Annexe I - Technique des fonctions de Green

Les fonctions de Green sont les solutions des équations précédentes pour des sources ponctuelles

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}\,) &= q\delta_3\,(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ \text{ou} \qquad \rho(\vec{x},\,t) &= q\delta_3\,(\vec{x}-\vec{x}_0)\;\delta(t-t_0) \end{aligned}$$

Mais elles ont été établies bien avant l'introduction de la "distribution de Dirac". Nous adopterons successivement la méthode historique, qui permet des rappels utiles, et l'étude directe à partir de la fonction δ.

1. Le Théorème de Green

Soient deux fonctions u et v sans singularités dans un domaine $\mathcal{D}$ limité par le contour $\partial\mathcal{D}$

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} (v\Delta u - u\Delta v)\, d^n\omega \;=\; \int_{\partial\mathcal{D}} (v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\,.\,\vec{n}\, d^{n-1}\,\omega}$$

$d^n\omega$ et $d^{n-1}\omega$ sont les éléments d'intégration à n et $n-1$ dimensions ($n=2,\ 3$)

$$\text{Volume : } \int_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \int_S (v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\,.\,\vec{n}\; d\sigma$$

$$\text{Surface : } \int_S (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \int_c (v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\,.\,\vec{n}\; d\ell$$

La démonstration est une application directe du théorème de la divergence.

Par exemple à 3 dimensions.

$$\begin{aligned} div\,(v\vec{\nabla}u) &= \vec{\nabla}v\,.\,\vec{\nabla}u + (v\Delta u) \\ div\,(u\vec{\nabla}v) &= \vec{\nabla}u\,.\,\vec{\nabla}v + (u\Delta v) \\ \int div\,(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\; d^3x &= \int (v\Delta u - u\Delta v)\; d^3x \end{aligned}$$

Remarque : Est-il légitime d'appliquer le théorème de la divergence en présence de charges ponctuelles ?

2. Potentiel d'une source ponctuelle

Utilisons le théorème de Green :

$$\Delta U = -\rho/\epsilon_0 \qquad\qquad v = 1$$

• Pour une configuration à 2 dimensions réalisée concrètement par un fil $\perp$ plan :

$$\int_S \Delta U \; d\sigma = \int_c (\vec{\nabla} U \,.\, \vec{n})\, d\ell$$

en choisissant un contour circulaire de rayon ρ_0 contenant la totalité de la charge Q, centré sur la charge en $\vec{r}_0 = 0$

$$\rho = Q\,\delta_3\,(\vec{r}) \;\rightarrow\; \frac{1}{\epsilon_0}\int -\rho d\sigma \;=\; -\frac{Q}{\epsilon_0} \;=\; 2\pi r_0 \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0}$$

En un point à la distance r de la charge

$$\frac{\partial U}{\partial r} \;=\; -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad U(r_2) - U(r_1) \;=\; -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\,\log\frac{r_2}{r_1}$$

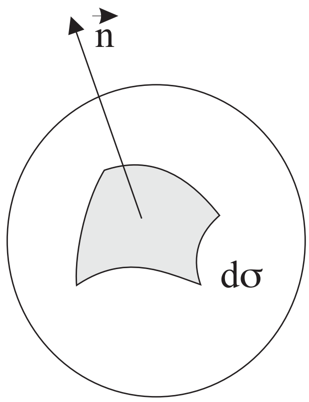
(on n'a pas vraiment supposé la source ponctuelle, le passage à la limite est évident).

• Pour une configuration à 3 dimensions ; avec une sphère de rayon ρ_0 centrée sur la charge en $\vec{r}_0 = 0$

$$\int_V \Delta U \; dv \;=\; \int_S (\vec{\nabla} U \,.\, \vec{n})\; d\sigma \;\;\rightarrow\;\; \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{\rho_0} = -\frac{Q}{4\pi\rho_0^2}\;\;\vec{n}\;\;:$$

$\vec{n}$ est normale externe à la charge. On obtient ainsi $U(\infty) - U(\rho_0) = \dfrac{-Q}{4\pi\rho_0}$ et on choisit en général $U(\infty) = 0$. On conclut que $\Delta\left(\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) = -4\pi\,\delta_3\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Cette méthode, adaptée au Laplacien, ne sera pas utilisable pour l'équation des ondes. Nous en indiquerons une autre.



3. Résolution de l'équation du Laplacien

Choisissons $v = G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ fonction de Green associée à une source ponctuelle en r_0

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \qquad \Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[G(\vec{r}, \vec{r}_0) \times \frac{-\rho(\vec{r}_0)}{\epsilon_0} - u \times \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right] d^3\vec{r}_0 = \int_{\partial\mathcal{D}} \left[G(\vec{r}, r_0)\, \vec{\nabla} u - u \times \frac{-1}{4\pi} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{(|\vec{r}_0 - \vec{r}|)^3} \right] . \vec{n}\, d\sigma$$

• **Si** la densité de charge est confinée dans un volume **fini**, le potentiel u décroîtra suffisamment rapidement pour que le volume $\mathcal{D}$ soit étendu à l'infini.

La contribution de l'intégrale de surface $\partial\mathcal{D}$ est alors nulle.

$$\boxed{u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, d^3\vec{r}_0}$$

est la solution de $\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

A condition qu'il n'y ait pas de charges à l'infini (pas de termes de surface).

Exemple : considérer le potentiel d'un fil infini.

4. Résolution de l'équation des ondes

a) Recherche de la fonction de Green.

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t} - \Delta \right] G(\vec{x}, t\, ;\, \vec{x}', t') = 4\pi\, \delta_3\, (\vec{x} - \vec{x}')\, \delta(t - t')$$

se résout par transformations de Fourier successives.

L'invariance par translations (temps, espace) $\Rightarrow$ $G(\vec{x}, \vec{t}; \vec{x}, t') = G(\vec{\xi}, \tau)$

$$\text{avec} \qquad \vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}' \qquad \tau = t - t'$$

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta_\xi \right] G(\vec{\xi}, \tau) = 4\pi\, \delta_3\, (\vec{\xi})\, \delta\, (\tau)$$

On procèdera par transformation de Fourier en deux étapes,

- $t \;\rightarrow\; \omega \qquad G(\vec{\xi}, \tau) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int e^{-i\omega\tau}\, g(\vec{\xi}, \omega)\, d\omega$

$$\boxed{\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right] \; g(\vec{\xi},\, \omega) = -4\pi\; \delta(\vec{\xi})}$$

On a utilisé $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t}\; d\omega$ et identifié les composantes ω.
pour les composantes monochromatiques de la fonction de Green. G étant supposée réelle : $g(\omega) = g^*(-\omega)$

- $\vec{\xi} \;\rightarrow\; \vec{k}$

$$g(\vec{\xi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\,.\,\vec{\xi}}\; g(\vec{k}, \omega)\, d^3\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \delta(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\,.\,\vec{\xi}}\, d^3\vec{k}$$

à nouveau, pour une solution réelle on exigera $g(\vec{k}) = g(-\vec{k})^*$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\; g(\vec{k},\, \omega) = 4\pi$$

$$\boxed{g(\vec{k},\, \omega) = \frac{-4\pi}{-\vec{k}^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2}}}$$

(Par transformation de Fourier : équation différentielle $\longrightarrow$ relation algébrique).

On retrouve maintenant $G\,(\vec{\xi},\, \tau)$ par transformation de Fourier inverse

$$G\,(\vec{\xi},\, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\omega\tau}\; d\omega \int e^{i\vec{k}\,.\,\vec{\xi}}\; \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}\; k^2\, dk\, d\Omega$$

- Intégration sur $\varphi \;\rightarrow\; 2\pi$

- Intégration sur $d\cos\theta$: $\displaystyle\int e^{+ikR\cos\theta}\; d\cos\theta$

$$= \frac{1}{ikR}\,(e^{ikR} - e^{-ikR}) \qquad R = |\vec{\xi}|$$

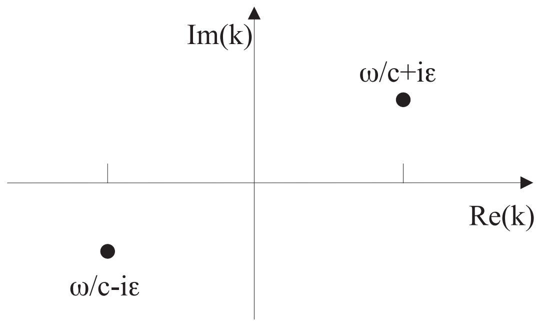
- Intégration sur k : $\displaystyle\int_0^\infty k^2 dk \left[\frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{ikR}\right] \; \frac{1}{\dfrac{-\omega^2}{c^2} + k^2}$

$$(\text{chgt var : } k/-k \text{ pour } e^{-ikR})\; \frac{8\pi^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} kdk\; \frac{e^{ikR}}{iR}\; \frac{1}{-\omega^2/c^2 + k^2}$$

L'intégration sur l'axe réel est impossible à cause des pôles en
$k = \pm\omega/c$:
on va calculer $g(\vec{k},\, \omega)$ pour des valeurs **complexes** de ω et prendre la limite.

$$\frac{\omega}{c} \;\rightarrow\; \frac{\omega}{c} \pm i\epsilon$$

$$\rightarrow \quad \text{si} \quad \frac{\omega}{c} \;\rightarrow\; \frac{\omega}{c} + i\epsilon$$



$$g(-\omega) = g^*(\omega) \;\longrightarrow\; \quad \text{autre pôle à} \quad -\frac{\omega}{c} - i\epsilon$$

L'intégrale de contour doit être fermée dans le 1/2 plan supérieur, compte tenu du facteur e^{ikR}. Seul le pôle $k = \frac{\omega}{c} + i\epsilon$ contribue

$$g(\omega,\, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times 8\pi^2 \times 2i\pi \times \frac{1}{2\frac{\omega}{c}} \left(\frac{\omega}{c}\, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{iR} \right)$$

$$\boxed{g_r(\omega,\, R) = \frac{e^{+ikR}}{R} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

Correspond à une croissance temporelle du signal (décroissance radiale)

$\rightarrow$ si $\frac{\omega}{c} \rightarrow \frac{\omega}{c} - i\epsilon$

L'intégrale doit toujours être fermée dans le 1/2 plan $Im(k) > 0$, mais seul le pôle $k = -\frac{\omega}{c} + i\epsilon$ contribue

$$\boxed{g_a(\omega,\, R) = \frac{e^{-ikR}}{R} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

Correspond à une décroissance temporelle du signal (décroissance radiale) les indices a (avancé) et r (retardé) vont être justifiés.

b) Fonctions de Green avancées et retardées.

Repassons à l'espace $(\vec{\xi},\,\tau)$:

$$G_{\substack{r\\a}}(\vec{\xi},\,\tau) = \frac{1}{2\pi R}\int e^{-i\omega\tau}\; e^{\pm i\frac{\omega}{c}R}\, d\omega$$

$$G_{\substack{r\\a}}\left(\vec{\xi},\,\tau\right) = \frac{1}{R}\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

$G_r(\vec{\xi},\,\tau) = \dfrac{1}{R}\delta\left(\tau - \dfrac{R}{c}\right)$	fonction de Green retardée
$G_a(\vec{\xi},\,\tau) = \dfrac{1}{R}\delta\left(\tau + \dfrac{R}{c}\right)$	fonction de Green avancée

une solution est causale si elle est nulle pour des temps plus petits que $t_0 + R/c$ où t_0 est l'instant du 1er signal.

c) Solutions de l'équation des ondes.

La solution générale de l'équation des ondes inhomogène

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(\vec{x},t) - \Delta\psi = 4\pi f\,(\vec{x},t)$$

sera la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation inhomogène.

La fonction de Green **retardée** peut être utilisée pour construire une solution "causale", mais l'emploi de l'un ou l'autre type est lié aux **conditions aux limites** et les deux sont bien entendus légitimes.

En particulier : non unicité des fonctions de Green : on peut rajouter à G g vérifiant $9\; g = 0$.

Une solution particulière est construite comme précédemment avec la fonction de Green.

$$\psi^r_a\,(\vec{x},t) = \int G^r_a\,(\vec{x},t\;;\;\vec{x}',t')\;f\,(\vec{x}',t')\;d^3x'dt'$$

(décroissances supposées rapides à l'infini)

$$\Longrightarrow\;\; \psi\,(\vec{x},t) = \psi_{in}\,(\vec{x},t) + \int G^r\,(\vec{x},t\;;\;\vec{x}',t')\;f\,(\vec{x}',t')\;d^3\vec{x}'\,dt'$$

$$9\;\psi_{in} = 0$$

$$\psi \;\rightarrow\; \psi_{in} \quad t \;\rightarrow\; -\infty$$

$$\psi\,(\vec{x},t) = \psi_{out}\,(\vec{x},t) + \int G^a\,(\vec{x},t\;;\;\vec{x}',t')\;f\,(\vec{x}',t')\,d^3x'\,dt'$$

$$\psi \;\rightarrow\; \psi_{out} \quad t \;\rightarrow\; +\infty$$

Remarque : en $\omega = \omega + i\epsilon$ on a trouvé $g_r = e^{ikR}/R$

$$\begin{aligned} G^r &= e^{-i(\omega+i\epsilon)t}\ e^{i(\omega+i\epsilon)\frac{R}{c}} \\ &= e^{-i(\omega t-\frac{R}{c})}\ e^{\epsilon(t-R/c)} \end{aligned}$$

ne contribue que si $t \gg R/c \ \Rightarrow$ retard

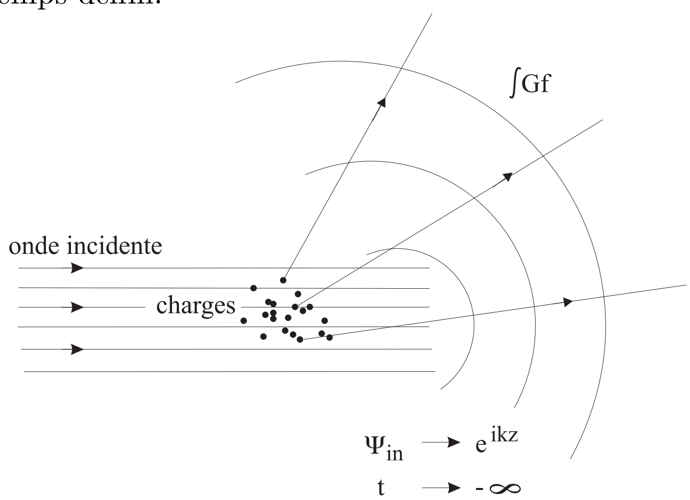
De même $\qquad G^a = e^{-i(\omega-i\epsilon)t}\ e^{-i(\omega-i\epsilon)R/c}$

$$= e^{-i(\omega t+\frac{R}{c})}\ e^{-\epsilon(t+\frac{R}{c})}$$

ne contribue que si $t \ll -R/c \ \Rightarrow$ avance

On peut montrer qu'en l'absence de charge à l'infini, $\psi_{in} = 0$ pour des solutions dont l'énergie est **finie**. (De même ψ_{out}).

Attention : Théorème de Green à 4 dimensions. Pour retrouver ψ à partir de ses valeurs dans des volumes à temps défini.



d) Equation des ondes inhomogènes.

On revient aux deux équations

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = 9\ \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\vec{\jmath}}{c} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)U = 9\ U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

en "jauge de Lorentz" $\quad \vec{\nabla}\,.\,\vec{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$

$$(\partial_\mu\,.\,A^\mu = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 9\ \vec{A} &= \frac{1}{\epsilon^0}\frac{\vec{\jmath}}{c} \\ 9\ U &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 9\ A^\mu &= \frac{1}{\epsilon_0}\jmath^\mu \\ \jmath^\mu &= \left(\rho,\ \rho\frac{\vec{v}}{c}\right) \\ \partial_\mu \jmath^\mu &= 0 \end{aligned}$$

• En l'absence de contribution des surfaces à l'infini, le résultat sera donné par les expressions usuelles :

$$\boxed{\begin{aligned} U(\vec{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{x}',t-\dfrac{|\vec{x}'-\vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3\vec{x}' \\ \vec{A}(\vec{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\int \frac{\vec{\jmath}\left(\vec{x}',t-\dfrac{|\vec{x}'-\vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3\vec{x}' \end{aligned}}$$

• La condition d'énergie finie à $t=t_1$

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\int \vec{E}^2 d^3x = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{t=t_1}\left(-\vec{\nabla}A^0-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 d^3\vec{x}$$

assure que $\partial_t\vec{A}$ et $\partial_t A^0(=-\vec{\nabla}\,.\,\vec{A})$ sont finis.
L'intégrale de volume est alors nulle pour

$$|\vec{x}| > t_1 + \frac{\text{Max }|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$

Formalisme covariant

$$A^\mu = (U,\ \vec{A}) \qquad x^\mu = (ct,\ \vec{x})$$

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$E^i = -F^{0i} = F^{i0}$$
$$B^i = -\frac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\, F^{jk}$$

$$j^\mu = (\rho,\ \vec{\jmath}/c) \qquad \vec{\jmath} = \rho\,\vec{v}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & -B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu \, F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, J^\nu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \{1 \quad \text{pour} \quad 0\,1\,2\,3\}$$

$$\partial_\mu \, \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$