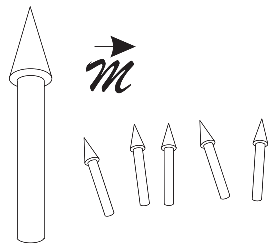
III - Milieux magnétiques

1. Le vecteur de magnétisation



De même que nous avons décrit le dipôle électrique de l'unité de volume par $\vec{P}(x)$, on décrira le moment magnétique de l'unité de volume par $\vec{M}(\vec{x})$: le vecteur aimantation. Dans un modèle microscopique

$$\boxed{\begin{array}{r} \vec{M}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) < \vec{\mu}(\vec{x}) > \\ \text{moment magnétique} \\ \text{moléculaire moyen} \end{array}}$$

$\rho(\vec{x})$: nombre de molécules/unité de volume.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o c}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \wedge (\vec{r} - \vec{x})}{|r - \vec{x}|^3} \qquad 1 \text{ dipôle } \mu$$

$$\longrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o c}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{x}) \wedge (\vec{r} - \vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|^3} \, d^3x$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o c}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{x}) \wedge \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) d^3x$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{M}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) = \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) \wedge \vec{M}(\vec{x}) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \left(\vec{\nabla}_x \wedge \vec{M}_x \right)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o c}{4\pi} \left[\int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{M}(\vec{x}) \right) + \int_S \frac{\vec{n} \wedge \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right]}$$

Démonstration

$$\int \vec{M} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) = \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \vec{\nabla} \wedge \vec{M} - \int \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right)$$

$$\boxed{\int \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}\right) \, d^3x = \int_S \, \vec{n} \wedge \vec{V} \, da}$$

On définira les densités de courant "fictive" de volume et de surface :

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{j_M} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad \overrightarrow{j_s} = -\vec{n} \wedge \vec{M} \\ \vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_o c}{4\pi} \int_V \dfrac{\overrightarrow{j_M} \, d^3x}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \dfrac{\mu_o c}{4\pi} \displaystyle\int_S \dfrac{\overrightarrow{j_s} \, d\sigma}{|\vec{r} - \vec{x}|} \end{array}}$$

2. Les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \, \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \Longrightarrow \qquad \text{dans un milieu homogène loin des surface}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \, (\vec{j} + \overrightarrow{j_M})$$

Les courants de surface ne contribuent pas :

$$\vec{\nabla}_r \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{1}{c} \left[\left(\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})}_{=0} - \triangle_r \, \vec{A} \right) \right]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{c} \, \nabla_r \vec{A} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \overrightarrow{j_M}(\vec{x}) \times -4\pi \, \delta_3 \, (\vec{r} - \vec{x})$$

Il n'y a PAS de contribution de surface car $-\dfrac{\mu_o}{4\pi} \int_S \overrightarrow{j_S}(\vec{x}) \times -4\pi \, \delta_3(\vec{r} - \vec{x}) \, d\sigma = 0$.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \, \left(\vec{j}_{\text{réel}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}\right)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_o \vec{M}) = \mu_o \, \vec{j}_{ext}$$

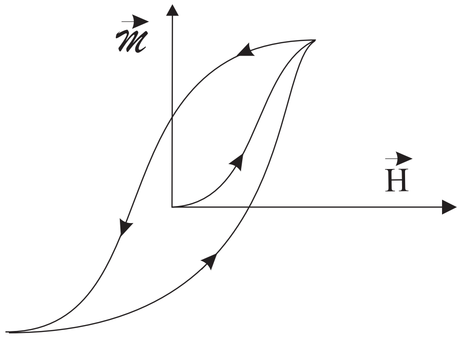
On posera $\mu_o \, \vec{H} = \vec{B} - \mu_o \, \vec{M}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{B} = \mu_o \, (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} \end{array}}$$

Dans un milieu **isotrope** on supposera $\vec{M} = \chi(H)\vec{H}$ pour un milieu linéaire isotrope $\chi(H) = \chi(0)$.

$$\boxed{\vec{B} = \mu_o \, (1 + \chi(H)) \, \vec{H} = \mu \, \vec{H}}$$

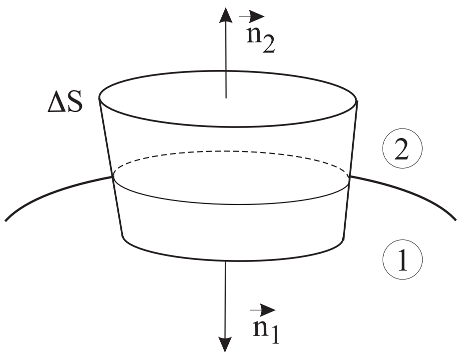
En réalité, la fonction $\chi(H)$ n'existe pas pour les milieux ferromagnétiques : $\vec{M}$ dépend de l'histoire de l'échantillon. C'est le phénomène d'**hystérésis**.



Il y a stabilisation du cycle après un grand nombre de boucles.
Remarque : comme précédemment dans le cas des diélectriques, nous avons omis la contribution des surfaces à $rot\ \vec{B}$.

3. Conditions aux limites pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$

A/ $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$

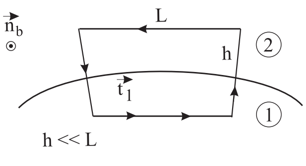


$$\int \vec{\nabla}.\vec{B}\ d^3x = 0 = (B_n(1) - B_n(2))\ \triangle S = 0$$

$$\boxed{B_n(1) = B_n(2)}$$

La composante normale de $\vec{B}$ est continue.

B/ $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \overrightarrow{j_{ext}}$



$$\oint \vec{H}.\vec{d\ell} = \int\ rot\ \vec{H}.\vec{n}\ ds = \int\ \left(\overrightarrow{j_{ext}}.\vec{n_b}\right)\ ds$$

$$|\vec{j}|\ \text{fini}$$

$$L\ \left(H_t(1) - H_t(2)\right) \leq |j_{\max}|\ L\ h \quad \forall\ h$$

$$\boxed{H_t(2) = H_t(1)}$$

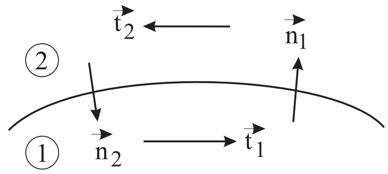
C/ Le cas des courants de surface

En présence de courants de **surface** de densité $\overrightarrow{j_S}$, $|j_{\max}|\ h$ est fini, $|j_{\max}|$ n'est plus borné.

Le raisonnement précédent ne s'applique pas

$$\left(\vec{j}.\vec{n}_b\right) h\ L = \left(\overrightarrow{j_s}.\overrightarrow{n_b}\right)\ L$$

$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}\right).\overrightarrow{t_1} L = \overrightarrow{j_S}.\overbrace{\left(\overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{n_1}\right)}^{\vec{n}_b}$$

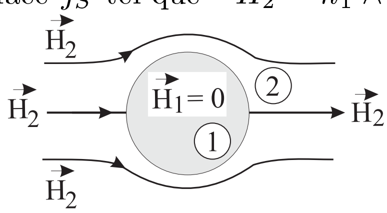


$$\boxed{\left(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}\right) = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{j_S}}$$

Cette relation pourra être utilisée pour des supraconducteurs. En présence de l'effet Meissner : le champ dans le supra est nul ($\overrightarrow{H_1} = \vec{0}$).

$\Longrightarrow$ le champ externe $\overrightarrow{H_2}\#0$

$\Longrightarrow$ il apparaît un courant de surface $\overrightarrow{j_S}$ tel que $-\overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{j_S} \Longrightarrow$



$$\boxed{-\overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{j_S}}$$

et il en résulte, compte tenu de $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{j_S} = 0$

$$\boxed{\overrightarrow{j_S} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{H_2}}$$

$$\overrightarrow{n_1} \wedge (\overrightarrow{H}_1 - \overrightarrow{H_2}) = \overrightarrow{j_S} - \left(\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{j_S}\right) \overrightarrow{n_1}$$
$$= 0$$

4. Energie magnétique

Les forces magnétiques ne fournissent pas **directement** de travail aux charges

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}\ dt = q\vec{E}.\vec{v}\ dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\delta W/\delta t = -\int \vec{j}.\vec{E}\ d^3x \\ \text{changement d'énergie du système}\end{array}}$$

Mais la **modification** d'une configuration de courant induit une variation de $\vec{B}$ qui fait apparaître un champ électromoteur $\vec{E}$ qui va lui même fournir un travail. C'est cette énergie que nous allons évaluer

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\delta U.I = -I \oint \delta\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$$

(énergie fournie **hors** effet joule) $= -I \int_S (\vec{\nabla} \wedge \delta\vec{E}).\vec{n}\ d\sigma = I \int_S \frac{\partial\, \overrightarrow{\delta B}}{\partial t}.\vec{n}\ d\sigma$ et en tirant partie de $\vec{B} = \frac{1}{c}\ rot\ \vec{A}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\delta W = \frac{I}{c} \oint \overrightarrow{\delta A}.\overrightarrow{d\ell} \text{ (boucle plane)} \\ \delta W = \frac{1}{c} \int \vec{j}.\overrightarrow{\delta A}\ d^3x \text{ conduct. 3d)}\end{array}}$$

Cette expression peut être également retrouvée à partir de

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\int \vec{j}.(\vec{E})\ d^3x = -I \int (\vec{E}).\vec{d\ell}$$

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\int \vec{j}.\delta\vec{E}\ d^3\vec{x}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{et comme}$$

$$\delta W = +\frac{I}{c} \int \delta\vec{A}.\vec{d\ell}$$

On revient à l'évaluation de la puissance fournie au système de courants

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{\mu_o} \int \left[\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right).\vec{E}\right]\ d^3x$$

Avec dans l'approximation quasi-statique (changements lents)

$$\boxed{\mu_o\, \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{B} \wedge \vec{E}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}).\vec{E} - \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

$$\Longrightarrow (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}).\vec{E} = \vec{\nabla}.(\vec{B} \wedge \vec{E}) - \vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{1}{\mu_o} \int \vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d^3x + \frac{1}{\mu_o} \int_S (\vec{E} \wedge \vec{B}).d\sigma$$

Pour un volume grand, dans l'hypothèse d'un changement quasi-statique des courants le champ crée par $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{E}$ est petit et il n'y a pas de rayonnement. L'intégrale de surface est nulle. On définira l'énergie magnétique

$$\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2\mu_o} \int \vec{B}^2\, d^3\, x}$$

Dans un milieu magnétique :

au lieu de $\vec{j} = \frac{1}{\mu_o}\, \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

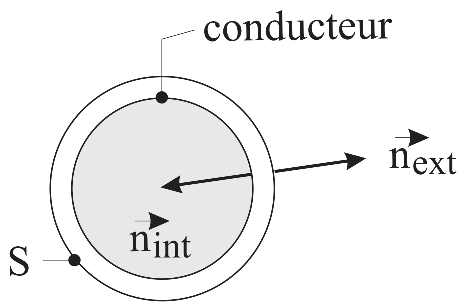
$\vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \int \vec{B}.\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\, d^2x$$

et si $\vec{H}$ et $\vec{B}$ sont liés **linéairement** (pas d'hystéresis, etc...)

$$\boxed{W_{mag} = \tfrac{1}{2} \int \vec{B}.\vec{H}\, d^2x}$$

Remarque : on est passé d'une intégrale intérieure aux conducteurs $\int \vec{j}.\vec{E}\, d^3x$ a une intégrale sur tout le volume.



On aurait dû prendre des précautions avec le Théorème de Gauss :

$$\int_{V_{cond}} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right).\delta E = \int_{V_{cond}} \vec{B}.\delta\vec{B} + \int_{S_{ext}} \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right).\vec{n}\; d\sigma$$

$$\begin{array}{llll} \displaystyle\int_{S_{ext}} = -\int_{S_{int}} & = +\displaystyle\int_{ext} \vec{B} \cdot (rot\vec{E}) + & \displaystyle\int_{S_{\infty}} \\ +\infty \qquad \infty & \text{complète} & = 0 \\ & \text{l'intégrale} & \end{array}$$

L'intégrale sur la surface à l'infini est nulle.