V - Propagation dans les milieux matériels

1. Equations de Maxwell dans les diélectriques Isotopes

D/1 Le courant effectif

• L'équation $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$, qui ne fait intervenir que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ reste inchangée dans les moyennes locales qui font passer des champs microscopiques aux champs macroscopiques.

• $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est modifiée :

On a vu que la magnétostatique des milieux matériels conduisait à définir
$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ avec $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}$.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{vrai} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textbf{(1)}$$

mais cette équation est **fausse**. En prenant la divergence compte tenu de div $(\overrightarrow{rot}) = 0$

$$0 = \nabla \cdot \vec{j}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla}.\vec{E}}{\partial t}$$

Dans un diélectrique

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla}.\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla}.\vec{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t} - \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \neq 0$$

Le premier membre étant nul par continuité.

La solution proposée par Maxwell est de modifier l'équation (1) et de remplacer $\vec{j}_{vrai} \to \vec{j}_{vrai} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$: une collection de dipôles variables crée un courant.

Le terme $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ sera le courant "de polarisation"

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{vrai} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textbf{(2)}$$

De manière équivalente, on peut aussi revenir à l'équation dans le vide avec

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_t + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

(3)

Le courant total dans le diélectrique est

$$\boxed{\vec{j}_t = \vec{j}_{vrai} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}}$$

D/2 Les équations avec ϵ et μ

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & \vec{\nabla}.\vec{E} = \dfrac{\rho_{ext}}{\epsilon\ \epsilon_0} \\[2ex] (ii) & \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \\[2ex] (iii) & \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\[2ex] (iv) & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{j}_{vrai} + \mu\epsilon\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

D/3 Si l'on néglige les effets magnétiques dans un conducteur : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu \left[\sigma \vec{E} - i\omega\epsilon_d \vec{E}\right]$$

pour une onde plane de fréquence ω

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -i\omega\mu \left[\epsilon_d + \frac{i\sigma}{\omega}\right] \vec{E}$$

On voit que tout se passe comme si ϵ avait acquis une partie complexe $\dfrac{i\sigma}{\omega}$ avec $Re(\epsilon) = \epsilon_d$. En identifiant avec l'expression microscopique de la page 13 :

$\sigma = \rho\alpha_c q^2/\epsilon_0 m\gamma$ (où α_c est la fraction d'électrons libres).

En l'absence de charges et de courants externes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\[2ex] \epsilon\mu\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \\[2ex] \epsilon\mu\ \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \wedge \overline{\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \end{array}}$$

$$\epsilon\mu \, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \, - \, \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

$$= \, - \, \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) + \Delta\vec{E} = +\Delta\vec{E}$$

On retrouve l'équation de propagation

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon\mu \, \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = 0 \\[2em] \epsilon\mu \, \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = 0 \end{array}\right\} \text{ et de même}$$

la vitesse de phase est alors $v_\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

Les ondes planes sont du type

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} \quad \text{avec} \quad k = \, \frac{\omega}{v_\varphi} \, .$$

Par transformée de Fourier

$$-\epsilon\mu\omega^2 + k^2 = 0$$

Plus généralement, la décomposition de Fourier :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int d^3k \, \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \, e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} \quad \text{avec} \quad \omega = kv$$

et

$$\vec{k}.\vec{\mathcal{E}} = \vec{k}.\vec{B} = 0 \quad \text{(divergence nulle)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \, i \int d^3\vec{k} \;\; \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \, e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \, - \, i\omega \int d^3k \;\; \vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) \, e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = \, \frac{1}{\omega} \, \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}(k) = \, \frac{1}{v} \left(\frac{\vec{k}}{k} \right) \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \, \vec{\epsilon}_1 E_1 + \vec{\epsilon}_2 E_2 \qquad\qquad \vec{\epsilon}_1.\vec{k} = \, \vec{\epsilon}_2.\vec{k} = 0$$

$E_1, \; E_2$ complexes $\;\Rightarrow\;$ polarisation elliptique en général.

2. Vitesse de groupe

On a donné pour les ondes planes la relation entre ω et k : $\omega = kv_\varphi = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

Comme ϵ et μ sont eux-mêmes fonction de ω, cette relation est de la forme $\omega = \omega(k)$.

Pour chacune des composantes du champ, on aura de manière générale :

$$E_i(x,t) = \int \mathcal{E}_i(\vec{k})\ e^{-i[\omega(k)t - \vec{k}.\vec{x}]} d^3k$$

• Pour une onde monochromatique :

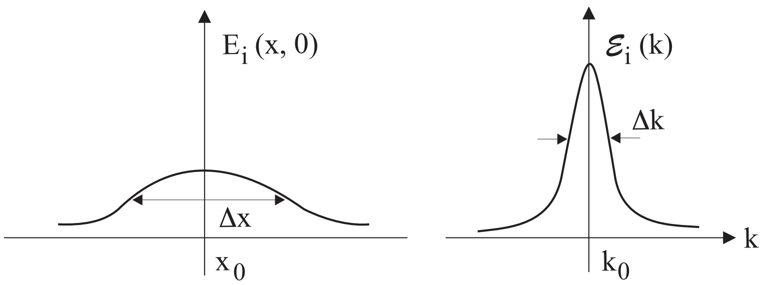
$$\mathcal{E}_i(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int E_i(\vec{x},0)\ e^{+i\vec{k}.\vec{x}}\ d^3\vec{x}$$

$$E_i(\vec{x},t) \simeq e^{-i(\omega t - \vec{k}_0.\vec{x})}\ E_i(\vec{x},0)$$

$$\mathcal{E}_i(\vec{k}) \simeq \delta_3(\vec{k} - \vec{k}_0)\ E_i(\vec{x},0)$$

• Pour un signal d'extension spatiale finie à un instant donné, ce qui est toujours le cas en pratique ; ce sera une fonction de largeur Δk.

Pour des gaussiennes $\Delta x\ \Delta k \geq \frac{1}{2}$ (voir la démonstration des relations d'incertitude en mécanique quantique).



Si $\mathcal{E}_i(x,t)$ est très piqué au voisinage de k_0 :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\ \frac{d\omega}{dk}$$

$$\mathcal{E}_i(x,t) \simeq e^{-i\left[\omega(k_0)t\right]} \int \mathcal{E}_i(\vec{k}_0) e^{-i\left[(\omega - \omega_0)t - \vec{k}.\vec{x}\right]} d^3\vec{k}$$

$$\sim e^{-i\left[\omega(k_0) - k_0 \frac{d\omega}{dk}\right]t} \int \mathcal{E}_i(k) e^{-i\left[\frac{d\omega}{dk}t - \vec{x}.\vec{n}\right]k} d^3k$$

où $\vec{n} = \vec{k}/k$

$$\mathcal{E}_i(x,t) \sim e^{-i\left[\omega(k_0) - k_0 \dfrac{d\omega}{dn}\right]t} \, E_i\left(x - \frac{d\omega}{dk}\, t, 0\right)$$

Le champ se propage sans distorsion à une vitesse

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

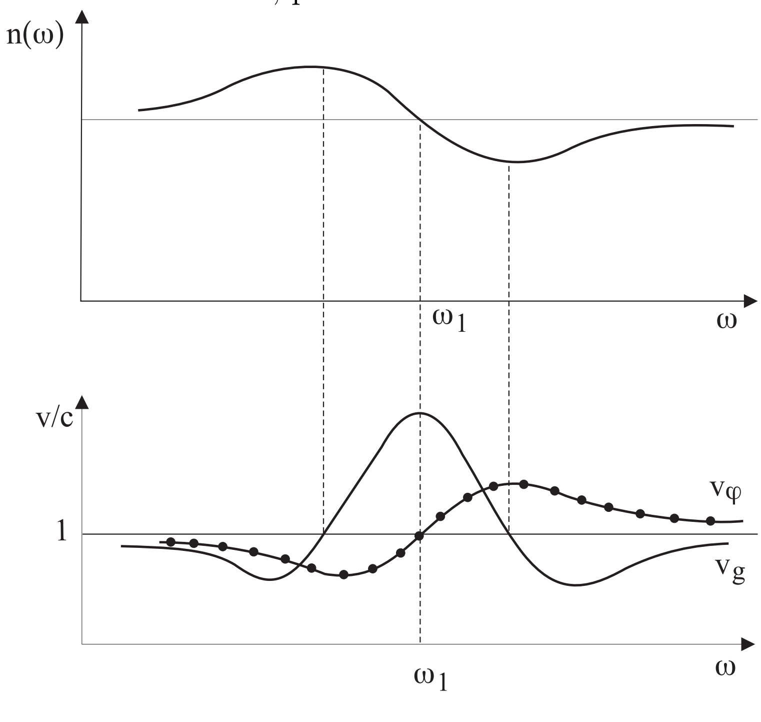
v_g est la vitesse de groupe qui diffère de la vitesse de phase $1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Le vecteur d'onde k s'exprime en fonction de la fréquence ω : $\omega = k v_\varphi = k\ \dfrac{c}{n(k)}$

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\,\mu_0}} > 1 \qquad \text{presque toujours}$$

Il en résulte :

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega\ \dfrac{dn}{d\omega}}}$$

Au voisinage des résonances, la vitesse de groupe calculée dans l'approximation précédente devient $> c$. Comme $\omega(k)$ varie rapidement, les approximations du 1er ordre cessent d'être acceptables, et la propagation du "signal", ne viole pas la relativité : la notion de vitesse de groupe, compte-tenu des déformations, perd son sens.



avec

$$\boxed{\begin{array}{ll} n = \sqrt{\dfrac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} & v_\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \\ v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{c}{n + \omega\,\dfrac{dn}{d\omega}} & k = n\,\dfrac{\omega}{c} \end{array}}$$

3. Milieux diélectriques anisotropes

Rappel des équations de Maxwell en milieux matériels pour une onde plane $(\omega, \vec{k})$ avec $\vec{k} = \frac{\omega\vec{n}}{c}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad -i\omega\vec{D} = i\vec{k} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad i\mu_o\omega\vec{H} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{D} = -\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{H} = \frac{-i}{\mu^o}\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}\right)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_o\omega^2}\left(k^2\vec{E} - \left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right)\vec{k}\right)$$

On définit le vecteur $\vec{n}$ par

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$$

$$D_i = \epsilon_o\ \left(\vec{n}^2 E_i - n_i(n_k E_k)\right)$$

mais

$$D_i = \epsilon_o\epsilon_{ij}E_j$$

La compatibilité des deux équations impose :

$$\boxed{det \quad |n^2\ \delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik}\ | = o}$$

Equation de Fresnel

Si les 3 valeurs propres de ϵ_{ik} sont $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ cette équation devient, dans le système des vecteurs propres.

$$\boxed{1 = \frac{n_1^2}{n^2-\epsilon_1} + \frac{n_2^2}{n^2-\epsilon_2} + \frac{n_3^2}{n^2-\epsilon_3}}$$

Dans une direction donnée, on trouve **2 solutions** pour l'équation des indices qui est quadratique en n^2. Les solutions définissent la surface des indices :

$$n^2(\epsilon_1 n_1^2 + \epsilon_2 n_2^2 + \epsilon_3 n_3^2) - [n_1^2\epsilon_1(\epsilon_2+\epsilon_3) + n_2^2\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_3) + n_3^2\epsilon_3(\epsilon_1+\epsilon_2)] + \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 0$$

Les rayons lumineux ont la direction du vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

$$\vec{S} = \frac{1}{c\mu_o} E^2(\vec{n} - (\vec{n}.\vec{e})\,\vec{e}) \qquad |\vec{e}| \;=\; 1$$

$$\vec{E} = |\vec{E}|\vec{e}$$

$\vec{S}$ a la même direction que la vitesse de groupe $\vec{s} = \vec{\nabla}_k(\omega)$, et est $\perp$ à la surface des indices en $\vec{n}$.

4. Propagation dans les conducteurs isotropes(effet de peau)

$$\frac{\overrightarrow{\partial D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{j} \qquad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_o}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \qquad \vec{\nabla}.\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad \vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\sigma(\vec{\nabla}.\vec{E}) + \frac{\partial(\vec{\nabla}.\vec{D})}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_o}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) = 0$$

Si le milieu n'est pas neutre, la densité de charge décroit exponentiellement avec le temps caractéristique

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_o} \sim 10^{19} \rightarrow \tau \simeq 10^{-19}s$$

$\Rightarrow$ on peut toujours supposer que $\rho = 0$ dans les conducteurs (à l'intérieur !). La relation $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ne s'applique pas à la surface, où la densité est finie. (en général)

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{D} = 0$$

$$-\mu\mu_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = -\mu\mu_o\;\frac{\partial}{\partial t}\;\left(\frac{\overrightarrow{\partial D}}{\partial t} + \vec{J}\right)$$

puis

$$\epsilon\epsilon_o\mu\mu_o\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\Delta\vec{E}=-\sigma\mu\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

de même

$$\epsilon\epsilon_o\mu\mu_o\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\Delta\vec{H}=-\sigma\mu\mu_o\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\left(\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}=-\sigma\mu\mu_o\begin{pmatrix}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{n^2\omega^2}{c^2}+k^2\right)\vec{\epsilon}=i\omega\sigma\mu\mu_o\vec{\epsilon}$$

pour $\vec{E}=\vec{\epsilon}=e^{-i(\omega t-kz)}$

$$k^2=\frac{n^2\omega^2}{c^2}+i\omega\sigma\mu_o\mu$$

$$\simeq\epsilon_o\mu_o\omega\left(\epsilon\omega+\frac{i\sigma}{\epsilon\epsilon_o}\right)\quad\text{avec}\quad\mu\sim 1$$

Pour de **bons** conducteurs le terme $\frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}$ domine dans la plage de fréquence :

$$\rho\sim 2\;10^{-8}\Omega m\qquad\qquad\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}\;10^8\;(\Omega m)^{-1}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon}>>1\qquad\Rightarrow\qquad\omega<<10^{-19}\;s^{-1}$$

Dans toute la gamme de fréquences usuelles, la relation est vérifiée pour les conducteurs.

$$\Rightarrow\;k^2=i\;\sigma\;\mu\;\omega=i\;\sigma\;\mu_r\;\mu_0\;\omega$$

$$k=\sqrt{i\omega\sigma\mu\mu_o}\quad=\quad\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma\mu\mu_o\omega}$$

$$k=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\;\sqrt{2\pi\;\sigma\;\mu_r\;\mu_0\;\nu}\quad\text{pour un conducteur non magnétique}$$

L'atténuation variera comme $e^{-Im(k)z}$

$$=e^{-z/\delta}\quad\text{avec}\quad\delta=\frac{1}{I_m(k)}=\frac{1}{\sqrt{\pi\;\sigma\;\mu_0\;\mu_r}}\;=$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\rho}{\pi\;\mu_0\;\nu}}=\delta}$$

Pour le cuivre :

$$\rho = 2\ 10^{-8} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2\ 10^{-8}}{4\pi^2\ 10^{-7}\ \nu}} \qquad (MKSA)$$

$$\delta\ \sim\ \frac{6cm}{\sqrt{\nu(s^{-1})}}$$

Aux fréquences optiques :

$$\nu\ \sim 10^{15} \quad \delta = \frac{6cm}{\sqrt{10^{15}}} \times 10^4 \mu m$$

$$\delta = 10^{-7} \times \frac{6}{3}\ 10^4 cm$$

$$\delta \sim \frac{1}{2}\ 10^{-3} \mu m$$

Aux fréquences Radio :

$$\nu \sim 10^8 \qquad \delta = \frac{6cm}{10^4} = 6\mu m$$

A basse fréquence :

$$\nu \sim 50HZ \quad \delta \sim 1cm$$

il est très difficile de se protéger contre le bruit à 50 HZ

Pourquoi le courant de 50HZ dans les fils n'est-il pas atténué ?

Pour une onde plane dans le vide

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0\ \Rightarrow\ \vec{k}.\vec{E} = 0$$

$\vec{E} \perp$ direction de propagation.

Alors que pour un courant 50HZ, le champ est parallèle à la direction de propagation (et à celle du courant !).

Dans un fil électrique et dans un guide d'onde $\vec{E}$ a une composante longitudinale et c'est précisément cette composante (dominante) qui nous intéresse dans le transport de l'énergie électrique.