

XIII - Optique guidée

1. Introduction

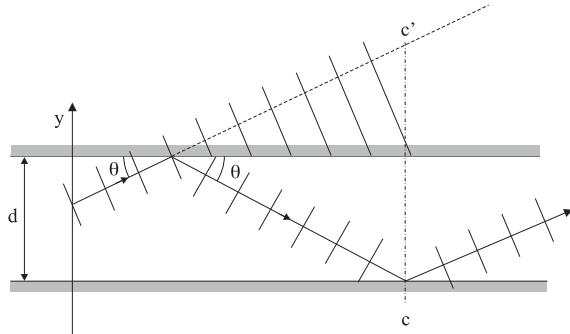
Les fibres optiques sont des systèmes de transport de lumière analogues aux guides d'onde. Les méthodes analytiques utilisées précédemment s'appliquent, mais les conditions aux limites sont le plus souvent différentes, les parois n'étant pas (en général) conductrices. Inversement, les méthodes géométriques applicables à l'approximation des rayons permettent de comprendre qualitativement les résultats.

Nous examinerons successivement le transport de lumière par :

- deux miroirs plans,
- le guide diélectrique plan,
- la fibre optique cylindrique.

2. Les deux miroirs plans : les modes TE

a) Les modes propres



Cette configuration, qui n'est jamais utilisée en pratique (pourquoi ?) illustre les résultats généraux.

Le champ électrique étant parallèle au miroir, il doit s'annuler à la surface \Rightarrow la réflexion s'accompagne d'un déphasage de π sans changement d'amplitude.

Il y aura propagation si les ondes ayant subi deux réflexions sont en **phase** avec l'onde initiale

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} 2d \sin \theta = 2\pi m \quad m = 1, 2\dots$$

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{2d}$$

$$m = 1, 2\dots$$

Lorsque cette condition est remplie, les ondes ayant subi un nombre **pair** de réflexions s'ajoutent.

La composante y du vecteur d'onde $k_y = n \frac{\omega}{c} \sin \theta_m$ est quantifiée :

$$k_{ym} = m \frac{\pi}{d}$$

L'onde guidée comprend deux ondes planes d'angle $\pm \theta$, de vecteurs d'onde $(0, k_y, k_z)$ et $(0, -k_y, k_z)$. Leur somme ou différence varient comme $e^{\pm ik_z z}$ avec $k_z = k \cos \theta$.

$$k_z^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \sin^2 \theta)$$

$$k_{zm}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{m^2 \pi^2}{d^2}\right)$$

b) Le champ électrique

$$E_x = A_m \left[e^{i(-k_{ym}y + k_{zm}z)} + e^{i(m-1)\pi} e^{i(k_{ym}y + k_{zm}z)} \right]$$

Le champ E_x est la somme des contributions $\pm \theta$ et il doit s'annuler à 0 et D .

$$E_x(y, z) = A_m \left[e^{-ik_{ym}y} e^{ik_{zm}z} + e^{i(m-1)\pi} + e^{ik_{ym}y} e^{ik_{zm}z} \right]$$

$$E_x(y, z) = a_m u_m(y) e^{-ik_m z}$$

$$u_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \cos \left(\frac{m\pi y}{d}\right) & m = 1, 3, 5 \\ \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \frac{m\pi y}{d} & m = 2, 4, 6 \end{cases}$$

c) Vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{en utilisant} \quad k_{zm}^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{d^2}$$

$$2k_{zm} \frac{dk_z}{d\omega} = 2n^2 \frac{\omega}{c^2} \quad \frac{dk_z}{d\omega} = 2n^2 \frac{\omega}{c^2} \frac{1}{n \frac{\omega}{c} \cos \theta_m}$$

$$v_g = \frac{c}{n} \cos \theta_m$$

L'interprétation géométrique de la relation est évidente.

3. Les modes TM (\vec{B} selon x)

On partira également d'une onde élémentaire TEM, \vec{E} a des composantes selon y et z comme E_z est // au plan du miroir, E_z doit s'annuler à la surface et subir un changement de phase de π : $E_{zm}(y, z)$ est la somme d'une onde $A_m e^{ik_{ym}y} e^{ik_{zm}z}$ (montante et d'une onde $e^{i(m-1)\pi} e^{-ik_{ym}y} e^{ik_{zm}z}$ descendante.

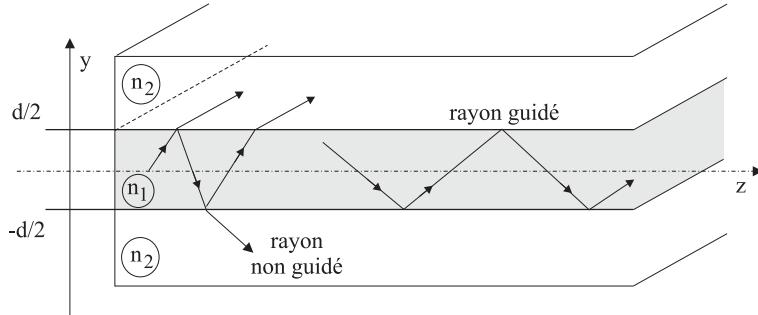
$$E_z(y, z) = \begin{cases} a_m \sqrt{\frac{2}{d}} \cos \frac{m\pi y}{d} e^{+ik_{zm}z} & m = 1, 3, 5, \dots \\ a_m \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \frac{m\pi y}{d} e^{+ik_{zm}z} & m = 2, 4, 6 \end{cases}$$

$a_m = \sqrt{2d} A_m$ (m pair) et $a_m = i\sqrt{2d} A_m$ (impair)

d) Fréquence de coupure

$$\boxed{\lambda_{max} = 2d}$$

4. Les guides diélectriques plans



On considère de nouveau une onde monochromatique TEM $\lambda = \lambda_o/n_1$. Elle se propage dans le cœur d'indice n_1 si $\theta < \bar{\theta}_c$ avec $\cos \bar{\theta}_c = \frac{n_2}{n_1}$. La vitesse de phase est c/n_1 :

$$k_x = 0 \quad k_y = \frac{n\omega}{c} \sin \theta$$

$$k_z = n \frac{\omega}{c} \cos \theta$$

Les modes propres doivent vérifier la condition d'addition de phase : le déphasage doit augmenter de $2\pi m$ après deux réflexions. On doit tenir compte de la phase φ_r à la réflexion diélectrique :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \times 2d \sin \theta - 2\varphi_r = 2m \pi$$

$$\Leftrightarrow 2k_y d - 2\varphi_r = 2m \pi$$

φ_r est une fonction de θ et dépend de la polarisation de l'onde. (TE ou TM).

a) Modes TE

Si E a une composante selon O_x (TE)

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{\sin^2 \bar{\theta}_c}{\sin^2 \theta} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\iff \tan \left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta - m \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\sin^2 \bar{\theta}_c}{\sin^2 \theta} - 1 \right)^{1/2}$$

les composantes correspondantes z du vecteur d'onde seront :

$$k_{zm} = n \frac{\omega}{c} \sin \theta_m$$

b) Nombre de modes TE

Le nombre de mode TE est lié au nombre de solutions de l'équation précédente. C'est le plus petit entier plus grand que $\frac{\sin \bar{\theta}_c}{\lambda/2d}$ on le notera M :

$$M = \text{ppsup} \left(\frac{\sin \bar{\theta}_c}{\lambda/2d} \right)$$

$$M = \text{ppsup} \left(\frac{2d}{\lambda_o} ON \right)$$

“L'ouverture numérique” ON est définie par

$$ON = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \lambda/2d > \sin \theta_c \\ \text{ou } \frac{2d}{\lambda} ON < 1 \end{array} \right\} \quad \text{1 seul mode peut se propager}$$

Il n'y a PAS de fréquence de coupure.

c) Le champ électrique

Le champ électrique interne s'obtient en ajoutant les deux ondes TEM aux angles θ_m et $-\theta_m$ par rapport à l'axe z . Les composantes des vecteurs d'onde sont $(0, \pm n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_m, n_1 \frac{\omega}{c} \cos \theta_m)$. Elles ont la même amplitude et un déphasage $m\pi$ au milieu de la tranche n_1 ($y = 0$)

$$E_x(y, z) = a_m u_m(y) e^{ik_m z}$$

$$u_m(y) = \begin{cases} \cos \frac{2\pi \sin \theta_m}{\lambda} y & m = 0, 2, 4 \\ \sin \frac{2\pi \theta_m}{\lambda} y & m = 1, 3, 5 \end{cases}$$

Pour $-\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}$, avec $\lambda = \frac{c}{\omega} \frac{2\pi}{n}$ le champ externe s'obtient à partir des conditions aux limites et de l'équation de Helmholtz. Il varie comme $e^{ik_m z}$.

$$E_x(y, z) = a_m u_m(y) e^{ik_m z}$$

vérifie

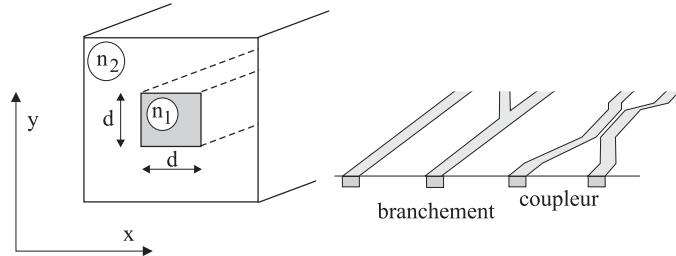
$$\left(\Delta + n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_x(y, z) = 0$$

$$\frac{d^2 u_m}{dy^2} - \gamma_m^2 u_m = 0$$

$$\gamma_m^2 = \underbrace{n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2 \theta_m - n_2^2}_{k_m^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

Mais $k_m z > n_2 \frac{\omega}{c}$ pour les modes guidés si bien que $\gamma_m^2 > 0$ a pour solution les fonctions $e^{-\gamma_m y}$ et $e^{\gamma_m y}$. Seules les solutions décroissantes vérifient les équations de Maxwell avec les conditions aux limites :

$$\boxed{\gamma_m = n_2 \frac{\omega}{c} \left(\frac{\cos^2 \theta_m}{\cos^2 \theta_c} - 1 \right)^{1/2}}$$



d) Application

On utilise plutôt des guides d'onde bidimensionnels.