

1 Ordres de grandeur

- 1- – Quelle distance parcourt une particule ultrarelativiste en 1 ns ?
– Quelle durée met une particule de masse nulle pour traverser un proton ?
- 2- Le muon a un temps de vie de $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. De nombreux muons sont produits lors d'interaction dans la haute atmosphère de particules cosmiques énergétiques. Pourquoi peut-on les détecter au sol ? Peut-on envisager de fabriquer un collisionneur à muons, et quels en seraient les avantages et les inconvénients ?
- 3- Comparer les temps de vie des divers mésons suivants, déduire la nature des forces à l'oeuvre, et proposer un schéma de désintégration :
 - π^+ (contenu en quarks $u\bar{d}$) $M = 140\text{MeV}$, $c\tau = 7,8\text{m}$
 - π^0 (quarks $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$) $M = 135\text{MeV}$, $\tau = 8,4 \times 10^{-17}\text{s}$
 - ϕ (état lié $s\bar{s}$) $M = 1,02\text{GeV}$, $\Gamma = 4,4\text{MeV}$. On signale que $M_{K^+} = 494\text{MeV}$.
 - J/ψ (état lié $c\bar{c}$) $M = 3,1\text{GeV}$, $\Gamma = 90\text{keV}$. On signale que $M_{D^0} = 1,9\text{GeV}$.
- 4- Ecrire le carré de la charge de l'électron en unité sans dimension.

2 Groupes SU(2) et SU(3)

- 1- On considère la matrice $U(\theta, \vec{u}) = e^{-i\theta \sum_a u_a \sigma_a/2}$ où σ_i sont les matrices de Pauli et \vec{u} , un vecteur unitaire. Montrer que $U(\theta, \vec{u}) = \cos \frac{\theta}{2} - i\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}$
- 2- Montrer que dans SU(2), $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$, et exprimer les états du produit tensoriel en fonction des états de la somme directe des représentations irréductibles. On précisera la symétrie des états correspondants aux représentations irréductibles.
- 3- On veut déterminer les constantes de structures de SU(3), c'est à dire les f_{abc} tels que $[\lambda_a/2, \lambda_b/2] = if_{abc}\lambda_c/2$. Où les λ_i sont les matrices de Gell-Mann génératrices de SU(3).

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
 - Combien y a-t-il de constantes f_{abc} ?
 - Montrer que les matrices de Gell-Mann obéissent à la normalisation $\text{tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
 - En déduire que $f_{abc} = \frac{-i}{4} \text{Tr}(\lambda_c [\lambda_a, \lambda_b])$ et que f_{abc} est totalement antisymétrique.
 - Calculer les f_{abc} .

3 Isospin

- 1- On note p_α^\dagger et p_α les opérateurs de création et d'annihilation d'un proton dans l'état $|\alpha\rangle$. On note n_α^\dagger et n_α les opérateurs de création et d'annihilation d'un neutron dans l'état $|\alpha\rangle$. Ces opérateurs vérifient les relations d'anticommutations $\{p_\alpha, p_\beta^\dagger\} = p_\alpha p_\beta^\dagger + p_\beta^\dagger p_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$, $\{p_\alpha^\dagger, p_\beta^\dagger\} = 0$, $\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$ et des relations similaires pour n_α^\dagger et n_α . Les opérateurs concernant un proton anticommulent avec ceux concernant un neutron.
 - Donner l'expression de l'opérateur T_+ échangeant un neutron par un proton.
 - Donner l'expression de l'opérateur T_- échangeant un proton par un neutron.
 - Calculer $T_3 = [T_+, T_-]$.
 - Calculer $[T_3, T_+]$ et $[T_3, T_-]$
 - Quelle est l'algèbre engendrée par les opérateurs $t_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}T_+$, $t_- = \frac{1}{\sqrt{2}}T_-$, $t_3 = \frac{1}{2}T_3$
- 2- Le proton et le neutron sont des états d'isospin $I = 1/2$ Les Δ des états d'isospin $I = 3/2$, de masse $M = 1,232\text{GeV}$, et les pions, des états d'isospin $I = 1$.
 - Comparer les amplitudes des processus

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n \end{aligned}$$
 en fonction de l'amplitude des processus idéaux $\mathcal{M}_{3/2}$ et $\mathcal{M}_{1/2}$
 - dans le cas où l'énergie dans le centre de masse vaut $1,232\text{GeV}$ (voir les données expérimentales de la Figure 1, montrer que

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3$$

Références

- [1] JB Zuber, *Introduction à la théorie des groupes et de leur représentations*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/09/29/68/PDF/cel-41.pdf>
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008, (p134)

Matrices de Pauli

$$\begin{aligned} \sigma_x &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \sigma_i^\dagger &= \sigma_i = \sigma_i^{-1}, e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \theta + i(\hat{\theta} \cdot \vec{\sigma}) \sin \theta \end{aligned}$$

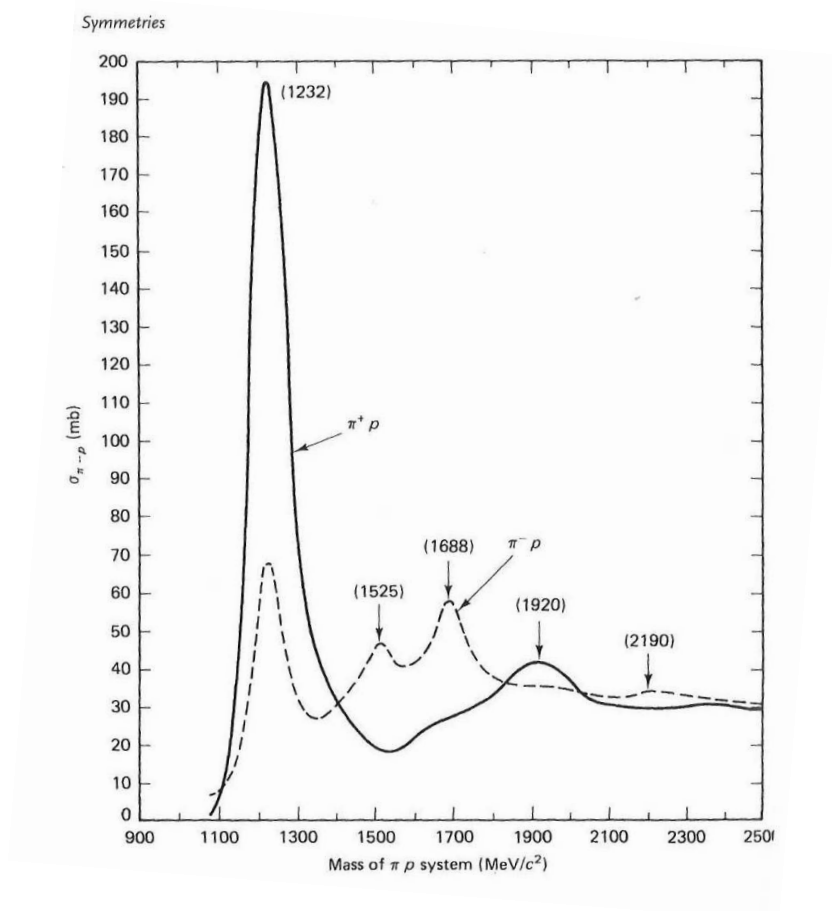


FIG. 1 – Section efficace totale mesurée de diffusion pion sur proton [1] en fonction de la masse invariante du système.

32. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	\dots
m_1	m_2	\dots
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots

Coefficients

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1/2	0
+1/2	-1/2
-1/2	1/2
-1/2	-1/2

 $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
 $2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+2	1/2
+2	-1/2
+1	1/2
+1	-1/2

 $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$
 $1 \times 1/2$

3/2	1/2
+3/2	1/2
+1	1/2
+1	-1/2
0	1/2

 $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$
 $3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
+3/2	-1/2
+1	1/2
+1	-1/2

 $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
 2×1

3	2
+3	2
+2	1
+2	-1
0	1
0	-1

 $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
 $3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
+3/2	-1/2
+1	1/2
+1	-1/2

 1×1

2	1
+2	1
+1	0
+1	-1
0	0

 $Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$
 $d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$
 $3/2 \times 3/2$

7/2	5/2
+7/2	5/2
+5/2	3/2
+5/2	-3/2
+3/2	1/2
+3/2	-1/2

 $d_{m,0}^1 = \cos \theta$
 $d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,1}^1 = \frac{1+\cos \theta}{2}$
 $d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,0}^1 = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$
 $d_{1,-1}^1 = \frac{1-\cos \theta}{2}$

Figure 32.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

4 Fonctions d'onde

- 1- Dans $SU(3)$, $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$. Le décuplet a une fonction d'onde symétrique. Quel peut être son spin ? Comment imaginer que cela ne viole pas le principe de Pauli ?
- 2- Ecrire la fonction d'onde spin/saveur du proton.
- 3- Le conjugué de charge du doublet d'isospin (u, d) est le doublet $(-\bar{d}, \bar{u})$. On considère l'association d'un quark et d'un anti-quark (meson) en se restreignant aux saveurs u, d, s . L'interaction forte respecte la symétrie de saveur $SU(3)$. Donner le contenu en quarks des mesons π, K, η, η' , et les préciser leur position dans un diagramme (Y, I_3) .

5 Masses et moments magnétiques

- 1- – Montrer que le moment magnétique du proton s'écrit $\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$, où μ_u et μ_d sont les moments magnétiques respectivement des quarks u et d .
– Dans l'approximation $m_u = m_d$, donner le rapport des moments magnétiques du neutron et du proton. La valeur expérimentale est $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.68497945 \pm 0.00000058$
- 2- Dans le modèle des quarks, on peut écrire la masse d'un méson $q_1\bar{q}_2$ comme égale à :

$$M(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$$

où $A = 159 \times \frac{4m_u^2}{\hbar^2}$ MeV/c² est une constante et \vec{S}_i le spin d'un quark. En utilisant les masses habillées suivantes pour les quarks : $m_u = m_d = 308$ MeV/c² et $m_s = 483$ MeV/c², calculer la masse des mésons $\pi^+, K^0, \rho^+, K^{*0}, \phi$ et comparer avec les valeurs mesurées.

6 Symétries C, P et T

- 1- Préciser le moment orbital et le spin des mesons π^0 ($J^{PC} = 0^{-+}$), ρ^0 ($J^{PC} = 1^{--}$) et a_1 ($J^{PC} = 1^{++}$).
- 2- Le η se désintègre principalement en $\eta \rightarrow 2\gamma(39\%)$, $\eta \rightarrow 3\pi(56\%)$, $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma(5\%)$. Pourquoi le mode en 2π est-il interdit ? Pouvez-vous expliquer pourquoi le mode en 3π a un rapport d'embranchement comparable au mode en 2γ ?

7 Symétrie CP

- 1- En étudiant la désintégration du muon ($\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$) et en vous rappelant qu'il n'existe que des neutrinos d'hélicité gauche et des anti-neutrinos d'hélicité droite, montrez que si \hat{P} et \hat{C} sont brisées par l'interaction faible, la combinaison $\hat{C}\hat{P}$ est, a priori, conservée.

2- Les kaons neutres produits par interaction forte ne sont pas états propres de la combinaison de symétries discrètes $\hat{C}\hat{P}$. On pose¹ que $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$, et on rappelle que les kaons neutres ont une parité intrinsèque négative.

- a) Définissez les états propres de CP , K_1^0 et K_2^0 , à partir des états propres de l'interaction forte K^0 et \bar{K}^0 , en choisissant comme convention :

$$\hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle \text{ et } \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle.$$

- b) Quelles sont les désintégrations possibles des kaons neutres ? A quels états propres de $\hat{C}\hat{P}$ correspondent-elles ?
- c) Pourquoi associe-t-on K_L^0 à K_2^0 et K_S^0 à K_1^0 ? Comment se manifeste la brisure de $\hat{C}\hat{P}$ et en quoi cela affecte-t-il la définition des états K_L^0 et K_S^0 ?

Références

- [1] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008 (chap 5).
- [2] F.Halzen and A.Martin *Quarks and leptons*, Wiley Ed., 1984 (chap 2).

¹En fait, c'est une convention. On peut aussi poser : $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$, mais alors il faut changer les définitions de K_1^0 et K_2^0 qui en découlent.

Rappels matrices gamma

Les matrices γ sont des matrices 4×4

$$\gamma^0 = \gamma_0 \equiv \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \gamma^i = -\gamma_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma^5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \vec{\Sigma} &\equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \\ \sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ \not{a} &\equiv a_\mu\gamma^\mu \end{aligned}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I_4 & (\gamma^i)^2 &= -I_4 & (\gamma^5)^2 &= I_4 & ; \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 (\mu = 0, 1, 2, 3) \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 & \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i & \gamma^{5\dagger} &= \gamma^5 \end{aligned}$$

Quelques relations :

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 & ; & \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0 \\ \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} & ; & \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu & ; & \gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu &= 4g^{\nu\lambda} & ; & \gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu = 4a \cdot b \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu & ; & \gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \end{aligned}$$

Traces des matrices gamma : la trace du produit d'un nombre impaire de matrices γ est nulle.

On a $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$; $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$; $\text{Tr}(I_4) = 4$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} & ; & \text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \\ \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) &= 4[g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}] & ; & \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] & ; & \\ \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 0 & ; & \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}) = 0 \\ \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} & ; & \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \end{aligned}$$

Relations avec les spineurs :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^\dagger\gamma^0 & \bar{v} &= v^\dagger\gamma^0 \\ (\not{p} - mc)u &= 0 & (\not{p} + mc)v &= 0 \\ \bar{u}(\not{p} - mc) &= 0 & \bar{v}(\not{p} + mc) &= 0 \\ \bar{u}u &= 2mc & \bar{v}v &= -2mc \\ \sum_{s=\uparrow,\downarrow} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} &= \not{p} + mc & \sum_{s=\uparrow,\downarrow} v^{(s)}\bar{v}^{(s)} &= \not{p} - mc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* &= \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a c)] \\
\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{v}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{v}_a \Gamma_2 u_b]^* &= \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a - m_a c)] \\
\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{u}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 v_b]^* &= \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a c)] \\
\sum_{spin_a, spin_b} [\bar{v}_a \Gamma_1 v_b] [\bar{v}_a \Gamma_2 v_b]^* &= \text{Tr} [\Gamma_1 (\not{p}_b - m_b c) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a - m_a c)]
\end{aligned}$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des matrices 4×4 et où $\bar{\Gamma}_i \equiv \gamma^0 \Gamma_i^\dagger \gamma^0$

8 Taux de désintégration du muon

Un muon d'impulsion q se désintègre en $e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ par l'interaction faible. Le μ en se transformant en ν_μ (d'impulsion p_1) par l'émission d'un W^- virtuel (= hors-couche, l'énergie P_W^0 et l'impulsion \vec{P} du W sont telle que $(P^0)^2 - |\vec{P}|^2 \ll m_W^2$). Le W se désintègre rapidement en $e\bar{\nu}_e$, d'impulsions p_2 et p_3 .

On veut calculer le taux de désintégration du μ . On va négliger les masses des fermions dans l'état final, on travaille dans le référentiel du μ , et on néglige P^2 par rapport m_W^2 dans le propagateur du W .

- 1- Dessiner le diagramme de Feynman.
- 2- Ecrivez l'élément de matrice $\mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$, en négligeant l'impulsion du W , c'est à dire, on utilise l'approximation d'interaction de contact entre quatre fermions gauches. Vous obtenez $\mathcal{M}(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$ de $\mathcal{M}(n \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e)$ (du cours).
- 3- Démontrer une des formules de Casimir.
- 4- Mettez l'élément de matrice au carré pour un muon non polarisé.
- 5- L'espace de phase à n particules en sortie est donné par l'expression :

$$d^{3n}\Phi_n(q; p_1, p_2, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4 \left(q - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3\vec{p}_i c^3}{(2\pi)^3 2E_i}$$

où $p_i = (E_i, c\vec{p}_i)$ est le quadrivecteur d'une particule sortante et q est le quadrivecteur de l'état initial. On rappelle que pour une particule de masse m , $\int d^4p \delta(p^2 - m^2 c^4) = \frac{d^3\vec{p} c^3}{2E}$. La largeur de désintégration du muon en unité naturelle ($c = 1, \hbar = 1$) dans son référentiel est donnée par $d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} d\Phi_3$,

Toutes les particules de l'état final ont une masse nulle. On a :

$$\begin{aligned}
d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \left[(2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3(2\pi)^3} \right] \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \left[(2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \delta(p_3^2) 2\pi \right] \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} (2\pi) \delta((q - p_1 - p_2)^2) \frac{E_1 dE_1 d\Omega_1}{2(2\pi)^3} \frac{E_2 dE_2 d\Omega_2}{2(2\pi)^3}
\end{aligned}$$

Il est utile de définir $x_i = 2E_i/m_\mu$. Vérifier que dans ce cas

$$p_i \cdot p_j = \frac{m_\mu^2}{2} (1 - x_k)$$

pour $i \neq j \neq k$.

- 6- Expliquer pourquoi x_i doit être compris entre 0 et 1.
- 7- Montrer que $|\mathcal{M}|^2$ ne dépend pas des directions des particules finales dans le référentiel propre du muon.
- 8- On peut faire les intégrales sur les angles de $d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu)$ en utilisant la fonction δ restante. La direction de \vec{p}_1 est libre (peut servir pour définir l'axe des z), donc $\int d\Omega_1 \rightarrow 4\pi$. On définit $\cos\theta_2$ tel que $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = E_1 E_2 \cos\theta_2$, donc

$$\begin{aligned} d\Gamma(\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu) &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \delta(m_\mu^2(1 - (x_1 + x_2) + \frac{x_1 x_2}{2}(1 - \cos\theta_2))) \frac{(4\pi)(2\pi)}{4(2\pi)^5} E_1 dE_1 E_2 dE_2 d\cos\theta_2 \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \frac{1}{2(2\pi)^3} E_1 dE_1 E_2 dE_2 \frac{2}{m_\mu^2 x_1 x_2} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_\mu} \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_1 dE_2 = \frac{|\mathcal{M}|^2 m_\mu}{32(2\pi)^3} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

- 9- Montrer que $1 - x_1 \leq x_2 \leq 1 \leq 2 - x_1$.
- 10- Montrer que $|\mathcal{M}|^2 = 16G_F^2 m_\mu^4 x_1(1 - x_1)$. Préciser quelle particule est la particule 1.
- 11- Obtenez

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

- 12- Quelle est son temps de vie en secondes ?

9 Production et régénération des mésons K neutres.

Les mésons les plus légers sont les mésons π et K , de masse $m_\pi \simeq 140 MeV/c^2$ et $m_K \simeq 500 MeV/c^2$. Les baryons les plus légers sont les nucléons, le Λ et les Σ , de masse $m_N \simeq 940 MeV/c^2$, $m_\Lambda \simeq 1115 MeV/c^2$ et $m_\Sigma \simeq 1190 MeV/c^2$. On rappelle les étrangetés de ces particules :

$$S(\Lambda) = S(\Sigma^+) = S(\Sigma^0) = S(\Sigma^-) = -1$$

$$S(K^0) = S(K^+) = +1$$

$$S(\bar{K}^0) = S(K^-) = -1$$

- 1- Quels sont les couples particule/anti-particule ?
- 2- Ecrire les réactions de production des mésons K^+ et K^0 à partir d'un faisceau de pions. Ecrire les réactions de production des mésons K^- et des \bar{K}^0 .
- 3- On veut produire des mésons K^+ ou K^0 en bombardant de la matière par un faisceau de π . Quelle énergie doit on choisir si on veut éviter de produire aussi des K^- et des \bar{K}^0 .
- 4- Dans le système des kaons neutres, on a $\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$, Les états propres de $\hat{C}\hat{P}$ sont définis par

$$\hat{C}\hat{P}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle \text{ et } \hat{C}\hat{P}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle.$$

Soit

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \text{ et } |\bar{K}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

Si on produit des faisceau de K^0 , les K_1 vont se désintégrer plus vite. On doit donc observer des désintégrations en 2π près de la source et des désintégrations en 3π loin de la source (Gell-Mann & Pais, 1955). Le K_2 a été observé à BNL en 1956 (Lederman et al.). $\tau_1 = 0.895 \times 10^{-11} s$ (qq mm) et $\tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} s$ (qq m !)

Le mélange entre K^0 et \bar{K}^0 est possible car l'interaction faible ne conserve ni l'isospin ni l'étrangeté. Dessiner des diagrammes de Feynman représentant la transformation d'un K_0 en \bar{K}^0 .

- 5- Quel est le principe de fonctionnement d'un "régénérateur de K_S^0 " ?

10 Introduction

L'article proposé est l'un des deux articles publiés en même temps, annonçant la découverte d'une résonance mince pouvant s'interpréter comme une résonance $c\bar{c}$.

Cette découverte a valu le prix Nobel aux deux représentants des groupes expérimentaux : Burton Richter[2] et Samuel C. C. Ting[1] en 1976. Cette découverte s'est faite simultanément au SPEAR, collisionneur e^+e^- du SLAC en Californie et à l'AGS, synchrotron à protons du laboratoire national de Brookhaven (BNL) dans l'état de New York dans une expérience de type cible fixe où un faisceau de protons était envoyé sur une cible de Beryllium.

Nous étudierons en particulier l'article du groupe de S.C.C. Ting [1] dont la description expérimentale est un peu plus fournie. Aucun des deux groupes ne recherchait un quatrième quark.

Les résonances, aujourd'hui appelées mésons vecteurs ρ, ω, ϕ , avaient été découvertes à des masses de l'ordre de 1 GeV et des largeurs $\Gamma_\rho=100$ MeV, $\Gamma_\omega=10$ MeV, $\Gamma_\phi=5$ MeV. Toutes avaient $J(\text{spin})=1$, $C(\text{Conjugaison de charge})=-1$ et P (parité)=-1, comme le photon, elles étaient considérées comme des photons massifs ! Le groupe de S.C.C. Ting recherchait ces "photons" et voulait isoler leur désintégration en e^+e^- (*quel est leur rapport de branchement dans ce mode ?*) pour étudier comment la photoproduction de ces résonances suivie de la désintégration en e^+e^- interférait avec la production directe de paires $\gamma \rightarrow e^+e^-$, afin de mesurer l'amplitude de production de ces résonances. Ils étudiaient ces résonances dans un faisceau de $10^{11}\gamma/\text{s}$ à DESY à l'aide d'un spectromètre permettant une résolution en masse de 5 MeV/ c^2 permettant aussi de distinguer les paires e^+e^- des paires de $\pi^+\pi^-$ avec un pouvoir discriminant $\gg 10^8$. [3] (*D'où vient cette nécessité ?*)

La question du nombre de "photons massifs" de ce type, motiva la construction d'une nouvelle expérience auprès de l'accélérateur AGS de protons de 28.5 GeV de BNL afin de traquer de nouvelles résonances de ce type jusqu'à des masses de 5 GeV, produite lors d'interactions fortes $p+p \rightarrow V^0 + X \rightarrow e^+e^- + X$ (où V^0 est utilisé pour représenter une particule neutre qui se désintègre avec une topologie observée dans le détecteur qui ressemble à la lettre V).

C'est ce dispositif qui va permettre la découverte du J .

11 Un peu d'histoire

11.1 Angle de Cabibbo

En 1963, Cabibbo avait introduit le doublet u, d' pour tenir compte de la désintégration des particules étranges [4]. En suggérant que les quarks états propres de propagation (masse) étaient différents des états propres de l'interaction faible, cela permettait d'expliquer les désintégrations du type $K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$, sans remettre en cause le schéma organisant les fermions gauches en doublets de l'interaction faible $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, dont les seules transitions possibles étaient entre les membres d'un même doublet.

Cabibbo fait l'hypothèse que le courant faible couple au doublet $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{cases}$$

Le rapport des largeurs partielles $\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \sim \tan^2 \theta_c$ correspond à un angle θ_c de 13.15° .

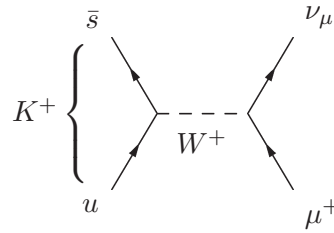


FIG. 2 – Désintégration $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$

11.2 Mécanisme de Glashow - Iliopoulos - Maiani

Les prédictions de taux de désintégration du $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ si l'on ne considère que les transitions $u \leftrightarrow d'$ sont beaucoup plus élevées que l'observation expérimentale $\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma^{\text{tot}}(K_L^0)} = (9.1 \pm 1.9) \cdot 10^{-9}$.

L'introduction d'un quark c , complétant un doublet faible avec le s' , rendait un nouveau diagramme possible, dont l'amplitude aurait annulé totalement le diagramme déjà imaginé, si ce n'avait été pour la différence de masse des quarks u et c . En 1970, Glashow - Iliopoulos - Maiani prédisent l'existence d'un quatrième quark [5].

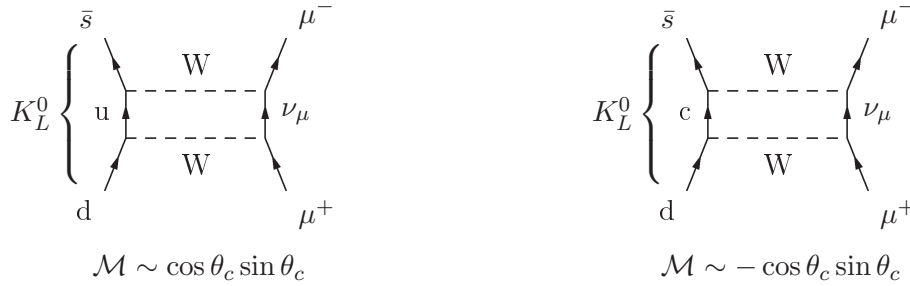


FIG. 3 – Deux contributions à la désintégration $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Ce mécanisme n'a pas été pris au sérieux avant la découverte en 1974 de la résonance $c\bar{c}$, car il nécessitait l'invention d'une nouvelle particule, pour régler un problème particulier d'une théorie qui demandait encore largement à être validée par l'expérience.

Entretemps, Kobayashi et Maskawa avaient déjà théoriquement introduit une 3^{eme} famille de quarks, seule façon d'introduire une phase complexe dans la matrice de rotation de Cabibbo, phase qui permettait d'introduire naturellement la violation de CP dans les interactions faibles.

12 Dispositif expérimental

La zone expérimentale avec les arrivées de faisceau est schématisée sur la figure 4. Le détecteur de l'expérience est entouré et agrandi sur la figure 5.

Les deux plans de détection jouent un rôle différent. Les aimants (notés M pour "magnet") défléchissent les particules chargées dans le plan vertical. Pour pouvoir les suivre et mesurer leur quantité de mouvement, le dispositif est incliné verticalement de 10.33° . Le détecteur est composé de deux bras

identiques disposés chacun à 14.6° horizontalement de chaque côté de la ligne de faisceau. Il intercepte donc seulement les paires de particules émises de la cible dans ces directions.

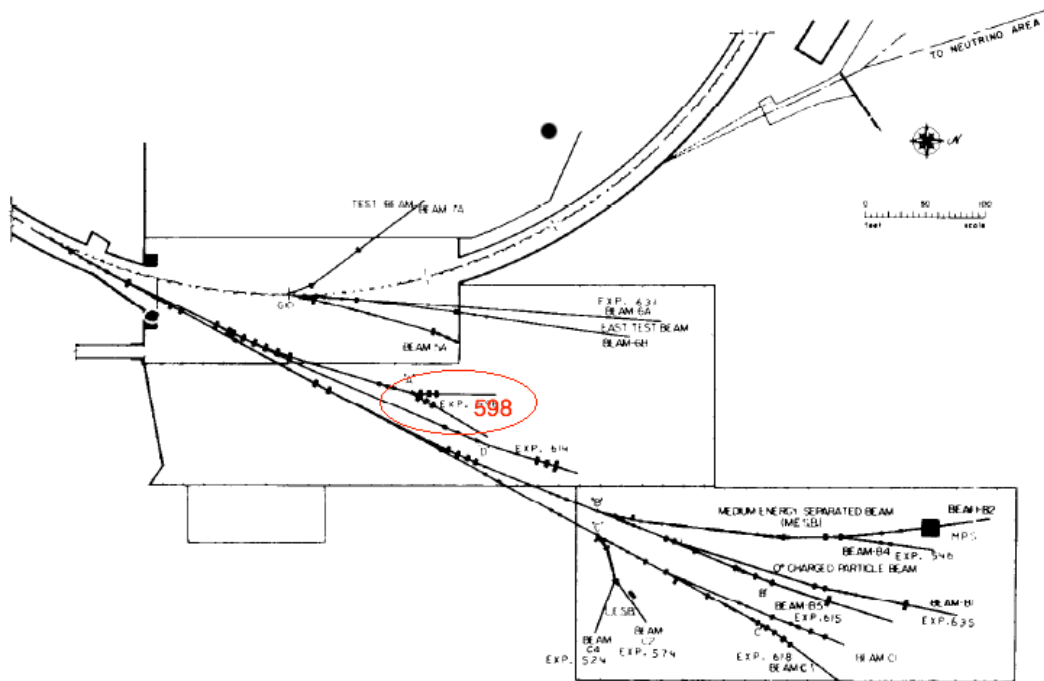


FIG. 4 – Le hall expérimental est auprès de l'AGS. L'expérience 598, entourée, est au bout de la station A

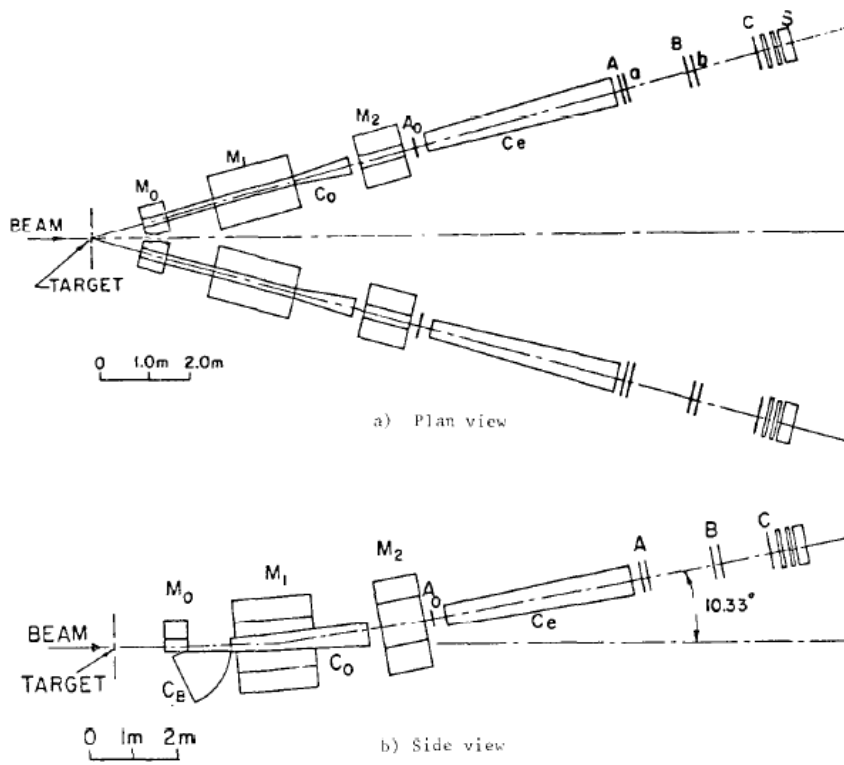


FIG. 5 – Schéma du dispositif expérimental. Les parties marquées M sont des aimants dipolaires, les A_0 , A, B, et C sont des chambres à fil proportionnelles (8000 fils en tout), les parties marquées a, b sont des hodoscopes 8x8, S désigne 3 stations de calorimètres au verre au plomb. C_B , C_0 , et C_e sont des compteurs Čerenkov

12.1 Le spectromètre

Composé des aimants et des chambres à fil, il permet de mesurer la quantité de mouvement des particules qui traversent le détecteur. Le sens de la courbure détermine la charge. En effet, la trajectoire est mesurée par les plans de chambre à fil notées A_0 , A, B, et C dans la figure 5. Les 11 plans de fils de $20\ \mu\text{m}$ de diamètre espacés de 2 cm ainsi que leurs orientations sont schématisés dans la figure 7. Une particule chargée ionise le gaz de la chambre à fil qu'elle traverse. Les fils sont mis sous haute tension positive et les électrons libérés se déplacent dans le champ ainsi créé vers le fil le plus proche (lignes de champ voir figure 6).

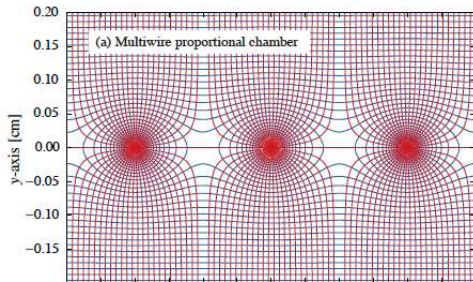


FIG. 6 – Champ électrique dans une chambre à fils

Ils ionisent eux-aussi le gaz, et une avalanche se forme qui va donner un signal électrique collecté sur les fils d'anode. Les ions, eux se déplacent - plus lentement vers les plans de cathode. La charge totale collectée est proportionnelle à l'énergie déposée par ionisation tant que le tension reste en-dessous d'un certain seuil. Au-dessus, de ce seuil, le passage d'une particule ionisante provoque des claquages (chambres à étincelles, compteurs geiger).

Le nombre de plans touchés permet d'éliminer le bruit de fond de conversions de photons de basse énergie qui ne laissent du signal que dans quelques plans. Le rayon de courbure de la trajectoire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique des aimants est relié à la quantité de mouvement par $p_{\perp}\ (\text{GeV}/c) = 0.3 \cdot Q(e) \cdot B(T) \cdot R(m)$. La mesure de la masse invariante de la paire e^+e^- nécessite la connaissance de la quantité de mouvement de chacun des électrons. La résolution spatiale d'une chambre à fil est de l'espacement divisé

par $\sqrt{12}$, ici ~ 6 mm. Pour rappel la variance d'une distribution uniforme entre $-d/2$ et $d/2$, normalisée à 1 ($f(x)=1/d$ sur l'intervalle et 0 ailleurs) vaut $\sigma^2 = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \left(\int_{-d/2}^{d/2} x \cdot f(x) \cdot dx \right)^2$, donc $\sigma = d/\sqrt{12}$

12.2 L'hodoscope

Un hodoscope (a,b) sur la figure 5 est habituellement composé de scintillateurs organiques. Les scintillateurs, matériaux qui réagissent au passage d'une particule ionisante par l'émission de lumière, sont très utiles pour déclencher l'acquisition de donnée car leur signal lumineux est émis en ~ 0.1 ns, ce qui permet une prise de décision rapide, basée sur la coïncidence du signal observé et de l'arrivée d'un paquet de protons sur la cible.

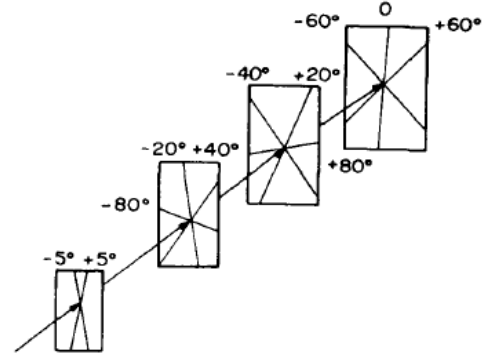


FIG. 7 – Orientation relative des fils des différentes stations de chambres à fils

12.3 Compteurs Čerenkov

Une particule chargée émet de la radiation Čerenkov, lorsque celle-ci va plus vite que la vitesse de phase de la lumière dans le milieu qu'elle traverse. L'angle θ_c d'émission de la radiation par rapport à la direction de la particule, pour une particule de vitesse βc dans un milieu d'index de réfraction n est $\cos \theta_c = 1/(n\beta)$. Le seuil d'émission est donc $\beta_{seuil} = 1/n$ et $\gamma_{seuil} = n/\sqrt{n^2 - 1}$. Comme $\gamma = \frac{E}{m}$, les seuils d'émission sont différents pour des particules de masses différentes. En particulier, les compteurs Čerenkov peuvent être réglés de façon à ne pas être sensibles aux pions mais bien aux électrons. L'indice de réfraction de C_B est choisi de façon à être sensible aux électrons au-dessus de 10 MeV et insensible aux pions en dessous de 2.7 GeV. Les compteurs sont remplis d' H_2 et leurs fenêtres d'entrée et de sortie sont de 125 et 250 μm . Le nombre de photons produit par intervalle de longueur et d'énergie pour une particule de charge Q vaut :

$$\frac{d^2 N}{dx dE} = \frac{\alpha Q^2}{\hbar c} \sin^2 \theta_c \simeq 370 \sin^2 \theta_c(E) eV^{-1} cm^{-1}.$$

La lumière produite est réfléchiée sur un miroir sphérique et renvoyée vers un photomultiplicateur. La tension de celui-ci doit être ajustée pour être efficace pour un électron, mais pas bruyant, car dans la zone de faisceau le niveau de radiation est très élevé et il faut éviter les coïncidences fortuites. Les photomultiplicateurs sont réglés de tels sorte que le passage d'un électron produise un signal de 8 photoélectrons.

12.4 Calorimètres

Placés derrière les autres détecteurs, les calorimètres mesurent l'énergie des particules en les faisant interagir dans un matériau dense et si possible scintillant et transparent. Le nombre de particules produites lors de l'interaction (électromagnétique pour les e^- et γ et hadronique pour les hadrons) est proportionnel à l'énergie de la particule. Ces particules vont elles-même interagir dans le milieu. Les particules chargées produisent de la lumière (scintillation et/ou Čerenkov) et celle-ci est collectée. Après calibration avec des faisceaux d'énergie connue, l'intensité lumineuse collectée permet de mesurer l'énergie de la particule incidente. Afin de capturer toute la gerbe de particule il faut prévoir plusieurs (habituellement entre 5 et 8) longueurs d'interactions nucléaires. La figure 9 montre pour quels éléments cette longueur est la plus faible et donc la plus intéressante du point de vue du coût en détecteur. Les matériaux choisis ici sont du plexiglas au plomb et du verre au plomb (PbO , qui est transparent mais d'un Z plus élevé que le Si et plus dense que la silice). Il y a 10 longueurs d'interaction de telle sorte que toute l'énergie des particules sera contenue. Chaque détecteur est segmenté en environ 100 cellules afin de mesurer la direction de la trajectoire des électrons.

Pour calibrer la réponse du calorimètre aux électrons il faut pouvoir injecter un faisceau d'électron dans la ligne de faisceau. La calibration est faite au moyen de la désintégration en vol de $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$ ($\tau = 10^{-19}s$). Dans le bras où la polarité des aimants est prévue pour sélectionner les charges négatives, le e^+ est défléchi vers l'extérieur. La coïncidence entre le Čerenkov où il est mesuré et les hodoscopes et les autres Čerenkov permet de s'assurer qu'on a un faisceau pur d'électron pour calibrer (au moyen de la quantité de mouvement reconstruite grâce au spectromètre)

12.5 Blindage

Toutes les secondes 10^{12} protons arrivent sur une cible dont la longueur est de 10% de la longueur de collision. Il y a donc autant de particules qui arrivent dans la zone expérimentale. Pour protéger les détecteurs et les physiciens, ils ont dû récupérer plus de blocs de bétons que n'étaient disponible à BNL ! Il leur a fallu 10 000 tonnes de béton, 100 tonnes de plomb, 5 tonnes d'uranium et 5 tonnes de savon (!) (au-dessus de C_0 , entre M1 et M2 et autour de l'entrée de C_e pour stopper les neutrons lents). Même comme ça le niveau de radiation dans la zone une heure après l'arrêt de faisceau était de 50 mSv/h (2.5 fois la dose annuelle admise pour un travailleur du nucléaire en France !)

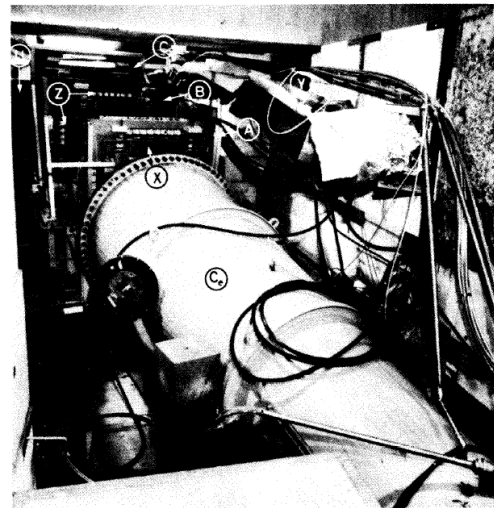


Fig. 9. End view of one arm, showing part of the Čerenkov counter C_e , the chambers A, B, C, with part of the 8000 amplifiers X, cables V, and hodoscopes Z. The lead-glass counter is at the end of chamber U.

FIG. 8 – Photo du compteur Čerenkov C_e , avec les chambres multi-fils (A,B,C) à l'arrière et des plans d'hodoscope (Z). Tout à l'arrière on devine le calorimètre au verre plombé (U)

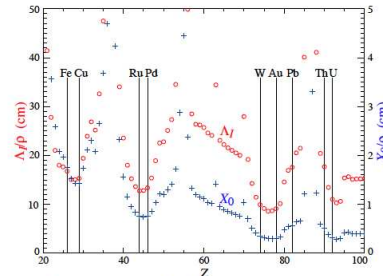


Figure 28.21: Nuclear interaction length λ_I/ρ (circles) and radiation length X_0/ρ (+) in cm for the chemical elements with $Z > 20$ and $\lambda_I < 50$ cm.

FIG. 9 – Longueur d'interaction nucléaire divisée par la masse volumique (λ_I/ρ) et de radiation (électromagnétique) X_0/ρ (pour les éléments au-dessus de $Z=20$)

13 Questions

- 1- Pourquoi choisir des collisions proton-noyau plutôt qu'un faisceau e^+e^- ? Quels sont les problèmes inhérents aux deux options ?
- 2- La cible choisie pour le faisceau de proton est du beryllium. Pourquoi ce choix plutôt que du plomb ou du tungstène ?
- 3- Pourquoi choisir 14.6° comme angle par rapport à la ligne de faisceau ? (Quelle est l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse à laquelle le taux de production du V^0 inconnu sera le plus élevé ? Pour un V^0 produit par un faisceau de protons de 28.5 GeV dans le référentiel du laboratoire. Avec cette énergie cinétique dans le centre de masse, à quel angle sont émis la paire d'électrons recherchée et produite par désintégration ?)
- 4- Vu sa position, à quoi peut bien servir le compteur C_B ?
- 5- Quelles sont les hypothèses faites sur ce que peut être la résonance ?

Références

- [1] J.J. Aubert et al., Experimental Observation of a Heavy Particle J, *Physical Review Letters*, **33**, 1404, 1974.
- [2] J.-E. Augustin et al., Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation, *Physical Review Letters*, **33**, 1406, 1974.
- [3] S. C. C. Ting, The discovery of the J particle : A personal recollection, *Review of Modern Physics*, **49**, 1977.
- [4] N. Cabibbo, Unitary symmetry and leptonic decays *Physical Review Letters*, **10**, 531, 1963.
- [5] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry, *Physical Review*, **D2**, 1585, 1970.
- [6] Particle Data Group, Review of Particle Physics, *Journal of Physics*, **G37**, sections 27-28, 2010.

14 QED et la réalité du nombre quantique de couleur

L'intérêt de la production en mode e^+e^- est particulier dans le sens où la mesure du rapport $R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ (voir figure 11) permet tester l'hypothèse de la couleur, dans un processus de QED ordinaire.

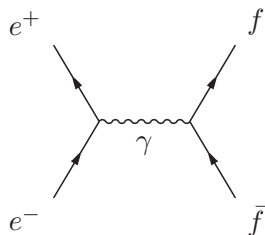


FIG. 10 – Production d'une paire fermion anti-fermion (seul graphe sauf pour $f=e$)

L'amplitude du graphe de la figure 10 :

$-i\mathcal{M} = [\bar{v}_e(i\epsilon\gamma^\mu)u_e] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_f(iq_f\epsilon\gamma^\nu)v_f]$, de telle sorte que la section efficace pour chaque paire de fermion-antifermion est $\sigma_{f\bar{f}} \propto |\mathcal{M}|^2$, de telle sorte que, si on néglige les effets d'espace de phase, le rapport :

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \simeq \sum_f q_f^2.$$

En-dessous du seuil de production du charme, on s'attend à $R = 2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$ si le seul nombre quantique différent au numérateur et au dénominateur est la saveur des quarks. Si il y a en plus le degré de liberté de couleur, on s'attend à ce que $R = 2$. Au-dessus du seuil du c et avant celui du b on s'attend à $R = 2 \left[\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = \frac{10}{9}$ sans couleur ou $\frac{10}{3} = 3.33$ avec la

couleur. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 11, à peu de choses près... (Quelles approximations a-t-on faites ?)

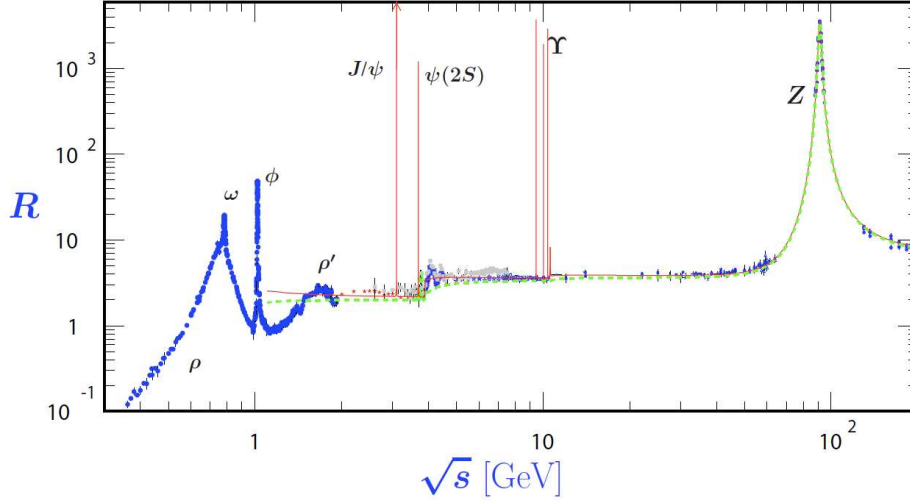


Figure 41.6: World data on the total cross section of $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ and the ratio $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)$ is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops, $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction, and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see “Quantum Chromodynamics” section of this Review, Eq. (9.7) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of J/ψ , $\psi(2S)$, and $\Upsilon(nS)$, $n = 1, 2, 3, 4$ are also shown. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. Corresponding computer-readable data files are available at <http://pdg.lbl.gov/current/xsect/>. (Courtesy of the COMPAS (Protvino) and HEPDATA (Durham) Groups, May 2010.) See full-color version on color pages at end of book.

FIG. 11 –

15 Règles de Feynman

15.1 Rappel des règles de Feynman pour QED

Nous rappelons les règles de Feynman pour QED. Pour QCD et l'interaction faible, le schéma de calcul est le même, seules changent les expressions des vertex et des propagateurs. Les vertex pour toutes les interactions du modèle standard sont donnés dans la section **15.2**.

- 1- A chaque ligne externe, associer un quadri-vecteur énergie-impulsion p_1, \dots, p_n et rajouter une flèche² indiquant la direction positive dans le temps³. A chaque ligne interne associer un quadri-vecteur énergie-impulsion q_1, \dots, q_n .
- 2- Les lignes externes contribuent des facteurs :
 - Electrons $\begin{cases} \text{Entrant} : u \text{ flèche vers le vertex} \\ \text{Sortant} : \bar{u} \text{ flèche sortant du vertex} \end{cases}$
 - Positrons $\begin{cases} \text{Entrant} : \bar{v} \text{ flèche sortant du vertex} \\ \text{Sortant} : v \text{ flèche vers le vertex} \end{cases}$
 - Photons $\begin{cases} \text{Entrant} : \epsilon_\mu \\ \text{Sortant} : \epsilon_\mu^* \end{cases}$
- 3- Vertex : Chaque vertex contribue un facteur $ig\gamma^\mu$ où $g = -q\sqrt{4\pi/\hbar c}$ où q est la charge de la particule (et non de l'anti-particule). Pour les leptons chargés $q = -e$ et donc $g = \sqrt{4\pi\alpha}$ mais pour les quarks u on a $q=2e/3$ et pour les quarks de type d on a $q=-e/3$
- 4- Propagateurs : chaque ligne interne contribue un facteur $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$ pour les fermions et $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$ pour les photons (avec les indices se contractant avec ceux des lignes fermioniques que le propagateur connecte).
- 5- Conservation de l'énergie et de l'impulsion : Pour chaque vertex on écrit une fonction delta de la forme $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$ où les k sont les énergies-impulsions entrantes dans le vertex (un signe moins pour les énergies-impulsions sortantes)
- 6- Intégrer sur les énergies-impulsions internes : pour chaque q_i écrire un facteur $\frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$
- 7- Simplifier la fonction δ : Le résultat inclura un facteur $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2, \dots, -p_n)$ correspondant à la conservation énergie-impulsion globale. Simplifier ce facteur et multiplier par i pour obtenir \mathcal{M}
- 8- Antisymétrisation : Inclure un signe moins entre deux diagrammes qui ne diffèrent que par l'échange de deux électrons (ou positons) entrants (ou sortants), ou par l'échange d'un électron entrant avec un positon sortant (ou vice-versa).

²différente de la flèche dénotant le courant fermionique.

³Cette flèche du temps permet de distinguer les lignes entrantes des lignes sortantes.

15.2 Règles de Feynman (à l'arbre)

15.2.1 lignes

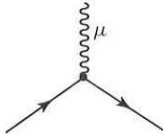
	ligne externe entrante	ligne externe sortante
scalaire (spin 0)	rien	rien
fermion (spin $\frac{1}{2}$)	u	\bar{u}
anti fermion (spin $\frac{1}{2}$)	\bar{v}	v
vecteur (spin 1)	ϵ_μ	ϵ_μ^*

	ligne interne (propagateur)
scalaire (spin 0)	$\frac{i}{q^2 - m^2}$
fermion (spin $\frac{1}{2}$)	$\frac{i (\not{q} + m)}{q^2 - m^2}$
vecteur sans masse (spin 1)	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
vecteur massif (spin 1)	$\frac{-ig_{\mu\nu} + i\frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}$

15.2.2 vertex

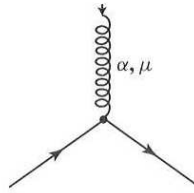
Les vertex sont tirés de D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley Ed., 2008 (annex D.3).

QED

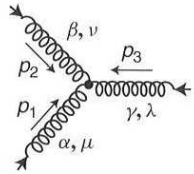


$i g_e \gamma^\mu \quad (g_e = \sqrt{4\pi\alpha})$

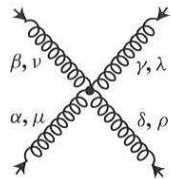
QCD



$$\frac{-ig_s}{2} \lambda^a \gamma^\mu$$



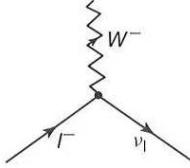
$$-g_s f^{abc} [g_{\mu\nu}(q_1 - q_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q_2 - q_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_3 - q_1)_\nu]$$



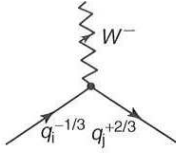
$$-ig_s^2 [f^{abc} f^{def} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{abd} f^{ecf} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{acd} f^{ebf} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho})]$$

Interaction faible

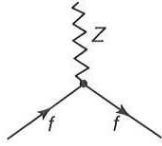
$$g_w = \frac{g_e}{\sin \theta_w}; \quad g_z = \frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}.$$



$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \quad (\text{Here } l \text{ is any lepton, and } \nu_l \text{ the corresponding neutrino.})$$

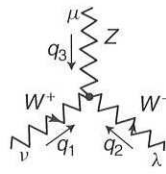


$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{ij} \quad (\text{Here } i = u, c, \text{ or } t, \text{ and } j = d, s, \text{ or } b; V \text{ is the CKM matrix.})$$

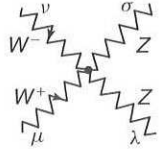


$$\frac{-ig_z}{2} \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \quad \text{Here } f \text{ is any quark or lepton; } c_V \text{ and } c_A \text{ are given in the following table:}$$

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$



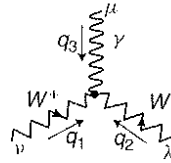
$$ig_w \cos \theta_w [g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



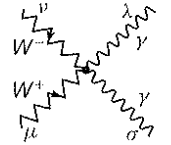
$$-ig_w^2 \cos^2 \theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$




$$ig_w^2 (2g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$



$$ig_e [g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$-ig_e^2 (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$



$$-ig_e g_w \cos \theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

16 Taux de désintégration du W

Le taux de désintégration d'un boson Z ou W vers une paire de fermion anti-fermion de masse négligeable est

$$\Gamma = \frac{1}{64\pi^2 M_W} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2,$$

- 1- A partir du couplage entre le W, le e et le $\bar{\nu}$: $-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ et en négligeant les masses des fermions, démontrer que

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{3} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2} \right) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu}],$$

(k_1 et k_2 sont les impulsions du e et $\bar{\nu}$ sortant). Pour ça

- vous utiliserez des identités de traces avec matrices γ comme :

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2] &= 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}] \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned}\tag{1}$$

- vous utiliserez que la somme sur les polarisations du W est $\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)*} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}$ ($q = k_1 + k_2$ étant l'impulsion du W).

2- Montrer que $|\mathcal{M}|_{tot}^2 = \frac{g^2}{3} M_W^2$

3- Démontrer que

$$\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}) = \frac{g^2}{48\pi} M_W.$$

(négliger les masses des fermions)

- 4- Plus généralement le vertex correspondant à la désintégration d'un boson vecteur X en deux fermions de spin $\frac{1}{2}$, f_1 et \bar{f}_2 est $-ig_X \frac{1}{2} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5)$. Montrer que $\Gamma(X \rightarrow f_1 \bar{f}_2) = \frac{g_X^2}{48\pi} (c_V^2 + c_A^2) M_X$.

Boson	g_X	" c_A ", " c_V "
W	$\frac{g}{\sqrt{2}}$	1
Z	$\frac{g}{\cos \theta_W}$	voir tableau ci-contre

fermion	c_A	c_V
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$
u, c, t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$
d, s, b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$

Couplage au Z :

- 5- calculer la valeur numérique du taux de désintégration du W vers une génération de leptons, en prenant $\alpha = e^2/4\pi = 1/128$, $m_W = 80,450$ GeV, et $g = e/\sin \theta_W$, avec $\sin^2 \theta_W = 0.232$. Que sera le taux de désintégration *total* du W , sachant qu'il y a trois générations de quarks et leptons ?
- 6- Calculez les largeurs partielles $\Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e)$ pour une masse du Z de 90 GeV. ($g_Z = e/(\sin \theta_W \cos \theta_W)$)
- 7- Calculez les largeurs partielles pour les désintégrations $Z \rightarrow e^+ e^-$, $\bar{u}u$, $\bar{d}d$. N'oubliez pas de tenir compte de la couleur. Prédire la largeur totale du Z dans le cadre du modèle standard.

17 Diffusion avec électrons, positons et photons

- 1- Donnez les diagrammes de Feynman et \mathcal{M} pour
- la diffusion électron-électron
 - la diffusion électron-positon
 - la diffusion compton.
- 2- On considère la diffusion électron-électron, calculer l'amplitude au carré de chacun des 2 graphes.
- 3- Dans les formules de Casimir, intervient $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, montrer que :
- $[\bar{u}_a \Gamma u_b] = [\bar{u}_b \bar{\Gamma} u_a]^*$
 - $\bar{\bar{\Gamma}} = \Gamma$
 - $\overline{\gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\nu} = \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\mu$
- 4- Calculer le terme d'interférence entre les 2 graphes.
- 5- Montrez que pour la diffusion électron-électron à haute énergie (m_e négligeable), on a
- $$|\overline{\mathcal{M}}^2| = 2g^4 \left| \frac{(p_1 \cdot p_2)^4 + (p_1 \cdot p_4)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4}{(p_1 \cdot p_3)^2 (p_1 \cdot p_4)^2} \right|$$