VIII - Mouvement des charges

1. Les équations fondamentales

On considère une particule placée dans un champ électromagnétique déterminé :

a) Particule libre :

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt$$

On vérifie en utilisant le temps moyen que S est un invariant de Lorentz : $dt = \gamma d\tau$

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma\mathcal{L}\, d\tau \;=\; \int_{\tau_1}^{\tau_2} -mc^2\; d\tau$$

Le mouvement d'une particule libre :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\;(\gamma m\vec{v}) = 0$$

b) Interaction :

$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}$ (champ) mais on négligera $\mathcal{L}$ champ, c'est-à-dire le rayonnement des particules, et son action rétroactive sur leur mouvement.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= -qU + \frac{q}{c}\vec{v}\,.\,\vec{A} = -\frac{q}{c}\,\frac{dx_\mu}{dt}\,A^\mu \\
A^\mu &= (U,\vec{A}) \qquad x^\mu = (ct,\vec{r}) \\
u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\;\left(\frac{dt}{d\tau}\right) \\
S_{int} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{int}\; dt = -q\int_{\tau_1}^{\tau_2}\; A^\mu\, u_\mu\, d\tau = -q\int A^\mu\, dx_\mu
\end{aligned}$$

On retiendra donc les deux formes équivalentes :

$$\begin{aligned}
S_{int} &= \int \mathcal{L}_{int}\, dt \qquad \mathcal{L}_{int} = -q\left(U - \frac{1}{c}\vec{v}\,.\,\vec{A}\right) \\
&= \int \mathcal{L} d\tau \qquad \mathcal{L} = -q\, A^\mu\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) \qquad A^\mu = \left(U,\,\vec{A}\right)
\end{aligned}$$

- Moment conjugué : $P_i = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^i} = \gamma m v_i + qA_i$

  Plus généralement $\qquad P^\mu = mu^\mu + qA^\mu$

• Equation du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\gamma m v_i + \frac{q}{c} A_i\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -q \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{q}{c}\, \frac{\partial\,(\vec{v}\,.\,\vec{A})}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{v}\,.\,\vec{A}) = (\vec{v}\,.\,\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\,.\,\vec{\nabla}(\vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$\text{mais} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla}(\vec{v}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{A}) &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\right) \vec{A} \\ \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) &= -q \left(\vec{\nabla} U + \frac{1}{c}\, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + q\, \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

En notation relativiste :

$$m\, \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}\, F^{\mu\nu}\, u_\nu \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

(Attention aux signes $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$; $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\, \partial_\nu$)

2. Mouvements simples

a) Particule dans un champ magnétique fixe

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\, \frac{\vec{p}}{\gamma m} \wedge \vec{B}$$

se compare à :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad \text{vecteur de rotation } \vec{\omega} \text{ fixe}$$

$\vec{p}$ tourne autour du champ magnétique à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = -\dfrac{q\vec{B}}{\gamma m} = -\dfrac{q\vec{B}c^2}{E}$

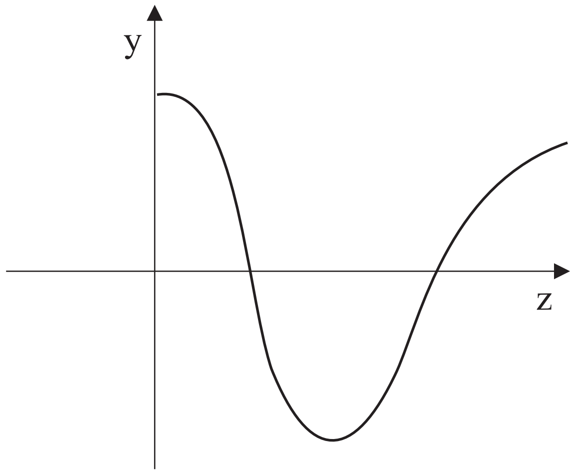
- $\vec{p} \cdot \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}| = C^{te}$
- $\vec{B} \cdot \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{p}_\parallel| = C^{te}$

$\Rightarrow\ |\vec{p}_\perp| = \sqrt{p^2 - p_\parallel^2} = C^{te} \ \Rightarrow\ v_\perp = \dfrac{p_\perp}{\gamma m} = R\omega = C^{te}$

$|p_\perp| = p_\perp = \gamma m v_\perp = qBR$

b) Dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ constant, $\vec{E} // \vec{B}$

voir Landau-Lifshitz (théorie du champ)



$$\frac{dp_z}{dt} = qE_z \;\Rightarrow\; p_z = qEt$$
$$d\vec{p}_t = q\vec{v}_t \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow\; |\vec{p}_t| = C^{te}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + (p_t^2 + p_z^2 + q^2E^2t^2)c^2}$$
$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + q^2E^2t^2c^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \frac{c^2 p_z}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 qEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + q^2E^2t^2c^2}} \qquad p_x + ip_y = p_t\, e^{i\psi}$$
$$z = \frac{1}{qE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2q^2E^2t^2} = \frac{\mathcal{E}(t)}{qE} \qquad x = \frac{cp_t}{qB}\ \sin\psi \qquad y = \frac{cp_t}{qB}\ \cos\psi$$

$$i\frac{d\psi}{dt}p_t\, e^{i\psi} = iqBv = iqBc^2p_te^{i\psi}/\mathcal{E}$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}} = \frac{qBc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + q^2E^2c^2t^2}}$$
$$\psi = \frac{Bc}{E} Arg\ sh \left(\frac{qEct}{\mathcal{E}_0}\right)$$

c) Champ magnétique variant lentement

i/ Méthode directe ($\vec{B}$ variable dans le temps)

On considère un mouvement plan avec $\vec{B} \perp \vec{p}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{A} = \frac{c}{2}(\vec{B} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{p}.\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{2}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \wedge \vec{r}\right) \bullet \vec{p}$$

$$\text{mais} \qquad \vec{p} = \gamma m\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{\gamma m}$$

$$\text{en utilisant} \qquad p = qBr$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{dp^2}{dt} = +\frac{q}{2}\,\frac{\partial B}{\partial t}\,r \times qBr = q^2\,r^2\,\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

$$\text{mais} \qquad r^2 = \frac{p^2}{q^2B^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{p^2}\,\frac{dp^2}{dt} = \frac{1}{B}\,\frac{\partial B}{\partial t}$$

Soit Φ le flux magnétique à travers la trajectoire circulaire $\Phi = \pi B r^2 = \pi\frac{p^2}{qB}$.

$$\Phi = \pi\,\frac{p^2}{qB}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Le flux est conservé :

- Lorsque l'induction magnétique augmente, le rayon de la trajectoire projetée diminue.
- $\omega = \frac{qB}{E}$ et $|\vec{p}_\perp| = qBr = \frac{C_1}{r} = \frac{C_2}{\sqrt{B}}$
- $|\vec{p}_\perp|$ varie comme $\frac{1}{\sqrt{B}}$ et n'est pas constant.

ii/ Invariants adiabatiques

On démontre en mécanique que si les paramètres extérieurs d'un mouvement varient lentement, les invariants “adiabatiques” sont conservés pour les coordonnées cycliques (périodiques).

Ces invariants sont les intégrales :

$$\boxed{J_i = \oint p_i\,dq_i}$$

p_i est le moment conjugé de la variable q_i du lagrangien $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$

Application : $J = \displaystyle\int \vec{p}_t \,.\, \overrightarrow{d\ell}$ doit être conservé lorsque $\vec{B}$ varie lentement.

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_\perp = &\text{ composante de } \vec{p} \perp \vec{B} \\
J = &\int \phi\gamma m\omega r^2 d\phi + \frac{q}{c} \oint \vec{A} \,.\, \overrightarrow{d\ell} \qquad\qquad \omega = -\frac{qB}{\gamma m} \\
= &\ 2\pi\gamma m\omega r^2 + q \int_S \vec{B} \,.\, \vec{n}\, d\sigma \\
= &\ 2\pi\gamma m\omega r^2 \qquad - \gamma m\omega\pi r^2 = \pi\gamma m\omega r^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{J = \pi\gamma m\omega r^2 \ = \ -q\, B\, \pi\, r^2 \ = \ C^{te}}$$

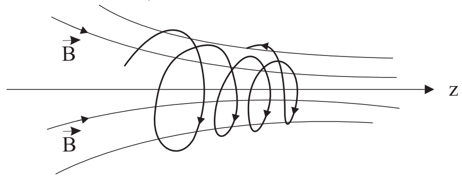
Exercice : trouver l'approximation faite !

On a clarifié l'approximation de "variation lente" : suffisamment lente pour laisser inchangée la relation entre le rayon de courbure r et $p_\perp$.

On voit que dans un champ magnétique variant dans l'espace ou le temps, l'impulsion transverse n'est PAS conservée :

- ce sera le principe du Betatron.

d) "Bouteille magnétique" (confinement des plasmas)



Configuration de champ axial

le flux encerclé est constant.

$$\vec{p}_\parallel^{\,2} + \vec{p}_\perp^{\,2} = \vec{p}_0^{\,2} \qquad\qquad \text{(champ magnétique pur)}$$

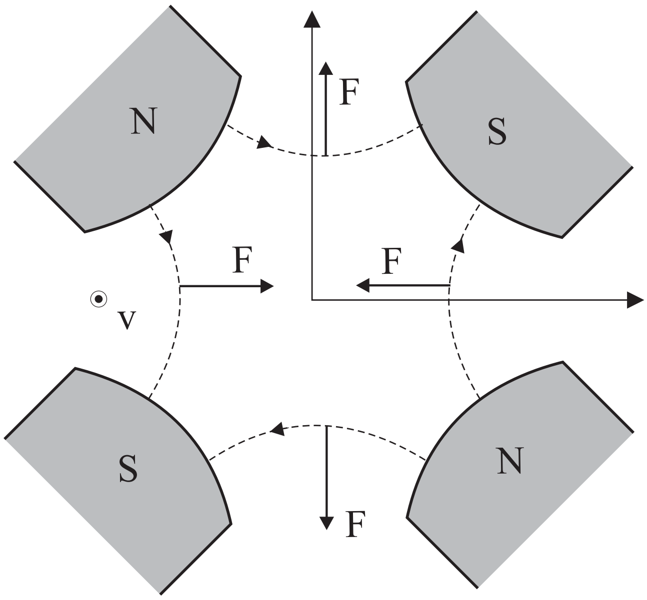
$$\frac{p_\perp^2}{B(z)} = \frac{p_\perp^{0^2}}{B(0)} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_\parallel^{\,2} = p_0^2 - \frac{B(z)}{B(0)}\,(p_\perp^0)^2$$

cette relation équivaut au mouvement dans un potentiel mécanique.

$$U = m\,\frac{(p_\perp^0)^2}{B(0)}\,B(z)$$

Si $B(z)$ est assez grand : $\vec{p}_\parallel^{\,2}$ s'annule pour la valeur de z solution de $B(z) = B(0)\,\dfrac{p^{0^2}}{p_\perp^{0^2}}$ il y a confinement, seule une particule ayant composante $p_\parallel^0$ très grande s'échappera du volume de confinement.

e) Lentille quadrupolaire



Forces pour une particule positive dont la vitesse est indiquée par $\odot$

- Focalisation horizontale
- Défocalisation verticale

- Les pièces polaires : hyperboles équilatères.
- Fer non saturé $\Rightarrow$ lignes de forces hyperboliques.
- Potentiel vecteur $\quad A_z = \frac{c}{2}\alpha(y^2 - x^2)$
  $A_x = A_y = 0$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial y} = \alpha y \\ B_y &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x} = \alpha x \end{aligned}\right\} \text{ avec des composantes normales continues}$$

$$dz/dt = v$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma m\ddot{x} &= -qv\alpha x \\ \gamma m\ddot{y} &= qv\alpha y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x'' + k^2 x &= 0 \\ y'' - k^2 y &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{dérivées par rapport à } z$$

$$k^2 = q\alpha/\gamma mv \ k > 0 \qquad \gamma mv = qB\rho$$

$$k^2 = \frac{\alpha}{B\rho} \qquad \rho \ : \ \text{rayon de courbure}$$

On observe l'effet de la focalisation en x (oscillation sinusoïdale) et de la divergence exponentielle en y. On définit $k^2 = \alpha/B\rho$, $c\beta dt = ds$ avec $\beta = \frac{v}{c}$, et on note s la coordonnée longitudinale le long de la trajectoire :

$$x = x_0 \, \cos ks + \frac{1}{k}\, x'_0 \, \sin ks \qquad\qquad x' \text{ dérivée}$$
$$x' = -k\, x_0 \, \sin ks + x'_0 \, \cos ks \qquad\qquad \text{par rapport à } \mathbf{s}$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_F \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\ell & \frac{1}{k}\sin k\ell \\ -k\sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

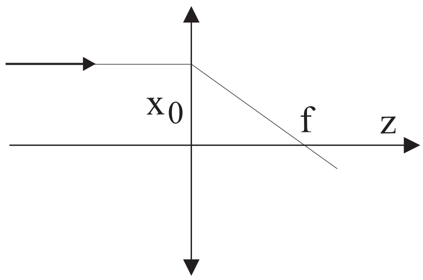
où ℓ est longueur du quadrupôle, $(x,\, x')$ décrit la position d'une particule dans l'espace des phases (plus précisément $(x,\, y\,,\, x',\, y')$).

Pour la coordonnée y

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = M_D \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } k\ell & \frac{1}{k}\text{sh } k\ell \\ k\text{sh } k\ell & \text{ch } k\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

$$ch\,\phi = \frac{1}{2}\,(e^{\phi} + e^{-\phi}) \qquad sh\,\phi = \frac{1}{2}\,(e^{\phi} - e^{-\phi})$$

pour de petites longueurs, M_F et M_D sont assimilables à des lentilles minces $(k\ell) \to 0$, $\ell \to 0$, $k^2\ell \neq 0$



$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \\ \frac{-x_0}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ -k^2\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -k^2\ell = -\frac{1}{f}$$

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour une lentille mince}$$

On observe la conservation des surfaces d'espace de phase :

$$\det(M) = ch^2(k\rho) - sh^2(k\rho) = 1$$

3. Le Théorème de Liouville

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad\qquad q(t) = q(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p(t)} dt$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad\qquad p(t) = p(0) - \int_0^t \frac{\partial H}{\partial q} dt$$

On considère le changement de variable :

$$p(0),\ q(0) \longrightarrow p(t),\ q(t) \quad \text{pour une distribution dans l'espace de phase :}$$

$$\int dp_0\, dq_0 = \int \frac{D\big(p_0,\ q_0)}{D(p(t),\ q(t)\big)}\ dp(t)\, dq(t) = \int J\, dp(t)\, dq(t)$$

Théorème :

$$J^{-1} = \frac{D\big(p(t),\ q(t)\big)}{D\big(p(0),\ q(0)\big)} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial p(t)}{\partial p_0} & \dfrac{\partial p(t)}{\partial q_0} \\ & \\ \dfrac{\partial q(t)}{\partial q_0} & \dfrac{\partial q(t)}{\partial q_0} \end{matrix}\right|_{t=0} = 1$$

en effet : pour $p\,(p_0,\ q_0,\ t)$ et $q\,(p_0,\ q_0,\ t)$

$$\left.\frac{\partial p(t)}{\partial q_0}\right|_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial q(t)}{\partial p_0}\right|_0 = 0\ , \quad \text{d'autre part :}$$

$$\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{\partial p(t)}{\partial q_0}\right)\right|_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} \qquad \left(\frac{\partial p(t)}{\partial p_0}\right) = -\int^t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} + 1$$

$$\frac{d}{dt}\left.\left(\frac{\partial q}{\partial p_0}\right)\right|_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial q_0}\right) = +\int^t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} + 1$$

$$\frac{d(J^{-1})}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad J = C^{te} = 1$$

Plus généralement, on considère le mouvement du fluide dont les particules ont les coordonnées $(p_i,\ q_i)$ dans l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \partial H / \partial p_i = V_i \\ \dot{p}_i &= -\partial H / \partial q_i = F_i \end{aligned}$$

Soit $\vec{V}$ le vecteur $(V_i,\ F_i)$

$$\vec{\nabla}\ .\ \vec{V} = \sum_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_i} + \frac{\partial F_i}{\partial p_i}\right) = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

Le volume d'espace de phase se conserve dans le mouvement. La conservation du volume équivaut en effet à $\vec{\nabla} \, . \, \vec{V} = 0$.

Démonstration : Soit $v(t)$ le volume occupé à l'instant t et $\mathcal{D}(0)$ le domaine considéré à l'instant $t = 0$ (de volume $v(0)$)

$$v(t) = \int_{\mathcal{D}(0)} \left[\frac{\mathcal{D}\big(p_i(t),\ q_i(t)\big)}{\mathcal{D}\big(p_i(0),\ q_i(0)\big)} \right] \Pi dp_i(0) dq_i(0)$$

mais,

$$\left. \begin{aligned} q_i(t) &= q_i(0) + \dot{q}_i\ t \\ p_i(t) &= p_i(0) + \dot{p}_i\ t \end{aligned} \right\} \qquad \begin{aligned} x &= (q_i,\ p_i) \\ x(t) &= x(0) + \dot{x}t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} = \delta_{ij} + t \left. \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right|_0 \qquad\qquad (t \ \to \ 0)$$

$$\det |\mathbf{1} + At| = 1 + tTr(A)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \left[\delta_{ij} + t \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right] &= 1 + t \sum \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} \\ &= 1 + t \vec{\nabla} \, . \, v \end{aligned}$$

CQFD

Une conséquence importante du théorème de Liouville est qu'au cours du mouvement un système passe (en général) au voisinage de tous les points de l'espace de phase.