IV - L'onde plane

1. Equations de Maxwell

Dans le vide :

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} \;=\; 0 \qquad \partial\vec{E}/\partial t \;=\; \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{B} \;=\; 0 \qquad \partial\vec{B}/\partial t \;=\; -\vec{\nabla}\wedge\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\vec{\nabla}\wedge\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})$$
$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \Delta\vec{E}\right) = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\Delta\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\Delta\vec{E} = 0$$

De même
$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\,\Delta\vec{B} = 0$$

$$\rightarrow \qquad \epsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2} - \Delta\vec{V} = 0 \qquad \text{pour} \quad \vec{E},\vec{B}$$

Toutes les composantes vérifient l'équation des ondes avec la célérité c,

$$\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

• Par transformée de Fourier $\Rightarrow$ $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)V(\omega,\vec{k}^2) = 0.$

Pour une onde **monochromatique**

$$\vec{V} = \vec{V_0}\; e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}$$

$$\boxed{k = \pm\,\frac{\omega}{c}}$$

Bien entendu, on utilise $Re(\vec{V})$

Par superposition, on obtient la solution générale

$$\vec{V}(\vec{x},t) = \int d^3\vec{k}\ \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\ \vec{V}(\vec{k},\omega)$$

$$\boxed{\vec{V}(\vec{x},t) = \int d^2\vec{n}\Big[\vec{V}_1(\vec{n},\vec{n}.\vec{x} - ct) + \vec{V}_2(\vec{n},\vec{n}.\vec{x} + ct)\Big]}$$

en sommant les 2 contributions $k = \pm\,\omega/c$.

Solution générale

Dans un milieu **matériel**, $\epsilon_0,\ \mu_0$ peuvent être fonction de la vitesse angulaire ω

$\rightarrow \qquad k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} = \sqrt{\mu(\omega)\ \epsilon(\omega)}\ \frac{\omega}{c}$

La solution monochromatique pour $\vec{E}$ et $\vec{B}(\vec{x},t)$ est

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{\mathcal{E}}(\omega)\ e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega t)}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{\mathcal{B}}(\omega)\ e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}.\vec{\mathcal{E}} = \vec{k}.\vec{\mathcal{B}} = 0$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ à $\vec{k}$: onde **transverse**.

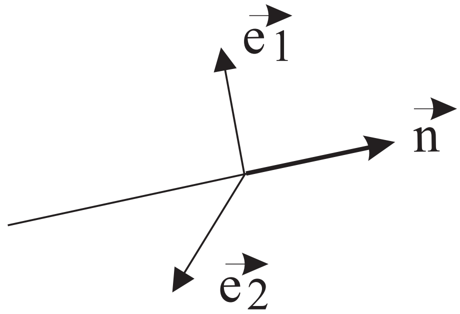
$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\wedge\vec{E} \Rightarrow -i\omega\vec{\mathcal{B}}(\omega) = -i\vec{k}_0\wedge\vec{\mathcal{E}}$$

On a utilisé

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\epsilon}f) = \vec{\nabla}f\wedge\vec{\epsilon} + f\vec{\nabla}\wedge\vec{\epsilon}$$
$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\epsilon}\,e^{i\vec{k}.\vec{x}}) = i\vec{k}\wedge\vec{\epsilon}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}}(\omega) = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{\mathcal{E}}\ (\omega) \qquad\qquad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}}$$

$\vec{\mathcal{B}}(\omega)$ et $\vec{\mathcal{E}}(\omega)$ sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à $\vec{k}$. Ils ont la **même** phase.



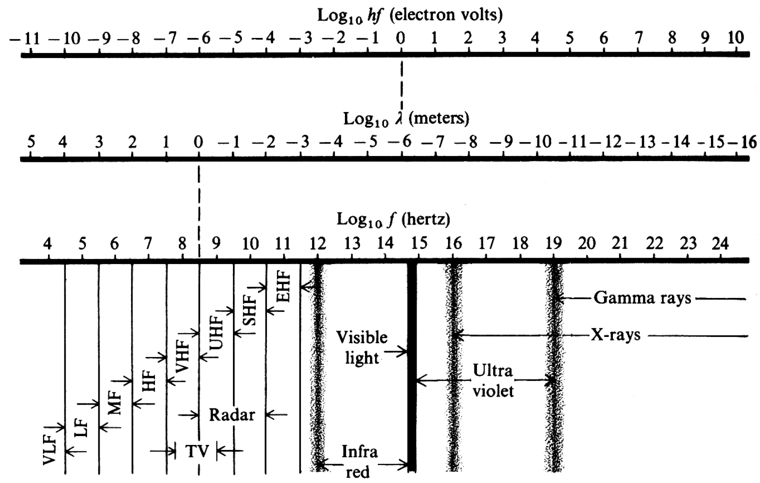
On introduira un triplet $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{n})$

$$\vec{\mathcal{E}} = (E_1\,\vec{\epsilon}_1 + E_2\,\vec{\epsilon}_2)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{\omega}\,\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}$$

$E_1,\ E_2$ peuvent être **complexes** (avec une différence de phases).

2. Le spectre électromagnétique



3. Polarisations linéaires, circulaires

On a trouvé une solution générale

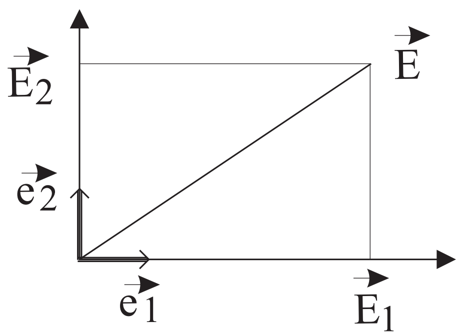
$$\vec{E} = Re\,\{E_1\vec{\epsilon}_1 + E_2\vec{\epsilon}_2)e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}\}$$

$$|\vec{k}| = \omega/c$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

• Si les amplitudes E_1 et E_2 ont la même **phase**, la **direction** de $\vec{E}$ reste invariante dans le temps. Il s'agit d'une onde polarisée **linéairement**. Le vecteur polarisation fait l'angle θ avec $\vec{E}_1$

$\theta = \text{Arctg}\ (E_2/E_1)$



Si les phases de E_1 etE_2 sont **différentes**. L'onde est polarisée elliptiquement.

- Cas $|E_1| = |E_2|,\ E_2 = \ \pm\ i\ E_1$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \ E_0\ \ (\vec{\epsilon}_1 \pm \vec{\epsilon}_2)\ \ e^{i(\vec{k}.\vec{x} - \omega t)}$$

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$$
$$E_x = \ \pm\ E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$\vec{E}$ tourne à la vitesse ω dans le sens positif ou négatif selon le signe choisi.

- De manière plus générale, on peut se servir de

$$\sqrt{2}\ \vec{\epsilon}_+ = \vec{\epsilon}_1 + i\vec{\epsilon}_2$$
$$\sqrt{2}\ \vec{\epsilon}_- = \vec{\epsilon}_1 - i\vec{\epsilon}_2$$

comme états de base, avec les relations

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\vec{\epsilon}_+ + \vec{\epsilon}_-)$$
$$\vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}\ (\vec{\epsilon}_+ - \vec{\epsilon}_-)$$

$$\vec{E} = (E_+ \vec{\epsilon}_+ + E_- \vec{\epsilon}_-)$$
$$E_+ = (E_1 - iE_2)/\sqrt{2}$$
$$E_- = (E_1 + iE_2)/\sqrt{2}$$

$\vec{E}$ va décrire une ellipse : si E_-/E_+ réel $= r$. Le rapport des axes est $|\frac{1+r}{1-r}|$ avec $\frac{E_-}{E_+} = r$ et les axes sont $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$. Si r est complexe avec $\frac{E_-}{E_+} = r\ e^{i\alpha}$ les axes tournent de $\alpha/2$.

Lorsque $r = \pm\ 1$, on retrouve une polarisation linéaire.

Une onde monochromatique pure est toujours complètement polarisée (linéaire ou elliptique).

4. Polarisation elliptique : le cas général

Toute onde plane est la somme d'une onde avec polarisation circulaire droite et d'une onde gauche

Repère d'hélicité :

$$\begin{aligned} \vec{e}_+ &= \frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{hélicité} \quad \lambda = +1 \quad \text{droite} \\ \vec{e}_0 &= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_- &= \frac{\vec{e}_1 - i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{hélicité} \quad \lambda = -1 \quad \text{gauche} \end{aligned}$$

En mécanique quantique, la lumière a un caractère de particules. Chaque **photon** a un moment angulaire intrinsèque droite ou gauche, sur hélicité $\vec{J}.\vec{e}_3 = \pm\hbar$, $\vec{J}$ moment angulaire intrinsèque du photon.

$$\vec{E} = E_1\,\vec{e}_1 + E_2\,\vec{e}_2 = E_+\vec{e}_+ + E_-\vec{e}- = \left(\frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)\, E_+ + \left(\frac{\vec{e}_1 - i\,\vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)\, E_-$$

$$E_1 = \frac{E_+ + E_-}{\sqrt{2}} \qquad\qquad E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(E_1 + \frac{E_2}{i}\right)$$

$$E_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\,(E_+ - E_-) \qquad\qquad E_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(E_1 - \frac{E_2}{i}\right)$$

On partira des composantes E_+ et E_- :

$$\frac{E_+}{E_-} = r\, e^{i\alpha} \qquad \begin{aligned} E_- &= e^{-i\alpha/2} \\ E_+ &= r\, e^{i\alpha/2} \end{aligned}$$

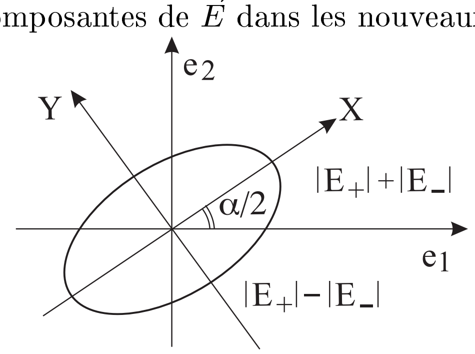
$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Re\, \left\{e^{-i\omega t}\, e^{i\alpha/2}|E_+| + e^{-i\omega t}\, e^{-i\alpha/2}|E_-|\right\}$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, I_m\, \left\{e^{-i\omega t}\, e^{i\alpha/2}|E_+| - e^{i\omega t}\, e^{-i\alpha/2}|E_-|\right\}$$

On peut poser $\tilde{E} = E_1 + iE_2$ dans le plan complexe :

$$\tilde{E} = e^{i\alpha/2}\, \left\{|E_+|e^{-i\omega t} + |E_-|e^{i\omega t}\right\}$$

Nous appelons X et Y les composantes de $\vec{E}$ dans les nouveaux axes :



$$X = \cos\frac{\alpha}{2}\ E_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\ E_2$$

$$Y = -\sin\frac{\alpha}{2}\ E_1 + \cos\frac{\alpha}{2}\ E_2$$

$$Re\ X - i\ I(X) = X^* = e^{i\omega t}\ e^{i\alpha/2}|E_-|$$

On voit directement dans les nouveaux axes qu'il s'agit d'une ellipse :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & +\sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\omega t - \frac{\alpha}{2}\right)|E_+| + \cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)|E_-| \\ +\sin\left(-\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)|E_+| + \sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)|E_-| \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} X & = & \cos\frac{\alpha}{2}\ \left[\left(\cos\omega t\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\omega t\sin\frac{\alpha}{2}\right)|E_+| + \left(\cos\omega t\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\omega t\sin\frac{\alpha}{2}\right)\ |E_-|\right] \\ & + & \sin\frac{\alpha}{2}\ \left[\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\omega t - \sin\omega t\cos\frac{\alpha}{2}\right)|E_+| + \left(\sin\omega t\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\omega t\sin\frac{\alpha}{2}\right)|E_-|\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X & = & |E_+|\cos\ \omega t + |E_-|\cos\ \omega t = (|E_+| + |E_-|)\ \cos\ \omega t \\ Y & = & -\sin\ \omega t|E_+| + |E_-|\ \sin\ \omega t = (|E_-| - |E_+|)\ \sin\ \omega t \end{array}$$

C'est la paramétrisation d'une ellipse. Le sens de parcours de l'ellipse dépend du **signe** de $|E_-| - |E_+|$ sens trigonométrique si $|E_+| = 0$.

5. Lumière naturelle

Une lumière naturelle usuelle n'est **jamais** une onde plane pure. L'émission a toujours un début, et des phénomènes physiques divers (vitesse de la source, diffusion par les milieux interposés, etc ...) élargissent la distribution de fréquence. La phase et l'amplitude de l'onde quasimonochromatique varient lentement.

On mesure des moyennes du type

$$< E^{0\ *}_\alpha\ E^0_\beta >_t = j_{\alpha\beta}$$

$$\sum_\alpha j_{\alpha\alpha} = \sum_\alpha | < |E^0_\alpha|^2 >_t = \ 2\mu_0 c \times \text{flux d'énergie}$$

• Lumière non polarisée naturelle

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ J\ \delta_{\alpha\beta}$$

• Lumière complètement polarisée selon $\vec{E}_0$

$$\det J = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad J_{\alpha\beta} = E^{0\ *}_\alpha\ E^0_\beta$$

E_0 est constant dans le temps.

Cas général

$$J_{\alpha\beta} = \lambda_1 \, n^1_\alpha \, n^1_\beta + \lambda_2 \, n^2_\alpha \, n^2_\beta$$

(Axes principaux et valeurs propres)

Les effets physiques tels que :

- réflexion sur un plan,
- transmission par des cristaux,

permettent de produire ou d'analyser des faisceaux polarisés : le plus simple : biréfringence.

6. Lumière partiellement polarisée

Distinguer :
- état de polarisation d'une composante monochromatique de l'onde e.m
- propriétés statistiques d'un faisceau lumineux (ou e.m).

Les propriétés statistiques d'un faisceau (selon OZ), cée par un mélange arbitraire de composantes statistiques sont décrites par une matrice densité

$$\rho = \begin{pmatrix} < E_x^2 >_t & < E_x E_y >_t \\ < E_x E_y >_t & < E_y^2 >_t \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ symétrie 3 paramètres}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} E_x & = & Re \, \left\{ E_1 \, e^{-i(\omega t - kz)} \right\} \\ E_y & = & Re \left\{ E_2 \, e^{-i(\omega t - kz)} \right\} \end{array}$$

Il est avantageux de remplacer la matrice densité réelle, qui ne contient qu'implicitement le déphasage moyen entre E_x et E_y, par une matrice densité complète, plus utilisée :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} < E_1 E_1^* > & < E_1 E_2^* > \\ < E_2 E_1^* > & < E_2 E_2^* > \end{pmatrix}$$

le facteur $\frac{1}{2}$ provient de $< \cos^2 \, \omega t >$, si bien que

$$\frac{1}{2} \, < E_1 E_1^* > = < E_x^2 > \qquad \frac{1}{2} \, < E_2 E_2^* > = < E_y^2 >$$

$$\begin{array}{rcrcl} < E_1 E_2^* > & = & -i|E_+|^2 + i \, E_+ \, E_-^* & - & i \; E_- \; E_+^* + i|E_-|^2 \\ & = & i \left(|E_-|^2 - |E_+|^2 \right) & + & i \left(E_+ E_-^* - E_- E_+^* \right) \\ & = & i(|E_-|^2 - |^2) & + & i \left(2i \; Im \; (E_+ E_-^* \right) \end{array}$$

$$\boxed{< E_1 E_2^* > = -2 \; Im \; (E_+ E_-^*) + i \; \left(|E_-|^2 - |E_+|^2 \right)}$$

Exemples :

- lumière non polarisée :

$$\rho = \frac{|E|^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- lumière polarisée $\overrightarrow{OX}$

$$\rho = \frac{|E|^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- lumière polarisée Oy $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- lumière polarisée linéant à 45°

$$\rho = \frac{|E|^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Polarisation circulaire droite pour :

$$e_y = i\; E_x \to E_x = E \qquad E_y = i\; E$$

$$< |E_x|^2 >= \frac{1}{2}\; |E|^2 =< |E_y|^2 > < E_x E_y^* >= -i\; |E|^2$$

$$\boxed{\rho_{\lambda=+1} = \frac{|E|^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_{\lambda=-1} = \frac{|E|^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}}$$

- L'intensité lumineuse est $Tr\{\rho\}$.
- L'intensité transmise par un "filtre optique O" est $tr\{\rho O\}$.

7. Le flux d'énergie (vecteur de Poynting)

Considérons des charges en interaction avec le champ :

$$\frac{dE_c}{dt} = \int \vec{j}.\vec{E}\; d^3x$$

(Travail des forces électriques pendant le temps dt avec $\vec{j} = \rho\vec{v}$)

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \epsilon_0\mu_0\; \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

On va utiliser

$$\vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$\int \vec{j}.\vec{E}\; d^3x = -\frac{1}{\mu_0} \int \vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \epsilon_0 \int \vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{dE_c}{dt} = -\int \vec{j}.\vec{E}\; d^3x = \int \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\; \vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] d^3x$$

$-\frac{dE_c}{dt}$ est l'énergie fournie par les charges

$$\boxed{\begin{array}{l} U = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\ \vec{B}^2\right) \text{densité d'énergie du champ magnétique} \\[1em] \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\ \vec{E} \wedge \vec{B} \quad \text{flux d'énergie : vecteur de Poynting} \\[1em] -\frac{dE_c}{dt} = \int\ \frac{\partial U}{\partial t}\ d^3x + \int\ \vec{S}.\vec{n}\ d\sigma \end{array}}$$

La relation trouvée exprime la conservation de l'énergie. Pour une onde plane la moyenne temporelle du flux sera

$$\vec{S} = \ \frac{1}{2\omega\mu_0}\ \vec{\mathcal{E}} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}})^*$$

où l'on a pris en compte le facteur $< \cos^2 \omega t >= \frac{1}{2}$.

Soit

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0\omega}\ \vec{k}(\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{E}}^{\ *})}$$

(C'est le flux moyenné dans le temps de la partie réelle de $\vec{E}, \vec{B}$).

La densité d'énergie moyennée dans le temps U sera

$$U = \frac{1}{4}\ \left(\epsilon_0\ \vec{E}.\vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\ \vec{B}.\vec{B}^*\right)$$

La vitesse du flux d'énergie est bien trouvée égale à $\left(\vec{v} = c^2\vec{P}/E = \frac{\Phi}{v}\right)$

$$v = c = (\sqrt{\epsilon_0\mu_0})^{-1}$$