VII - De l'électromagnétisme aux rayons

1. De l'onde aux trajectoires

(voir par exemple M. Born et E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press (1965)
V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer (1989).)

A/ L'iconale (icône= image)

On a vu que les champs électriques et magnétiques obéissent à une équation de propagation dans un milieu d'indice n variable

$$\left(\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta\right)\ \begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} \tag{1}$$

en considérant l'une des composantes notées $\tilde{f}$

$$\left(\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\ \tilde{f} = 0 \tag{2}$$

On recherchera les solutions monochromatiques $\tilde{f} = e^{-i\omega t}\ f$. La fonction spatiale $f(\vec{r})$ vérifie

$$\left(\frac{\omega^2\ n^2}{c^2} + \Delta\right)\ f = 0 \tag{3}$$

On sait que si $n = c^{te}$, la solution est une onde plane du type $e^{+i\vec{k}.\vec{x}}$ avec $|\vec{k}| = \frac{n\ \omega}{c}$. Pour un indice lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde, ce qui est le cas usuel, on recherchera la solution de l'équation précédente sous la forme $f = a\ e^{ik_o\psi}$. Le gradient de f est de la forme $\vec{\nabla} f = (\vec{\nabla} a)\ e^{ik_o\psi} + ik_o(\vec{\nabla} S)\ ae^{ik_o\psi}$ et le laplacien $\Delta = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} f)$

$$\begin{aligned}\Delta = (\Delta a)e^{ik_o\psi} &+ 2ik_o\ (\vec{\nabla}\psi).(\vec{\nabla} a)\ e^{ik_o\psi}\\ &- k_o^2\ (\vec{\nabla} S)^2\ a\ e^{ik_o\psi} + ik_o\Delta S a\ e^{ik_o\psi}\end{aligned}$$

L'équation (3) se met sous la forme

$$\omega^2\ \frac{n^2}{c^2} - k_o^2\ (\vec{\nabla}\psi)^2 + \left[\underbrace{\frac{\Delta a}{a} + ik_o\Delta\psi + 2ik_o\left(\frac{\vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla} a}{a}\right)}\right] = 0 \tag{4}$$

$$k_o = \omega n/c$$

En divisant l'équation (4) par $\frac{\omega}{c}$

$$n^2 - (\vec{\nabla}\psi)^2 + \left[(\lambda)^2 \ \frac{\Delta a}{a} + 2i\lambda\vec{\nabla}\psi.\frac{\vec{\nabla}a}{a} \right.$$
$$\left. + i\lambda\Delta\psi\right] = 0$$

L'expression entre crochets est négligeable lorsque $\lambda \to 0$ si a et ψ varient lentement à l'échelle de la longueur d'onde. La fonction ψ vérifie alors l'équation de l'iconale

$$\boxed{(\vec{\nabla}\psi)^2 = n^2} \tag{5}$$

les surfaces $\psi = c^{te}$ sont les **surfaces d'onde**.

B/ De l'iconale aux rayons : le vecteur de Poynting

On va revenir aux équations de Maxwell dans une région où la solution est proche d'une onde plane au sens précédent

$$\vec{E} = \vec{e}(\vec{r}) \ e^{ik_o\psi(\vec{r})}$$
$$\vec{B} = \vec{b}(\vec{r}) \ e^{ik_o\psi(\vec{r})}$$

Ces paramétrisations étendent au cas vectoriel l'approximation scalaire du paragraphe précédent. Dans le milieu diélectrique quasi-homogène où on néglige le gradient de k_o

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}.\vec{e}(\vec{r}) + ik_o \ \vec{e}.\vec{\nabla}(\psi) = 0$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}.\vec{b}(\vec{r}) + ik_o\vec{b}.\vec{\nabla}(\psi) = 0$$

et lorsque $\lambda \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \ \vec{\nabla}.\vec{e} << 1 \\ \lambda \ \vec{\nabla}.\vec{b} << 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{e}.\vec{\nabla}\psi = 0 \\ \vec{b}.\vec{\nabla}\psi = 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{le vecteur de Poynting } \vec{E} \wedge \vec{B} \text{ est dirigé selon } \vec{\nabla} \ \psi}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_o} \ \vec{E} \wedge \vec{B} \ \Longrightarrow < \vec{s} >= \frac{1}{2\mu_o} \ Re \ (\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

$$< \vec{s} >= \frac{1}{2\mu_o} \ (\vec{e} \wedge \vec{b}^*)$$

Mais dans le diélectrique d'indice n

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \ i\omega\vec{E} = \frac{1}{\epsilon\mu} \ (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \ i\omega\vec{B} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{e}(r) f) = f \ \vec{\nabla}_{\wedge} \vec{e}(r) + \vec{\nabla} f \wedge \vec{e}(r)$$
$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{e}(r) \ e^{ik_o\psi}) = e^{ik_o\psi} \ \vec{\nabla}_{\wedge} \ \vec{e} + ik_o \vec{\nabla}\psi \wedge \vec{e}(r) \ e^{ik_o\psi}$$
$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{b}(r) \ e^{ik_o\psi}) = e^{ik_o S} \ \vec{\nabla}_{\wedge} \vec{b} + ik_o \vec{\nabla}\psi \wedge \vec{b}(r) \ e^{ik_o\psi}$$

et comme $\lambda_o |\vec{\nabla} e| \sim \lambda |\vec{\nabla} b| \sim 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} -i\omega \vec{e} = \frac{i}{\epsilon\mu} \ ik_o \vec{\nabla}\psi \wedge \vec{b} \\ \\ -i\omega \vec{b} = -ik_o \vec{\nabla}\psi \wedge \vec{e} \end{array}} \tag{6}$$

$$\vec{e}^{\,*} \wedge \vec{b} = \vec{e}^{\,*} \wedge \frac{k_o}{\omega} \ \left(\vec{\nabla}\psi \wedge \vec{e} \right)$$

$$\vec{e}^{\,*} \wedge \vec{b} = \frac{k_o}{\omega} \ \left(\vec{e}^{\,*}.\vec{e}(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{e}^{\,*}.\vec{\nabla}\psi)\vec{e} \right)$$

Mais

$$\vec{e}^{\,*}.\vec{\nabla}\psi = 0 \qquad \vec{e}^{\,*}.\vec{e} = 2 < |\vec{e}| >^2$$

et

$$\frac{k_o}{\omega} = \frac{1}{c}$$

$$< \vec{s} >= \frac{1}{2\mu} \ \frac{1}{c} \ |\vec{e}|^2 \ \vec{\nabla}\psi$$

En introduisant la densité d'énergie u de l'onde quasi-plane :

$$\epsilon\mu = \frac{c^2}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \ |\vec{e}|^2 = \frac{u}{2\epsilon}$$

$$< \vec{s} >= \frac{1}{c} \ \frac{U}{\epsilon\mu} \ \vec{\nabla}\psi = \frac{c^2}{n^2 c} \ u \ \vec{\nabla}\psi$$

$$\boxed{< \vec{s} >= u \ \left(\frac{c}{n}\right) \ \left(\frac{1}{n} \ \vec{\nabla}\psi\right)}$$

Compte tenu de l'équation de l'iconale (5) $\frac{1}{n}|\vec{\nabla}\psi| = 1$.

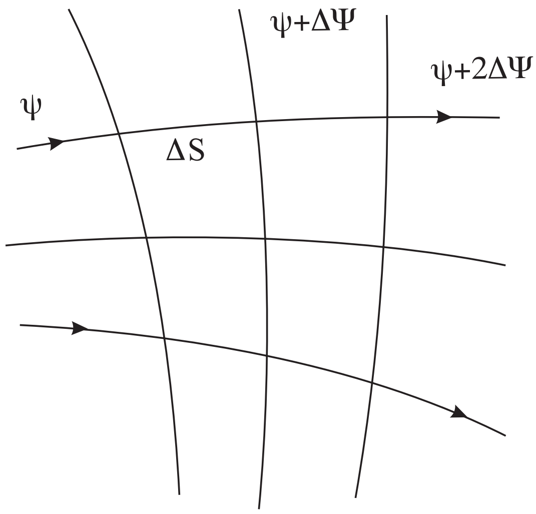
Dans l'approximation de l'optique géométrique, où la longueur d'onde $\lambda \to 0$, la densité d'énergie se propage à la vitesse c/n selon la direction normale au front d'onde. Le gradient $\vec{\nabla}\psi$ est en effet perpendiculaire à la surface d'onde $\psi = C^{te}$.

Les **rayons** de l'optique géométrique sont les trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde $\psi = C^{te}$.

C/ La trajectoire des rayons

Si $\vec{r}(s)$ est la position d'un point en fonction de l'abscisse s : $d\vec{r} = \vec{t}\,ds$, l'équation des rayons précédemment trouvée $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{n}\,\vec{\nabla}\psi$ permet d'obtenir l'équation différentielle des trajectoires des rayons dans un milieu d'indice variable

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\vec{\nabla}\psi\right)$$

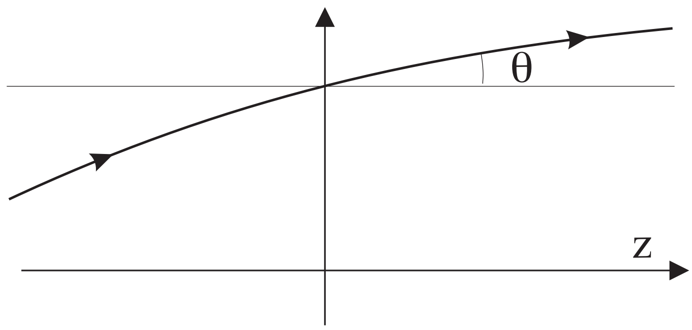


$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\,(n\vec{\tau}) &= \frac{d}{ds}\,(\vec{\nabla}\psi)\\ &= \vec{\tau}.\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi)\\ &= \frac{1}{n}\,(\vec{\nabla}\psi).\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\psi)\\ &= \frac{1}{2n}\,\vec{\nabla}\,\left((\vec{\nabla}\psi)^2\right) = \frac{1}{2n}\,\vec{\nabla}(n^2) = \vec{\nabla}n\end{aligned}$$

L'équation des rayons dans un milieu d'indice variable est

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla}n} \qquad (8)$$

D/ Application à la réfraction



Par projection sur l'axe z

On retrouve la loi de la réfraction.

2. Le principe de moindre action

A/ Rappels de mécanique Hamiltonienne

1. Les équations de Hamilton-Jacobi

Pour un système décrit par des coordonnées généralisées q_i et leurs vitesses $\dot{q}_i$

$$\exists \text{ lagrangien } \; L(q;\dot{q}) \quad \text{et hamiltonien } H(p,q)$$

$$p = \partial L/\partial \dot{q}$$

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

avec les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{10}$$

et de Hamilton

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial q_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}\right\}$$

Newton ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$) $\Longleftrightarrow$ Euler-Lagrange $\Longleftrightarrow$ Hamilton

a) Les équations d'Euler-Lagrange résultent d'un principe de moindre action

$$\int_\gamma \vec{p}.d\vec{q} - H \; dt \quad \text{est extrêmale}$$

pour toutes les courbes γ qui connectent $\vec{q}(t_0) = q_0$ à $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_1$ dans l'espace $(\vec{p}, \vec{q}, t)$

b) *Si H ne dépend pas du temps* les trajectoires dans l'espace des phases sont les extrêmales de $\int \vec{p}.d\vec{q}$ avec $\vec{q} = q_0$ et $\vec{q} = \vec{q}_1$ aux extrêmités. De manière équivalente.

Parmi toutes les courbes $\vec{q} = \gamma(\tau)$ connectant $\vec{q}_0$ et $\vec{q}_1$ et telles que $H\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \vec{q}\right) = h$ (constant), la trajectoire des solutions de

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

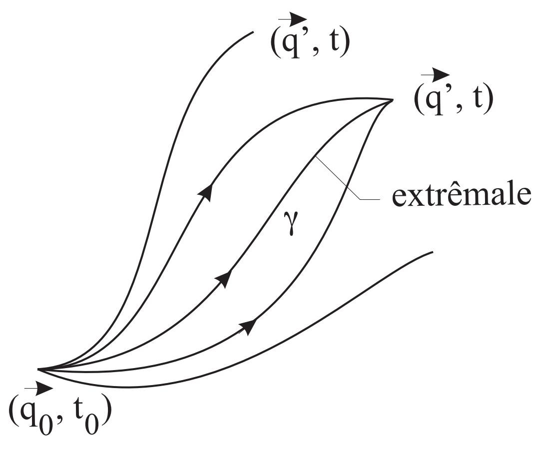
est une l'extrêmale de l'action

$$\int_\gamma \vec{p}.\vec{dq} = \int \vec{p}.\dot{\vec{q}}\ dt$$

c'est le principe de Maupertuis.

On définit la fonction d'action

$$\boxed{S_{q_0 t_0}\ (\vec{q}, t) = \int_\gamma\ L\ dt}$$



où l'intégrale est prise le long de l'extrêmale. S obéit à l'équation de Hamilton-Jacobi à q_0, t_0 fixé

$$\boxed{dS = \vec{p}.\vec{dq} - H\ dt,}$$

$$\underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} + H\ \left(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}}_{\vec{p}}, \vec{q}, t\right) = 0$$

Pour un système conservatif d'énergie donnée, H ne dépend pas du temps, et $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$

$$\boxed{\Rightarrow\ H\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, q\right) = E}$$

Exemple : $\frac{1}{2m}\ \sum\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(\vec{r}) = E$

$$\boxed{\sum_i\ \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = 2m\ (E - U\ (\vec{r}))} \tag{15}$$

B/ L'action réduite et le principe d'extremum spatial en mécanique

Nous avons vu que parmi toutes les courbes connectant deux points $\vec{q}_0$ et $\vec{q}_1$ et telles que l'Hamiltonien $H(\vec{p}, \vec{q}) = H\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}, q\right) = E$, les trajectoires des équations de la dynamique $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}$ sont les extrêmales de l'action réduite :

$$\int_\gamma\ \vec{p}.d\vec{q} = \int_\gamma\ \vec{p}.\dot{\vec{q}}\ dt = \int_\gamma\ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right).\dot{q}\ dt$$

(Principe de moindre action de Maupertuis).

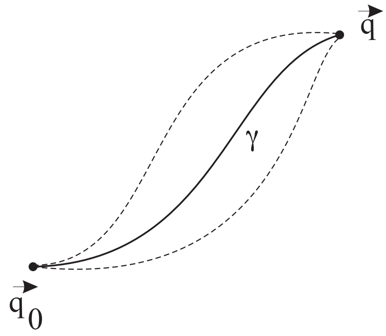
$$L = T - U \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \vec{p} = m\dot{\vec{q}} = m$$

$$\vec{p}.\vec{dq} = m\ \left(\dot{\vec{q}}^{\,2}\right)\ dt = m|\dot{\vec{q}}|\ d\ell$$

Mais $\dot{q} = v$ et $E = \frac{1}{2}\ mv^2 + U(\vec{r})$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\ (E - U)}$$

$$S = \sqrt{\frac{2}{m}}\ \int_{\vec{q}_o}^{\vec{q}_1}\ \sqrt{E - U}\ d\ell \quad \text{est un extremum pour les trajectoires réelles}$$



Lorsque le système est conservatif, l'action

$$\boxed{S_{\vec{q},\vec{q}_0} = \int_\gamma \sqrt{E-U}\ d\ell}$$

a un extremum pour les trajectoires réelles.

3. Le principe de Fermat

A/ Le chemin optique

Les rayons ou "trajectoires" normales aux surfaces d'ondes vérifient l'équation (5) $(\vec{\nabla}\psi)^2 = n^2(\vec{r})$. On peut considérer les rayons comme représentant le parcours de "grains de lumière" fictifs * obéissant à l'équation précédente.

Il se trouve que cette équation est identique à l'équation de Hamilton Jacobi (15) avec l'équivalence

$$\begin{gathered} n^2 = 2m\ (E - U(r)) \\ \text{iconale } \psi \longleftrightarrow S \text{ action} \end{gathered} \tag{16}$$

Comme l'équation de Hamilton Jacobi avait pour solution les trajectoires extrêmales de l'action S

$$S = \int_\gamma L\ dt \quad \text{avec} \quad L = T - U$$

les trajectoires des rayons optiques obéissent également à un principe d'extremum. On l'obtient en partant du principe de Maupertuis

$$S_{\vec{q}} = \int_\gamma \sqrt{E-U}\ d\ell \ \propto\ \int_\gamma \sqrt{n^2}\ d\ell$$

d'après l'équivalence précédente. On aboutit ainsi au **Principe de Fermat** :

> *Le chemin optique* $\int_{\vec{q}_1(\gamma)}^{\vec{q}_2} n\ d\ell$ *d'un rayon du*
>
> *point* $\vec{q}_1$ *au point* $\vec{q}_2$ *est plus court que tous les chemins*
>
> *voisins du trajet effectivement suivi*

* La lumière peut effectivement être considérée comme ayant une nature corpusculaire et formée d'un ensemble de photons (réels) à l'échelle quantique. La discussion menée ne présuppose PAS l'existence de photons.

B/ Les trajectoires à partir du principe de Fermat

$$S = \int_\gamma n \ d\ell = c \int_\gamma n \ (\vec{r}(t)) \ \left(\frac{d\ell}{dt}\right) \ dt$$

cette action réduite peut ainsi être considérée comme résultant d'un Lagrangian "optique" $L = n(\vec{r}, t) \ \frac{d\ell}{dt}$

$$\begin{aligned} \delta \ S = 0 &\Longleftrightarrow \ \frac{d}{dt} \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dt} \left(n \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}} \right) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \end{aligned}$$

en introduisant le vecteur tangeant unitaire

$$\tau_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}}$$

on retrouve bien l'équation (8)

$$\boxed{\frac{d}{ds} \ (n\vec{\tau}) = \vec{\nabla} n}$$

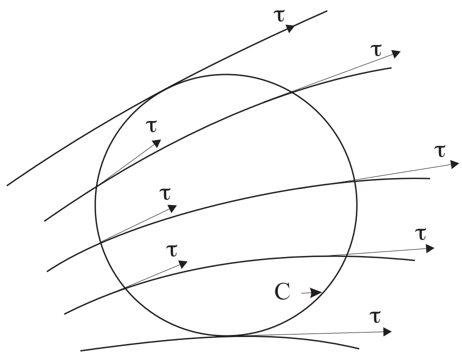
La relation $n\vec{\tau} = \vec{\nabla}\psi$ permet de démontrer l'invariance de $\int_{\vec{q}_o}^{q_1} \ n\vec{\tau}.d\vec{r}$ vis à vis du choix du chemin γ ent $\vec{q}_o$ et $\vec{q}_1$. Le long d'une courbe fermée, on a en effet :

$$\boxed{\oint \ n\vec{\tau}.d\vec{r} = \int_S \ \vec{r}ot \ (\vec{\nabla}\psi).\vec{h} \ d\sigma = 0}$$

où $\vec{h}$ est la normale unitaire puisque $rot \ (\vec{\nabla}\psi) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_{P_1}^{P_2} \ n\vec{\tau}.d\vec{r} \ \text{ est indépendant du chemin suivi} \\ \\ \text{(Pour des } \textbf{rayons} \text{ différents allant de } P_1 \text{ à } P_2\text{)} \end{array}}$$

Pour un chemin fermé c l'intégrale $\oint_c \ n\vec{\tau}.d\vec{r}$ est appelée invariant de Lagrange.



Ce résultat est l'analogue optique du théorème de Liouville avec l'identification $\vec{p} = n\ \vec{\tau}$.
- L'écoulement de l'espace de phase préserve en effet les intégrales $\oint \vec{p}.d\vec{q} - H\ dt$.
- pour des courbes à t constant et fermées

$$\oint_\gamma \vec{p}.d\vec{q} = \int\int_\sigma d\vec{p} \wedge d\vec{q}$$

est préservé dans l'écoulement de l'espace des phases (lien avec Liouville).