VI - La réfraction

1. Rappel des conditions aux limites entre deux diélectriques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(en l'absence de courants externes)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Compte-tenu de l'amplitude finie des champs

$$\boxed{\text{disc } (\vec{E}_t) = \text{disc } (\vec{H}_t) = 0}$$

bien entendu, cette condition va imposer une discontinuité tangentielle de l'induction $\vec{B}$ et de $\vec{D}$.

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = 0 \qquad \text{(en l'absence de charges libres)}$$

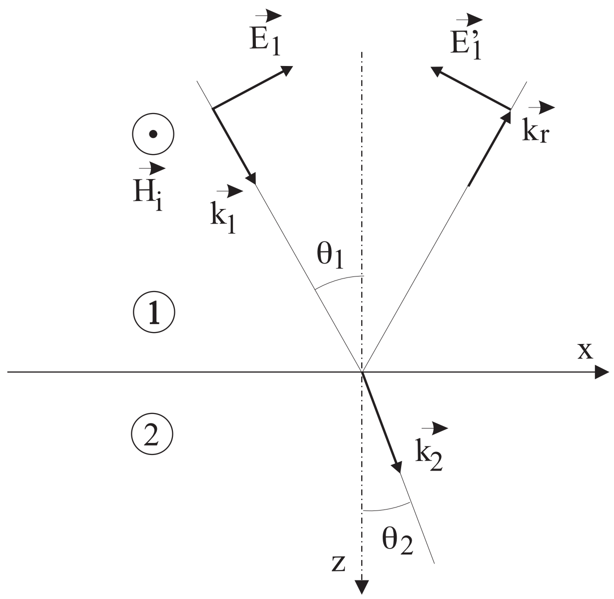
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\boxed{\text{disc } (D_n) = \text{disc } (B_n) = 0}$$

Ces relations entraînent l'apparition de discontinuités tangeantielles de $\vec{D}$ et $\vec{B}$.

2. La réfraction par un dioptre plan

Pour une onde incidente monochromatique, on examinera le cas où le champ magnétique $\vec{H}$ est perpendiculaire au plan de diffraction, $\vec{D}$ se trouvant dans ce plan.



a) Equations de propagation dans chaque milieu

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \; e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{\Gamma})}$$

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ pouvant être $\vec{k}_1, \vec{k}'_1$ ou $\vec{k}_2$.

Le rotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$ se calcule à l'aide de $\vec{\nabla}(f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{\nabla} f \wedge \vec{v}$.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = i\vec{k} \wedge \vec{H} \qquad \text{et de même}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{D} = i\vec{k} \wedge \vec{D}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{\partial} D}{\partial t} = -i\omega \vec{D} = i\vec{k} \wedge \vec{H}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\vec{\partial} B}{\partial t} = +i\omega\mu \vec{H} = i\vec{k} \wedge \frac{\vec{D}}{c}$$

D'où

$$i\omega\mu\epsilon\vec{H} = i\vec{k} \wedge \left(\frac{i\vec{k} \wedge \vec{H}}{-i\omega}\right) = i\,\frac{\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{H})}{\omega}$$
$$-\,\omega^2\mu\epsilon\vec{H} = \left[(\vec{k}.\vec{H})\vec{k} - \vec{k}^2\vec{H}\right]$$

mais $\quad \vec{k}.\vec{H} = 0$

$$\omega^2\mu\epsilon\vec{H} = k^2\vec{H} \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}\right)$$

$$k = k_0 n \qquad \text{avec} \qquad n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

n est l'indice du milieu considéré. Il est pratiquement toujours (mais pas toujours) supérieur à l'unité.

$v_\varphi = \frac{c}{n}$ est la vitesse de phase.

b) Amplitudes incidentes et réfléchies

On décomposera :

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r$$
$$\vec{D}_1 = -\frac{1}{\omega}\left(\vec{k}_i \wedge \vec{H}_i + \vec{k}_r \wedge \vec{H}_r\right) = \vec{D}_i + \vec{D}_r$$

on posera : $\quad H_y^r(r) = \alpha H_y^i(i) \qquad$ (Définition)

$$D_r^z = -\frac{1}{\omega}(\vec{k}_r \wedge \vec{H}_r).\vec{z} = -\frac{1}{\omega}k_r^x H_r^y$$
$$D_i^z = -\frac{1}{\omega}(\vec{k}_i \wedge \vec{H}_i).\vec{z} = -\frac{1}{\omega}k_i^x H_i^y$$

et comme $\vec{H}$ n'a que la composante H_y par hypothèse et que $k_i^x = k_r^x$

De même

$$D_r^x = +\frac{1}{\omega}k_r^z H_r^y$$
$$D_i^x = \frac{1}{\omega}k_i^z H_i^y$$

Mais $k_i^z = -k_r^z \qquad$ si bien qu' il en résulte

$$\boxed{\begin{array}{c} D_r^z = \alpha D_i^z \\ \\ D_r^x = -\alpha D_i^x \end{array}}$$

c) Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{array}{rr} D_{1n} = D_{2n} & \qquad B_n^1 = B_n^2 \\ E_{1t} = E_{2t} & \qquad H_{1t} = H_{2t} \end{array}$$

i/ $D_{1n} = D_{2n}$

$k_i^x H_1^y + k_r^x H_r^y = k_2^x H_2^y$

$k_i^x (1+\alpha) H_i^y = k_2^x H_2^y$

ii/ $H_{1t} = H_{rt}$

$H_i^y(1+\alpha) = H_2^y \;\Rightarrow\; k_i^x = k_2^x$

$$\boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

iii/ $E_{1t} = E_{2t}$

Mais $E_x^r = -\alpha E_x^i$ (comme pour D)

$\Rightarrow\; (1-\alpha)\,\dfrac{D_x^i}{\epsilon_1} = \dfrac{D_x^2}{\epsilon_2}$

$\dfrac{(1-\alpha)}{\epsilon_1}\,k_i^z H_i^y = \dfrac{k_2^z H_2^y}{\epsilon_2} = \dfrac{k_2^z H_i^y(1+\alpha)}{\epsilon_2}$

$$\begin{aligned} k_i^z &= k_1\cos\theta_1 = k_0 n_1 \cos\theta_1 \qquad n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \\ k_2^z &= k_2\cos\theta_2 = k_0 n_2 \cos\theta_2 \qquad n_2 = \sqrt{\epsilon_2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\alpha}{\epsilon_1}\right)\cos\theta_1\sqrt{\epsilon_1} = \frac{(1+\alpha)\cos\theta_2\sqrt{\epsilon_2}}{\epsilon_2}$$

Cette équation détermine le rapport α des champs réfléchis et incidents.

$$\alpha = \frac{H_r^y}{H_i^y} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}\cos\theta_1 - \sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_2}{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta_2}$$

en particulier en incidence normale

$$\alpha = \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \qquad \text{s'annule si } \epsilon_1 = \epsilon_2, \text{comme on s'y attend}$$

Le coefficient de réflexion normale, qui donne le rapport des intensités sera

$$R = \frac{\phi_r}{\phi_i} = |\alpha|^2 = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}\right)^2$$

3. Onde évanescente

Lorsque $\sin^2\theta_2 > \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ n'admet plus de solution pour θ_1.

k_1^z devient imaginaire

$(k_1^x)^2 = (k_2^x)^2 = n_1^2 \sin^2\theta_1$

$(k_1^z)^2 = k_1^2 - (k_1^x)^2 = k_1^2\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\sin^2\theta_2\right) < 0$

Le vecteur d'onde a une partie imaginaire qui entraînera une atténuation exponentielle.