X - Rayonnement d'une source périodique

1. Les sources périodiques (grande distance)

Bien entendu, la méthode générale s'applique, mais certaines des approximations faites, comme l'approximation dipolaire, sont spécifiques d'une émission monochromatique.

$$\rho(\vec{x},t) = Re\ \{\widetilde{\rho}(\vec{x})e^{i\omega t}\} = \widetilde{\rho}(\vec{x}) \cos\ \omega t$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = Re\ \{\widetilde{\vec{j}}(\vec{x})ie^{-i\omega t}\} = \widetilde{\vec{j}}(\vec{x}) \sin\ \omega t$$

Les phases ont été choisies de manière que l'équation de conservation de la charge soit vérifiée.

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = Re\ \{i\omega\widetilde{\rho}e^{-i\omega t}\} = -\ \omega\widetilde{\rho}(\vec{x}) \sin \omega t$$

$$\vec{\nabla}.\vec{j}(\vec{x},t) = (\vec{\nabla}.\widetilde{\vec{j}}) \sin\ \omega t$$

On supposera la charge totale du système nulle :

$$\boxed{\int \vec{\nabla}.\widetilde{\vec{j}}(\vec{x},t) = + \int \omega\widetilde{\rho} = 0}$$

La solution s'obtient comme auparavant avec les potentiels retardés :

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}\,', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\ d^3x'$$

$$U(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}\,', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\ d^3x'$$

$$\vec{A} = Re\ \left\{ e^{-i\omega t}\ \frac{\mu_0 c}{4\pi}\ i \int \frac{\widetilde{\vec{j}}(x')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\ e^{i\ \frac{\omega}{c}\ |\vec{x}-\vec{x}\,'|}\ d^3\vec{x}\,' \right\}$$

Note : On aurait pu directement utiliser la fonction de Green monochromatique $g(\omega,R) = e^{i\omega/cR}/R$.

On va s'intéresser au rayonnement à grande distance, et supposer que les sources et courants sont confinés dans un petit volume de dimension

$$a << |\vec{x}\,' - \vec{x}| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\vec{x}\,'| < a << R$$

$$\Rightarrow \; R = |\vec{x} - \vec{x}\,'| \sim |\vec{x}| - \vec{n}.\vec{x}\,' = R - \vec{R}.\vec{x}\,'/R$$

$$\vec{A} = Re \left\{ e^{-i\omega t} \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \, i \int \widetilde{\vec{j}}(\vec{x}\,') \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(R - \vec{n}.\vec{x}\,')}}{(R - \vec{n}.\vec{x}\,')} \, d^3\vec{x}\,' \right\}$$

De même

$$U = Re \left\{ e^{-i\omega t} \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{e^{ikR}}{R} \int \widetilde{\rho}(\vec{x}\,') \, \frac{e^{ik\vec{n}.\vec{x}\,'}}{(1 - \frac{\vec{n}.\vec{x}\,'}{R})} \, d^3\vec{x}\,' \right\}$$

(Rappel : $9\ \vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c}$ $\qquad 9\ U = \frac{\rho}{\epsilon_0}$)

2. L'approximation dipolaire

On va maintenant supposer que non seulement $R >> |\vec{x}\,'|$ mais aussi $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} >> a$.

La longueur d'onde est assez grande pour que la phase de l'onde ne varie pas dans l'extension de la source $\lambda >> a$

C'est l'approximation dipolaire.

Les sources étant confinées dans le volume a on aura :

$$\int \text{div}\, \widetilde{\vec{j}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \widetilde{\rho} \, d^3\vec{x}\,' = 0$$

(puisque $\vec{v}.\widetilde{\vec{j}} = \omega\widetilde{\rho}$)

Dans le cadre de l'approximation dipolaire

$$\int \widetilde{\rho}(x') \frac{e^{ik\,\vec{n}.\vec{x}\,'}}{1-\frac{\vec{n}.\vec{x}\,'}{R}}\, d^3\vec{x}\,' =$$

$$\underbrace{\int \widetilde{\rho} d^3x'}_{=0} - ik \underbrace{\int \widetilde{\rho}(\vec{x}\,')\vec{n}.\vec{x}\,' + \int \widetilde{\rho}(\vec{x}\,') \frac{\vec{n}.\vec{x}\,'}{R}}_{\left(\frac{1-ikR}{R}\right)\, \vec{p}.\vec{n}}$$

où l'on a défini

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{p} = \displaystyle\int \widetilde{\rho}(\vec{x}\,')\vec{x}\,'\, d^3\vec{x}\,' \\ \text{Moment dipolaire électrique} \end{array}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, Re \left\{ e^{i\omega t}\, \frac{e^{ikR}}{R^2}\, (1-ikR)\, \vec{p}.\vec{n} \right\}$$

Le calcul se déroule de manière analogue pour le potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\omega t - kR}{R)} \int \widetilde{\vec{j}}(\vec{x}\,')d^3x'$$

Le terme d'ordre 0 en a/R contribue en **apparence**, contrairement au cas de U

$$\text{où} \int \widetilde{\rho}\, d^3x' = 0$$

$$\text{mais} \int \widetilde{\vec{j}}(\vec{x}\,')d^3\vec{x}\,' = \int_s \vec{x}(\widetilde{\vec{j}}.\vec{n})d\sigma - \int (\text{div}\, \widetilde{\vec{j}})\vec{x}\,'d^3\vec{x}\,'$$

(On choisira une surface extérieure aux courants).

Cette relation est obtenue en sommant pour les 3 coordonnées

$$\int \text{div}\, (f\vec{j}) = \int (\vec{\nabla} f).\vec{j} + \int f(\vec{\nabla}.\vec{j}) \ \text{ avec } f = x, y, z \text{ successivement.}$$

On a cependant établi à partir de la conservation de la charge que $\vec{\nabla}.\tilde{\vec{j}} = \omega\tilde{\rho}$

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\,\frac{\sin(\omega t - kR)}{R}\,\omega\int\tilde{\rho}(\vec{x}\,')\vec{x}\,'d^3\vec{x}\,'$$

Soit

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{A} = -\frac{k}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\sin(\omega t - kR)}{R}\,\vec{p} \\ &U = \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\tfrac{1}{R^2}\,Re\,\left\{e^{-i(\omega t - kR)}\,(1 - ikR)\right\}\,\vec{p}.\vec{n} \end{aligned}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{k}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{\cos(\omega t - kR)}{R}\,\vec{p} = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 R}\,\cos(\omega t - kR)\,\vec{p}$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\left[\vec{\nabla}\,\left\{\frac{\cos(\omega t - kR)}{R^2}\,(\vec{p}.\vec{n})\right\}\,-\,k\vec{\nabla}\,\left\{\frac{\sin(\omega t - kR)}{R}\,(\vec{p}.\vec{n})\right\}\right]$$

On utilisera de nouveau

$$\vec{\nabla}f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\,\vec{n} \qquad\qquad \vec{n} = \vec{R}/R$$

$$\vec{\nabla}(\vec{p}.\vec{n}) = \vec{\nabla}\,\frac{\vec{p}.\vec{R}}{R} = \frac{1}{R}\,[\,\vec{p} - (\vec{p}.\vec{n})\,\vec{n}]$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\begin{aligned} &\vec{n}(\vec{p}.\vec{n})\,\left[k\,\frac{\sin(\omega t - kR)}{R^2} - \frac{\cos(\omega t - kR)}{R^3}\right] \\ &+[\vec{p} - (\vec{p}.\vec{n})\vec{n}]\,\frac{\cos(\omega t - kR)}{R^3} \\ &+\vec{n}(\vec{p}.\vec{n})\,\left[\frac{k^2\,\cos(\omega t - kR)}{R} + \frac{k\,\sin(\omega t - kR)}{R^2}\right] \\ &-[\vec{p} - (\vec{p}.\vec{n})\vec{n}]\,\frac{k\,\sin(\omega t - kR)}{R^2} \end{aligned}\right\}$$

3. La zone de radiation

On va maintenant supposer

$$\boxed{\begin{array}{c} kR >> 1 \\ \text{Zone de radiation} \end{array}}$$

c'est-à-dire que l'on considère la valeur du champ rayonné **à grande distance**

$$\vec{\nabla} U \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \; \frac{k^2 \; \cos(\omega t - kR)}{R} \; \vec{n}(\vec{p}.\vec{n})$$

$$\vec{E} = + \; \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \; \frac{\cos\,(\omega t - kR)}{R} \; [\vec{p} - (\vec{n}\;\vec{p})\vec{n}]$$

$$\vec{B} = \; \frac{1}{c} \; \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad \text{se calcule avec}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{a}) = f(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \vec{\nabla} f \wedge \vec{a}$$

$$\vec{B} = \; -\frac{k}{4\pi\epsilon_0} \; \frac{1}{c} \; \frac{-k \; \cos(\omega t - kR)}{R} \; \vec{n} \wedge \vec{p} \; \left(+ \; \frac{1}{R^2} \; ... \right)$$

et en rassemblant les résultats pour les termes en $1/R$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = \dfrac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \; \dfrac{\cos(\omega t - kR)}{R} \; [\vec{p} - (\vec{n}.\vec{p})\vec{n}] \\[2ex] \vec{B} = \dfrac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \; \dfrac{\cos\,(\omega t - kR)}{R} \; \vec{n} \wedge \vec{p} \end{array}}$$

On vérifie là encore que

$$\boxed{\vec{B} = \; \frac{1}{c} \; \vec{n} \wedge \vec{E}}$$

mais cette formule est **exacte**, alors qu'elle n'a été établie ici à l'ordre $1/R$.

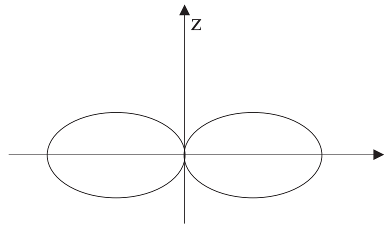
A grande distance, la direction de propagation est donnée par $\vec{n}$ et on retrouve

$$\vec{E}.\vec{n} = \vec{B}.\vec{n} = \vec{E}.\vec{B} = 0$$

c'est-à-dire le comportement dans la zone de radiation est bien un comportement d'onde plane, avec $\vec{B}$ et $\vec{E}$ en phase.

- $\vec{E}$ est un **vrai** vecteur, avec des composantes sur $\vec{p}$ et $\vec{n}$, les vecteurs du problème,
- $\vec{B}$ est un pseudovecteur,

Remarque : La condition $kR >> 1$ exclut les champs lentement variables.



4. Energie rayonnée

$$S = \frac{1}{\mu_0}\,(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int_s (\vec{n}.\vec{s}) d\sigma = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, ck^4\, \cos^2\, \omega t\, |\vec{p}|^2$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0}\, c\, k^4\, \cos^2\, \omega t |\vec{p}|^2\, \sin^2\theta}$$

Cette solution semble différer du résultat de Larmor.
Mais pour un mouvement périodique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\,\omega\vec{p}\,\sin\,\omega t \qquad \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = -\,\omega^2\,\vec{p}\,\cos\,\omega t$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}\right)^2}$$

et l'on retrouve bien la formule de Larmor qui exprime l'énergie rayonnée en fonction de l'accélération $\vec{\beta}$.

La propriété est un peu masquée pour un mouvement périodique. Vérifions l'énergie rayonnée :

$$\vec{p} = e\vec{r}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\,\frac{\cos^3(\omega t - kR)}{\cos^2\omega t}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2$$

Larmor :

$$\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \qquad\qquad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2$$

identique à l'effet retard près.