

Chapitre 5

QUELQUES NOTIONS DE THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

1- QUANTIFICATION CANONIQUE

1-1 Quantification en mécanique quantique

Lorsque l'on quantifie une théorie de particules, on préfère partir de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. On définit tout d'abord le moment conjugué p_r de la variable q_r suivant :

$$p_r = \frac{\partial L(q_r, \dot{q}_r)}{\partial \dot{q}_r} \quad (5.1.1)$$

On introduit ensuite par une transformation de Legendre, la fonction de Hamilton et sa différentielle obtenue grâce à l'équation d'Euler-Lagrange (éq. 4.2.1) :

$$H(q_r, p_r) = \sum_r p_r \dot{q}_r - L(q_r, \dot{q}_r) \quad (5.1.2a)$$

$$dH = \sum_r -\dot{p}_r dq_r + \dot{q}_r dp_r \quad (5.1.2b)$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = -\dot{p}_r \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r \quad (5.1.3)$$

L'évolution de toute fonction $A(q, p)$ est donnée par :

$$\frac{dA(q, p)}{dt} = \{H, A\} \equiv \sum_r \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial A}{\partial q_r} - \frac{\partial H}{\partial q_r} \frac{\partial A}{\partial p_r} \quad (5.1.4)$$

En mécanique quantique usuelle, la quantification se fait en général selon le point de vue de Schrödinger. Les variables q_r , p_r ou $A(q, p)$ sont promues au rang d'opérateurs agissant dans un espace de Hilbert d'états. Les opérateurs q_r et p_s obéissent à des relations de commutation canoniques :

$$[q_r, p_s] = i \delta_{rs} \quad (5.1.5)$$

L'état du système $|\psi_S(t)\rangle$ obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{\partial |\psi_S(t)\rangle}{\partial t} = H(q, p) |\psi_S(t)\rangle \quad (5.1.6)$$

On peut reformuler ceci selon le point de vue de Heisenberg en transportant la dépendance temporelle des états aux opérateurs

$$|\psi_H\rangle = e^{iHt} |\psi_S(t)\rangle \equiv |\psi_S(0)\rangle \quad (5.1.7a)$$

$$A_H(q_H, p_H) = e^{iHt} A_S(q_S, p_S) e^{-iHt} \quad (5.1.7b)$$

de sorte que $\langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle = \langle \psi_S | A_S | \psi_S \rangle$. Les équations d'évolution du système sont donc :

$$\frac{dA_H(q_H, p_H)}{dt} = i[H, A_H] \quad (5.1.8)$$

On notera qu'il est particulièrement simple de passer formellement de la mécanique classique à la mécanique quantique en représentation de Heisenberg car il suffit de remplacer les crochets de Poisson $\{A, B\}$ par (i fois) les commutateurs $[A, B]$.

1-2 Quantification des champs

La quantification d'une théorie de champs se fera préférentiellement suivant le point de vue de Heisenberg qui est plus symétrique dans le sens où toute la dépendance spatio-temporelle a été mise dans les opérateurs. Ceci est en accord avec le fait qu'en relativité l'espace et le temps doivent être mis sur un pied d'égalité. Ainsi, le champ électromagnétique $A_\mu(\mathbf{r}, t)$, qui a une dépendance temporelle explicite, sera quantifié directement en représentation de Heisenberg. La quantification se fait suivant le procédé canonique. En réalité, cette procédure n'est pas explicitement covariante mais la théorie résultante l'est, ce qui n'est pas évident *a priori*.

On part de la fonction de Lagrange exprimée en terme du lagrangien :

$$L = \int d\mathbf{r} \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$$

Pour se ramener à un problème analogue à celui de la mécanique usuelle on rend dénombrable le nombre de degrés de liberté en discrétisant l'espace ordinaire à trois dimensions qui devient ainsi un réseau. Chaque nœud du réseau est repéré par sa position \mathbf{r}_i et l'espace est divisé en petites boîtes de volume ΔV entourant le nœud \mathbf{r}_i . A chaque boîte on associe un degré de liberté (en fait autant de degrés de liberté qu'il y a de type de champs indicés par s) :

$$\text{Champ } \Phi_s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{Boite numero } i : q_i(t) = \Phi_s(\mathbf{r}_i, t)$$

La fonction de Lagrange peut alors être réécrite comme :

$$L = \sum_i \Delta V \mathcal{L}[q_i(t), \dot{q}_i(t), q_j(t)]$$

Cette fonction dépend donc de la valeur des coordonnées $q_j(t)$ associées au champ aux points voisins (nœuds numéro j) du nœud numéro i , ce qui traduit dans cette formulation discrète la présence de dérivées spatiales dans la formulation continue. On définit les moments conjugués dans la théorie discrétisée :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \Delta V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_s(\mathbf{r}, t)} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}$$

Définissant le moment conjugué dans la théorie continue par

$$\Pi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_s(\mathbf{r}, t)} \quad (5.1.9)$$

on a :

$$p_i = \Delta V \Pi_s(\mathbf{r}_i, t)$$

On définit alors la fonction de Hamilton par :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i,s} \Delta V \{ \dot{\Phi}_s(\mathbf{r}_i, t) \Pi_s(\mathbf{r}_i, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, t) \}$$

Revenant à la formulation continue, on retrouve bien la forme obtenue à partir du théorème de Noether (éq. 4.3.6a)

$$H = \int d\mathbf{r} \left\{ \dot{\Phi}_s(\mathbf{r}, t) \Pi_s(\mathbf{r}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, t) \right\} \quad (5.1.10)$$

Comme cela a été annoncé, nous allons quantifier la théorie dans la représentation de Heisenberg, c'est-à-dire que les opérateurs vont garder leur dépendance temporelle explicite. Les variables $q_i(t)$ et $p_j(t)$ deviennent des opérateurs agissant dans un espace de Hilbert d'états et satisfaisant des relations de commutations à temps égal

$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij} \quad [q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0$$

ce qui se traduit, pour les champs définis aux nœuds du réseau, par des relations du type :

$$[\Phi_r(\mathbf{r}_i, t), \Pi_s(\mathbf{r}_j, t)] = i \frac{\delta_{ij}}{\Delta V} \delta_{rs}$$

On revient ensuite à la limite du continu en faisant tendre ΔV vers zéro ce qui implique que $\delta_{ij}/\Delta V = \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Par suite, dans la version continue la quantification s'effectuera en élevant les amplitudes de champs et leurs moments

conjugués au rang d'opérateurs satisfaisant aux relations de commutation à temps égal :

$$[\Phi_r(\mathbf{r}, t), \Pi_s(\mathbf{r}', t)] = i \delta_{rs} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.1.11a)$$

$$[\Phi_r(\mathbf{r}, t), \Phi_s(\mathbf{r}', t)] = [\Pi_r(\mathbf{r}, t), \Pi_s(\mathbf{r}', t)] = 0 \quad (5.1.11b)$$

Remarque : Nous verrons dans la suite que de telles relations de commutation canoniques ne sont valables que pour les bosons ; pour les fermions ces relations devront être remplacées par des relations d'anticommutation. Notons également que ces relations de (anti)commutation impliquent que les particules associées aux différentes composantes du champ seront considérées comme identiques.

Nous sommes en représentation de Heisenberg ; l'état $|\psi\rangle$ du système n'a pas de dépendance temporelle car celle-ci est portée par les opérateurs. Ainsi, poursuivant notre imitation de la procédure de quantification d'une théorie de particules, on écrira que l'évolution temporelle de n'importe quel opérateur construit à partir des champs (de bosons ou de fermions) est régie par l'équation (cf. eq. 5.1.8)

$$\frac{dA(\mathbf{r}, t)}{dt} = i[H, A(\mathbf{r}, t)] \quad (5.1.12)$$

Remarque : Nous verrons plus loin que cette relation est une conséquence directe de l'invariance par translation dans le temps de la théorie quantique.

2- QUANTIFICATION ET SYMETRIES

2-1 Quantification et covariance

Au niveau classique un lagrangien scalaire de Lorentz garantit l'invariance de Lorentz de la théorie et fournit directement grâce au théorème de Noether les quantités conservées telles que l'énergie et l'impulsion (associées aux translations) et le moment cinétique (associé aux rotations ordinaires). Dans une théorie quantique ceci n'est pas suffisant car la covariance impose, comme nous allons le voir, des relations de commutation auxquelles doivent satisfaire les champs.

Considérons une transformation de Lorentz du système de coordonnées (nous adoptons dans ce qui suit un point de vue passif) :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

Au niveau classique l'observateur dans \mathcal{R}' verra au point de coordonnées x' dans \mathcal{R}' un nombre $\Phi'_r(x')$ qui se déduit de $\Phi_s(x)$ (vu par un observateur dans \mathcal{R} au point de coordonnées x dans \mathcal{R}) selon :

$$\Phi'_r(x') = S_{rs} \Phi_s(x) \quad (5.2.1)$$

où S est une certaine matrice qui dépend du champ et de la transformation de Lorentz considérée. Pour un champ scalaire, S est bien sûr la matrice unité ; pour un champ vectoriel A^μ , S est la matrice de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$; sa forme explicite pour les champs de Dirac est donnée dans l'appendice A. L'invariance de la théorie sous une telle transformation sera assurée si :

$$\mathcal{L}(\Phi'_s(x'), \partial^{\mu'} \Phi'_s(x')) = \mathcal{L}(\Phi_s(x), \partial^\mu \Phi_s(x))$$

En théorie quantique, l'observable physique correspondante à l'amplitude de champ classique est l'élément de matrice de l'opérateur champ pris entre deux états quelconques $|\psi_\alpha\rangle$ et $|\psi_\beta\rangle$, soit :

$$\langle \psi_\alpha | \Phi_r(x) | \psi_\beta \rangle$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' , le même état physique caractérisé par l'indice α sera décrit par le vecteur d'état $|\psi'_\alpha\rangle$. L'observable vue par un observateur de \mathcal{R}' sera donc $\langle \psi'_\alpha | \Phi_r(x') | \psi'_\beta \rangle$ qui se déduit de son homologue dans \mathcal{R} par :

$$\langle \psi'_\alpha | \Phi_r(x') | \psi'_\beta \rangle = S_{rs} \langle \psi_\alpha | \Phi_s(x) | \psi_\beta \rangle \quad (5.2.2)$$

La norme de l'état quantique devant être conservée, on demandera que les $|\psi'\rangle$ se déduisent des $|\psi\rangle$ par une transformation unitaire caractérisée par l'opérateur U , soit :

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad (5.2.3a)$$

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (5.2.3b)$$

On en déduit d'après (5.2.2) :

$$\langle \psi_\alpha | U^{-1} \Phi_r(x') U | \psi_\beta \rangle = S_{rs} \langle \psi_\alpha | \Phi_s(x) | \psi_\beta \rangle$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel état quantique, on obtient la loi de transformation des opérateurs de champ

$$U^{-1} \Phi_r(x') U = S_{rs} \Phi_s(x) \quad (5.2.4a)$$

soit encore :

$$U \Phi_r(x) U^{-1} = S_{rs}^{-1} \Phi_s(x') \quad (5.2.4b)$$

Examinons le cas particulier extrêmement important d'une translation élémentaire $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ qui correspond à une translation passive de $-a^\mu$, équivalente à une translation active $+a^\mu$; on prendra U sous la forme

$$U = e^{ia_\mu P^\mu} \quad (5.2.5)$$

où P^μ est un certain opérateur hermitique ; on en déduit, au premier ordre en a^μ , d'après (5.2.4b)

$$(1 + ia_\mu P^\mu)\Phi_r(x)(1 - ia_\mu P^\mu) = \Phi_r(x + a) = \Phi_r(x) + a_\mu \partial^\mu \Phi_r(x)$$

ce qui permet d'établir le résultat fondamental caractérisant la transformation des champs par translation au niveau quantique :

$$\partial^\mu \Phi_r(x) = i [P^\mu, \Phi_r(x)] \quad (5.2.6)$$

Ceci conduit en particulier à

$$\partial^0 \Phi_r(x) = i [P^0, \Phi_r(x)] \quad (5.2.7)$$

qui suggère d'identifier tout d'abord, par analogie avec (5.1.12), l'opérateur P^0 avec l'opérateur hamiltonien H déduit du théorème de Noether (éq. 4.3.6a) et, en vertu de l'invariance de Lorentz, les opérateurs P^1, P^2, P^3 avec les trois composantes de l'opérateur impulsion également déduit du théorème de Noether (éq. 4.3.6b). L'invariance par translation de la théorie provient de l'identification des opérateurs P^μ avec les opérateurs de quadri-impulsion conservée (voir chapitre 2).

La prise en compte des contraintes de covariance en théorie quantique des champs nécessite ainsi la procédure suivante :

- (i) on utilise le théorème de Noether pour obtenir un quadri-vecteur impulsion-énergie P^μ conservé
- (ii) P^μ est une fonctionnelle des champs Φ_s et de leurs moments conjugués Π_s qui sont des opérateurs vérifiant certaines relations de commutation; P^μ est lui aussi un opérateur
- (iii) on vérifie que le P^μ obtenu via le théorème de Noether obéit bien aux relations de commutation imposées par la covariance (éq. 5.2.6) et que $[H, P^i] = 0$. Si ce n'est pas le cas, on doit alors changer les relations de commutation canoniques.

Le dernier point signifie en particulier que ce sont les contraintes de covariance qui priment. Il n'y a en effet rien de réellement "sacré" dans les relations de commutation telles que celles données par l'équation (5.1.11) à tel point qu'elles sont remplacées par des relations d'anticommutation dans le cas des fermions.

On notera également que, d'après (5.2.7), pour tout opérateur A construit comme une fonction (ou une fonctionnelle) des champs Φ_r et Π_s pris au temps t on a

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] \quad (5.2.8a)$$

qui est bien la loi d'évolution en représentation de Heisenberg (éq. 5.1.12). De façon plus générale, la propriété d'invariance par translation de la théorie se traduira pour A par la relation issue directement de (5.2.4) et (5.2.5) :

$$A(x+a) = e^{iP^\mu a_\mu} A(x) e^{-iP^\mu a_\mu} \quad (5.2.8b)$$

2-2 Quantification et symétries internes

a- Construction des opérateurs quantiques

Dans le paragraphe 4 du chapitre précédent, nous avons introduit la notion de symétrie interne. Nous avons ainsi considéré un système de champs représenté par un vecteur colonne $(\Phi)(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_s(x), \dots, \Phi_N(x))$, qui se transforme comme une certaine représentation d'un certain groupe (de Lie) :

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta_a T_a} \Phi(x) \quad (5.2.9)$$

où les p matrices T_a constituent une représentation (de dimension égale au nombre de champs indépendants) de l'algèbre de Lie du groupe.

Dans une théorie quantique cette loi de transformation devient une loi de transformation sur les éléments de matrice :

$$\langle \psi_\alpha | \Phi(x) | \psi_\beta \rangle \rightarrow \langle \psi'_\alpha | \Phi(x) | \psi'_\beta \rangle = e^{i\theta_a T_a} \langle \psi_\alpha | \Phi(x) | \psi_\beta \rangle \quad (5.2.10)$$

La norme de l'état quantique devant être conservée on demandera de nouveau que les $|\psi'\rangle$ se déduisent des $|\psi\rangle$ par une transformation unitaire

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad (5.2.11a)$$

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (5.2.11b)$$

et l'on prendra l'opérateur U sous la forme :

$$U = e^{i\theta_a Q_a} \quad (5.2.11c)$$

où les "charges" Q_a sont des opérateurs hermitiques. On en déduit d'après (5.2.10) :

$$\langle \psi'_\alpha | \Phi_r(x) | \psi'_\beta \rangle = (e^{i\theta_a T_a})_{rs} \langle \psi'_\alpha | U \Phi_s(x) U^{-1} | \psi'_\beta \rangle$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel état quantique on obtient la loi de transformation des opérateurs de champ :

$$U^{-1} \Phi_r(x) U = (e^{i\theta_a T_a})_{rs} \Phi_s(x) \quad (5.2.12)$$

Prenant une transformation infinitésimale et développant l'équation précédente au premier ordre dans les paramètres θ_a , on obtient les relations de commutation :

$$[Q_a, \Phi_r(x)] = -(T_a)_{rs} \Phi_s(x) \quad (5.2.13)$$

Il s'agit maintenant de construire explicitement les opérateurs U transformant les états quantiques et les opérateurs de champ. Considérons les charges obtenues classiquement à partir du théorème de Noether, soit :

$$Q_a(t) = \int d\mathbf{r} \{-i\Pi_r(\mathbf{r}, t) (T_a)_{rs} \Phi(\mathbf{r}, t)\} \quad (5.2.14)$$

Le lecteur vérifiera facilement que si les relations de commutation canoniques des champs sont du type bosonique ou fermionique

$$[\Phi_r(\mathbf{r}, t), \Pi_s(\mathbf{r}', t)]_{\mp} = \Phi_r(\mathbf{r}, t) \Pi_s(\mathbf{r}', t) \mp \Pi_s(\mathbf{r}', t) \Phi_r(\mathbf{r}, t) = i \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.2.15)$$

les opérateurs de charge issus du théorème de Noether obéissent bien aux relations de commutation (5.2.13), ce qui n'était pas évident *a priori*. On vérifiera également en utilisant (5.2.15) que ces mêmes opérateurs de charges obéissent aussi aux relations de commutation de l'algèbre de Lie

$$[Q_a(t), Q_b(t)] = iC_{abc} Q_c(t) \quad (5.2.16)$$

où les C_{abc} sont les constantes de structure du groupe. Par exemple, les huit charges de saveur F_i introduites au chapitre précédent (éq. 4.4.23) obéissent, une fois élevées au rang d'opérateurs, à l'algèbre des charges de $SU(3)$:

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (5.2.17)$$

b- Lois de conservation

Considérons un système de champ gouverné par un lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$ où \mathcal{L}_0 est invariant sous la transformation (5.2.9) mais \mathcal{L}' ne l'est pas nécessairement. Nous avons vu au chapitre précédent que, au cours d'une transformation élémentaire, le lagrangien se transforme suivant

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}' = -\theta_a \partial_\mu j_a^\mu = i\theta_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_r} (T_a)_{rs} \Phi_s \quad (5.2.18a)$$

où

$$j_a^\mu = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)} (T_a)_{rs} \Phi_s \quad (5.2.18b)$$

est le courant associé à la transformation (5.2.9). Par ailleurs, la loi de transformation des champs quantiques (eq. 5.2.12) impose

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}' = U^{-1}\mathcal{L}U - \mathcal{L} = U^{-1}\mathcal{L}'U - \mathcal{L}' = -i[\theta_a Q_a, \mathcal{L}'] = +i[\theta_a Q_a, \mathcal{H}'] \quad (5.2.19)$$

où $\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$ est la densité de hamiltonien qui n'est pas invariante. En identifiant (5.2.18) et (5.2.19), on obtient :

$$\partial_\mu j_a^\mu(\mathbf{r}, t) = i[\mathcal{H}'(\mathbf{r}, t), Q_a(t)] \quad (5.2.20)$$

Si l'on introduit le hamiltonien $H' = -\int d\mathbf{r} \mathcal{L}'(\mathbf{r}, t)$, par intégration spatiale de (5.2.20), on aboutit à

$$\frac{dQ_a}{dt} = i[H', Q_a] \equiv i[H, Q_a] \quad (5.2.21)$$

où la dernière égalité provient du fait que la charge commute avec la partie H_0 du hamiltonien associée à la partie invariante \mathcal{L}_0 du lagrangien. On aurait bien sûr pu écrire directement ce dernier résultat en utilisant la propriété d'invariance par translation (éq. 5.2.8).

Si les charges Q_a commutent avec le hamiltonien total du système de champs, la symétrie est réalisée exactement et les charges sont conservées ($dQ_a/dt = 0$). Plaçons-nous alors en représentation de Schrödinger ; soit un état $|\psi_i\rangle$ préparé à l'instant t_i , l'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état $|\psi_f\rangle$ à l'instant t_f est :

$$S_{fi} = \langle \psi_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | \psi_i \rangle \quad (5.2.22)$$

Considérons maintenant le processus "tourné"; partant de l'état $U|\psi_i\rangle$ à l'instant t_i , l'amplitude de probabilité de trouver l'état $U|\psi_f\rangle$ à l'instant t_f est :

$$S'_{fi} = \langle \psi_f | U^{-1} e^{-iH(t_f-t_i)} U | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | \psi_i \rangle = S_{fi} \quad (5.2.23)$$

Autrement dit, si la symétrie est réalisée exactement, les charges Q_a et par suite les opérateurs U commutent avec le hamiltonien H gouvernant l'évolution du système et le processus "tourné" (S'_{fi}) se produit avec la même amplitude et par suite la même probabilité que le processus original (S_{fi}).

3- QUANTIFICATION DU CHAMP DE KLEIN-GORDON

Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés à l'interprétation particulière qui émerge de la quantification des champs. Bien qu'il n'existe pas de particule fondamentale scalaire (spin zéro), la quantification d'un champ scalaire permet d'illustrer les méthodes en évitant d'alourdir le formalisme par l'introduction d'un spin. L'intérêt d'une telle étude n'est cependant pas seulement académique car on peut utiliser des techniques issues de la théorie des champs pour traiter des objets composites tels que des hadrons scalaires ou pseudo-scalaires, un exemple important étant celui des pions. Ce type de théorie effective n'est bien

sûr utilisable qu'à basse énergie où l'on peut ignorer la structure en quarks des hadrons.

3-1 Quantification canonique

On considère le champ le plus simple : un champ scalaire réel libre $\Phi(x)$. Le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^2) \quad (5.3.1)$$

Il obéit à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Phi(x) = 0 \quad (5.3.2)$$

On développe le champ sur une base d'ondes planes solution de l'équation de Klein-Gordon, soit :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_k)^{1/2}} \left(a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \quad (5.3.3)$$

La présence de $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ dans le préfacteur est pour l'instant purement conventionnelle. Une fois le champ quantifié, les coefficients $a(\mathbf{k})$ seront promus au rang d'opérateurs ; le champ réel Φ deviendra alors un opérateur hermitique comme ceci est manifeste sur l'expression précédente. L'opérateur associé au moment conjugué du champ $\Pi = \dot{\Phi}$ s'écrira :

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_k)^{1/2}} (-i\omega_k) \left(a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \quad (5.3.3)$$

On laisse à titre d'exercice le soin de vérifier que les relations de commutations canoniques à temps égal (éq. 5.1.11) pour les champs Φ et Π conduisent aux relations de commutation suivantes pour les opérateurs a et a^\dagger :

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

On introduit parfois pour des raisons de commodité une notation discrète. Pour ce faire, on place le système dans une grande boîte de volume $V = L^3$ qui tendra vers l'infini en fin de calcul et disparaîtra dans tous les résultats physiques. On impose des conditions aux limites périodiques :

$$\Phi(x + L, y, z) = \Phi(x, y + L, z) = \Phi(x, y, z + L) = \Phi(x, y, z)$$

Ceci se traduit par le fait que les modes permis sont tels que (n_x, n_y, n_z entiers)

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L} \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L} \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L}$$

Il y a donc un mode \mathbf{k} par “volume” élémentaire $(2\pi)^3/V$. Comme

$$\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (5.3.5a)$$

le passage de la notation continue à la notation discrète se fait à l’aide des règles suivantes :

$$\sum_{\mathbf{k}} = \int \frac{V d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (5.3.5b)$$

$$\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (5.3.5c)$$

Les opérateurs

$$a_{\mathbf{k}} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} a(\mathbf{k}) \quad (5.3.5d)$$

permettent de réexprimer, en notation discrète, les champs et les relations de commutation :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega_k t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega_k t)} \right) \quad (5.3.6)$$

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} (-i\omega_k) \left(a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega_k t)} - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega_k t)} \right) \quad (5.3.7)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (5.3.8)$$

Ces relations de commutation sont des relations de commutation des opérateurs de création et d’annihilation de bosons. On verra ci-dessous que ces bosons peuvent réellement être interprétés comme des particules.

3-2 Interprétation particulière : l’espace des états

a- Les opérateurs H et \mathbf{P}

Introduisons, via le théorème de Noether, les opérateurs hamiltonien et impulsion du système (éq. 4.3.9) :

$$H = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla_{\mathbf{r}}\Phi)^2 + m^2\Phi^2) (\mathbf{r}, t) \quad (5.3.9a)$$

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} (\Pi \nabla_{\mathbf{r}}\Phi) (\mathbf{r}, t) \quad (5.3.9b)$$

Il peut surgir, lorsque l'on passe de la grandeur classique à la grandeur quantique, un problème lié à l'ordre des opérateurs lorsque ceux-ci ne commutent pas. On conservera tout d'abord l'ordre d'écriture de l'équation (5.3.9) et on verra plus loin comment lever cette ambiguïté. On développe ensuite les opérateurs en modes normaux en prenant garde au fait que les opérateurs a et a^\dagger ne commutent pas lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$. On trouve alors en notation discrète puis continue :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) = \int d\mathbf{k} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (5.3.10a)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{2} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) = \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{2} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})) \quad (5.3.10b)$$

Soit encore en utilisant les relations de commutations (5.3.4), (5.3.8) :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) \quad (5.3.11a)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) = \int d\mathbf{k} \mathbf{k} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{\delta^{(3)}(0)}{2} \right) \quad (5.3.11b)$$

Il apparaît que le hamiltonien se décompose en une somme de hamiltoniens élémentaires $H_{\mathbf{k}}$

$$H_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

correspondant aux modes \mathbf{k} . On voit également que le hamiltonien de chacun de ces modes correspond à un hamiltonien d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_{\mathbf{k}}$. On sait par ailleurs (ceci provient directement des relations de commutation des $a_{\mathbf{k}}$) que les valeurs propres de l'opérateur $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ sont les entiers positifs ou nuls $n_{\mathbf{k}}$. Les valeurs propres de $H_{\mathbf{k}}$ sont donc :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

L'état fondamental du système de champs correspond à une configuration où tous les $n_{\mathbf{k}}$ sont nuls. L'énergie de l'état fondamental que l'on notera $|0\rangle$ est :

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}$$

Cette énergie est égale à une constante infinie. Comme seules les différences d'énergie ont un sens physique, on conviendra de soustraire cette énergie dans la définition du hamiltonien :

$$H \rightarrow H - \langle 0|H|0\rangle = H - E_0 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$$

Cette soustraction est automatique si, dans l'expression du hamiltonien, on convient de placer systématiquement les opérateurs de "création" a^\dagger à gauche et les opérateurs de "destruction" a à droite ; c'est ce que l'on appelle l'ordre normal des opérateurs. Un opérateur A écrit en ordre normal sera noté : $A : .$ Le hamiltonien écrit selon l'ordre normal sera :

$$H = \int d\mathbf{r} : (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L})(\mathbf{r}, t) : \quad (5.3.12a)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_k}{2} : a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger : \quad (5.3.12b)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (5.3.12c)$$

De la même façon, l'opérateur impulsion sera écrit selon l'ordre normal :

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} : (\Pi \nabla_{\mathbf{r}} \Phi)(\mathbf{r}, t) : \quad (5.3.12d)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{2} : a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger : \quad (5.3.12e)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (5.3.12f)$$

Cette prescription lève ainsi l'ambiguïté mentionnée ci-dessus sur l'ordre d'écriture d'opérateurs ne commutant pas. De façon plus générale pour toute observable obtenue classiquement grâce au théorème de Noether, on prendra l'ordre normal.

b- Interprétation particulière; espace de Fock

Les spectres du hamiltonien H donné par (5.3.12c) et de l'impulsion \mathbf{P} donné par (5.3.12f) sont complètement déterminés par le spectre des opérateurs "nombre d'occupation du mode \mathbf{k} " $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$, dont les valeurs propres sont tous les entiers positifs ou nuls ; on pourra alors construire des états quantiques $|n_1 \dots n_{\mathbf{k}} \dots \rangle$ états propres de H et \mathbf{P} :

$$H | \dots n_{\mathbf{k}} \dots \rangle = \left(\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \omega_k \right) | \dots n_{\mathbf{k}} \dots \rangle \quad (5.3.13a)$$

$$\mathbf{P} | \dots n_{\mathbf{k}} \dots \rangle = \left(\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \right) | \dots n_{\mathbf{k}} \dots \rangle \quad (5.3.13b)$$

Ceci signifie que l'état du système est déterminé par la donnée de chaque nombre $n_{\mathbf{k}}$ de quanta d'excitation du mode \mathbf{k} . De plus, chaque quantum porte manifestement une impulsion \mathbf{k} et une énergie $\omega_{\mathbf{k}} = (m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$ qui est précisément l'énergie d'une particule de masse m et d'impulsion \mathbf{k} . Il est par conséquent tout à fait naturel de donner une interprétation particulière à ces états. On peut résumer cela de la façon suivante :

- l'opérateur $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($a_{\mathbf{k}}$) est un opérateur de création (destruction) d'une particule dans le mode \mathbf{k} ,
- l'opérateur $N_{\mathbf{k}}$ est l'opérateur nombre de particules dans le mode \mathbf{k} ,
- dans l'état $|\dots n_{\mathbf{k}} \dots\rangle$ on a $n_{\mathbf{k}}$ particules d'impulsion \mathbf{k} et d'énergie $\omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{(1/2)}$.

On peut construire l'ensemble de ces états à partir de l'état de vide $|0\rangle$ par application successive des opérateurs de création. L'espace des états ainsi obtenu est appelé l'espace de Fock :

- état fondamental (aucune particule) : $|0\rangle$,
- état contenant $n_{\mathbf{k}}$ particules d'impulsion \mathbf{k}

$$|\dots n_{\mathbf{k}} \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}}!} \right)^{\frac{1}{2}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}} |0\rangle \quad (5.3.14a)$$

Il en résulte que l'action des opérateurs de création et de destruction sur un tel état est :

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |\dots n_{\mathbf{k}} \dots\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}} + 1} |\dots n_{\mathbf{k}} + 1 \dots\rangle \quad (5.3.14b)$$

$$a_{\mathbf{k}} |\dots n_{\mathbf{k}} \dots\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}} |\dots n_{\mathbf{k}} - 1 \dots\rangle \quad (5.3.14c)$$

Par suite, l'action de l'opérateur de destruction $a_{\mathbf{k}}$ sur un état $|\dots n_{\mathbf{k}} = 0 \dots\rangle$ donne bien entendu zéro. Ces états vérifient les relations d'orthonormalisation-fermeture :

$$\langle \dots n_{\mathbf{k}} \dots | \dots n'_{\mathbf{k}} \dots \rangle = \prod_{\mathbf{k}} \delta_{n_{\mathbf{k}} n'_{\mathbf{k}}} \quad (5.3.15a)$$

$$\sum_{(n_1 \dots n_{\mathbf{k}} \dots)} |n_1 \dots n_{\mathbf{k}} \dots\rangle \langle n_1 \dots n_{\mathbf{k}} \dots| = 1 \quad (5.3.15b)$$

3-3 Champ scalaire chargé et antiparticules

Supposons que l'on ait maintenant deux champs hermitiques libres (de même masse) Φ_1 et Φ_2 . Soient $a_{1\mathbf{k}}$ et $a_{2\mathbf{k}}$ les opérateurs de destruction associés. On peut définir deux champs complexes :

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - i\Phi_2}{\sqrt{2}} \quad (5.3.16a)$$

$$\Phi^\dagger = \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{\sqrt{2}} \quad (5.3.16b)$$

Le lagrangien pourra s'écrire indifféremment comme :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\partial^\mu \Phi_i \partial_\mu \Phi_i - m^2 \Phi_i^2) = (\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi^\dagger - m^2 \Phi \Phi^\dagger) \quad (5.3.17)$$

Les moments conjugués des champs seront :

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}^\dagger \quad (5.3.18a)$$

$$\Pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^\dagger} = \dot{\Phi} \quad (5.3.18b)$$

On peut également introduire les opérateurs

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{a_{1\mathbf{k}} - ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}} \quad (5.3.19a)$$

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}} \quad (5.3.19b)$$

pour lesquels les seuls commutateurs non nuls sont :

$$[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (5.3.19c)$$

Le champ complexe Φ et son moment conjugué pourront alors se décomposer suivant :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} \left(A_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} + B_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \quad (5.3.20a)$$

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} (-i\omega_k) \left(B_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \quad (5.3.20b)$$

Les opérateurs hamiltonien et impulsion pourront s'écrire indifféremment comme :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_k (a_{1\mathbf{k}}^\dagger a_{1\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{k}}^\dagger a_{2\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_k (A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}}) \quad (5.3.21a)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{1\mathbf{k}}^\dagger a_{1\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{k}}^\dagger a_{2\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}}) \quad (5.3.21b)$$

Il pourrait sembler que le fait de remplacer les champs Φ_1 et Φ_2 par Φ et Φ^\dagger est sans intérêt ; on a en particulier exactement le même spectre. Le fait nouveau est que le lagrangien (5.3.17) possède manifestement une symétrie supplémentaire ; il est en effet invariant sous la transformation :

$$\Phi \rightarrow e^{i\theta} \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta} \Phi^\dagger$$

Il possède donc une charge conservée qui s'écrit selon l'ordre normal :

$$Q = -i \int d\mathbf{r} : \Pi \Phi - \Pi^\dagger \Phi^\dagger := \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}}) \quad (5.3.22)$$

Il apparaît clairement que les particules créées par les opérateurs A^\dagger portent une charge $q = +1$ et celles créées par les opérateurs B^\dagger portent une charge $q = -1$. On dit que ces dernières sont les antiparticules des précédentes. Plus généralement, on passe de la particule à l'antiparticule en changeant le signe de toutes les charges additives (*i.e.* les nombres quantiques additifs) associées à des symétries internes (charges électrique, baryonique, leptonique, d'étrangeté,.....) sans changer les variables d'espace. Cette opération qui porte le nom de conjugaison de charge sera étudiée en détail au chapitre 8.

3-4 Le propagateur de Feynman

a- Introduction heuristique

Nous allons calculer de façon heuristique l'amplitude de probabilité pour augmenter la charge de une unité au point \mathbf{r} à l'instant t et la diminuer de une unité au point \mathbf{r}' à l'instant t' . On a deux possibilités :

- (a)- on crée une charge $q = +1$ en (\mathbf{r}, t) et on la détruit en (\mathbf{r}', t') avec $t' > t$
- (b)- on crée une charge $q = -1$ en (\mathbf{r}', t') et on la détruit en (\mathbf{r}, t) avec $t > t'$

(a) Pour créer une charge $q = +1$ en (\mathbf{r}, t) , on fait agir le champ $\Phi^\dagger(\mathbf{r}, t)$ sur le vide. On obtient l'état :

$$|\Psi_+(\mathbf{r}, t)\rangle = \Phi^\dagger(\mathbf{r}, t)|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} A_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} |0\rangle$$

L'amplitude de probabilité pour détruire cette charge en (\mathbf{r}', t') avec $t' > t$ est :

$$\langle \Psi_+(\mathbf{r}', t') | \Psi_+(\mathbf{r}, t) \rangle = \theta(t' - t) = \langle 0 | \Phi(\mathbf{r}', t') \Phi^\dagger(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle = \theta(t' - t)$$

(b) Pour créer une charge $q = -1$ en (\mathbf{r}', t') , on fait agir le champ $\Phi(\mathbf{r}', t')$ sur le vide. On obtient l'état :

$$|\Psi_-(\mathbf{r}', t') \rangle = \Phi(\mathbf{r}', t') | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2\omega_k V)^{1/2}} B_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega_k t')} | 0 \rangle$$

L'amplitude de probabilité pour détruire cette charge en (\mathbf{r}, t) avec $t > t'$ est :

$$\langle \Psi_-(\mathbf{r}, t) | \Psi_-(\mathbf{r}', t') \rangle = \theta(t - t') = \langle 0 | \Phi^\dagger(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}', t') | 0 \rangle = \theta(t - t')$$

L'amplitude totale se mettra sous la forme d'un produit chronologique

$$\begin{aligned} \theta(t' - t) \langle 0 | \Phi(x') \Phi^\dagger(x) | 0 \rangle + \theta(t - t') \langle 0 | \Phi^\dagger(x) \Phi(x') | 0 \rangle \\ \equiv \langle 0 | T(\Phi(x') \Phi^\dagger(x)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

où le symbole de produit chronologique T signifie que l'on classe les opérateurs de la gauche vers la droite par ordre d'argument temporel décroissant. On définit alors le propagateur de Feynman par :

$$\Delta_F(x', x) = -i \langle 0 | T(\Phi(x') \Phi^\dagger(x)) | 0 \rangle \quad (5.3.23)$$

b- Calcul du propagateur de Feynman

Nous venons de montrer de façon qualitative que le propagateur de Feynman décrit à la fois la propagation des particules et la propagation des antiparticules d'un point d'espace-temps à un autre. Nous verrons de façon rigoureuse dans le chapitre 9 consacré à la théorie des perturbations que ce propagateur intervient naturellement pour décrire la propagation d'une particule (ou d'une antiparticule) entre deux interactions successives. Il importe par conséquent d'en avoir une expression explicite. Nous ne donnerons ici que les étapes conduisant au résultat final et laisserons au lecteur le soin d'effectuer les calculs intermédiaires lorsqu'ils sont sans difficulté.

Si l'on introduit le quadri-vecteur $k = (\omega_k, \mathbf{k})$, en insérant le développement en mode normal des opérateurs de champ, on obtient en utilisant les relations d'orthonormalisation des ondes planes :

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x, x') &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(\theta(t - t') e^{-ik(x-x')} + \theta(t' - t) e^{ik(x-x')} \right) \\ &\equiv i\Delta_F(x - x') \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Ceci montre que le propagateur de Feynman est en réalité une fonction de $x - x'$, en accord avec l'invariance par translation.

Pour mettre ce propagateur sous une forme explicitement covariante, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant :

$$I = \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 t}}{k_0 - \omega_k + i\eta} = -i \theta(t) e^{-i\omega_k t} \quad (5.3.25)$$

Cette intégrale se transforme en une intégrale sur un contour en complétant l'axe réel par un grand cercle de rayon R tendant vers l'infini (voir figure 5.1 ci-dessous) de telle façon que la contribution à l'intégrale du grand cercle soit nulle.

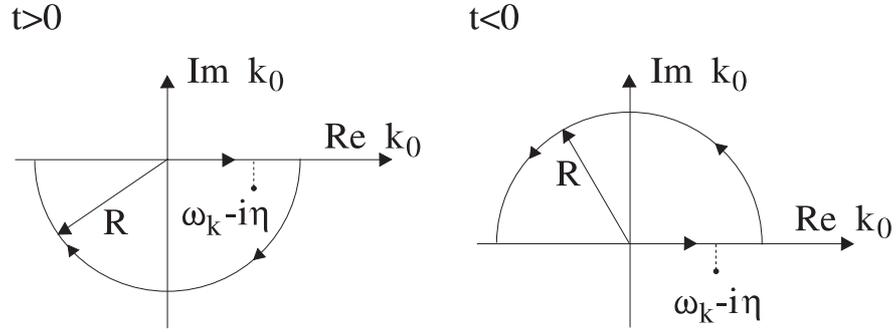


Figure 5.1 : Les deux contours d'intégration dans le plan complexe, suivant le signe de t , pour le calcul de l'intégrale (5.3.25).

Il y a deux cas possibles suivant le signe de t (figure 5.1).

- (i) Si $t > 0$; il faut que $(-i)(i \text{Im } k_0) t < 0$, soit $\text{Im } k_0 \sim -R < 0$. On doit alors intégrer sur le grand cercle situé dans le demi-plan complexe inférieur. Dans ce domaine, l'intégrand possède un pôle en $k_0 = \omega_k - i\eta$. L'application du théorème des résidus donne immédiatement $I = -i \exp(-i\omega_k t)$.
- (ii) Si $t < 0$; il faut que $(-i)(i \text{Im } k_0) t < 0$, soit $\text{Im } k_0 \sim +R > 0$. On doit alors intégrer sur le grand cercle situé dans le demi-plan complexe supérieur. Dans ce domaine l'intégrand ne possède pas de pôle. Le théorème des résidus donne bien $I = 0$.

Par suite, en changeant \mathbf{k} en $-\mathbf{k}$ dans le deuxième terme de (5.3.24) on obtient :

$$\Delta_F(x - x') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \left(\frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0 - \omega_k + i\eta} + \frac{e^{ik_0(t-t')}}{k_0 - \omega_k + i\eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \int \frac{dk_0}{2\pi} \left(\frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0 - \omega_k + i\eta} - \frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0 + \omega_k - i\eta} \right) \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \quad (5.3.26)
 \end{aligned}$$

Ainsi dans l'espace des quadri-impulsions qui est utilisé en pratique, le propagateur de Feynman a une forme particulièrement simple :

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \quad (5.3.27)$$

et $\Delta_F(k)$ possède des pôles en :

$$k_0 = +\omega_k - i\eta, \quad k_0 = -\omega_k + i\eta$$

4- QUANTIFICATION DU CHAMP DE DIRAC

4-1 Développement du champ dans l'espace des impulsions et relations d'anticommutation

Nous considérons un champ de Dirac libre dont le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (5.4.1)$$

Nous allons développer ce champ sur une base d'onde plane solution de l'équation de Dirac libre :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (5.4.2)$$

Ses solutions, caractérisées par le quadri-vecteur $p = (E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \mathbf{p})$ et l'indice de spin $s = \pm 1$, sont de deux types :

$$\phi_{\mathbf{p}s}(x) = u(p, s) e^{-ipx} \quad (5.4.3a)$$

$$\eta_{\mathbf{p}s}(x) = v(p, s) e^{ipx} \quad (5.4.3b)$$

La forme explicite (en représentation de Dirac) et les propriétés principales de ces spineurs de Dirac u et v sont regroupées dans l'appendice A.

Pour écrire le développement du champ au point $x = (t, \mathbf{r})$ nous allons, comme dans la section précédente, discrétiser l'espace ordinaire en plaçant le système dans une grande boîte de volume V . Les modes permis \mathbf{p} seront placés au nœud du réseau cubique réciproque de maille $2\pi/V^{1/3}$. Le champ sera de la forme :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}, s} \frac{1}{(2E_p V)^{1/2}} (e^{-ipx} u(p, s) b_{\mathbf{p}s} + e^{ipx} v(p, s) d_{\mathbf{p}s}^\dagger) \quad (5.4.4)$$

où les $b_{\mathbf{p}s}$ et les $d_{\mathbf{p}s}$ sont des opérateurs dont nous allons maintenant préciser les propriétés. Nous allons procéder d'une façon quelque peu différente de celle utilisée dans le cas du champ de Klein-Gordon. Nous avons en effet déduit les relations de commutation canoniques satisfaites par les opérateurs a et a^\dagger à partir des relations de commutation canoniques entre le champ Φ et son moment conjugué ; nous allons ici les déduire du spectre du hamiltonien et verrons qu'elles doivent être remplacées par des relations d'anticommutation.

Les opérateurs hamiltonien et impulsion sont de la forme (voir éq. 4.3.11) :

$$H = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger [-i\alpha_k \nabla_k + \beta m] \psi \quad (5.4.5a)$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger (-i\nabla_{\mathbf{r}}) \psi \quad (5.4.5b)$$

En prenant de nouveau garde au fait que les opérateurs b et d ne commutent pas, on obtient en prenant exactement l'ordre d'écriture ci-dessus :

$$P^\mu = \sum_{\mathbf{p}s} p^\mu (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger) \quad (5.4.6)$$

a- Pourquoi doit-on exclure les relations de commutation?

On notera que l'expression (5.4.6) est très similaire à l'expression équivalente pour les champs de Klein-Gordon (éq. 5.3.11) à la présence près du signe moins qui aura des conséquences considérables.

Supposons tout d'abord que l'on puisse interpréter les opérateurs b^\dagger (b) et d^\dagger (d) comme des opérateurs de création (destruction) de quanta (particules) satisfaisant aux mêmes relations de commutations que les a^\dagger (a) de la section précédente. L'énergie de l'état de vide $|0\rangle$ défini par $b|0\rangle = 0$ et $d|0\rangle = 0$ sera :

$$E_0 = - \sum_{\mathbf{p}s} E_p$$

L'échelle d'énergie est définie en soustrayant comme précédemment cette constante infinie. Les relations de commutation supposées impliquent :

$$H = \sum_{\mathbf{p}s} E_p (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger + 1) \quad (5.4.7a)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}s} E_p [b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger + (d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger - d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s})] \quad (5.4.7b)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}s} E_p (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}) \quad (5.4.7c)$$

Un état contenant un nombre $n_{\mathbf{p}s}$ de particules créées par $d_{\mathbf{p}s}^\dagger$ aura ainsi une énergie $-n_{\mathbf{p}s}E_p$ et le spectre d'énergie n'est pas borné vers les basses énergies ! Ceci est physiquement inacceptable car aucune stabilité n'est possible, si bien que l'hypothèse des relations de commutation doit être rejetée.

b- Pourquoi peut-on utiliser des relations d'anticommutation?

Nous allons maintenant supposer que les opérateurs de type b et d satisfont des relations d'anticommutation qui sont :

$$\{b_{\mathbf{p}s}, b_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = \{d_{\mathbf{p}s}, d_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta_{s,s'} \quad (5.4.8a)$$

$$\{b_{\mathbf{p}s}, b_{\mathbf{p}'s'}\} = \{b_{\mathbf{p}s}^\dagger, b_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = \{d_{\mathbf{p}s}, d_{\mathbf{p}'s'}\} = \{d_{\mathbf{p}s}^\dagger, d_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = 0 \quad (5.4.8b)$$

$$\{b_{\mathbf{p}s}, d_{\mathbf{p}'s'}\} = \{b_{\mathbf{p}s}^\dagger, d_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p}s}, d_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p}s}^\dagger, d_{\mathbf{p}'s'}\} = 0 \quad (5.4.8c)$$

Nous allons montrer par leurs conséquences que ces relations conduisent effectivement à une théorie parfaitement acceptable.

Comme précédemment, on soustrait l'énergie du vide définie par $b|0\rangle = 0$ et $d|0\rangle = 0$. On obtient de nouveau (5.4.7a) mais le terme constant (facteur 1) est remplacé non pas par le commutateur (equ 5.4.7b) mais par l'anticommutateur de d et d^\dagger . Il vient ainsi :

$$H = \sum_{\mathbf{p}s} E_p (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger + 1) \quad (5.4.9a)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}s} E_p [b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger + (d_{\mathbf{p}s} d_{\mathbf{p}s}^\dagger + d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s})] \quad (5.4.9b)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}s} E_p (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} + d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}) \quad (5.4.9c)$$

On obtient ainsi un spectre défini positif. Cette prescription résout donc le problème de la stabilité lié au caractère non borné du spectre.

On peut d'autre part montrer très facilement que les contraintes liées à la covariance de la théorie quantifiée, à savoir

$$\partial^\mu \psi(x) = i [P^\mu, \psi(x)] \quad (5.4.10a)$$

$$\partial^\mu \bar{\psi}(x) = i [P^\mu, \bar{\psi}(x)] \quad (5.4.10b)$$

sont satisfaites lorsque l'on utilise les relations d'anticommutation mais ne le sont pas pour des relations de commutation. Par ailleurs, on verra plus loin que le principe de Pauli résulte directement de telles relations d'anticommutation.

Pour passer du hamiltonien non physique naïf, provenant du développement en modes propres de (5.4.5a), au hamiltonien physique (5.4.9c) il suffit d'inverser

l'ordre des opérateurs d et d^\dagger et de changer le signe. Ceci sera obtenu automatiquement si, dans l'expression de l'opérateur hamiltonien issu du théorème de Noether (éq. 5.4.5a), on convient de placer systématiquement les opérateurs de création (b^\dagger , d^\dagger) à gauche et les opérateurs de destruction (b , d) à droite et de changer le signe à chaque fois que l'on effectue une permutation entre ces opérateurs. De nouveau, cette écriture correspondra à l'ordre normal et un opérateur A écrit en ordre normal sera noté : $A : .$ Ainsi, l'opérateur hamiltonien, une fois écrit selon l'ordre normal, sera :

$$\begin{aligned}
 H &= \int d\mathbf{r} : \psi^\dagger [-i\alpha_k \nabla_k + \beta m] \psi : \\
 &= \sum_{\mathbf{p}s} E_p : b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s} : \\
 &= \sum_{\mathbf{p}s} E_p (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} + d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}) \quad (5.4.11a)
 \end{aligned}$$

De même, on obtient pour l'opérateur impulsion :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \int d\mathbf{r} : \psi^\dagger (-i\nabla_{\mathbf{r}}) \psi : \\
 &= \sum_{\mathbf{p}s} \mathbf{p} : b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s} : \\
 &= \sum_{\mathbf{p}s} \mathbf{p} (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} + d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}) \quad (5.4.11b)
 \end{aligned}$$

On montre alors à partir des relations (5.4.8) que les champs satisfont des relations d'anticommutation à temps égal suivantes :

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{r}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}', t)\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\beta} \quad (5.4.13a)$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{r}, t), \psi_\beta(\mathbf{r}', t)\} = 0 \quad (5.4.13b)$$

4-2 Interprétation particulière : observables, états

Des relations d'anticommutation, il résulte immédiatement que les opérateurs $N_{\mathbf{p}s}^+ = b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s}$ et $N_{\mathbf{p}s}^- = d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}$ ont pour valeur propre, que l'on notera $n_{\mathbf{p}s}^+$ et $n_{\mathbf{p}s}^-$, 0 ou 1. Par conséquent, l'état du système sera complètement déterminé par le nombre de quantum d'excitation (0 ou 1) créés par les opérateurs b^\dagger ou d^\dagger . On notera un tel état $|\dots n_{\mathbf{p}s}^+, \dots, n_{\mathbf{p}'s'}^-, \dots \rangle$. Cet état est de façon évidente état propre des opérateurs hamiltonien et impulsion :

$$H |\dots n_{\mathbf{p}s}^+, \dots, n_{\mathbf{p}'s'}^-, \dots \rangle = \sum_{\mathbf{p}s, \mathbf{p}'s'} (n_{\mathbf{p}s}^+ E_p + n_{\mathbf{p}'s'}^- E_{p'}) |\dots n_{\mathbf{p}s}^+, \dots, n_{\mathbf{p}'s'}^-, \dots \rangle \quad (5.4.14a)$$

$$\mathbf{P} |\dots n_{\mathbf{p}s}^+ \dots n_{\mathbf{p}'s'}^- \dots \rangle = \sum_{\mathbf{p}s\mathbf{p}'s'} (n_{\mathbf{p}s}^+ \mathbf{p} + n_{\mathbf{p}'s'}^- \mathbf{p}') |\dots n_{\mathbf{p}s}^+ \dots n_{\mathbf{p}'s'}^- \dots \rangle \quad (5.4.14b)$$

Ces états satisfont aux relations d'orthogonalisation-fermeture :

$$\langle \dots n_{\mathbf{p}s}^+ \dots n_{\mathbf{q}r}^- \dots | \dots n_{\mathbf{p}'r}^+ \dots n_{\mathbf{q}'s'}^- \dots \rangle = \prod_{\mathbf{p}s, \mathbf{q}r} \delta_{n_{\mathbf{p}s}^+, n_{\mathbf{p}'s'}^+} \delta_{n_{\mathbf{q}r}^-, n_{\mathbf{q}'s'}^-} \quad (5.4.15a)$$

$$\sum_{n_{\mathbf{p}s}^+, n_{\mathbf{p}'s'}^- = 0, 1} |\dots n_{\mathbf{p}s}^+ \dots n_{\mathbf{p}'s'}^- \dots \rangle \langle \dots n_{\mathbf{p}s}^+ \dots n_{\mathbf{p}'s'}^- \dots | = 1 \quad (5.4.15b)$$

L'espace de Fock des états, sous-tendu par les $|\dots n_{\mathbf{p}s}^+, \dots, n_{\mathbf{p}'s'}^-, \dots \rangle$, sera obtenu par application successive des opérateurs $b_{\mathbf{p}s}^\dagger$ et $d_{\mathbf{p}'s'}^\dagger$ sur le vide $|0 \rangle$. Notons que l'on ne peut avoir deux quanta de même type avec les mêmes nombres quantiques (\mathbf{p} et s) car ceci est interdit par les relations d'anticommutation ; c'est le principe, bien connu, d'exclusion de Pauli pour les fermions qui provient, autre façon de le dire, du caractère antisymétrique des états.

On peut construire quatre états correspondant à un quantum d'impulsion donnée \mathbf{p} . Ces quatre états sont :

$$b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0 \rangle \quad b_{\mathbf{p}-s}^\dagger |0 \rangle \quad d_{\mathbf{p}s}^\dagger |0 \rangle \quad d_{\mathbf{p}-s}^\dagger |0 \rangle$$

D'après (5.4.14), chacun de ces quatre états possède une impulsion \mathbf{p} et une énergie E_p . L'interprétation particulière est donc évidente ; ils correspondent tous à un état de particule de masse m et d'impulsion \mathbf{p} . Pour lever cette quadruple dégénérescence on va considérer tout d'abord la charge puis le spin.

a- Charge: particules et antiparticules

Nous avons vu au chapitre précédent que le lagrangien de Dirac était invariant sous la transformation :

$$\psi \rightarrow e^{ie\theta} \psi$$

On peut alors, grâce au théorème de Noether, définir une charge conservée (voir eq. 4.4.13). Dans la version quantique on définira un opérateur de charge obtenu à partir de la quantité classique écrite selon l'ordre normal, soit :

$$Q = e \int d\mathbf{r} : \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) : \quad (5.4.16a)$$

Un calcul explicite donne très facilement :

$$Q = \sum_{\mathbf{p}s} e (b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} - d_{\mathbf{p}s}^\dagger d_{\mathbf{p}s}) \quad (5.4.16b)$$

Il apparaît ainsi que chaque quantum de type (+) (créé par les b^\dagger) porte une charge $q = +e$ et que chaque quantum de type (-) (créé par les d^\dagger) porte une

charge $q = -e$.

On associe les quanta créés par les b^\dagger à la particule (par exemple l'électron) et les quanta créés par les d^\dagger à l'antiparticule (par exemple le positron). Plus généralement, on passe de la particule à l'antiparticule en changeant le signe de toutes les charges additives (*i.e.* les nombres quantiques additifs) associées à des symétries internes. C'est l'opération de conjugaison de charge déjà vue à la fin du paragraphe précédent. Ceci permet de lever partiellement la dégénérescence qui n'est plus que de deux.

b- Spin

Nous avons montré au chapitre précédent que l'invariance par translation conduisait à la conservation de l'énergie-impulsion. On pourrait montrer par un raisonnement tout à fait similaire que l'invariance sous les rotations ordinaires conduit à la conservation du moment cinétique. Ce moment cinétique, obtenu classiquement via le théorème de Noether, est ensuite élevé au rang d'opérateur que l'on écrira de nouveau suivant l'ordre normal. Le résultat est

$$\mathbf{J} = \int d\mathbf{r} : \psi^\dagger (\mathbf{r} \times (-i\nabla_{\mathbf{r}}) + \mathbf{S}) \psi : \quad (5.4.17)$$

où les trois composantes S_k ($k = 1, 2, 3$) de \mathbf{S} sont des matrices diagonales par bloc

$$S_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

L'interprétation est assez évidente ; le premier terme est la version de seconde quantification de l'opérateur de moment cinétique orbital usuel tandis que le second terme représente le moment cinétique de spin.

Considérons un état d'électron au repos :

$$|\psi_{\mathbf{0}s}\rangle = b_{\mathbf{0}s}^\dagger |0\rangle \quad (5.4.18)$$

Dans le développement du champ de Dirac, cet opérateur $b_{\mathbf{0}s}$ sera associé à la fonction d'onde de Dirac

$$u(m, \mathbf{0}, \mathbf{s}) = (2m)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma_z \chi_s = s \chi_s$ et $s = \pm 1$. z est un axe quelconque. L'action de la projection du moment cinétique le long de la direction z sur ce vecteur d'état s'obtient (en utilisant le fait que le moment cinétique du vide est nul) à l'aide de quelques manipulations :

$$\mathbf{J}_z |\psi_{\mathbf{0}s}\rangle = \mathbf{J}_z b_{\mathbf{0}s}^\dagger |0\rangle = [\mathbf{J}_z, b_{\mathbf{0}s}^\dagger] |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d\mathbf{r} \psi^\dagger (\mathbf{r} \times (-i\nabla_{\mathbf{r}}) + \mathbf{S})_z \{\psi, b_{0s}^\dagger\} |0\rangle \\
 &= \int d\mathbf{r} \psi^\dagger (\mathbf{r} \times (-i\nabla_{\mathbf{r}}) + \mathbf{S})_z \frac{1}{(2mV)^{1/2}} e^{-imt} u(m, \mathbf{0}, s) |0\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s'=-s, +s} \frac{1}{2m} u^\dagger(m, \mathbf{0}, s') S_z u(m, \mathbf{0}, s) b_{0s'}^\dagger |0\rangle \\
 &= \frac{1}{2} s |\psi_{0s}\rangle \tag{5.4.19}
 \end{aligned}$$

C'est donc un état propre du moment cinétique avec la valeur propre $s/2$. L'état $b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle$ s'obtient en effectuant une transformation de Lorentz Λ du système de coordonnées de vitesse $v = -\mathbf{p}/E_p$. Soit $U(\Lambda)$ l'opérateur associé à cette transformation.

$$b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle = U(\Lambda) |\psi_{0s}\rangle$$

$b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle$ représente ainsi un état de particule (électron) avec une impulsion \mathbf{p} et une projection du spin sur l'axe z dans le référentiel de repos égale à $s/2$. $b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle$ et $b_{\mathbf{p}-s}^\dagger |0\rangle$ ont bien un spin au repos opposés ce qui lève la dernière dégénérescence.

On peut répéter la même chose pour un état d'antiparticule. Considérons un état de positron au repos :

$$|\phi_{0s}\rangle = d_{0s}^\dagger |0\rangle \tag{5.4.20}$$

Dans le développement du champ de Dirac cet opérateur d_{0s} sera associé à la fonction d'onde de Dirac :

$$v(m, \mathbf{0}, s) = (2m)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{-s} \end{pmatrix}$$

On notera que cette fonction d'onde met en jeu le spineur de Pauli χ_{-s} (égal à une phase près à $\epsilon\chi_s^*$), et non pas χ_s . L'action de \mathbf{J}_z donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_z |\phi_{0s}\rangle &= \mathbf{J}_z d_{0s}^\dagger |0\rangle = [\mathbf{J}_z, b_{0s}^\dagger] |0\rangle \\
 &= \int d\mathbf{r} (-1) \{\psi^\dagger, d_{0s}^\dagger\} (\mathbf{r} \times (-i\nabla_{\mathbf{r}}) + \mathbf{S})_z \psi |0\rangle \\
 &= \int d\mathbf{r} (-1) \frac{1}{(2mV)^{1/2}} e^{-imt} v(m, \mathbf{0}, s) (\mathbf{r} \times (-i\nabla_{\mathbf{r}}) + \mathbf{S})_z \psi |0\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s'=-s, +s} \frac{1}{2m} (-1) v^\dagger(m, \mathbf{0}, s) S_z v(m, \mathbf{0}, s') d_{0s'}^\dagger |0\rangle \\
 &= \frac{1}{2} s |\phi_{0s}\rangle \tag{5.4.21}
 \end{aligned}$$

où le signe moins est compensé par le fait que $\sigma_z v(m, 0, s) = -s v(m, 0, s)$. $|\phi_{\mathbf{0}s}\rangle$ est donc un état propre du moment cinétique avec la valeur propre $s/2$. L'état $d_{\mathbf{p}s}^\dagger|0\rangle$ s'obtient aussi en effectuant une transformation de Lorentz Λ de vitesse $\mathbf{v} = -\mathbf{p}/E_p$:

$$d_{\mathbf{p}s}^\dagger|0\rangle = U(\Lambda)|\phi_{\mathbf{0}s}\rangle$$

$d_{\mathbf{p}s}^\dagger|0\rangle$ représente ainsi un état d'antiparticule (positron) avec une impulsion \mathbf{p} et une projection du spin sur l'axe z dans le référentiel de repos égale à $s/2$. $d_{\mathbf{p}s}^\dagger|0\rangle$ et $d_{\mathbf{p}-s}^\dagger|0\rangle$ ont bien des spins au repos opposés ce qui lève la dernière dégénérescence.

4-3 Le propagateur de Feynman

On définit le propagateur de Feynman, qui est une matrice 4×4 , par :

$$(S_F)_{\alpha\beta}(x-x') = -i \langle 0|T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x'))|0\rangle \quad (5.4.22)$$

Comme pour les champs de bosons, ce propagateur apparaîtra naturellement en théorie des perturbations, mais cette fois ci le produit chronologique sera défini comme :

$$T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) = \theta(t-t')\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x') - \theta(t'-t)\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)$$

Le calcul de cet élément de matrice est sans difficulté ; il suffit d'utiliser le développement du champ (éq. 5.4.4) et les relations :

$$\sum_s u_\alpha(p, s)\bar{u}_\beta(p, s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s v_\alpha(p, s)\bar{v}_\beta(p, s) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

On arrive à :

$$S_F(x-x') = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x-x') \quad (5.4.23a)$$

où $\Delta_F(x-x')$ est le propagateur bosonique donné par les équations (5.3.26, 27). On a l'habitude d'exprimer ce propagateur par sa représentation dans l'espace des impulsions qui est celle utilisée en pratique, soit

$$S_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} S_F(p) \quad (5.4.23b)$$

avec

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\eta} \quad (5.4.23c)$$

qui a des pôles en $p^0 = \pm E_p \mp i\eta$.

4-4 Transformations des champs et des états de quarks sous une transformations SU(2) ou SU(3)

Nous avons examiné au niveau classique comment se transformaient les champs de quarks u , d et s sous une transformation de SU(3) dans la dernière section du chapitre 4. Nous allons maintenant noter ces champs sous la forme :

$$\psi_1(x) = u(x), \quad \psi_2(x) = d(x), \quad \psi_3(x) = s(x)$$

Dans le développement de ces champs en opérateurs de création et d'annihilation nous omettrons les indices d'espace-temps (impulsion et spin) qui n'interviennent pas ici (ils sont invariants sous les transformations internes considérées) ; sous forme schématique on écrira :

$$\psi_{\alpha i} \sim b_i u_\alpha + d_i^\dagger v_\alpha \quad (5.4.24a)$$

$$\psi_{\alpha i}^\dagger \sim b_i^\dagger u_\alpha^* + d_i v_\alpha^* \quad (5.4.24b)$$

Les états de quarks (u , d , s) et d'antiquarks (\bar{u} , \bar{d} , \bar{s}) seront notés :

$$|e_i\rangle = b_i^\dagger |0\rangle, \quad |\bar{e}_i\rangle = d_i^\dagger |0\rangle \quad (5.4.25)$$

L'opérateur de transformation U est obtenu par exponentiation des générateurs F_a ($a = 1, \dots, 8$) issus du théorème de Noether (éq. 4.4.23) qui une fois quantifiés satisfont l'algèbre de Lie (5.2.17). Les champs se transforment suivant (éq. 5.2.12) :

$$e^{-i\theta_a F_a} \psi_{\alpha i} e^{i\theta_a F_a} = \left(e^{i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ij} \psi_{\alpha j} = \psi_{\alpha j} \left(e^{-i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ji}^* \quad (5.4.26a)$$

$$e^{-i\theta_a F_a} \psi_{\alpha i}^\dagger e^{i\theta_a F_a} = \left(e^{i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ij}^* \psi_{\alpha j}^\dagger = \psi_{\alpha j}^\dagger \left(e^{-i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ji} \quad (5.4.26b)$$

où les deuxièmes égalités proviennent de l'hermiticité des matrices λ . L'état de vide $|0\rangle$ étant invariant, la loi de transformation des états de quarks et d'antiquarks s'obtient en faisant agir les équations opératoriels (5.4.26) sur le vide. On obtient ainsi :

$$e^{-i\theta_a F_a} |e_i\rangle = |e_j\rangle \left(e^{-i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ji} \quad (5.4.27a)$$

$$e^{-i\theta_a F_a} |\bar{e}_i\rangle = |\bar{e}_j\rangle \left(e^{-i\theta_a \lambda_a / 2} \right)_{ji}^* \quad (5.4.27b)$$

Les états de quarks se transforment comme la représentation fondamentale de SU(3) et les états d'antiquarks se transforment comme sa représentation conjuguée. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 8.

Pour obtenir le cas de $SU(2)$ (isospin) il suffit de se restreindre à un espace à deux quarks ($|e_1\rangle = |u\rangle, |e_2\rangle = |d\rangle$) et de remplacer les matrices de Gell-Mann λ par les matrices de Pauli τ avec F_a ($a = 1, 2, 3$) notées I_a :

$$e^{-i\theta_a I_a} |e_i\rangle = |e_j\rangle \left(e^{-i\theta_a \tau_a / 2} \right)_{ji} \quad (5.4.27a)$$

$$e^{-i\theta_a I_a} |\bar{e}_i\rangle = |\bar{e}_j\rangle \left(e^{-i\theta_a \tau_a / 2} \right)_{ji}^* \quad (5.4.27b)$$

Si on note $|e_1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |e_2\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, il apparaît que les états de quarks se transforment avec les matrices rotation usuelles déjà utilisées au chapitre 2, à savoir :

$$e^{-i\theta_a I_a} |\frac{1}{2}, m\rangle = |\frac{1}{2}, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{1/2}$$

Les matrices de Pauli possèdent la propriété $\epsilon \tau_i \epsilon^{-1} = -\tau_i^*$ où la matrice ϵ est

$$\epsilon = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme le lecteur le vérifiera, il en résulte que le doublet d'état ($|\bar{d}\rangle, -|\bar{u}\rangle$) (noter le signe moins !) se transforme comme le doublet ($|u\rangle, |d\rangle$) c'est-à-dire comme un isodoublet. On dit que la représentation fondamentale de $SU(2)$ et sa représentation conjuguée sont équivalentes. Cette propriété n'est pas vérifiée par la représentation fondamentale de $SU(3)$.

EXERCICES

- [1]- Etablir explicitement les relations de commutation de l'algèbre de Lie (5.2.16) compte tenu des relations d'(anti)commutation (5.2.15).
- [2]- Etablir les expressions (5.3.11) des opérateurs hamiltonien et impulsion du champ de Klein-Gordon et l'expression correspondante (5.4.6) dans le cas du champ de Dirac. Etablir de même les expressions (5.3.22) et (5.4.16b) pour les charges.
- [3]- On considère le commutateur

$$\Delta(x - y) = -i [\Phi(x), \Phi(y)]$$

où Φ est un champ scalaire réel libre et $x = (x_0, \mathbf{x})$ et $y = (y_0, \mathbf{y})$ sont deux points d'espace-temps.

a- Montrer que $\Delta(x - y)$ est un nombre donné par les deux formes successives suivantes :

$$\Delta(x - y) = -i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right)_{k_0 = \omega_k}$$

$$\Delta(x - y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k_0) e^{-ik(x-y)}$$

avec $\epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0)$.

b- En tenant compte du fait que le quadrivecteur k est du genre temps ($k^2 > 0$), montrer que $\epsilon(k_0)$ (et par suite $\Delta(x - y)$) est invariant de Lorentz.

c- Montrer que pour deux points séparés par un intervalle du genre espace ($(x - y)^2 < 0$), $\Delta(x - y)$ est nul ; pour montrer ceci on peut se placer dans un référentiel où $x_0 = y_0$. Commenter ce résultat connu comme la condition de causalité microscopique.

[4]- Etablir la forme (5.4.23a) du propagateur de Feynman du champ de Dirac. Montrer également qu'il peut se décomposer comme $S_F = S_F^{(+)} + S_F^{(-)}$ où $S_F^{(+)}$ est le propagateur des états à énergie positive et $S_F^{(-)}$ est le propagateur des états à énergie négative, avec ($E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$) :

$$S_F^{(+)}(p) = \frac{1}{2E_p} \frac{E_p \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \vec{\gamma} + m}{p_0 - E_p + i\eta}$$

$$S_F^{(-)}(p) = \frac{1}{2E_p} \frac{E_p \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \vec{\gamma} - m}{p_0 + E_p - i\eta}$$

[5]- On considère un champ vectoriel réel libre V^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) de masse M non nulle. Le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M^2 V^\mu V_\mu - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

avec

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$$

- a- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par V^μ . En déduire que le champ V^μ est conservé c'est-à-dire $\partial_\mu V^\mu = 0$. Montrer alors que chaque composante V^μ satisfait à une équation de Klein-Gordon libre.
- b- Donner les moments conjugués, notés R_μ , des champs V^μ . Pourquoi le terme de masse dans le lagrangien a-t-il ce signe ? Soit \mathbf{R} le vecteur de l'espace ordinaire de composantes R_i ($i = 1, 2, 3$). Exprimer la composante de temps V^0 en fonction de la divergence de \mathbf{R} .
- c- Donner l'expression du hamiltonien en fonction de V^i ($i = 1, 2, 3$), R_j ($j = 1, 2, 3$) et de leurs dérivés spatiales. On pourra, pour simplifier si besoin l'écriture, introduire le vecteur \mathbf{V} de composantes V^i et le vecteur \mathbf{R} .
- d- En se plaçant en notations discrètes (système dans une grande boîte de volume V), on décompose la partie d'espace \mathbf{V} du champ sur une base d'ondes planes, suivant :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{(2\Omega_k V)^{1/2}} \vec{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda} \left(A_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega_k t)} + A_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega_k t)} \right)$$

avec $\Omega_k = (k^2 + M^2)^{1/2}$. Pour chaque valeur de \mathbf{k} , l'indice λ peut prendre trois valeurs $\lambda = 1, 2, 3$ et les propriétés des trois vecteurs $\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$, dont les composantes seront toujours réelles, seront précisées ultérieurement lors de la quantification; les coefficients $A_{\mathbf{k}\lambda}$ seront alors élevés au niveau d'opérateurs et leurs propriétés seront également précisées à ce moment.

- Montrer que la composante de temps V^0 peut se développer comme :

$$V^0(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{(2\Omega_k V)^{1/2}} \frac{\mathbf{k}\cdot\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}}{\Omega_k} \left(A_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega_k t)} + A_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega_k t)} \right)$$

- Donner le développement du vecteur \mathbf{R} ; on introduira le vecteur :

$$\vec{\eta}_{\mathbf{k}\lambda} = \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda} - \mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\cdot\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}}{\Omega_k^2}$$

Pour quantifier le champ, on impose les conditions suivantes :

- (i)- $A_{\mathbf{k}\lambda}$ est élevé au rang d'opérateurs et $A_{\mathbf{k}\lambda}^*$ devient l'opérateur hermitique conjugué $A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$. Ces opérateurs satisfont les relations de commutation canoniques des bosons ; les seuls commutateurs non nuls sont ainsi :

$$[A_{\mathbf{k}\lambda}, A_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$$

(ii)- Les vecteurs polarisation satisfont la propriété :

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j = \delta_{ij} + \frac{k^i k^j}{M^2}$$

e- Que vaut la quantité $\sum_{\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i \eta_{\mathbf{k}\lambda}^j$. Evaluer les commutateurs à temps égal :

$$[V^i(\mathbf{r}, t), R_j(\mathbf{r}', t)]$$

f- L'opérateur $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}$ crée, en agissant sur le vide $|0\rangle$, un état de particule noté $|\mathbf{k}, \lambda\rangle$ d'impulsion \mathbf{k} et d'énergie Ω_k ; que faudrait-il faire pour vérifier la validité de cette interprétation particulaire ? Montrer que l'on peut faire pour les trois vecteurs polarisation $\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$ le choix suivant : pour $\lambda = 1, 2$ on prend deux vecteurs unitaires $\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}1,2}^T$ orthogonaux entre eux dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k} et pour $\lambda = 3$ on prend $\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}3} = (\Omega_k/M) \hat{\mathbf{k}}$.

g- On définit à partir des vecteurs polarisation précédents, trois quadri-vecteurs polarisation par :

$$\epsilon_{\mathbf{k}1,2}^{\mu} = (0, \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}1,2}^T), \quad \epsilon_{\mathbf{k}3}^{\mu} = (k/M, (\Omega_k/M) \hat{\mathbf{k}})$$

-Montrer que les quatre composantes V^{μ} peuvent s'exprimer directement à l'aide de ces quadri-vecteurs polarisation. Soit k^{μ} le quadri-vecteur impulsion-énergie : $k^{\mu} = (\Omega_k, \mathbf{k})$. Que valent les quantités $k_{\mu} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu}$; aurait-on pu prévoir ce résultat ?

h- On définit le propagateur de Feynman libre par :

$$D_F^{\mu\nu}(x, x') = -i \langle 0|T(V^{\mu}(x), V^{\nu}(x'))|0\rangle$$

En utilisant la propriété, que l'on pourra démontrer à titre facultatif

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu} = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{M^2} \right),$$

montrer que ce propagateur peut se mettre sous la forme :

$$D_F^{\mu\nu}(x, x') = - \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{M^2} \partial^{\mu} \partial^{\nu} \right) \Delta_F(x - x')$$

où $\Delta_F(x - x')$ est le propagateur de Feynman d'un champ scalaire libre de masse M . En déduire la forme de ce propagateur dans l'espace des impulsions.