $3/2$). La fonction d'onde de couleur est antisymétrique.

- 2-** Ecrire la fonction d'onde spin/saveur du proton.

Soit la fonction d'onde du proton. La fonction d'onde totale du proton s'obtient en construisant la fonction d'onde symétrique, par exemple, de la façon suivante pour le proton avec une projection de spin $+1/2$.

$$|spin\rangle_p = \left| J = \frac{1}{2}, m_J = +\frac{1}{2} \right\rangle_p$$

fonction d'onde de spin qui peut se réécrire comme le produit de la fonction de spin d'une paire de quarks (uu, par exemple) et de la fonction d'onde de spin du quark restant (d ici).

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_p = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_{uu} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_d - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle_{uu} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_d$$

Les facteurs dans l'expression ci-dessus sont les coefficients de Clebsh-Gordan pour le couplage d'un spin 1 avec un spin $1/2$. La fonction d'onde correcte pour un état triplet

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

la fonction d'onde du proton s'écrit dans la notation saveur-spin :

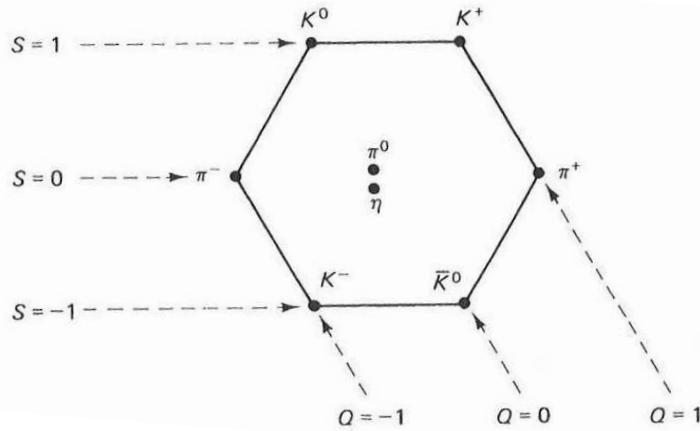
$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_p = |p^\uparrow\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle$$

Cette fonction est uniquement symétrique pour l'échange des deux quarks u, l'expression totalement symétrique s'obtient en ajoutant les termes dans lesquels le premier et le troisième quark et le deuxième et le troisième quark ont été échangés, soit :

$$\begin{aligned} |p^\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \{ 2 |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + 2 |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2 |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle \\ &\quad - |u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle \} \end{aligned}$$

- 3- Le conjugué de charge du doublet d'isospin (u, d) est le doublet $(-\bar{d}, \bar{u})$. On considère l'association d'un quark et d'un anti-quark (meson) en se restreignant aux saveurs u, d, s . L'interaction forte respecte la symétrie de saveur SU(3). Donner le contenu en quarks des mesons π, K, η, η' , et préciser leur position dans un diagramme (Y, I_3).

$Y=B+S$, donc pour des mésons on a $Y=S$. Sur le diagramme ci-dessous on a I_3 en axe horizontal.



Le contenu en quark est :

$$\begin{aligned} &K^0(d\bar{s})K^+(u\bar{s}) \\ &\pi^-(d\bar{u})\pi^+(u\bar{d}) \\ &K^-(s\bar{u})\bar{K}^0(s\bar{d}) \end{aligned}$$

Pour les isospin 3 nul et hypercharge nulle, on a :

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \eta_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{aligned}$$

SU(3) est brisée et on a mélange de η_8 et η_1 :

$$\begin{aligned} \eta &= \cos \theta \eta_8 - \sin \theta \eta_1 \\ \eta' &= \sin \theta \eta_8 + \cos \theta \eta_1 \end{aligned}$$

Avec $\theta = -10.1^\circ$, on a $\eta \sim \eta_8$ et $\eta' \sim \eta_1$

15 Masses et moments magnétiques

- 1- – Montrer que le moment magnétique du proton s'écrit $\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$, où μ_u et μ_d sont les moments magnétiques respectivement des quarks u et d .

La fonction d'onde spin-saveur du proton est donnée dans l'exercice 14.2-. $\vec{\mu} = q/mc\vec{S}$ avec $\mu_z = q\hbar/2mc$. Pour les quarks on a $\mu_u = 2/3 e\hbar/2m_u c$, $\mu_d = -1/3 e\hbar/2m_d c$ et $\mu_p = \langle p^\uparrow | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)_z | p^\uparrow \rangle = 2/\hbar \sum_i \langle p^\uparrow | \mu_i S_{iz} | p^\uparrow \rangle$, où S_{iz} est la projection selon z du spin du i-ème quark. On trouve

$$\begin{aligned}\mu_p &= \frac{1}{18} (4 \times (\mu_u + \mu_u - \mu_d) \times 3 + (\mu_u - \mu_u + \mu_d) \times 6) \\ &= \frac{1}{18} (24\mu_u - 6\mu_d) \\ &= \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d\end{aligned}$$

Pour le neutron, il faut intervertir le contenu en u et en d . On trouve $4/3\mu_u - 1/3\mu_d$ pour le proton et $4/3\mu_d - 1/3\mu_u$ pour le neutron.

- Dans l'approximation $m_u = m_d$, donner le rapport des moments magnétiques du neutron et du proton. La valeur expérimentale est $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.68497945 \pm 0.00000058$

$$\mu_n/\mu_p = -2/3 = -0.666$$

- 2- Dans le modèle des quarks, on peut écrire la masse d'un méson $q_1\bar{q}_2$ comme égale à :

$$M(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$$

où $A = 159 \times \frac{4m_u^2}{\hbar^2}$ MeV/c² est une constante et \vec{S}_i le spin d'un quark. En utilisant les masses habillées suivantes pour les quarks : $m_u = m_d = 308$ MeV/c² et $m_s = 483$ MeV/c², calculer la masse des mésons π^+ , K^0 , ρ^+ , K^{*0} , ϕ et comparer avec les valeurs mesurées.

$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$ où $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Les quarks ont un spin demi entier donc $\vec{S}_i^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$. Les π^+ et K^0 sont des pseudoscalaires ($S = 0 \Rightarrow \vec{S}^2 = 0$) et ont donc $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = -\frac{3}{4}\hbar^2$. Les ρ^+ , K^{*0} et ϕ sont des vecteurs ($S = 1 \Rightarrow \vec{S}^2 = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$) et donc $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{4}\hbar^2$. On trouve :

$$\begin{aligned}M(\pi^+) &= 2m_u + 159 \times \frac{4m_u^2}{\hbar^2} \times -\frac{3}{4}\hbar^2 \frac{1}{m_u^2} = 2m_u - 3 \times 159 = 139 \text{ MeV} & \sim 140 \text{ MeV} \\ M(K^0) &= m_u + m_s - 3 \times 159 \frac{m_u}{m_s} = 308 + 483 - 3 \times 159 \frac{308}{483} = 487 \text{ MeV} & \sim 498 \text{ MeV} \\ M(\rho^+) &= 2m_u + 159 = 775 \text{ MeV} & \sim 770 \text{ MeV} \\ M(K^{*0}) &= m_u + m_s + 159 \frac{m_u}{m_s} = 892 \text{ MeV} & \sim 896 \text{ MeV} \\ M(\phi) &= 2m_s + 159 \frac{m_s^2}{m_s^2} = 1031 \text{ MeV} & \sim 1020 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Références

- [1] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008 (chap 5).
- [2] F.Halzen and A.Martin *Quarks and leptons*, Wiley Ed., 1984 (chap 2).

16 Le quadri-vecteur polarisation

On considère un référentiel dans lequel le W a un quadrivecteur énergie-impulsion

$$k^\mu = \left(E_k = |\vec{k}|^2 + M^2, 0, 0, |\vec{k}| \right)$$

La polarisation peut se décrire par 3 quadrivecteurs de polarisation : deux décrivent les polarisations transverses : $\varepsilon_\mu^{(1)}$ et $\varepsilon_\mu^{(2)}$ et le dernier $\varepsilon_\mu^{(3)}$ décrit la polarisation longitudinale. Ces vecteurs s'écrivent dans le référentiel mentionné ci-dessus :

$$\begin{cases} \varepsilon_\mu^{(1)}(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_\mu^{(2)}(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) &= \left(\frac{|\vec{k}|}{M}, 0, 0, \frac{E_k}{M} \right) \end{cases}$$

Pour obtenir l'expression des quadrivecteurs dans d'autres référentiels, il faut faire une transformation de Lorentz.

Ces quadrivecteurs vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu^{(n)} \varepsilon^{\mu(m)} &= -\delta^{nm} \\ \sum_{n=1}^3 \varepsilon_\mu^{(n)} \varepsilon_\nu^{(n)} &= -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \\ \varepsilon_\mu^{(n)} k^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Ces formules sont valables pour tout vecteur massif (W, Z)

17 Taux de désintégration du W

Le taux de désintégration d'un boson Z ou W vers une paire de fermion anti-fermion de masse négligeable est

$$\Gamma = \frac{1}{64\pi^2 M_W} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2,$$

- 1- A partir du couplage entre le W , le e et le $\bar{\nu}$: $-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ et en négligeant les masses des fermions, démontrer que

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{3} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2} \right) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu}],$$

(k_1 et k_2 sont les impulsions du e et $\bar{\nu}$ sortant). Pour ça

– vous utiliserez des identités de traces avec matrices γ comme :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2] &= 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}] \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \tag{1}$$

– vous utiliserez que la somme sur les polarisations du W est $\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)*} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}$ ($q = k_1 + k_2$ étant l'impulsion du W).

Pour un W de polarisation (λ) , on obtient pour un élément de matrice :

$$i\mathcal{M} = -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) [\bar{u}_e(k_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_e}(k_2)]$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{8} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) \sum_{s_{\bar{\nu}_e}} \sum_{s_e} [\bar{u}_e(k_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_e}(k_2)] [\bar{u}_e(k_1) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_e}(k_2)]^*$$

En utilisant les formules de Casimir, on obtient :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{8} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) \text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{k}_2 - m_{\bar{\nu}_e}) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\not{k}_1 + m_e)]$$

Et en négligeant les masses des fermions :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{8} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) \text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{k}_2 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{k}_1] \\ &= \frac{g^2}{8} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) \text{Tr} [\gamma^\mu 2(1 - \gamma^5) \not{k}_2 \gamma^\nu \not{k}_1] \\ &= \frac{g^2}{4} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) \text{Tr} [(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \not{k}_1] \\ &= g^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu} + i \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} k_{2\rho} k_{1\sigma}] \end{aligned}$$

Pour un W non polarisé, il faut faire la moyenne sur les 3 états possibles de polarisation :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{tot}^2 &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda} g^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(q) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu} + i \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} k_{2\rho} k_{1\sigma}] \\ &= \frac{g^2}{3} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu} + i \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} k_{2\rho} k_{1\sigma}] \\ &= \frac{g^2}{3} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nulle.

2- Montrer que $|\mathcal{M}|_{tot}^2 = \frac{g^2}{3} M_W^2$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{tot}^2 &= \frac{g^2}{3} \left(-2(k_1 \cdot k_2) + 4(k_1 \cdot k_2) + \frac{2(q \cdot k_1)(q \cdot k_2) - (k_1 \cdot k_2)q^2}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{g^2}{3} \left(2(k_1 \cdot k_2) + \frac{2(q \cdot k_1)(q \cdot k_2) - (k_1 \cdot k_2)q^2}{M_W^2} \right) \end{aligned}$$

Dans le C.M. du W , on a $q = (M_W, 0, 0, 0)$, $k_1 = \frac{M_W}{2}(1, 0, 0, 1)$ et $k_2 = \frac{M_W}{2}(1, 0, 0, -1)$ et donc $k_1 \cdot k_2 = q \cdot k_1 = q \cdot k_2 = \frac{M_W^2}{2}$ et $q^2 = M_W^2$ et le terme en $1/M_W^2$ s'annule.

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|_{tot}^2 = \frac{g^2}{3} M_W^2$$

3- Démontrer que

$$\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}) = \frac{g^2}{48\pi} M_W.$$

$$\Gamma = \frac{1}{64\pi^2 M_W} \int d\Omega \frac{g^2 M_W^2}{3} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{4\pi g^2 M_W}{3} = \frac{g^2 M_W}{48\pi}$$

- 4- Plus généralement le vertex correspondant à la désintégration d'un boson vecteur X en deux fermions de spin $\frac{1}{2}$, f_1 et \bar{f}_2 est $-ig_X \frac{1}{2}\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma^5)$. Montrer que $\Gamma(X \rightarrow f_1 \bar{f}_2) = \frac{g_X^2}{48\pi}(c_V^2 + c_A^2)M_X$.

Dans la trace précédente, on remplace le calcul de $(1 - \gamma^5)^2 = 2(1 - \gamma^5)$ par $(c_V - c_A\gamma^5)^2 = (c_V^2 + c_A^2) - 2c_V c_A \gamma^5$. Le terme avec γ^5 donnera une trace en $\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}$ qui s'annulera avec la contraction avec le tenseur symétrique $-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_X^2}$. On aura donc un facteur de correction de $\frac{c_V^2 + c_A^2}{2}$. Dans l'expression du vertex, on a $\frac{g_X}{2}$ au lieu de $\frac{g}{2\sqrt{2}}$ ce qui au carré occasionne un facteur $\frac{2g_X^2}{g^2}$, donc le résultat est modifié par un facteur $\frac{g_X^2(c_V^2 + c_A^2)}{g^2}$. Au final, dans l'expression de $\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu})$, il faut remplacer g^2 par $g_X^2(c_V^2 + c_A^2)$ et M_W par M_X

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{g_X^2}{48\pi}(c_V^2 + c_A^2)M_X$$

Boson	g_X	" c_A ", " c_V "
W	$\frac{g}{\sqrt{2}}$	1
Z	$\frac{g}{\cos \theta_W}$	voir tableau ci-contre

Couplage au Z :

fermion	c_A	c_V
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2 \theta_W$
u,c,t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2 \theta_W$
d,s,b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2 \theta_W$

- 5- calculer la valeur numérique du taux de désintégration du W vers une génération de leptons, en prenant $\alpha = e^2/4\pi = 1/128$, $m_W = 80,450$ GeV, et $g = e/\sin \theta_W$, avec $\sin^2 \theta_W = 0.232$. Que sera le taux de désintégration total du W, sachant qu'il y a trois générations de quarks et leptons ?

$$\begin{aligned} \Gamma_{W \rightarrow l\nu} &= \frac{e^2 M_W}{48\pi \sin^2 \theta_W} = \frac{\alpha M_W}{12 \sin^2 \theta_W} = \frac{80.45}{128 \cdot 12 \cdot 0.232} \text{GeV} = 226 \text{MeV} \\ \Gamma_{W \rightarrow \bar{u}d} &= \Gamma_{W \rightarrow \bar{c}s} = 3\Gamma_{W \rightarrow l\nu} \Rightarrow \Gamma_W = 3(\Gamma_{W \rightarrow l\nu} + 2\Gamma_{W \rightarrow l\nu}) \simeq 2 \text{GeV} \end{aligned}$$

- 6- Calculez les largeurs partielles $\Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e)$ pour une masse du Z de 90 GeV. ($g_Z = e/(\sin \theta_W \cos \theta_W)$)

$$\Gamma_{Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e} = \frac{e^2}{48\pi \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} M_Z \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = \frac{e^2}{96\pi \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} M_Z = \frac{\alpha}{24 \sin^2 \theta_W (1 - \sin^2 \theta_W)} M_Z = 164 \text{MeV}$$

- 7- Calculez les largeurs partielles pour les désintégrations $Z \rightarrow e^+ e^-$, $\bar{u}u$, $\bar{d}d$. N'oubliez pas de tenir compte de la couleur. Prédire la largeur totale du Z dans le cadre du modèle standard.

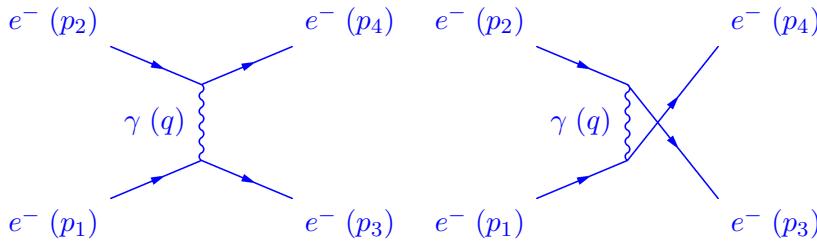
fermion	c_A	c_V	$c_A^2 + c_V^2$	$\Gamma_{Z \rightarrow f\bar{f}}$ (MeV)
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	164
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \simeq -0.03$	0.25	82
u,c	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \simeq 0.19$	0.29	95
d,s,b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \simeq -0.34$	0.37	121

$$\Gamma_Z = 3(\Gamma_{Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e} + \Gamma_{Z \rightarrow e^+ e^-} + 2\Gamma_{Z \rightarrow \bar{u}+u} + 3\Gamma_{Z \rightarrow \bar{d}+d}) = 2.4 \text{ GeV}$$

18 Diffusion avec électrons, positons et photons

- 1- Donnez les diagrammes de Feynman et \mathcal{M} pour
- la diffusion électron-électron
 - la diffusion électron-positon
 - la diffusion compton.

Diffusion électron-électron :



On utilise les règles de Feynman pour calculer l'élément de matrice du graphe de gauche :

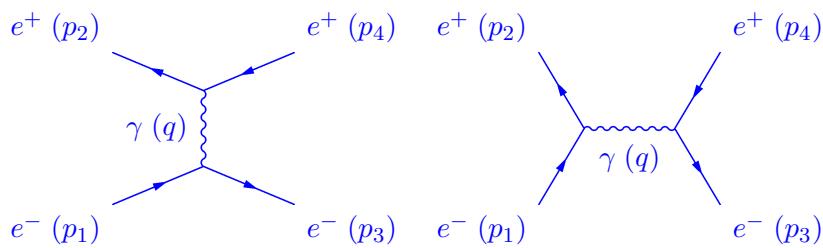
$$(2\pi)^4 \int \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) i g \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) i g \gamma^\nu u^{(s_2)}(p_2) \right] \times \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 - p_4 + q) d^4q$$

On intègre, multiplie par i , enlève un δ de conservation de l'impulsion-énergie totale et on obtient \mathcal{M} .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{gauche} = -\frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right]$$

Le graphe de droite est le même avec les électrons sortants interchangés, il va s'ajouter avec un changement de signe à celui de gauche.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{M}_{gauche} + \mathcal{M}_{droite} &= -\frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right] \\ &\quad + \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2} \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right] \end{aligned}$$



On utilise les règles de Feynman pour calculer l'élément de matrice du graphe de gauche :

$$(2\pi)^4 \int \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) i g \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) i g \gamma^\nu v^{(s_4)}(p_4) \right] \times \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 - p_4 + q) d^4q$$

On intègre, multiplie par i et on obtient \mathcal{M}_{gauche} .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{gauche} = -\frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) \gamma_\mu v^{(s_4)}(p_4) \right]$$

On utilise les règles de Feynman pour calculer l'élément de matrice du graphe de droite (annihilation électron-positon suivie de la production d'une paire) :

$$(2\pi)^4 \int \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) i g \gamma^\mu v^{(s_4)}(p_4) \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) i g \gamma^\nu u^{(s_1)}(p_1) \right] \times \delta^4(p_1 + p_2 - q) \delta^4(q - p_3 - p_4) d^4q$$

On intègre, multiplie par i et on obtient \mathcal{M}_{droite} .

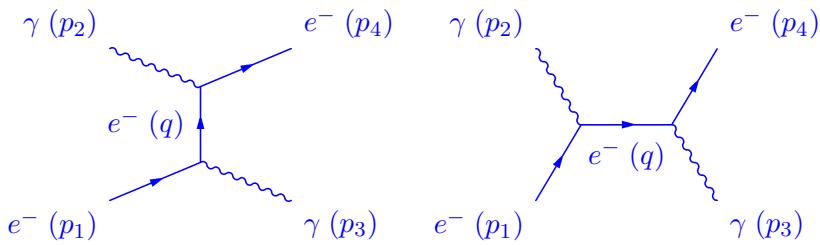
$$\Rightarrow \mathcal{M}_{droite} = -\frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu v^{(s_4)}(p_4) \right] \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) \gamma_\mu u^{(s_1)}(p_1) \right]$$

Le graphe de droite est le même que le graphe de gauche avec l'électron sortant échangé avec le positon entrant. Il va s'ajouter avec un changement de signe à celui de gauche.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{M}_{gauche} + \mathcal{M}_{droite} &= -\frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) \gamma_\mu v^{(s_4)}(p_4) \right] \\ &\quad + \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu v^{(s_4)}(p_4) \right] \left[\bar{v}^{(s_2)}(p_2) \gamma_\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \end{aligned}$$



Diffusion Compton :



On utilise les règles de Feynman pour calculer l'élément de matrice du graphe de gauche :

$$(2\pi)^4 \int \epsilon_\mu^{(s_2)} \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) i g \gamma^\mu \frac{i(\not{q} + mc)}{(q^2 - m^2 c^2)} i g \gamma^\nu u^{(s_1)}(p_1) \right] \epsilon_\nu^{*(s_3)} \times \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 - p_4 + q) d^4 q$$

On intègre, multiplie par i et on obtient \mathcal{M}_{gauche} .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{gauche} = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \not{\epsilon}_\mu^{(s_2)} (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \not{\epsilon}_\nu^{*(s_3)} u^{(s_1)}(p_1) \right]$$

On utilise les règles de Feynman pour calculer l'élément de matrice du graphe de droite :

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{droite} = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \not{\epsilon}_\mu^{(s_3)} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + mc) \not{\epsilon}_\nu^{*(s_2)} u^{(s_1)}(p_1) \right]$$

Le graphe de droite n'est pas le même que le graphe de gauche à un échange près. Il va s'ajouter à celui de gauche. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{gauche} + \mathcal{M}_{droite}$

2- On considère la diffusion électron-électron, calculer l'amplitude au carré de chacun des 2 graphes.

Le terme de gauche contribue au carré comme :

$$|\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 = \frac{g^4}{(p_1 - p_3)^4} \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\nu u^{(s_1)}(p_1) \right]^* \\ \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\nu u^{(s_2)}(p_2) \right]^*$$

En utilisant les formules de Casimir :

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 = \frac{g^4}{4(p_1 - p_3)^4} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) \text{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4)$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 = \frac{4g^4}{(p_1 - p_3)^4} [p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu] [p_2_\mu p_4^\nu - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) + p_4_\mu p_2^\nu]$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 = \frac{8g^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)]$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 = \frac{2g^4}{(p_1 \cdot p_3)^2} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \text{ où on a utilisé le fait que } (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = -2p_1 \cdot p_3 \text{ en négligeant les masses.}$$

Le terme de droite s'obtient en échangeant p_3 et p_4 .

$$|\overline{\mathcal{M}_{droite}}|^2 = \frac{2g^4}{(p_1 \cdot p_4)^2} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_3)(p_4 \cdot p_2)]$$

3- Dans les formules de Casimir, intervient $\overline{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, montrer que :

$$- [\bar{u}_a \Gamma u_b] = [\bar{u}_b \overline{\Gamma} u_a]^*$$

$$- \overline{\overline{\Gamma}} = \Gamma$$

$$- \overline{\gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\nu} = \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\mu$$

$$-\bar{u}_a \Gamma u_b = [\bar{u}_a \Gamma u_b]^{\dagger *} = \left[u_a^\dagger \gamma^0 \Gamma u_b \right]^{\dagger *} = \left[u_b^\dagger \Gamma \gamma^0 u_a \right]^* = \left[u_b^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma \gamma^0 u_a \right]^* = [\bar{u}_b \bar{\Gamma} u_a]^*$$

$$-\bar{\Gamma} = \gamma^0 \bar{\Gamma}^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(\gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{0\dagger} \Gamma \gamma^{0\dagger} \gamma^0 = \Gamma$$

$$\begin{aligned}\overline{\gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\nu} &= \gamma^0 (\gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\tau\dagger} \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\tau\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\mu\end{aligned}$$

4- Calculer le terme d'interférence entre les 2 graphes.

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} &= \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right] \\ &\quad \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma^\nu u^{(s_1)}(p_1) \right]^* \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma_\nu u^{(s_2)}(p_2) \right]^* \\ \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} &= \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2) \right] \\ &\quad \left[\bar{u}^{(s_1)}(p_1) \gamma^\nu u^{(s_4)}(p_4) \right] \left[\bar{u}^{(s_2)}(p_2) \gamma_\nu u^{(s_3)}(p_3) \right] \\ \Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} &= \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu \left(\sum_{s_1} u^{(s_1)}(p_1) \right) \gamma^\nu u^{(s_4)}(p_4) \\ &\quad \bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu \left(\sum_{s_2} u^{(s_2)}(p_2) \bar{u}^{(s_2)}(p_2) \right) \gamma_\nu u^{(s_3)}(p_3) \\ \Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} &= \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu u^{(s_4)}(p_4) \right] \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu u^{(s_3)}(p_3) \right] \\ \Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} &= \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu u^{(s_4)}(p_4) \right] \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3) \overline{\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu} u^{(s_4)}(p_4) \right]^*\end{aligned}$$

En utilisant les formules de Casimir :

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} = \frac{-g^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3)$$

On utilise les propriétés suivantes des matrices γ : $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu$ et $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda}$, pour calculer :

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3 &= p_{1\sigma} p_{4\lambda} p_{2\alpha} p_{3\beta} \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \\ &= -2p_{1\sigma} p_{4\lambda} p_{2\alpha} p_{3\beta} \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \\ &= -8p_{1\sigma} p_{4\lambda} p_{2\alpha} p_{3\beta} \gamma^\lambda g^{\sigma\alpha} \gamma^\beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} = \frac{2g^4}{(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} (p_1 \cdot p_2) \text{Tr}(\not{p}_4 \not{p}_3)$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} = \frac{8g^4}{(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4) = \frac{2g^4}{(p_1 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)} (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)$$

Pour des particules de masse nulle $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ implique $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4, p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4, p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_{gauche} \mathcal{M}_{droite}^*} = \frac{2g^4}{(p_1 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)} (p_1 \cdot p_2)^2$$

- 5- Montrez que pour la diffusion électron-électron à haute énergie (m_e négligeable), on a
- $$|\overline{\mathcal{M}}^2| = 2g^4 \left| \frac{(p_1 \cdot p_2)^4 + (p_1 \cdot p_4)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4}{(p_1 \cdot p_3)^2(p_1 \cdot p_4)^2} \right|$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}^2| = |\overline{\mathcal{M}_{gauche}}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_{droite}}|^2 - 2\overline{\mathcal{M}_{gauche}\mathcal{M}_{droite}^*}$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}^2| = 2g^4 \left| \frac{(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2}{(p_1 \cdot p_3)^2} + \frac{(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_3)^2}{(p_1 \cdot p_4)^2} + \frac{2(p_1 \cdot p_2)^2}{(p_1 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)} \right|$$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}^2| = 2g^4 \left| \frac{(p_1 \cdot p_2)^2 [(p_1 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_3)]^2 + (p_1 \cdot p_4)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4}{(p_1 \cdot p_3)^2(p_1 \cdot p_4)^2} \right|$$

Or $(p_1 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_3) = p_1 \cdot (p_4 + p_3) = p_1 \cdot (p_1 + p_2) = p_1^2 + p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2$

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}^2| = 2g^4 \frac{(p_1 \cdot p_2)^4 + (p_1 \cdot p_4)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4}{(p_1 \cdot p_3)^2(p_1 \cdot p_4)^2}$$

19 QED et la réalité du nombre quantique de couleur

L'intérêt de la production en mode e^+e^- est particulier dans le sens où la mesure du rapport $R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ (voir figure 12) permet tester l'hypothèse de la couleur, dans un processus de QED ordinaire.

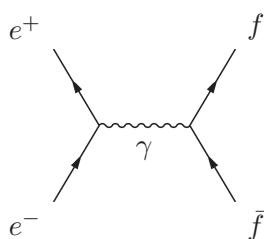


FIG. 11 – Production d'une paire de fermion anti-fermion (seul graphe sauf pour $f=e$)

L'amplitude du graphe de la figure 11 fait intervenir des termes en $\mathcal{M} \propto [\bar{v}_e(i\epsilon\gamma^\mu)u_e] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_f(iq_f e\gamma^\nu)v_f]$, de telle sorte que la section efficace pour chaque paire de fermion-antifermion est $\sigma_{f\bar{f}} \propto |\mathcal{M}|^2$, de telle sorte que, si on néglige les effets d'espace de phase, le rapport :

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \simeq \sum_f q_f^2.$$

En-dessous du seuil de production du charme, on s'attend à $R = 2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$ si le seul nombre quantique différent au numérateur et au dénominateur est la saveur des quarks. Si il y a en plus le degré de liberté de couleur, on s'attend à ce que $R = 2$. Au-dessus du seuil du c et avant celui du b on s'attend à $R = 2 \left[\cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{10}{9}$ sans couleur ou $\frac{10}{3} = 3.33$ avec la couleur. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 12, à peu de choses près... (Quelles approximations a-t-on faites?)

Les masses des quarks sont différentes, mais surtout les quarks ne sont pas des fermions libres qui obéissent à l'équation de Dirac. Ce sont des particules virtuelles qui vont interagir à nouveau : hadronisation, formation d'un état lié.

- 1-** Nous allons maintenant calculer la section efficace du processus décrit par la figure 11. Donner l'amplitude \mathcal{M} de ce diagramme en supposant que les fermions en sortie ne sont pas des électrons.

$$\begin{aligned} & (2\pi)^8 \int [\bar{v}_e(i\epsilon\gamma^\mu)u_e] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_f(iq_f e\gamma^\nu)v_f] \delta^4(p_f + p_{\bar{f}} - q) \delta^4(q - p_{e^-} - p_{e^+}) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\ &= i(2\pi)^4 [\bar{v}_e(i\epsilon\gamma^\mu)u_e] [\bar{u}_f(iq_f e\gamma^\nu)v_f] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_{e^-} + p_{e^+})^2} \delta^4(p_f + p_{\bar{f}} - p_{e^-} - p_{e^+}) \\ &\Rightarrow \mathcal{M} = -[\bar{v}_e(i\epsilon\gamma^\mu)u_e] [\bar{u}_f(iq_f e\gamma^\nu)v_f] \frac{g_{\mu\nu}}{(p_{e^-} + p_{e^+})^2} \end{aligned}$$

- 2-** En utilisant les formules de Casimir, montrer que :

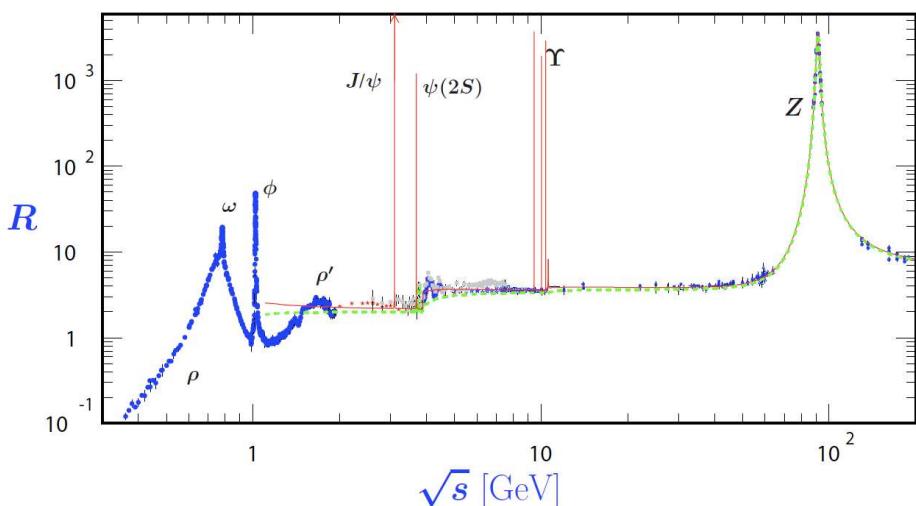


Figure 41.6: World data on the total cross section of $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ and the ratio $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)$ is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction, and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see “Quantum Chromodynamics” section of this Review, Eq. (9.7) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of J/ψ , $\psi(2S)$, and $\Upsilon(nS)$, $n = 1, 2, 3, 4$ are also shown. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [[arXiv:hep-ph/0312114](#)]. Corresponding computer-readable data files are available at <http://pdg.lbl.gov/current/xsect/>. (Courtesy of the COMPAS (Protvino) and HEPDATA (Durham) Groups, May 2010.) See full-color version on color pages at end of book.

FIG. 12 –

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} ((p_{e^-} \cdot p_f)(p_{e^+} \cdot p_{\bar{f}}) + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{f}})(p_{e^+} \cdot p_f) - m_e^2(p_f \cdot p_{\bar{f}}) - m_f^2(p_{e^-} \cdot p_{e^+}) + 2m_e^2 m_f^2)$$

On rappelle que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2] = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu}] \quad (2)$$



$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{s_{e+}, s_{e-}, s_f, s_{\bar{f}}} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{1}{4} \frac{q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} \sum_{s_{e+}, s_{e-}, s_f, s_{\bar{f}}} [\bar{v}_e \gamma^\mu u_{e-}] [\bar{u}_f \gamma_\mu v_f] [\bar{v}_e \gamma^\nu u_{e-}]^* [\bar{u}_f \gamma_\nu v_f]^* \\
&= \frac{1}{4} \frac{q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} \text{Tr}(\gamma^\mu (\not{p}_{e^-} + m_{e^-}) \gamma^\nu (\not{p}_{e^+} - m_{e^+})) \text{Tr}(\gamma_\mu (\not{p}_f - m_f) \gamma_\nu (\not{p}_{\bar{f}} + m_f))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma^\mu (\not{p}_{e^-} + m_{e^-}) \gamma^\nu (\not{p}_{e^+} - m_{e^+})) &= \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_{e^-} \gamma^\nu \not{p}_{e^+}) - m_e^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\
&= 4 [p_{e^-}^\mu p_{e^+}^\nu + p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu - (p_{e^-} \cdot p_{e^+}) g^{\mu\nu}] - 4m_e^2 g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{4q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} [p_{e^-}^\mu p_{e^+}^\nu + p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu - (p_{e^-} \cdot p_{e^+} - m_e^2) g^{\mu\nu}] [p_{f,\mu} p_{\bar{f},\nu} + p_{f,\nu} p_{\bar{f},\mu} - (p_f \cdot p_{\bar{f}} - m_f^2) g_{\mu\nu}] \\
&= \frac{4q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} (2(p_{e^-} \cdot p_f)(p_{e^+} \cdot p_{\bar{f}}) + 2(p_{e^-} \cdot p_{\bar{f}})(p_{e^+} \cdot p_f) - 2(p_f \cdot p_{\bar{f}})((p_{e^-} \cdot p_{e^+}) - m_e^2)) \\
&- 2(p_{e^-} \cdot p_{e^+}) ((p_f \cdot p_{\bar{f}}) - m_f^2) + 4(p_f \cdot p_{\bar{f}})(p_{e^-} \cdot p_{e^+}) - 4m_e^2(p_f \cdot p_{\bar{f}}) - 4m_f^2(p_{e^-} \cdot p_{e^+}) + 4m_e^2 m_f^2 \\
&= \frac{8q_f^2 e^4}{(p_{e^-} + p_{e^+})^4} ((p_{e^-} \cdot p_f)(p_{e^+} \cdot p_{\bar{f}}) + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{f}})(p_{e^+} \cdot p_f) - m_e^2(p_f \cdot p_{\bar{f}}) - m_f^2(p_{e^-} \cdot p_{e^+}) + 2m_e^2 m_f^2)
\end{aligned}$$

- 3- Donner les quadri-vecteurs énergie-impulsion de chacune des particules d'entrée et de sortie dans le référentiel du centre de masse de la collision. On notera E l'énergie de l'électron incident, E_f l'énergie du fermion sortant et θ l'angle entre la direction du fermion sortant et la direction de l'électron incident.

$$\begin{aligned}
p_{e^-} &= (E, p_e, 0, 0) \\
p_{e^+} &= (E, -p_e, 0, 0) \\
p_f &= (E_f, p_f \cos \theta, p_f \sin \theta, 0) \\
p_{\bar{f}} &= (E_f, -p_f \cos \theta, -p_f \sin \theta, 0)
\end{aligned}$$

- 4- exprimer $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ en fonction des énergies et impulsions dans le centre de masse.

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8q_f^2 e^4}{16E^4} A = \frac{q_f^2 e^4}{2E^4} A$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (EE_f - p_e p_f \cos \theta)^2 + (EE_f + p_e p_f \cos \theta)^2 - m_e^2(E_f^2 + p_f^2) - m_f^2(E^2 + p_e^2) + 2m_e^2 m_f^2 \\ &= 2E^2 E_f^2 + 2p_e^2 p_f^2 \cos^2 \theta - m_e^2(2p_f^2 + m_f^2) - m_f^2(2p_e^2 + m_e^2) + 2m_e^2 m_f^2 \\ &= 2E^2 E_f^2 + 2p_e^2 p_f^2 \cos^2 \theta - 2m_e^2 p_f^2 - 2m_f^2 p_e^2 \end{aligned}$$

soit :

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{q_f^2 e^4}{E^4} (E^2 E_f^2 + p_e^2 p_f^2 \cos^2 \theta - m_e^2 p_f^2 - m_f^2 p_e^2)$$

5- La section efficace du processus s'écrit :

$$d\sigma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{4\sqrt{(p_{e^-} \cdot p_{e^+})^2 - m_e^4}} d^6 \Phi_2$$

où $d^6 \Phi_2$ est l'espace de phase à 2 particules :

$$d^6 \Phi_2(q = p_{e^-} + p_{e^+}; p_f, p_{\bar{f}}) = (2\pi)^4 \delta^4(p_{e^-} + p_{e^+} - p_f - p_{\bar{f}}) \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{d^3 \vec{p}_{\bar{f}}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{f}}}$$

Calculer $\sigma(e^+ e^- \rightarrow f \bar{f})$

$$(p_{e^-} \cdot p_{e^+})^2 - m_e^4 = (E^2 + p_e^2)^2 - m_e^4 = (2E^2 - m_e^2)^2 - m_e^4 = 4E^4 - 4E^2 m_e^2 = 4E^2 p_e^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{8Ep_e} d^6 \Phi_2 \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{32(2\pi)^2 EE_f^2 p_e} \delta^4(p_{e^-} + p_{e^+} - p_f - p_{\bar{f}}) d^3 \vec{p}_f d^3 \vec{p}_{\bar{f}} \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{128\pi^2 EE_f^2 p_e} \delta(E_{e^-} + E_{e^+} - E_f - E_{\bar{f}}) p_f^2 dp_f d\Omega \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{128\pi^2 EE_f^2 p_e} \delta(2E - 2E_f) p_f^2 dp_f d\Omega \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{256\pi^2 EE_f^2 p_e} \delta(E - E_f) p_f^2 dp_f d\Omega \end{aligned}$$

On a $E_f = \sqrt{p_f^2 + m_f^2}$ donc $E_f^2 = p_f^2 + m_f^2$ et $E_f dE_f = p_f dp_f$, d'où :

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{256\pi^2 E E_f^2 p_e} \delta(E - E_f) p_f E_f dE_f d\Omega \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{256\pi^2 E^2 p_e} p_f d\Omega \\ &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{256\pi^2 E^2 \sqrt{E^2 - m_e^2}} \sqrt{E^2 - m_f^2} d\Omega \\ &= \frac{q_f^2 e^4}{256\pi^2 E^6} \sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_e^2}} (E^4 + p_e^2 p_f^2 \cos^2 \theta - m_e^2 p_f^2 - m_f^2 p_e^2) d\Omega \end{aligned}$$

On a $\int d\Omega = 4\pi$ et $\int \cos^2 \theta d\Omega = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = 2\pi \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{4\pi}{3}$ et donc :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{q_f^2 e^4}{256\pi^2 E^6} \sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_e^2}} 4\pi \left(E^4 + \frac{p_e^2 p_f^2}{3} - m_e^2 p_f^2 - m_f^2 p_e^2 \right) \\ &= \frac{q_f^2 e^4}{64\pi E^6} \sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_e^2}} \frac{1}{3} (3E^4 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_f^2) - 3m_e^2(E^2 - m_f^2) - 3m_f^2(E^2 - m_e^2)) \\ &= \frac{q_f^2 e^4}{192\pi E^6} \sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_e^2}} (3E^4 + E^4 - E^2 m_e^2 - E^2 m_f^2 + m_e^2 m_f^2 - 3m_e^2 E^2 + 3m_e^2 m_f^2 - 3m_f^2 E^2 + 3m_f^2 m_e^2) \\ &= \frac{q_f^2 e^4}{192\pi E^6} \sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_e^2}} (4E^4 - 4m_e^2 E^2 - 4m_f^2 E^2 + 7m_e^2 m_f^2) \end{aligned}$$

6- En déduire $R_q = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu\bar{\mu})}$

$$R_q = q_f^2 \sqrt{\frac{E^2 - m_q^2}{E^2 - m_\mu^2}} \frac{4E^4 - 4E^2(m_e^2 + m_q^2) + 7m_e^2 m_q^2}{4E^4 - 4E^2(m_e^2 + m_\mu^2) + 7m_e^2 m_\mu^2}$$

7- Montrer que si on néglige la masse de l'électron, $R_q = q_f^2 \left(\frac{p_q}{p_\mu} \right)^3$ où p_q (resp. p_μ) est l'impulsion du quark (resp. du muon) d'énergie E .

$$\begin{aligned}
R_q &= q_f^2 \sqrt{\frac{E^2 - m_q^2}{E^2 - m_\mu^2}} \frac{4E^4 - 4E^2 m_q^2}{4E^4 - 4E^2 m_\mu^2} \\
&= q_f^2 \sqrt{\frac{E^2 - m_q^2}{E^2 - m_\mu^2}} \frac{E^2 - m_q^2}{E^2 - m_\mu^2} \\
&= q_f^2 \left(\frac{E^2 - m_q^2}{E^2 - m_\mu^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= q_f^2 \left(\frac{p_q}{p_\mu} \right)^3
\end{aligned}$$

8- Que vaut R_q si on néglige toutes les masses ?

$$R_q = q_f^2$$

9- Montrer que si on néglige la masse de l'électron, la section efficace $\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})$ est égale à

$$\frac{q_f^2 e^4}{48\pi E^2} \beta_f^3$$

où β_f est le rapport $\frac{v}{c}$ pour le fermion sortant.

En négligeant la masse de l'électron :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{q_f^2 e^4}{192\pi E^7} \sqrt{E^2 - m_f^2} (4E^4 - 4E^2 m_f^2) \\
&= \frac{q_f^2 e^4}{48\pi E^5} \sqrt{E^2 - m_f^2} (E^2 - m_f^2) \\
&= \frac{q_f^2 e^4}{48\pi E^5} p_f^3 \\
&= \frac{q_f^2 e^4}{48\pi E^2} \beta_f^3
\end{aligned}$$

10- Donner l'expression de cette section efficace si on néglige aussi la masse du fermion f .

En négligeant toutes les masses, $\beta_f \sim 1$ et :

$$\sigma = \frac{q_f^2 e^4}{48\pi E^2}$$