IX - Rayonnement d'une charge accélérée

D'après l'équivalence des repères galiléens, une charge en mouvement uniforme équivaut à une charge au repos. Elle crée des champs $\vec{E}, \vec{B}$ et le vecteur de Poynting n'est donc pas nul :

$$\begin{aligned}
\vec{E} = \vec{E}\,' &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} \qquad \text{coulombien au repos dans } (S') \\
\vec{B} &= -\,\frac{1}{c}\,\vec{E}\,' \wedge \vec{v} \\
\vec{E} \wedge \vec{B} = \vec{E}\,' \wedge (\vec{E}\,' \wedge \vec{v}) &= (\vec{E}\,'.\vec{v})\vec{E}\,' - (\vec{v}\,'^{\,2})
\end{aligned}$$

mais, bien entendu le flux total associé à ce vecteur de Poynting sera nul à un instant donné pour tout volume entourant la charge. On peut le vérifier numériquement avec une sphère.

1. Les 4 potentiels de Liénard Wiechert

On suppose qu'il n'y a pas de champ ambiant pour $t = -\infty$

$$\begin{aligned}
A^\mu(x,t) &= -\,\frac{1}{\epsilon_0}\int d^4x'\;\frac{\theta(x_0 - x'_0)}{2\pi}\;\delta\left((x-x')^2\right)\;j^\mu(x') \\
j^\mu(x) &= (\rho, \rho\vec{v}/c)
\end{aligned}$$

en effet, la fonction de Green $\frac{1}{R}\,\delta\,(\tau - R/c)$ correspond à

$$\frac{1}{2\pi}\int c dt\;\delta(c^2t^2 - R^2) = \frac{c}{4\pi c^2 t} = \frac{1}{4\pi R}$$

On rappelle les équations des potentiels en présence d'un courant $(\rho, \vec{j})$

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$9\,\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\vec{j}/c$$

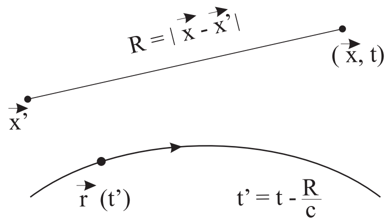
$$9\,U = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho$$

Pour une charge ponctuelle

$$\rho(x') = \; q \; \delta_3 \left(\vec{x}\,' - \vec{r}(t) \right)$$

$$\vec{j}(\vec{x}') = \; q \; \frac{\vec{v}}{c} \; \delta_3 \left(x' - \vec{r}(t) \right)$$

a) Calcul non covariant



On part de

$$A^{\mu}(\vec{x}, t) = \; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; j^{\mu} \left(x', t - \; \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right) \; d^3\vec{x}\,'$$

en substituant les valeurs de ρ et $\vec{j}$, on obtiendra

$$A^0(\vec{x}, t) = \; \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; \delta_3 \left(\vec{x}' - \vec{r} \left(t - \left| \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{c} \right| \right) \right)$$

L'intégrale avec fonction δ_3 peut se traiter par changement de variable

$$\int d^3x' \delta \left(x' - r_x \; \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) \; \delta \left(y' - r_y \; \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) \delta \left(z' - r_z \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) = \int d\xi d\eta d\zeta \; \frac{D(x', y', z')}{D(\xi, \eta, \zeta)} \; \delta(\xi) \; \delta(\eta) \; \delta(\zeta)$$

$$R = \; |\vec{x} - \vec{x}\,'| \qquad\qquad R \; \frac{\partial R}{\partial x'} = \; - \; (x - x') \;\; \text{etc ...}$$

où

$$\xi = \; x' - r_x \left(t - \frac{R}{c} \right) \qquad\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x'} = 1 - \; \left(\frac{\partial r_x}{\partial t} \right) \left(- \; \frac{\partial R}{c \partial x'} \right)$$

$$\eta = \; y' - r_y \left(t - \frac{R}{c} \right) \qquad\qquad \frac{\partial \xi}{\partial y'} = - \; \left(\frac{\partial r_x}{\partial t} \right) \left(- \; \frac{\partial R}{c \partial y'} \right)$$

$$\zeta = \; z' - r_z \left(t - \frac{R}{c} \right) \qquad\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = - \; \left(\frac{\partial r_x}{\partial t} \right) \; \left(- \; \frac{\partial R}{c \partial z'} \right)$$

en introduisant $\vec{\beta} = \vec{v}/c$

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \xi}{\partial x'} = 1 - \beta_x \, \dfrac{x - x'}{R} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y'} = \; -\beta_x \, \dfrac{y - y'}{R} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z'} = \; -\beta_x \, \dfrac{z - z'}{R} \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial x'} = \; - \beta_y \, \dfrac{x - x'}{R} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y'} = \; 1 - \beta_y \, \dfrac{y - y'}{R} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z'} = \; -\beta_y \, \dfrac{z - z'}{R} \\
\dfrac{\partial \zeta}{\partial x'} = \; - \beta_z \, \dfrac{x - x'}{R} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y'} = \; -\beta_z \, \dfrac{y - y'}{R} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z'} = \; 1 - \beta_z \, \dfrac{z - z'}{R}
\end{array}$$

Le Jacobien J peut se calculer en choisissant OZ selon $\vec{\beta}$ à cause de l'invariance par rotation.

$$J = \; \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \vec{\beta}.\vec{R}/R \end{pmatrix} \right| \qquad \vec{R} = \; \vec{x} - \vec{x}'$$

$$J = \; (1 - \vec{\beta}.\vec{n})$$

$$\int \; \frac{d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; \delta_3 \Big(\vec{x}' - \vec{r} \, \big(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \big) \Big) = \; \frac{1}{[(1 - \vec{\beta}.\vec{n}) R]_{ret}}$$

où $[\quad]_{ret}$ signifie calculé avec la valeur de R pour la particule à l'instant $t - R/c$.

$$\boxed{\begin{array}{c}
A^0 = \; \dfrac{q}{4 \pi \epsilon_0 \; [(1 - \vec{\beta}.\vec{n}) R]_{ret}} \\[2ex]
\vec{A} = \; \dfrac{q \qquad \vec{v}/c}{4 \pi \epsilon_0 \; [(1 - \vec{\beta}.\vec{n}) R]_{ret}} \\[2ex]
\text{Les quantités sont toutes calculées à } t' = t - R/c
\end{array}}$$

Les expressions sont les potentiels de Lienard Wiechert associés à une charge ponctuelle en mouvement.

b) Calcul covariant

$$A^\mu = \; \frac{q}{2 \pi \epsilon_0} \; \int \; d^4 x' d\tau \; \theta(x_0 - x'_0) \; \delta \Big((x - x')^2 \Big) \; U^\mu(\tau) \; \delta_4 \Big(x' - r(t) \Big)$$

τ : temps propre
U^μ : $U^\mu(\tau) = dx^\mu / d\tau$

On a défini à partir de

$$\rho = q\ \delta_3\left(\vec{x} - \vec{r}(t)\right)$$

$$\vec{j} = q\ \frac{\vec{v}}{c}\ \delta_3\big(\vec{x} - \vec{r}(t)\Big)$$

$$j^\mu(x) = q\ \int\ d\tau\ \frac{dx^\mu}{d\tau}\ \delta_4\Big(x - r(\tau)\Big)\ \text{ qui est une expression covariante}$$

Rappelons que $d\tau = dt\ \sqrt{1 - v^2/c^2}$. L'intégrant ne diffère de 0 que pour $\Big(x - r(\tau)\Big)^2 = 0$.

Une seule solution pour $r(\tau) < x^0$, que l'on notera τ_x

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ \int\ d\tau\ \theta\Big(x_0 - r_0(\tau)\Big)\ \delta\Big((x - r(\tau))^2\Big)\ U_\mu(\tau)$$

$$\delta\left[\Big(x - r_0(\tau)\Big)^2 - \Big(\vec{x} - \vec{r}(\tau)\Big)^2\right] = \frac{1}{\frac{d}{d\tau}\left[\Big(x_0 - r_0(\tau)\Big)^2 - \Big(\vec{x} - \vec{r}(\tau)\Big)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{-\ 2\left[\Big(x_0 - r_0(\tau)\Big)\frac{dx_0}{d\tau}\ - \Big(\vec{x} - \vec{r}(\tau)\Big).\ \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right]}$$

$$= \frac{1}{-\ 2\left[\Big(x - r(\tau)\Big).U(\tau)\right]}$$

$$A^\mu(x) = \ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ \ \frac{U^\mu(\tau)}{\big([x - r(\tau)]\big).U(\tau)}$$

Les composantes se simplifient

$$\Big(x - r(\tau)\Big).U(\tau) = \ \Big(x_0 - r_0(\tau)\Big)U_0 - (\vec{x} - \vec{r}).\vec{U}$$

$$U_0 = \frac{dx_0}{cdt}\ c\ \frac{dt}{d\tau} = \ \Gamma\ c$$

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{cdt}\ c\ \frac{dt}{d\tau} = \ \Gamma\ \vec{v}$$

$$U^2 = \Gamma^2\ c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \ c^2$$

$$(x-r).U = \Gamma\, c\, R(1-\vec{\beta}.\vec{n})$$

$$U^\mu = \Gamma\, \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$A^0 = \frac{q\ \Gamma\ \frac{dx_0}{dt}}{4\pi\epsilon_0\, \Gamma\, c\, R(1-\vec{\beta}.\vec{n})} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\big[(1-\vec{\beta}.\vec{n})R\big]_{ret}}$$

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{\Gamma\, \frac{d\vec{x}}{dt}}{\Gamma\, c\, R\,(1-\vec{\beta}.\vec{n})} = \frac{q(\vec{v}/c)_{ret}}{4\pi\epsilon_0\big[(1-\vec{\beta}.\vec{n})R\big]_{ret}}$$

2. Les champs électriques et magnétiques

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Calculs simples mais attention à l'effet des potentiels **retardés** : le temps t' dépend de manière indirecte de $\vec{x}$ et cette dépendance doit être prise en compte. Les expressions de Lienard Wiechert donnent A^0 et $\vec{A}$ en fonction de x, y, z et $t' = t - R/c$. Il faudra donc passer de t' à t.

$$R(t') = c(t-t') \qquad\qquad R = \left|\vec{x} - \vec{r}\ \left(t - \frac{R}{c}\right)\right|$$

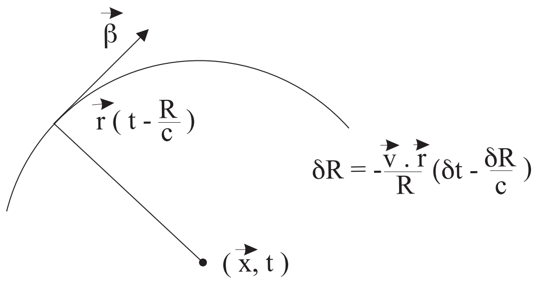
$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial t}$$

mais $\quad R^2 = \left(\vec{x} - \vec{r}(t-\frac{R}{c})\right)^2$

$$R\delta R = (\vec{x}-\vec{r})\ .\left[-\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\left(\delta t - \frac{\delta R}{c}\right)\right]$$
$$-\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\vec{v} \qquad \text{et} \qquad (\vec{x}-\vec{r}) = \vec{R}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}\left[R - \frac{\vec{R}.\vec{v}}{c}\right] = -\vec{R}.\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{-\vec{R}.\vec{v}}{R - \dfrac{\vec{R}.\vec{v}}{c}}}$$



On va établir les dérivées partielles nécessaires par une méthode de différentiation plus transparente :

a) $t \to t + \delta t$

$\vec{r}(t) \to \vec{r} + \vec{v}\delta t'$ $\qquad \delta t' \neq \delta t$

$R \to R - (\vec{v}.\vec{n})\delta t'$ $\qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} = -\vec{v}$

de telle manière que

$$t + \frac{R}{c} + \delta t = \ t + \delta t' + \ \frac{R-(\vec{v}.\vec{n})\delta t'}{c}$$

$\delta R = \ - \frac{\vec{v}.\vec{n}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\ \delta t$ $\qquad$ même résultat

b) $\vec{x} \to \vec{x} + \delta\vec{x}$ $\qquad$ (t inchangé)

$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{v}\ \delta t'$

$\vec{R} \to \vec{R} + \delta\vec{x} - \vec{v}\delta t' \Rightarrow \delta R = \vec{n}.(\delta\vec{x} - \vec{v}\delta t')$

$\delta t' + \frac{1}{c}\ \delta R = 0$

$$\delta t' + \frac{1}{c}\ \overbrace{\vec{n}.(\delta\vec{x} - \vec{v}\delta t')}^{\delta R/c} = \ 0$$

$$\delta t'\left(1 - \frac{\vec{v}.\vec{n}}{c}\right) = \ -\vec{n}.\ \frac{\delta\vec{x}}{c}$$

$$\boxed{\frac{\delta t'}{\delta\vec{x}} = \ \vec{\nabla}_x t' = \ \frac{-\vec{n}/c}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}}}$$

$$\delta R = \vec{n}.\left(\delta\vec{x} + \tfrac{\vec{v}}{c}\,\tfrac{\vec{n}.\delta\vec{x}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\right)$$

$$\delta R = (\vec{n}.\delta\vec{x})\left(1 + \tfrac{\vec{\beta}.\vec{n}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\right)$$

$$\delta R = \frac{\vec{n}.\delta\vec{x}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_x(R) = \frac{\vec{n}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}}$$

ceci nous permet de calculer les contributions à $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{1}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}$$

$$= -\frac{1}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\dot{\vec{v}}/c}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})R} - \frac{\vec{v}/c}{(R-\vec{\beta}.\vec{R})^2}\left(-\frac{\vec{R}.\vec{v}}{R}+\vec{\beta}^2c\right) + \frac{\vec{v}/c}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})^2R}\,\dot{\vec{\beta}}.\vec{n}\right\}$$

$$\frac{\partial A^0}{\partial\vec{x}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}_x\,\frac{1}{[R-\vec{\beta}.\vec{R}]_{ret}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-1}{(R-\vec{\beta}.\vec{R})^2}\left[\frac{\vec{n}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}} - \vec{\nabla}(\vec{\beta}.\vec{R})\right]$$

$\vec{\beta}$ est une fonction de $t-\frac{R}{c}$:

$$\Rightarrow\ \delta\vec{\beta} = \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt'}\right)\times(\vec{\nabla}t'.\delta\vec{x}) = -\,\dot{\vec{\beta}}\,\frac{\vec{n}/c.\delta\vec{x}}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})}$$

$$\delta(\vec{\beta}.\vec{R}) = \vec{\beta}\,\delta\vec{R} + \vec{R}.\delta\vec{\beta} = \vec{\beta}\,.\left[\delta\vec{x} - \vec{v}\,\frac{-\vec{n}.\delta\vec{x}/c}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\right] + \vec{R}.\delta\vec{\beta} =$$

$$\vec{\beta}\,.\left[\delta\vec{x} + \vec{\beta}\,\frac{\vec{n}.\delta\vec{x}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\right] + \vec{R}.\delta\vec{\beta}$$

$$\delta(\vec{\beta}.\vec{R}) = \vec{\beta}.\delta\vec{x} + \vec{\beta}^2\,\frac{\vec{n}.\delta\vec{x}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}} - \vec{R}.\dot{\vec{\beta}}\,\frac{\vec{n}/c.\delta\vec{x}}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\beta}.\vec{R}) = \vec{\beta} + \vec{n}\,\frac{\vec{\beta}^2}{1-\vec{\beta}.\vec{n}} - \frac{\vec{n}}{c}\,\frac{\vec{R}.\dot{\vec{\beta}}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}$$

On obtient en recombinant tout

$$\boxed{\begin{array}{cc} \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\left[\dfrac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}.\vec{n})^3R^2}\right]_{ret}}_{\substack{\text{présent pour } \dot{\vec{\beta}}=0 \\ \text{champ statique}}} + \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \underbrace{\left[\dfrac{\vec{n}\wedge\{(\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})^3\ R}\right]_{ret}}_{\substack{\text{exige } \dot{\vec{\beta}}\neq 0 \\ \text{champ d'accélération}}} & \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{c}\left[\vec{n}\right]_{ret}\wedge\vec{E}(\vec{r},t) \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \end{array}}$$

- Le premier terme est le transformé de Lorentz d'un champ purement coulombien pour une transformation de vitesse $c\beta$
- Le champ B s'obtient de la manière suivante :
  $\vec{A}$ est colinéaire à la vitesse $\vec{v}$; il résulte des formules du potentiel que $\vec{A} = \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)A^0$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,(\text{rot }\vec{A}) = \frac{1}{c}\,\vec{\nabla}\wedge\ (A^0\ \vec{v}) = \frac{1}{c}\ \left\{\vec{\nabla}A^0\wedge\vec{v} + A^0\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\text{ rot }\vec{A} = \frac{1}{c}\ \vec{\nabla}\wedge(A^0\vec{v}) = \frac{1}{c}\ \vec{\nabla}A^0\wedge\vec{\beta} + \frac{1}{c}\ A^0(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})$$

Attention : $\vec{\beta}(t-\frac{R}{c})$ dépend en effet de $\vec{x}$ à cause de l'effet de retard

On a vu $\quad \delta\vec{\beta} = -\dot{\vec{\beta}}\,\frac{\vec{n}/c.\delta\vec{x}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial x_i} = -\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\ \frac{n_i}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}\wedge\vec{\beta} = \frac{+1}{c(1-\vec{\beta}.\vec{n})}\ (\dot{\vec{\beta}}\wedge\vec{n})$$

en combinant

$$\begin{aligned} \vec{B} = &\ \frac{1}{c}\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{-1}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})^2R^2}\left[\frac{\vec{n}}{1-\vec{\beta}.\vec{n}} - \vec{\beta} - \frac{\vec{n}\beta^2}{1-\vec{\beta}.\vec{n}} + \frac{R\vec{n}}{c}\ \frac{\dot{\vec{\beta}}.\vec{n})}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}\right]\wedge\vec{\beta} \\ &+ \frac{1}{c}\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})R}\ \frac{1}{c(1-\vec{\beta}.\vec{n})}\ (\dot{\vec{\beta}}\wedge\vec{n})\wedge\vec{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = &\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\ \frac{1}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})^3}\ \frac{1}{R^2}\ \vec{n}\ \wedge\ \left[-\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)\right] \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\ \frac{1}{(1-\vec{\beta}.\vec{n})^3}\ \frac{1}{R}\left[(1-\vec{\beta}.\vec{n})\ \left((\vec{\beta}.\dot{\vec{\beta}})\vec{n} - (\vec{\beta}.\vec{n})\vec{\beta}\right) - R(\vec{\beta}.\vec{n})\vec{n}\wedge\vec{\beta}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,[\vec{n}]_{ret} \wedge \vec{E}(\vec{r},t)}$$

b) La relation avec Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\mu}\, i\, d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{\vec{R}^3} \quad \text{or} \quad \vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{cR}\,\vec{R} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{R^2}\right) \qquad \textbf{à l'approximation statique}$$

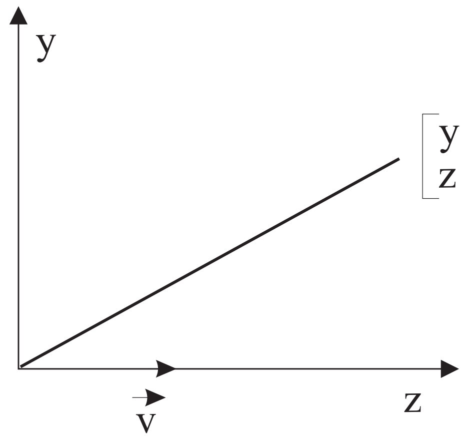
$$\vec{B} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\frac{1}{c}\,\vec{R} \wedge \vec{\beta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,(q\,\vec{v}) \wedge \frac{\vec{R}}{R^3}$$

avec l'équivalence $i\, d\vec{\ell} = q\vec{v}$ pour une charge et l'égalité $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}$ = approximation statique. On retrouve ainsi $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i\, d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3}$, la loi de Bio-Savart, à l'approximation statique.

3. Caractéristiques des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

a) Le champ statique est le transformé de Lorentz du champ coulombien. Cette contribution à $\vec{E}$ ne dépend que de $\vec{\beta}$. C'est la même que pour une charge en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{\beta}$. Une telle charge ne rayonne pas, et dans son système au repos $\widetilde{A}^0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \widetilde{r}}$, $\vec{A} = 0$.

b) Les potentiels de Lienard Wiechert (à t fixé) sont donc les transformés de Lorentz par la transformation $L(\vec{\beta})$ du potentiel coulombien où $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. On peut choisir z selon $\vec{\beta}$ dans le système (S') de la charge $U' = q/4\pi\epsilon_0 R'$, $A' = 0$ avec $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et dans le système (S) du laboratoire



$$U = \frac{U'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R'\sqrt{1-\beta^2}}$$

avec

$$y' = y,\ z' = z,\ x' = \Gamma(x - vt)$$

et

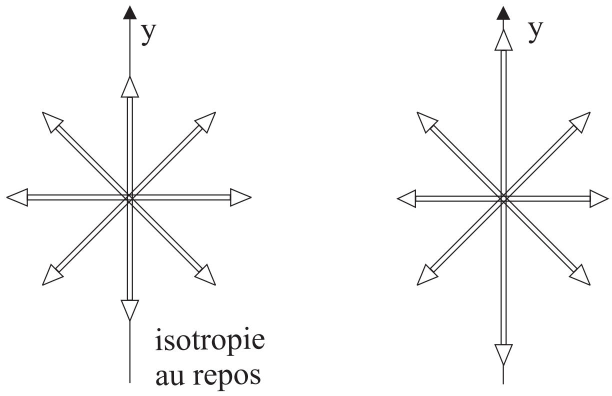
$$\Gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$R'^{\,2} = \Gamma^2 \left[(x-vt)^2 + (y^2+z^2)/\Gamma^2\right]$$

Il en résulte $U = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 \widetilde{R}}$ et $\vec{A} = \vec{\beta} U$

où $\widetilde{R} = \left[(x-vt)^2 + (y^2+z^2)/\Gamma^2\right]^{1/2}$ et $\widetilde{R}^2 = R^2(1-\beta^2 \sin^2\theta)$.
On peut vérifier que $\widetilde{R} = \frac{R}{\Gamma}(1-\vec{\beta}.\vec{n})|_{ret}$.

c) La forme des lignes de champs "statiques"



$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} U = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\Gamma\,\left(\frac{1}{R'}\right)^2\,\vec{\nabla} R'$$

$$\vec{E} = \frac{\Gamma q \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R'^3} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^2 \tilde{R}^3}$$

$$x = 0 \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\Gamma\,\frac{1}{y^2} \quad \text{augmenté de } \Gamma \text{ à } y^2 = R^2$$

$$y = 0 \quad E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\Gamma^2}\,\frac{1}{x^2} \quad \text{réduit de } \Gamma^2 \text{ à } x^2 = R^2$$

(ionisation milieux matériels)

Attention : $\vec{E} \neq -\vec{\nabla} A_0$. Le champ ne diffère de zéro que dans un voisinage étroit de $\pi/2$.

d) Le champ rayonné

Le champ "statique" (indépendant de $\dot{\vec{\beta}}$) décroît en $1/R^2$. On verra qu'il ne correspond pas à une énergie rayonnée.

Au contraire, le champ d'accélération correspond à une impulsion et une énergie rayonnées. Il décroît beaucoup plus lentement en $1/R$, et c'est ce qui autorise les ondes électromagnétiques pour les transmissions à grande distance.

$$\vec{E}_{accel} \propto \quad \vec{n}.\dot{\vec{\beta}}(\vec{n}-\vec{\beta}) - (1-\vec{\beta}.\vec{n})\dot{\vec{\beta}}$$

si $\vec{n} = \vec{\beta}$: observation selon la vitesse

$\vec{E}_{accel} = 0$! **Pas** de rayonnement à l'avant (pour $\vec{\beta} \sim 1$)

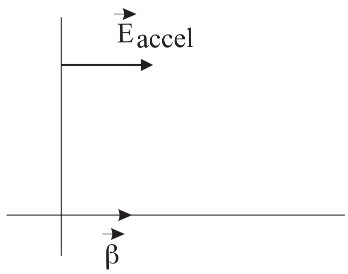
si

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}.\vec{\beta} = 0 \\ \\ \vec{n}.\dot{\vec{\beta}} = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{avec un mouvement linéaire (observation } \perp \text{ vitesse)}$$

$$\vec{E}_{accel} \propto -\dot{\vec{\beta}}$$

$\Rightarrow$ Le champ électrique est polarisé **linéairement** selon la direction d'accélération quand on l'observe dans une direction perpendiculaire au mouvement linéaire accéléré.

Exemple : à grande distance d'une antenne



4. L'énergie rayonnée

Le flux d'énergie va être donné par le vecteur de Poynting.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{c\mu_0}\,\vec{E}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{E})$$

mais $\vec{E}_{accel}\,.\,\vec{n} = 0$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0}\,(\vec{E}^2)\vec{n}}$$

On ne considèrera que le champ E_{accel} dominant aux grandes distances

$\Rightarrow$ en un point donné, la direction du vecteur de Poynting est donné par le vecteur unitaire de direction $\vec{R}_{ret} = \vec{R}(t - \frac{R(t')}{c})$.

Approximation : $\gamma = 1$; $\vec{\beta} << 1$

La puissance rayonnée par unité d'angle solide sera

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{c\mu_0}\, R^2\, |E_{accel}|^2 = \frac{1}{c\mu_0}\, R^2\, \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\right)^2 \frac{1}{R^2}\, |\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})|^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left(\frac{\dot{v}}{c}\right)^2 \sin^2\theta$$

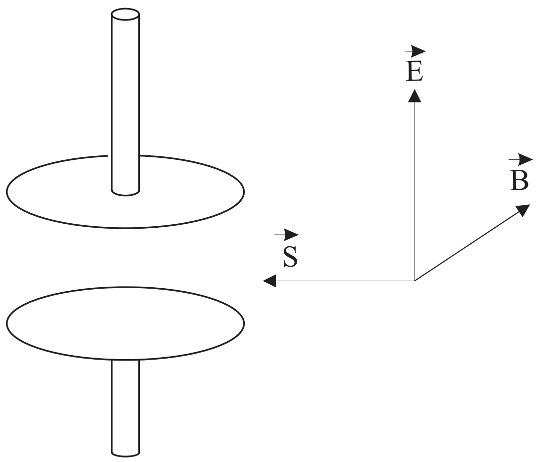
et en intégrant sur tous les angles solides

Formule de Larmor

$$P = \frac{2}{3}\, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\, |\dot{\vec{v}}|^2$$

5. Exemples

A/ Charge d'un condensateur



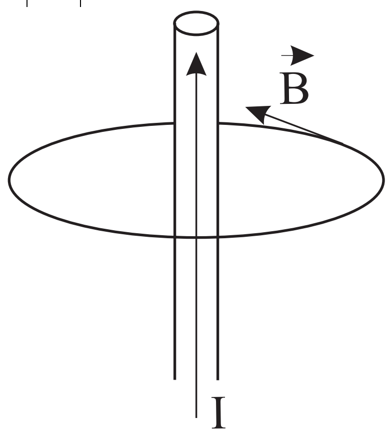
$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\, \vec{E}^2 V \text{ varie avec } \vec{E}$$

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 V \vec{E}.\frac{d\vec{E}}{dt}$$

$\Rightarrow$ Comment l'énergie pénètre-t-elle entre les armatures ? Quelle est la direction du vecteur de Poynting ?

L'énergie pénètre en réalité par les bords et non pas par les fils.

On observera que $\quad |\vec{B}| = \frac{R}{2c^2}\left|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|$ (Faraday)



Résistance et courant

$\Rightarrow$ Flux d'énergie sortant dissipé en chaleur

B/ L'autoaccélération

La formule de Larmor cache une difficulté. Il conviendrait en réalité de spécifier l'instant auquel la puissance est rayonnée, ainsi que le rayon d'intégration :

$$\boxed{P(R,t) = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\,\left[\dot{\vec{v}}^{\,2}\right]^{ret}_{t'=t-R/c}}$$

Cette difficulté devient transparente quand on considère l'impulsion rayonnée :

au vecteur **flux d'énergie** :	$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\wedge\vec{B}$	(Poynting)
est associé le vecteur		
Densité d'impulsion	$\vec{P}_f = \epsilon_0\vec{E}\wedge\vec{B}$	

L'expression précédente n'est justifiée en omettant la différence entre t et t' que si $\dot{v}$ est resté constant dans cet intervalle de temps : à un instant t donné, ceci suppose que l'accélération uniforme était communiquée à la charge depuis un temps $t' \simeq -\infty$, ce qui est absurde, la particule ayant alors une énergie infinie.

La même remarque vaut pour l'impulsion rayonnée

$$\vec{P} = \epsilon_0\left(\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2c^2}\right)\quad\int_0^R dR\int d\Omega\,\left((\vec{n}.\dot{\vec{\beta}})\vec{n}-\dot{\vec{\beta}}\right)^2$$

qui diverge **apparemment** à grand rayon, conformément à la remarque précédente.

Le rayonnement considéré modifie l'énergie et l'impulsion de la particule : il équivaut donc à une force de freinage associée à l'émission de rayonnement :

$$\vec{F}_{rad} = k \,\ddot{\vec{\beta}} \qquad\qquad k < 0$$

La conservation de l'énergie imposera

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} . \vec{v}\, dt = -\, \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \int |\dot{\vec{v}}|^2 dt$$

énergie fournie par les forces de freinage

$$\int \vec{F}_{rad} \, . \, \vec{v}\, dt = \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}}.\vec{v}\ dt + \frac{-2\ e^2}{3(4\pi\epsilon_0)c^3} \, (\dot{\vec{v}}.\vec{v})|_{t_1}^{t_2}$$

Pour un mouvement

- périodique $(t_2 - t_1)$
- ou tel que $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{rad} - \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \, \ddot{\vec{v}} \right) \, . \, \vec{v}\ dt = 0$$

ce qui suggère l'identification

$$< \vec{F}_{rad} > = \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \, \ddot{\vec{v}}$$

L'équation

$$m\ddot{x} = \vec{F}_{ext} \qquad \text{devient alors}$$

$$m(\ddot{x} - \tau \dddot{x}) = \vec{F}_{ext} \qquad\qquad \tau = \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^3}$$

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{ext} \qquad\qquad \text{(Equation mécanique } \textbf{non standard}\text{)}$$

Cette équation est **absurde !** Elle a une solution "divergente" même quand $\vec{F}_{ext} = 0$:

$$\begin{cases} \text{outre} \quad \dot{\vec{v}} = 0 \\ \\ \text{il y a} \quad \dot{\vec{v}} = \vec{a}\ e^{t/\tau} \qquad \text{même pour } \vec{F}_{ext} = 0\ ! \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre (les précédentes) et d'une solution **particulière** de l'équation avec second membre. Cette dernière est facilement trouvée par variation des constantes :

$$\dot{v} = e^{t/\tau}\ u(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = -\frac{F}{m\tau}\ e^{-t/\tau}$$

La constante d'intégration

$$u = \frac{e^t/\tau}{\tau} \int_t^c\ e^{-t'/\tau}\ F(t')dt'$$

sera choisie de manière à retrouver $\vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$ à la limite $e^2 \to 0$ ($\tau \to 0$).

Il faut alors choisir $c = \infty$. On considère que cette solution **particulière** a des propriétés physiques raisonnables :

$$\boxed{m\ \dot{\vec{v}}(t) = \int_0^\infty\ e^{-s}\vec{F}(t + \tau s)ds}$$

6. Radiations synchrotron

La radiation synchrotron est le rayonnement émis par les particules accélérées dans un champ magnétique :

- pulsars (étoiles neutron)
  $\vec{B} \sim 10^{13}G$
  c'est le signal électromagnétique émis par les électrons accélérés dans ce champ qui a permis la détection des pulsars. (On ne comprend pas les détails du mécanisme d'émission).

- trous noirs et jets stellaires (quasars) analogues au cas précédent, à plus grande échelle.

- Accélérateurs circulaires :
  - le rayonnement synchrotron peut être un phénomène parasite (l'énergie rayonnée doit être compensée !) qui limite l'énergie maximale des accélérateurs.
  - inversement on peut s'en servir pour analyser les solides ou milieux condensés aux courtes longeurs d'onde.

a) Formule relativiste

$$P = \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\ |\dot{\vec{v}}|^2$$

On va chercher le scalaire de Lorentz se ramenant à cette expression à la limite non relativiste. On tire partie du fait que $(\Delta E, \Delta\vec{P})$ est un 4-vecteur. On montre que :

$P = \dfrac{dE}{dt}$ est un scalaire de Lorentz et on va chercher le scalaire de Lorentz quadratique en $d\vec{p}/d\tau$ se ramenant à la bonne limite non relativiste

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m^2c^3}\,\left(\frac{dp^\mu}{d\tau}\,\frac{dp_\mu}{d\tau}\right)$$

$$\boxed{P = -\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m^2c^3}\,\left(\frac{dp^\mu}{d\tau}\,\frac{dp_\mu}{d\tau}\right) \times \frac{1}{4\pi\epsilon_o}}$$

$$d\tau = dt/\gamma = \text{temps propre avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

On peut montrer que cette extension relativiste est **unique**. (On peut la retrouver par un traitement exact de E_{accel}).

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau}\,\frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dE}{cd\tau}\right)^2 \qquad \text{mais} \qquad \frac{\vec{v}}{c} = \frac{c\vec{p}}{E} = \vec{\beta}$$

$$= \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \beta^2\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \qquad\qquad E\,\frac{dE}{d\tau} = \frac{2}{cp}\,\frac{dp}{d\tau}$$

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^3}\,v\,\frac{dv}{dt}$$

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\,\gamma^6\,\left[(\dot{\vec{\beta}})^2 - (\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}})^2\right]$$

Mais dans un accélérateur circulaire

$$\left|\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right| = \omega|\vec{p}| \text{ d'autre part } \frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \text{ : perte d'énergie par tour}$$

La variation de $\vec{p}$ liée à la rotation est >> variation d'énergie.

En effet

$$\frac{d|\vec{p}|/dt}{|d\vec{p}/dt|} = \left(\frac{\Delta p}{p}\right)\,\frac{1}{\omega\Delta t} = \frac{\Delta p}{p}\,\frac{1}{2\pi}$$

Pour une rotation à vitesse constante où $\Delta p/p$ est la perte relative d'énergie par tour, qui est très faible

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\Delta p}{p}\ \ << \ 1$$

$$|\vec{p}| = \gamma m \beta c$$

$$P = \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\ \gamma^2\omega^2|\vec{p}|^2$$

$$P = \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\ \gamma^4\omega^2\beta^2 c^2 m^2$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c}\ \beta^2\omega^2\gamma^4}$$

L'expression exacte tridimensionnelle correspondante est

$$P = \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\ \gamma^6\ \left[(\dot{\vec{\beta}})^2 - (\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}})^2\right]$$

mais $\omega = c\beta/\rho$ $\qquad\qquad$ $\rho =$ rayon

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\ \frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 \rho^2}\ \beta^2\gamma^4}$$

Pour des particules ultrarelativistes

$\beta \sim 1$. Lorsque ρ est fixé (cas d'un accélérateur) la puissance rayonnée est proportionnelle à γ^4 c'est-à-dire à la puissance quatrième de l'énergie.

$\rightarrow$ radiation intense

A LEP $E = 45$ GeV ($\nearrow$ 100 GeV) accélérateur **d'électrons**

$R \sim 4$ km

δE (MeV) ~ 100 MeV/tour

Formule générale

$$\delta E(\text{MeV}) \sim 8.85\ 10^{-2}\ \frac{E^4\ \text{GeV}}{\rho\text{m}}$$

à énergie donnée

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \Rightarrow \text{ les électrons rayonnent beaucoup plus}$$

– au SSC (20 TeV) la radiation des **protons** aurait été une source importante de réchauffement des aimants et de désorption dans les parois du tube
– à plus basse énergie : ESRF (Grenoble) source de faisceaux X durs ($\to$ keV).

b) Notion de fréquence critique

Une charge en mouvement ultrarelativiste va émettre un rayonnement. On aura deux expressions très différentes pour $\dot{\vec{\beta}}$ parallèles ou perpendiculaires à $\vec{\beta}$.

• Accélérateur linéaire ou $\dot{\vec{\beta}}$ parallèle à $\vec{\beta}$

$$-\frac{dp^\mu}{dt}\,\frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = (1-\beta^2)\,\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}\,\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$

$$P = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m^2c^3}\,\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$

L'application numérique montre que ces pertes sont très faibles.

• Accélérateur circulaire

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau}\,\frac{dp_\mu}{d\tau} \simeq \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow P = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m^2c^3}\,\gamma^2\,\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2$$

Pour une accélération de **module** donné, l'accélérateur transverse donne une radiation γ^2 fois plus grande.

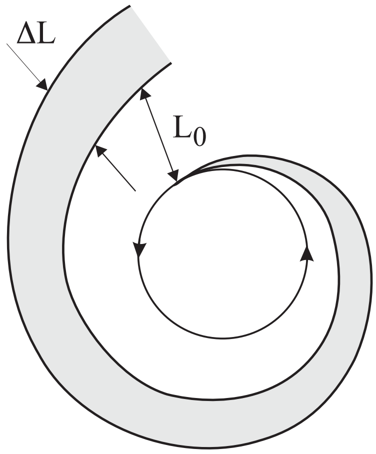
• On négligera l'accélération longitudinale

– le rayon de courbure sera $\rho = \frac{v^2}{\dot{v}_\perp} \sim \frac{c^2}{\dot{v}_\perp}$

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\,\vec{r} = \vec{a} \qquad |\vec{v}| = r\omega\right)$$

– la distribution angulaire est concentrée dans un cône étroit

$$(\theta^2)^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E}$$



- impulsion de durée ΔL
- intervalles d'émission $T_0 = L_0/c$

L'observateur verra une impulsion, brève ouverture angulaire $\frac{1}{\omega} \to$ la distance parcourue par la particule pendant l'impulsion est $\frac{\rho}{\gamma}$.

$\Delta t = \frac{\rho}{\gamma v}$ pour le temps d'illumination.

Pendant Δt, le front de radiation parcourt $D = \frac{\rho}{\gamma\beta}$. Pendant le temps Δt, la particule s'est déplacée de $d = \frac{\rho}{\gamma}$: le front **arrière** sera à la distance $\Delta L = D - d = \left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\rho}{\gamma^3}$.

La longueur spatiale est ΔL.

L'intervalle temporel $\frac{1}{c}\Delta L \Rightarrow$. L'analyse de Fourier comportera des fréquences jusqu'à

$$\boxed{\omega_c = \frac{c}{\Delta L} = \left(\frac{c}{\rho}\right) \gamma^3}$$

Pour un mouvement circulaire $\frac{c}{\rho} = \omega_0$.

Application :

$$10 \text{ GeV}, \ \ \omega_0 = 310^6/s$$

$$\omega_c \sim 2,4 \ 10^{19}/s \Rightarrow \text{rayons X 16 keV.}$$