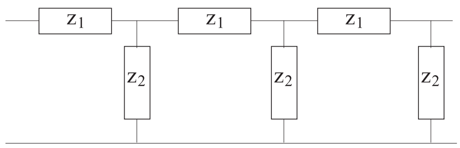
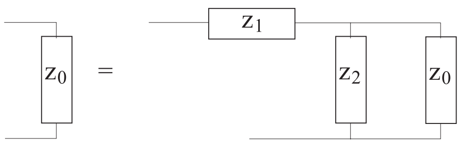
XII - Guides d'onde - Lignes

1. Suite de mailles identiques

On considère toujours des potentiels et courants **périodiques**



L'impédance globale du circuit ($I = U/Z_0$) se calcule par itération :



$$Z_0 = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2}} \Rightarrow Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$

et si Z_1, Z_2 n'ont pas de partie résistive :

prenons par exemple $Z_1 = i\omega L \qquad Z_2 = 1/i\omega C$

$$Z_0 = \frac{1}{2}\, i\omega L + \sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 L^2/4} = \frac{1}{2}\, i\omega L + Z_c$$

Z_c est **l' impédance caractéristique**.

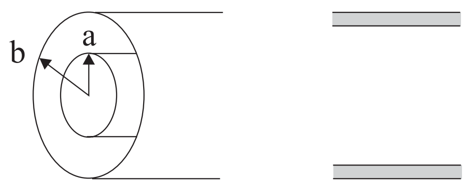
• Si $\omega^2 < \frac{4}{LC}$ Z_C réelle $\Rightarrow$ il n'y a **pas** absorption d'énergie : chaque élément est imaginaire pur, mais il y a atténuation sans dissipation par réflexion/mailles

• Si $\omega^2 > \frac{4}{LC}$ Z_C réelle $\Rightarrow$ pas d'absorption aux grandes fréquences (pas de propagation).

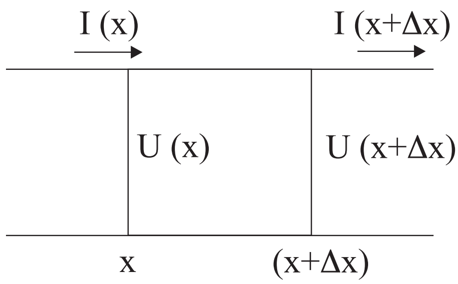
• $\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ est la fréquence de coupure

Exercice : Trouver une solution $I_i = C(q)^i$

2. Ligne de transmission



(éléments de conducteurs avaec invariance/translation)



L = inductance/unité de longueur
C = capacité/unité de longueur

$$V(x+\Delta x) - V(x) = -(L_0 \Delta x)\,\frac{\partial I}{\partial t} \quad (\Phi = LI)$$

$$I(x+\Delta x) - I(x) = -(C_0 \Delta x)\,\frac{\partial V}{\partial t} \quad (Q = CV)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

Equation des ondes avec $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = c$! (voir plus loin p. 11. Ondes Tranverses Electro-Magnétiques.

$$V(x,t) = f(x - vt) \text{ ou } g(x + vt) = V_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{v})}$$

2 ondes peuvent se propager

$$V_+ = Z_0 \, I_+$$

$$V_- = Z_0 \, I_-$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \text{ impédance caractéristique}$$

$$\left(\frac{\partial V_+}{\partial x} = i \, \frac{\omega}{v} \, V_+ = \; + \, i L \omega I_+ \Rightarrow \frac{V_+}{I_+} = L v \right)$$

Pour un conducteur coaxial

$$L_0 = \frac{\text{Log } b/a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \qquad C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log } (b/a)} \qquad L_0 C_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$Z_0 = \frac{\text{Log } (b/a)}{2\pi\epsilon_0 c} \;\sim\; 60 \; \Omega \text{ pour Log } b/a = 1 \text{ (voir paragraphe précédent)}$$

Attention : L_0, C_0 impédances par unité de longueur.

3. Le guide d'ondes

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans des cylindres creux, de section transverse circulaire, rectangulaire, ou quelconque. La ligne examinée précédemment en est un cas particulier. Ce sont les différents éléments de la paroi qui vont permettre l'apparition d'impédances distribuées. On supposera les conducteurs **parfaits**.

- $\Rightarrow$ pas de résistance,
- $\Rightarrow$ pas de pénétration des champs (voir Chapitre XIII),
- $\Rightarrow$ champs électriques normaux.

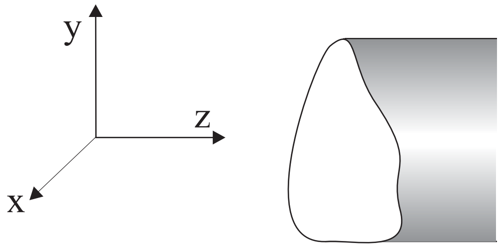
Les dépendances temporelles sont supposées sinusoïdales $e^{-i\omega t}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \, \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &+ i\omega\vec{B} = +\vec{\nabla}\vec{E} \\ &- i\,\frac{\omega}{c^2}\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} \\ &\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left\{ \begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right\} = 0$$



Guide cylindrique ou rectangulaire.

A cause de la géométrie cylindrique on cherchera des solutions du type

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y)e^{\pm\, i(kz)-i\omega t}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}(x,y)e^{\pm\, ikz-i\omega t}$$

($\Longleftrightarrow$ transformée de Fourier $z \to k_z$)

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 = \Delta_t - k^2$$

$$\left[\Delta_t + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \left\{ \begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right\} = 0$$

On va distinguer les composantes transverses et longitudinales :

$$\vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_t = \vec{e}_3 E_z + \vec{E}_t$$

$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_t = \vec{e}_3 B_z + \vec{B}_t$$

Les équations de Maxwell peuvent être décomposées en utilisant

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_z = (\vec{\nabla}_t \wedge \vec{V}_t).\vec{e}_3 \qquad \vec{V}_t = (\vec{e}_3 \wedge \vec{V}) \wedge \vec{e}_3$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_t = \vec{e}_3 \wedge \left(\vec{\nabla}_t V_z - \frac{\partial \vec{V}_t}{\partial Z} \right) = \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{V}_\mu)$$

$$i\omega B_z = (\vec{\nabla}_t \wedge \vec{E}_t).\vec{e}_3$$

$$\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} = + i\omega \ \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) = -\vec{e}_3 \wedge \left(\vec{\nabla}_t E_z - \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} \right)$$

$$- \frac{i\omega}{c^2} E_z = (\vec{\nabla}_t \wedge \vec{B}_t).\vec{e}_3$$

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = i \ \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = -\vec{e}_3 \wedge \left(\vec{\nabla}_t B_z - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z} \right)$$

Soit en simplifiant les produits vectoriels

$$\boxed{\begin{array}{cc} i\omega B_z = (\vec{\nabla}_t \wedge \vec{E}_t).\vec{e}_3 & + i\omega(\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) = -\vec{\nabla}_t E_z + \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} \\ - i\frac{\omega}{c^2} E_z = (\vec{\nabla}_t \wedge \vec{B}_t).\vec{e}_3 & - i\frac{\omega}{c^2}(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = -\vec{\nabla}_t B_z + \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z} \\ \vec{\nabla}_t.\vec{B}_t + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & \vec{\nabla}_t.\vec{E}_t + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ si E_z et B_z sont connus et que la solution est bien de la forme

$$\vec{E} \ e^{\pm \ i(kz) - i\omega t} \qquad \vec{B} \ e^{\pm \ i(kz) - i\omega t}$$

les vecteurs $\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$ peuvent être **calculés** et sont donc déterminés.

En utilisant la dépendance spatiale en $e^{\pm ikz}$ les relations précédentes peuvent être transformées en une paire d'équations qui va nous permettre de classer les solutions en types plus simples.

$$i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \ \vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t = \frac{\omega}{c^2} \vec{\nabla}_t E_z \pm k \ \vec{e}_3 \wedge \vec{\nabla}_t B_z$$

$$\frac{i}{c^2} \ \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \ \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t = \omega \vec{\nabla}_t B_z \pm k \ \vec{e}_3 \wedge \vec{\nabla}_t E_z$$

et en multipliant vectoriellement par $\vec{e}_3$

$$\vec{B}_t = \frac{+i}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \, \vec{e}_3 \wedge \left[\frac{\omega}{c^2} \, \vec{\nabla}_t \, E_z \mp k \, \vec{e}_3 \wedge \vec{\nabla}_t B_z\right]$$

$$\vec{E}_t = \frac{i \, c^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \, \vec{e}_3 \wedge \left[\omega \vec{\nabla}_t B_z \pm k \, \vec{e}_3 \wedge \vec{\nabla}_t E_z\right]$$

La solution générale peut être construite en combinant linéairement des solutions ayant $E_z = 0$ ou $B_z = 0$. Dans certains cas particuliers, une solution $E_z = B_z = 0$ sera permise.

On notera le cas particulier de la propagation dans le vide : pour $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ (onde plane) les équations écrites sont automatiquement satisfaites.

A/ Les ondes Transverses Electro Magnétiques (TEM)

Les ondes transverses électromagnétiques sont les plus "naturelles" que l'on puisse rechercher : elles ont des champs électriques **et** magnétiques perpendiculaires à la direction de propagation, comme l'onde plane

$$E_z = 0 \qquad \text{et} \qquad B_z = 0$$

Les équations de Maxwell impliquent alors ($\vec{E} = \vec{E}_{TEM}, \vec{B} = \vec{B}_{TEM}$)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \wedge \vec{B}_{TEM} &= \vec{\nabla}_t \wedge \vec{E}_{TEM} = 0 \\ \vec{\nabla}_t . \vec{B}_{TEM} &= \vec{\nabla}_t . \vec{E}_{TEM} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \wedge \vec{E}_{TEM} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{E}_{TEM} = -\vec{\nabla}_t \phi_{TEM} \\ \vec{\nabla}_t . \vec{E}_{TEM} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta_t \phi_{TEM} = 0 \end{aligned}$$

$\vec{E} \wedge \vec{n} = 0 \Rightarrow$ la surface est une équipotentielle
$\vec{n}.\vec{B} = 0$ (Gauss et $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$)

- $\vec{E}_{TEM}$ est solution d'un problème **électrostatique**

- L'équation $\left[\Delta_t + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \left\{\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix}\right\} = 0$

implique alors $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, comme pour une onde plane dans le vide

k est réel $\forall \omega$ (pas d'absorption)

• $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont reliés par

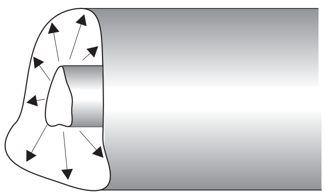
$$-\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z} = \pm\, i\, k\vec{B}_t = \pm\, i\, \frac{\omega}{c}\vec{B}_t = -i\,\frac{\omega}{c^2}\,\vec{e}_3 \,\wedge\, \vec{E}_t$$

$\vec{B}_{TEM} = \pm\,\frac{1}{c}\,\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_{TEM}$ selon le signe de $e^{\pm\, ikz}$.

• Les champs $\vec{B}_{TEM}, \vec{E}_{TEM}$ sont orthogonaux,

• Les ondes TEM ne peuvent pas exister dans un cylindre creux “simplement connexe” : tuyau ou rectangulaire infini (de conductivité infinie). En effet, la surface du cylindre est une équipotentielle, et l'on peut supposer $V = 0$. La seule fonction harmonique $\Delta\phi = 0$ satisfaisant, $\phi = 0$ sur un contour fermé fini est $\phi = 0$ s'il n'y a pas d'autres surfaces fermées limites.

Il faut avoir au moins deux surfaces (Exemple : ligne coax.) pour avoir une onde TEM.



$$\lambda = \frac{k}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c}$$

Variation en z.

B/ Ondes transverses magnétiques, ondes transverses électriques

Dans les deux cylindres creux, on a vu que la solution générale peut être construite à partir de 2 types de configuration de champ. Pour des parois parfaitement conductrices

$\vec{n}.\vec{B}|_s = 0$, compte tenu de $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ et du théorème de Gauss

$\vec{n} \wedge \vec{E}|_s = 0$ ($\vec{E}$ normal).

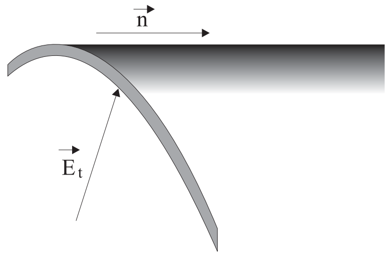
$$\int \vec{E}.\vec{d\ell} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Delta\ell\ \vec{t}$$

$$= \int_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}).\vec{n}d\sigma = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,.\,\vec{n}d\sigma = -\underbrace{\delta h \Delta\ell \left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right|}_{\text{quand } \delta h \to 0}$$

$$\Rightarrow \text{disc}\left(\vec{E}_t\right) = 0$$

- A la surface $\vec{E}_{cond} = 0$ et $disc\,(\vec{E}_t) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{E_z|_s = 0}$$



En outre, $(\vec{e}_3 \wedge \vec{n}).\vec{E}_t = 0$ ($\vec{E}$ normal).

- L'équation $i\frac{\omega}{c^2}\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = \vec{\nabla}_t\, B_z - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z}$ entraîne par projection sur $\vec{n}$
- $i\,\frac{\omega}{c^2}\,\vec{n}\,.\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = \vec{n}\,.\,\vec{\nabla}_t B_z - \frac{\partial}{\partial z}\,(\vec{n}\,.\,\vec{B}_t)$

- Le membre de gauche est nul ($\vec{E}$ normal) et $\vec{n}\,.\vec{B}|_s = 0$

- $\Rightarrow (\vec{n}\,.\,\vec{\nabla}_t)B_z = \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0$

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0}$$

Les conditions aux limites sont donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{E} \wedge \vec{n}|_s = 0 \qquad \vec{B}.\vec{n}|_s = 0 \\[2ex] E_z\Big|_s = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\right|_s = 0 \\[2ex] \text{avec l'équation de propagation} \\[2ex] \left[\Delta_t + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \left\{\begin{matrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{matrix}\right\} = 0 \end{array}}$$

A ω fixé, seules certaines valeurs de k seront possibles (modes propres) dans un guide d'onde (à k donné, seulement certains ω pour une cavité).

Comme les conditions aux limites diffèrent pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les valeurs propres seront différentes.

Ondes transverses magnétiques (TM)

$B_z = 0$ **partout** $E_z\big|_s = 0$

Ondes transverses électriques (TE)

$E_z = 0$ **partout** $\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0$

B/1 TM Transverse Magnétique ($B_z = 0$)

$$-i\,\frac{\omega}{c^2}(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = -\vec{\nabla}_t B_z - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z}$$

(Nécessité de la distinction TM/TE rot $(\vec{B}_t) \neq (\text{rot } \vec{B})_t$).

Comme $B_z = 0$, il en résulte une relation entre $\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$

$$\vec{B}_t = \pm\,\frac{\omega}{kc^2}\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t)$$

Cette équation permet de relier les champs transverses et longitudinaux

$$(\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) = \pm\,\frac{\omega}{c^2 k}\,(-\,\vec{E}_t) = \mp\,\frac{\omega}{c^2 k}\,\vec{E}_t$$

$$+\ i\,\omega\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) = \vec{\nabla}_t E_z - \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z}$$

$$= +\,i\omega \times (\mp)\,\frac{\omega}{c^2 k}\,\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t E_z \mp i\,k\,\vec{E}_t$$

$$i\vec{E}_t\,(\mp)\left(\frac{\omega^2}{c^2 k} - k\right) = \vec{\nabla}_t E_z$$

$$\boxed{\vec{E}_t = \pm\left(\frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right)\vec{\nabla}_t E_z \qquad TM}$$

B/2 TE Transverse Electrique ($E_z = 0$)

De même $i\omega(\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) = \vec{\nabla}_t\, E_z - \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -\,(\pm) ik\, \vec{E}_t$

$$-\vec{E}_t = \pm\,\frac{\omega}{k}\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{B}_t) \;\Rightarrow\; (\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = \pm\,\frac{\omega}{k}\,\vec{B}_t$$

$$i\,\frac{\omega}{c^2}\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_t) = \vec{\nabla}_t B_z - (\pm) ik\,\vec{B}_t \qquad \text{mais} \qquad E_z = 0 (TE)$$

$$i\,\frac{\omega}{c^2}\left(\mp\,\frac{\omega}{k}\vec{B}_t\right) = \vec{\nabla}_t B_z + (\mp) ik\,\vec{B}_t$$

$$\boxed{\begin{array}{c} TE \\[1em] \vec{B}_t = \pm\,\dfrac{ik}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}\,\vec{\nabla}_t\, B_z \end{array}}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \vec{E}_t \\ \vec{B}_t \end{Bmatrix} = \pm\,\frac{ik}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}\,\begin{Bmatrix} \vec{\nabla}_t\, E_z \\ \vec{\nabla}_t\, B_z \end{Bmatrix} \text{ pour } \begin{Bmatrix} TM(B_z = 0) \\ TE(E_z = 0) \end{Bmatrix}}$$

• Les champs transverses peuvent dont être obtenus à partir des champs longitudinaux. On définit

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \;\;,\;\; \psi = E_z \quad \text{ou} \quad B_z$$

comme $\left(\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right)$ vérifient $(\Delta_t + \gamma^2)\,\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$

$$\boxed{(\Delta_t + \gamma^2)\psi = 0}$$

avec les conditions aux limites

$$\underset{(TM)}{E_z\Big|_s = \psi\Big|_s = 0} \qquad \text{ou} \qquad \underset{(TE)}{\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_s = 0}$$

C'est un problème de valeurs propres. Les solutions vérifient $\gamma^2 >> 0$ (ψ doit osciller). A ω donné, plusieurs γ_λ permises.

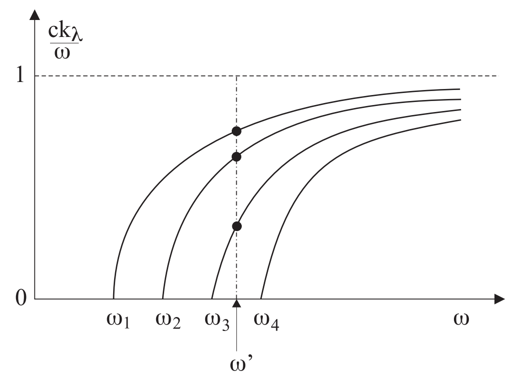
Remarque : On a écarté l'inspection des solutions $E_z \neq 0$ **et** $B_z \neq 0$: ce n'est pas nécessaire. Il suffit de combiner TM et TE.

Pour le mode λ

$$k_\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_\lambda^2 \qquad \omega_\lambda = c\gamma_\lambda \qquad k_\lambda = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$$

k_λ sera toujours inférieur à sa valeur $k = \frac{\omega}{c}$ dans le vide.

ω_λ est la fréquence de coupure pour un mode donné : si $\omega < \omega_\lambda$ l'onde ne se propage pas (mode évanescent).



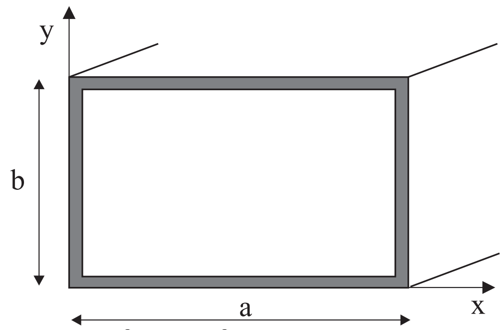
3 modes permis pour $\omega = \omega'$.

La vitesse de **phase :**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}} > c\ !$$

La vitesse de phase est toujours $> c$ dans un guide d'onde. Elle devient infinie à la fréquence de coupure.

C/ Le guide d'onde rectangulaire



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)\ \psi =\ 0$$

On va chercher la solution (TE)

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ à } \begin{Bmatrix} x = 0, a \\ y = 0, b \end{Bmatrix} \text{ pour } B_z$$

ψ représente B_z avec $E_z = 0$.

$$\psi_{mn}(x, y) = B_z^0\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2\ \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

$$\omega_{mn} = c\ \pi\ \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Soit a le plus grand des côtés $a > b$. La plus basse fréquence de coupure TE est $m = 1,\ n = 0,\ \omega_{10} = \frac{c\pi}{a}$

$$TE(1, 0) \qquad B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{i(kz - \omega t)}$$

$$B_x =\ -\frac{ika}{\pi}\ B_0\ \sin\ \left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_y =\ i\ \frac{\omega a}{c\pi}\ B^0\ \sin\ \left(\frac{\pi x}{a}\right)\ e^{i(kz-\omega t)}$$

Il y a une différence de phase de 90° entre B_x et B_z. Le mode $TE_{1,0}$ a la plus basse fréquence de coupures des modes TE, TM et est souvent choisi : on peut travailler à plus basse fréquence.

D/ Flux d'énergie

Le flux d'énergie sera donné par la partie réelle du vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,(\vec{E}\wedge\vec{B}) \quad \rightarrow \quad <\vec{S}>_t = \frac{\vec{e}_3}{2\mu_0}\,\mathcal{R}e\,\left\{(\vec{E}\wedge\vec{B}^*)\right\}$$

(Exemple de l'onde plane $<\vec{S}>= \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\wedge\vec{B} < \cos^2\omega t >= \frac{1}{2\mu_0}\,(\vec{E}\wedge\vec{B})$)

Pour les champs TM et TE :

$$\boxed{\begin{array}{l} TM : <\vec{S}> = \dfrac{\vec{e}_3}{2\mu_0}\,\dfrac{\omega k}{c^2\gamma^4}\,\left\{\vec{\nabla}_t\,E_z.\vec{\nabla}_t\,E_z^*\right\} \\[2ex] TE : <\vec{S}> = \dfrac{\vec{e}_3}{2\mu_0}\,\dfrac{\omega k}{\gamma^4}\,\left\{\vec{\nabla}_t\,B_z.\vec{\nabla}_t B_z^*\right\} \end{array}}$$

avec $\gamma^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

On peut calculer l'intégrale :

$$\begin{array}{l} P = \displaystyle\int_A \vec{S}\,.\,\vec{e}_3 d\sigma \qquad A = \text{section du guide} \\ P = \dfrac{\omega k}{2\mu_0\gamma^4}\displaystyle\int (\vec{\nabla}_t\psi).(\vec{\nabla}_t\psi^*)d\sigma \\ \psi = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{c}\vec{\nabla}_t E_z \\ \vec{\nabla}_t B_z \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad \left\{\begin{array}{c} TM \\ TE \end{array}\right\} \end{array}$$

à l'aide du théorème de la divergence : $\int \vec{\nabla}.\vec{\nabla}v = -\int u\Delta v + \int \text{ div }(u\vec{\nabla}v)$

$$\int_A (\vec{\nabla}_t\psi).(\vec{\nabla}_t\psi)^*\,d\sigma = \underbrace{\int_c \psi^*\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\ell}_{=0} - \int_A (\psi^*\Delta_t\psi)\,d\sigma$$

(conditions aux limites TE ou TM) mais $\Delta_t\psi = -\gamma^2\psi$

$$\boxed{\begin{array}{ll} P = \dfrac{\omega k}{2\mu_0\gamma_\lambda^2}\displaystyle\int_A \psi^*\,\psi\,d\sigma & \psi = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{c}\,E_z(TM) \\ B_z(TE) \end{array}\right\} \\[2ex] \gamma_\lambda^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k_\lambda^2 = \dfrac{\omega_\lambda^2}{c^2} & k = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega_\lambda^2}{c^2}} \end{array}}$$

La densité d'énergie u est

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^{\,2} + \frac{\vec{B}^{\,2}}{\mu_0}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} <\vec{E}_t^2> &= \frac{k^2}{2\gamma^4}\ \vec{\nabla}_t E_z.\vec{\nabla}_t E_z^* \\ \\ <\vec{B}_t^2> &= \frac{\omega^2}{k^2 c^4}\ <E_t>^2 \end{aligned}\right\}\ TM$$

On doit ajouter

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 <E_z^2>\right) \ = \ \frac{1}{4}\ \epsilon_0 E_z E_z^*$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{<B_z^2>}{\mu_0} \ = \ \frac{1}{4}\ \frac{1}{\mu_0}\ B_z B_z^*$$

$$\Rightarrow \ = \ \frac{k^2}{4\gamma^4}\ \left(\epsilon_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\ \frac{1}{k^2}\ \frac{1}{\mu_0 c^2}\right)\ \left(\vec{\nabla}_t E_z.\vec{\nabla}_t E_z^*\right)$$

$$u = \frac{k^2}{4\gamma^4}\ \epsilon_0\ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right)(\vec{\nabla}_t E_z.\vec{\nabla}_t E_3^*) + \frac{\epsilon_0}{4}\ E_z E_z^* \qquad (TM)$$

et de manière analogue

$$u = \frac{c^2 k^2 \epsilon_0}{4\gamma^4}\ \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right)(\vec{\nabla}_t B_z.\vec{\nabla}_t B_z^*) + \frac{1}{4\mu_0}\ B_z B_z^* \qquad (TE)$$

avec la même définition

$$\psi = \begin{Bmatrix} \frac{1}{c}\ E_z \\ B_z \end{Bmatrix}$$

$$u = \frac{c^2 k^2 \epsilon_0}{4\gamma^4}\ \left(1 + \ \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right)\ \vec{\nabla}_t \psi.\vec{\nabla}_t \psi^*$$

et pour l'énergie par unité de longueur $\frac{dU}{dz}$

$$\frac{dU}{dz} = \ \frac{c^2 k^2 \epsilon_0}{4\gamma^4}\ \left(1 + \ \frac{\omega^2}{c^2 k^2}\right)\ \int_A\ \vec{\nabla}_t \psi.\vec{\nabla}^* \psi\ d\sigma + \ \frac{c^2 \epsilon_0}{4}\ \int\ \frac{E_z E_z^*}{c^2}\ d\sigma$$

et la même transformation que précédemment aboutira à

$$\frac{dU}{dz} = \frac{c^2k^2\epsilon_0}{4\gamma^4}\left(\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{k^2} + \frac{\omega^2}{k^2c^2}\,\gamma^2\right)\int_A \psi^*\,\psi\,d\sigma = \frac{c^2\epsilon^0}{2\gamma^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\int_A \psi^*\,\psi\,d\sigma$$

$$\frac{P}{dU/dz} = \frac{\omega k}{2\mu_0\gamma^2}\,\frac{2\gamma^2}{c^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \frac{k}{\mu_0\omega\epsilon_0} = c^2\,\frac{k}{\omega} = c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega^2}}$$

$$\frac{P}{dU/dz} = v_g = \frac{d\omega}{dk} = \text{vitesse de groupe}$$

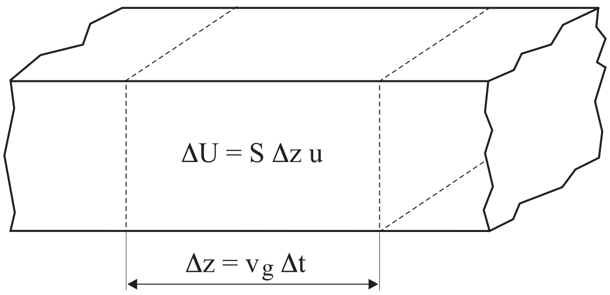
$$c^2k^2 = \omega^2 - \omega_\lambda^2 \;\rightarrow\; c^2kdk = \omega d\omega$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2k}{\omega} = v_g = \frac{P}{dU/dz}}$$

On vérifie également la loi usuelle

$$c_\varphi v_g = c^2\,\frac{k}{\omega}\times\frac{\omega}{k} = c^2$$

$$\boxed{v_\varphi v_g = c^2}$$



$$P = \frac{\Delta\omega}{\delta t} = \frac{S\Delta zu}{\Delta t} = v_g\,\frac{dU}{dz}$$