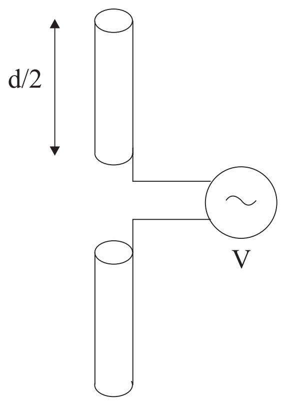
XI - Rayonnement d'une antenne

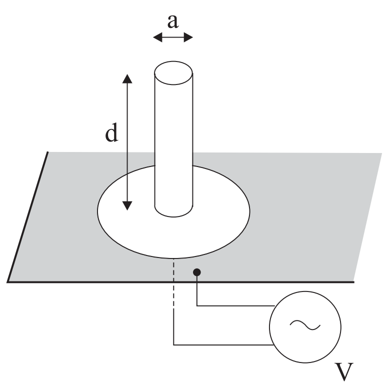
1. L'antenne comme dipôle ($\lambda >> d$)

Une antenne élémentaire est un élément de conducteur linéaire connecté à une source périodique.

Exemples :



Antenne à alimentation centrale.



Alimentation à l'extrémité (bien entendu, l'élément de surface conductrice associé à l'antenne est très variable).

Le traitement des sources périodiques décrit précédemment peut être utilisé, et l'approximation dipolaire donne **en général**, lorsque $d < \lambda$ une solution approchée à mieux que 10% près. (Pour des longueurs d'antenne supérieures, il faudrait tenir compte des termes suivants dans le développement en $\left(\frac{d}{a}\right)$).

La valeur du dipôle équivalent $\vec{p}$ s'obtient en se reportant à $\vec{\nabla}.\widetilde{\vec{j}} = \omega\widetilde{\rho}$.

$$\int_v (\vec{\nabla}.\vec{j})\vec{x}\; d^3\vec{x} = \;\omega\; \int_v \rho\vec{x}\; d^3\vec{x} = \omega\vec{p}$$

$$\vec{p} = \;\frac{1}{\omega}\,\vec{k}\;\int \frac{\partial\widetilde{I}}{\partial z}(z) z dz$$

et par intégration par parties

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{p} = -\frac{\vec{k}}{\omega}\;\int \widetilde{I}(z)dz \\ \textbf{Conducteur linéaire} \end{array}}$$

- où $\widetilde{I}(z)$ est le courant au point
- ce calcul n'est valable que pour un conducteur linéaire.

2. Courant et potentiel dans l'antenne

- On considère toujours une excitation de fréquence définie (en régime stationnaire).
- Les courants et les charges ont une symétrie azimuthale, qui doit être vérifiée pour les potentiels U et $\vec{A}$ dans tout l'espace, y compris dans l'antenne.

Dans la jauge de Lorentz que nous avons toujours utilisée

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c}\,U \qquad\qquad \frac{1}{c}\,\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \text{ (Lorentz)}$$

(rappel $\;\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \vec{\nabla}.\vec{A}$)

$$-ikU = -\vec{\nabla}.\vec{A} \qquad\qquad \left(U = -\frac{i}{k}\,\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$

$\vec{A}$ est dirigé selon $0z$

$$\vec{E} = \;-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}U = i\,\frac{\omega}{c}\vec{A} + \frac{i}{k}\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{E} = \;\frac{ik}{k^2}\;\left[\vec{A} + \frac{1}{k^2}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})\right] \quad \text{et comme} \quad \vec{A} = A_z\vec{e}_3$$

$$E_z(x) = \;\frac{ik}{k^2}\;\left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]A_z(x) \quad \text{si } U \text{ est donné } \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ connu}$$

La composante tangentielle de $\vec{E}$ à la surface de l'antenne doit être **nulle** (conducteur $\Rightarrow$ $\vec{E}$ normal) si la résistance de surface est nulle.

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_z(x) = 0$$

Le potentiel vecteur A_z d'une antenne cylindrique varie sinusoïdalement

On montre facilement que à la limite d'un rayon d'antenne nulle, le courant va lui aussi tendre vers une forme sinusoïdale en inversant

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{j}(r) d^3 r}{R}$$

$$\vec{J}(\vec{x}) = I\vec{\epsilon}_3 \sin\left(\frac{kd}{2} - k\,|z|\right) \delta(x)\,\delta(y)$$

(Le courant s'annule aux extrémités).

3. Rayonnement émis

Lorsque la longueur de l'antenne est << à la longueur d'onde, **l'approximation** dipolaire est légitime, et l'on peut utiliser les formules du chapitre précédent.

Au contraire, pour des longueurs d'onde comparables à la longueur de l'antenne $kd \sim 1$, il faut revenir aux équations définissant $\vec{A}$ et U par des potentiels retardés :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \frac{R}{c})}{R}\, d^3x' \qquad\qquad R = |\vec{x} - \vec{x}\,'|$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}\,', t - \frac{R}{c})}{R}\, d^3x'$$

La distribution longitudinale pourra être supposée approximativement sinusoïdale. Pour une antenne $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c}\,\vec{\epsilon}_3 \int_{-d/2}^{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \frac{e^{+ik|\vec{x} - z\vec{\epsilon}_3|}}{|\vec{x} - z\vec{\epsilon}_3|}\, dz$$

$$e^{ik|\vec{x} - z\vec{\epsilon}_3|} \simeq e^{ikR}\, e^{-ik\,\vec{n}.\vec{x}\,'} \qquad \text{avec} \qquad \vec{x}\,' = z\vec{\epsilon}_3$$

en utilisant **dans la zone de radiation**

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) \simeq \frac{1}{c}Re\,\left\{\,ik\vec{n}\wedge\vec{A}\right\} \quad \text{(zone de radiation } \sim \text{onde plane)}$$

$$\vec{E} = -\,c\vec{n}\wedge\vec{B} = -k\;Re\left\{i\vec{n}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{A})\right\}$$

$$\vec{A} = \frac{-2I}{4\pi\epsilon_0 c}\,\vec{\epsilon}_3\,\frac{e^{ikr}}{kr}\,\left[\cos\frac{kd}{2} - \cos\left(\frac{kd}{2}\,\cos\theta\right)\right]\;/\;\sin^2\theta$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\,\vec{E}\wedge\vec{B} \qquad\qquad \frac{dP}{d\Omega} = R^2\,\vec{S}.\vec{n}$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{4\pi^2\epsilon^0 c}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\,\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right|^2}$$

On a multiplié par un facteur 1/2 correspondant à la moyenne temporelle.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{4\pi^2\epsilon_0 c}\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \qquad kd = \pi\quad\left(\frac{1}{2}\text{ long. onde}\right)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{4\pi^2\epsilon_0 c}\,\frac{4\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \qquad kd = 2\pi\;\;\text{(long. onde)}$$

Ces expressions **diffèrent** de l'approximation dipolaire.

Le résultat est très proche pour l'antenne 1/2 λ : $\left(\frac{d}{2} = \frac{\lambda}{2}\right)$.

L'émission est bien plus dirigée vers l'avant pour $d = \lambda$.

A-t-on intérêt à faire des antennes très longues ?

4. Impédances

En générale, les générateurs sont des sources de **tension**, et non pas de courant. Le courant produit dépendra de l'impédance de l'antenne.

Le coefficient $\dfrac{1}{4\pi^2\epsilon_0 c}$ a les dimensions d'une résistance (comparer à $P = RI^2$).

Remarque :

$$[U] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \; \frac{q}{L}\right] = [R\, I] = \left[R\, \frac{q}{T}\right]$$

analyse dimensionnelle $[x] \leftrightarrow$ dimension de $x \Rightarrow [R] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{c}\right)\right]$ a bien la dimension d'une résistance.

$$\boxed{\text{Le rapport } P/I^2 \text{ est la résistance de radiation dominante aux grandes fréquences}}$$

Pour une antenne comme pour n'importe quel dipôle, on définira l'impédance d'entrée à partir des solutions complexes périodiques U_i et V_i :

La puissance (complexe) est $\frac{1}{2}\, I_i^*\, V_i \;:\; V_i = Z\, I_i\,.$

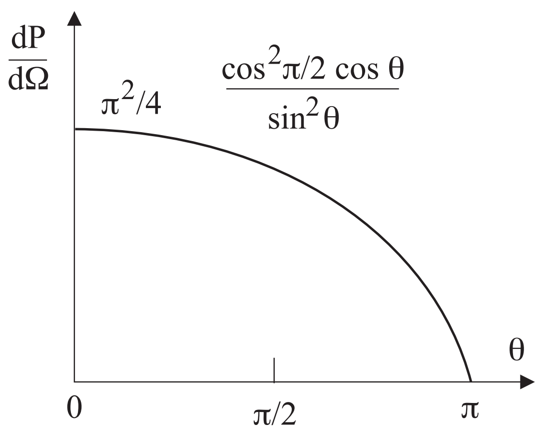
Le théorème de Poynting donnera :

$$\frac{1}{2}\, I_i^*\, V_i = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}^*.\vec{E} d^3v + \frac{1}{2}\, i\omega \int \; \vec{E}.\vec{E}^*\epsilon_0 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\vec{B}^* + \frac{1}{\mu_0}\int_s (\vec{S}.\vec{n}) d\sigma$$

$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0}\,(\vec{E}\wedge\vec{B}^*)$. (Les facteurs 2 sont mis pour passer des amplitudes aux moyennes temporelles).

On définira ainsi la résistance de radiation, et elle sera associée à la partie **réelle** de l'impédance. (Dans les configurations indiquées, on peut également avoir de petites contributions capacitives, l'énergie magnétique stockée étant faible).

Application numérique



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} = \; 30\,\Omega$$

Pour une antenne de 1/2 longueur d'onde : $kd = \pi$

$$P = \; \frac{I^2}{4\pi^2\epsilon_0 c} \int \frac{\cos^2 \; \pi/2 \; \cos\theta}{\sin^{2'}\theta}\, d\Omega \;\sim\; \frac{I^2}{4\pi^2\epsilon_0 c} \times 2_{\text{(integr./azimuth } \pi)} \times 3.5$$

$$< P >_t \simeq \; \frac{< I^2 >}{4\pi^2\epsilon_0 c} \times \qquad \text{avec} \qquad \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\cos\theta \simeq 3.5$$

$$< P >_t = \; R < I^2 > \; R \sim 70\,\Omega.$$