I - Rappel des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell résument un très grand nombre d'observations expérimentales. Nous allons les prendre pour point de départ. Un autre cours les établira dans le cadre relativiste adapté à l'électromagnétisme, à partir d'un formalisme Lagrangien.

1. Equations de Maxwell

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\[2ex] (2) & \vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0 \\[2ex] (3) & \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\epsilon_0 \mu_0}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{\jmath}) \\[2ex] (4) & \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \end{array}}$$

Dans le système MKSA

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$$

$$\epsilon_0\, \mu_0\, c^2 = 1$$

$$(2) \ \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c}\, rot\vec{A}$$

$$(4) \ \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

leur contenu physique,

- $\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \rho/\epsilon_0$: loi de Coulomb $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}$
- $\vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$: pas de monopôles magnétiques (il y en a peut-être, mais pas beaucoup !).
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \epsilon_0 \mu_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: Loi d'Ampère + modif. Maxwell
  $\rightarrow$ champ créé par les conducteurs.

La loi d'Ampère **sans** le terme $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est incompatible avec la conservation du courant (de la charge) $\vec{\nabla} \,.\, \vec{\jmath} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{\jmath} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}(\mathrm{rot} \vec{B})}_{=0} - \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \,.\, \vec{E})}_{= \partial\rho/\partial t} \Longrightarrow \vec{\nabla} \,.\, \vec{\jmath} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{CQFD}$$

- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$: loi de Faraday

pour un circuit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \,.\, \vec{n} \, d\sigma = -\int_S (\mathrm{rot}\, \vec{E} \,.\, \vec{n}) \, d\sigma = -\int_C \vec{E} \,.\, \vec{d\ell}$$

$$\boxed{-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \int \vec{E} \,.\, \vec{d\ell} = e}$$

Attention : En présence d'un champ magnétique variable $\vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
L'existence d'un champ électrique n'implique pas l'apparition d'une différence de potentiel. Lorsque $\vec{E}$, est dû seulement à une variation du potentiel vecteur, U est constant (la chute ohmique compense la force électromotrice).

2. Equations des ondes

$$\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\mathrm{rot}\, \vec{B} - \mu_0 \, \vec{\jmath}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\vec{\nabla} U - \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial t} \right] = \frac{1}{c \epsilon_0 \mu_0} \left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \,.\, \vec{A}) - \Delta \vec{A}\right) - \frac{1}{\epsilon_0} \, \vec{\jmath}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c \epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \, \vec{\jmath} - c \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \,.\, \vec{A} \right)$$

De même on ajoute $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ aux 2 membres de $\vec{\nabla} \,.\, \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \,.\, \vec{A} \right)$$

$$\Rightarrow \text{ on définit } \quad = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \qquad \text{avec} \qquad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\vec{\jmath}}{c} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \,.\, \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right)$$

$$U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \,.\, \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right)$$

La relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, où ϵ_0 et μ_0 sont des constantes, et c la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est incompatible avec l'invariance galiléenne et conduit déjà à la relativité.

Ces équations vérifient l'invariance de Jauge

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A} + \vec{\nabla}\wedge \\ U &\to U - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\wedge}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{qui laissent } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ inchangés}$$

$\Rightarrow$ Quelles que soient les conditions aux limites, on obtient une nouvelle solution pour toute fonction $\wedge(\vec{x},\, t)$, et l'expression des potentiels $\vec{A}$, U n'est pas défini.

$$\text{On va imposer} \quad \vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

La transformée de jauge n'est solution de l'équation que si $\wedge = 0$. Il reste un arbitraire, mais des conditions aux limites appropriées vont donner des solutions uniques.

Remarque : Pourquoi utiliser $(U,\, \vec{A})$, avec les complications de l'invariance de jauge, plutôt que $\vec{E}$, $\vec{B}$?

Réponse : la covariance relativiste est explicite, et plus simple : transformations 4 vectorielles et non pas tensorielles.

On a ainsi justifié l'équation des ondes :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{\epsilon_0}\,\frac{\vec{\jmath}}{c} \\ U &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}}$$

Dans la "jauge de Lorentz" $\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ (qui n'est pas vraiment une jauge complètement définie, comme on l'a vu).

Pour des configurations fixes des charges, ces équations donnent l'équation de Poisson de l'électrostatique,

$$\boxed{\Delta U = -\,\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Compte tenu de leur intérêt pour l'étude de la diffraction (et de leur rôle en théorie des champs), nous allons utiliser les fonctions de Green pour construire la solution.