

Chapitre 4

THEORIE DES CHAMPS ET SYMETRIES

1- INTRODUCTION

Nous avons déjà évoqué dans les chapitres précédents le lien existant entre les lois de conservation et les symétries fondamentales de la nature. Ainsi, l'invariance des lois de la physique dans une translation de l'origine du temps et des coordonnées entraîne la conservation de l'énergie et de l'impulsion. De même, l'invariance par rotation associée à l'isotropie de l'espace entraîne la conservation du moment cinétique total. De façon plus générale, toute théorie de particules devra satisfaire le principe de relativité stipulant que les lois de la nature sont les mêmes dans tout référentiel galiléen ; c'est l'invariance de Lorentz discutée au chapitre 3. En outre, les particules élémentaires sont caractérisées par certains nombres quantiques (charge électrique, isospin, étrangeté...) conservés dans toutes ou certaines interactions. De telles lois de conservation sont associées à des symétries non pas reliées à l'espace-temps mais à l'état interne des particules et à la nature de leurs interactions.

Le cadre théorique fondamental décrivant le monde des particules élémentaires est la théorie des champs. A chaque type de particules on peut associer un champ qui sera quantifié. Par exemple, la lumière est décrite classiquement par les champs de Maxwell qui, une fois quantifiés, feront apparaître la "particule de lumière" c'est-à-dire le photon. Les symétries jouent un rôle prépondérant dans la construction des théories de champs susceptibles de décrire les particules et leurs interactions. Ainsi, on peut souvent pratiquement deviner la forme que doit avoir le hamiltonien (ou plutôt le lagrangien, voir ci-dessous) une fois que l'on s'est donné ses symétries. Nous reviendrons en détail sur cela mais il importe tout d'abord de comprendre comment, historiquement, la théorie quantique des champs a peu à peu émergé comme étant le formalisme adapté à la description de phénomènes à la fois quantiques et relativistes.

Lorsque dans les années trente, on a tenté pour la première fois de construire une théorie qui soit à la fois quantique et relativiste, on a tout d'abord imité le traitement non relativiste et construit une équation d'onde à partir d'un principe de correspondance. Rappelons en quelques mots cette démarche.

En mécanique classique, on associe à chaque coordonnée ou degré de liberté $q(t)$ un moment conjugué $p(t)$. Le processus de quantification consiste à élever les variables q et p au rang d'opérateurs \hat{q} et \hat{p} . Ces opérateurs agissent alors dans un espace de Hilbert d'états et obéissent à des relations de commutation du type (on fera dans ce qui suit $\hbar = c = 1$) :

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i$$

La fonction de Hamilton classique $H(q, p)$ devient un opérateur hamiltonien $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$. L'évolution dans le temps d'un état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'équation d'évolution de Schrödinger :

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) |\psi(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle$$

Dans le cas d'une particule non relativiste de masse m se mouvant dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ l'équation de Schrödinger devient en représentation \mathbf{r} une équation d'onde pour l'amplitude de probabilité de présence ou fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(-\frac{\nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t)$$

On essaya alors de faire la même chose pour une particule relativiste. Pour une particule libre de masse m le principe de correspondance appliqué à l'équation $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ conduit immédiatement à l'équation de Klein-Gordon satisfaite par la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + m^2) \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

En introduisant le quadri-vecteur espace temps $x = (t, \mathbf{r})$, celle-ci peut se mettre sous forme explicitement covariante :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Phi(x) = 0 \tag{4.1.1}$$

Cette équation est en fait utilisée pour décrire des particules de spin zéro ; pour une telle particule, $\Phi(x)$ est alors un scalaire de Lorentz. Pour une particule de spin 1/2, ce même principe de correspondance permet d'établir une équation d'onde plus simple dans le sens où elle est linéaire dans les dérivées ; c'est l'équation de Dirac déjà déduite (de façon rigoureuse) au chapitre précédent de l'étude des représentations du groupe de Poincaré. La fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ est alors un vecteur colonne à quatre composantes satisfaisant à :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

où les γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont quatre matrices 4×4 . On notera que l'équation de Dirac "contient" bien sûr l'équation de Klein-Gordon dans le sens où chacune

des quatre composantes de $\psi(x)$ la satisfait car l'algèbre des matrices γ est construite pour qu'il en soit bien ainsi.

Ces équations, et en particulier l'équation de Dirac, connurent un grand nombre de succès mais on se heurta tout de suite à d'importantes difficultés et en premier lieu l'existence de solutions à énergie négative. En effet si l'on cherche une solution du type :

$$\Phi, \psi \sim e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

on voit immédiatement, ceci est particulièrement évident dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, que les valeurs possibles de l'énergie sont $E = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. On résolut au moins provisoirement ce problème grâce à la théorie des trous (Dirac 1930). Dans cette théorie tous les états à énergie négative sont occupés dans l'état fondamental; on parle de mer de Dirac par analogie avec la mer de Fermi dans les solides et les noyaux. Seuls sont observables les états à énergie positive (particules) et les trous dans la mer de Dirac sont associés à la présence d'une antiparticule qui, elle, a bien une énergie positive. Il convient cependant de noter que ceci était basé sur le principe de Pauli et ne pouvait certainement pas convenir pour l'équation de Klein-Gordon décrivant les bosons.

Il y avait en outre des difficultés et des contradictions dans l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde dès que l'énergie mise en jeu était supérieure à $2mc^2$ car le processus de création de particules devient possible, alors que ces équations étaient supposées décrire l'onde associée à une particule. Il était donc illusoire de vouloir construire une théorie quantique et relativiste basée sur une équation d'onde à une particule. On en est ainsi venu à la théorie quantique des champs.

Dans une théorie à une particule, on a une fonction d'onde $\Phi_s(\mathbf{r}, t)$, éventuellement à plusieurs composantes étiquetées par l'indice s , qui satisfait une équation d'onde (Klein-Gordon, Dirac) de même que le champ électromagnétique classique satisfait aux équations de Maxwell. En ce sens (mais bien sûr pas dans tous les sens) on peut dire que ces équations sont classiques. En outre, nous avons dit que l'interprétation probabiliste de l'équation de Dirac posait de gros problèmes venant essentiellement du fait que la conservation du nombre de particules était en contradiction avec la relativité. Il est ainsi apparu qu'une véritable théorie quantique et relativiste devait permettre la création et l'annihilation de particules. Ceci impose, comme on le verra dans le chapitre suivant, de quantifier les "amplitudes de champ" $\Phi_s(\mathbf{r}, t)$ et on introduit le formalisme dit de seconde quantification. Nous allons construire la théorie quantique des champs à partir de la théorie classique des champs de la même façon que l'on a construit la mécanique quantique ordinaire à partir de la mécanique classique des particules. En théorie des champs, chaque amplitude de champ $\Phi_s(\mathbf{r}, t)$ prise au point \mathbf{r} constitue un degré de liberté élémentaire (le nombre de degrés de liberté devient bien sûr infini). On établit l'équation satisfaite par les champs grâce à un formalisme lagrangien et on définit la variable conjuguée $\Pi_s(\mathbf{r}, t)$ ainsi

que la fonction de Hamilton $H(\Phi_s, \Pi_r)$. Le processus de quantification consiste alors à élever au rang d'opérateur les amplitudes de champs et leurs moments conjugués.

Dans ce chapitre nous nous limiterons à l'aspect classique de la construction d'une théorie lagrangienne de champs et montrerons comment les symétries d'espace-temps et les symétries internes peuvent y être incorporées. Le chapitre suivant sera consacré à la quantification de ces champs ; on y montrera également comment ces mêmes symétries se manifestent au niveau quantique.

2- FORMULATION LAGRANGIENNE D'UNE THEORIE DE CHAMP

2-1 Fonction de Lagrange et équation du mouvement en mécanique classique

En mécanique classique le système est défini par un ensemble de variables ou coordonnées généralisées :

$$q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t), \dots, q_N(t)\}$$

On introduit la fonction de Lagrange :

$$L(q(t), \dot{q}(t))$$

Le problème de la mécanique classique est de trouver la trajectoire effectivement suivie par un système de particules qui partirait des positions q_i à l'instant initial t_i et arriverait en q_f à l'instant t_f . On définit l'action :

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t))$$

Le principe de moindre action stipule que, parmi toutes les trajectoires partant de q_i à l'instant t_i et arrivant à q_f à l'instant t_f , la trajectoire effectivement suivie est celle pour laquelle l'intégrale d'action est extrémale. Un calcul très simple que nous répéterons dans le cas des théories de champ conduit alors à l'équation d'Euler-Lagrange qui est l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = 0 \quad (4.2.1)$$

Par exemple, pour une particule non relativiste de masse m se mouvant dans un potentiel $V(\mathbf{r})$, la fonction de Lagrange est $L = m\mathbf{v}^2/2 - V(\mathbf{r})$ et on vérifie

immédiatement que l'équation d'Euler-Lagrange redonne bien l'équation du mouvement habituelle à savoir $m\dot{\mathbf{v}} = -\nabla_{\mathbf{r}}V$.

2-2 Lagrangien d'un système de champs et équation d'Euler-Lagrange classique

a- Lagrangien d'un système de champs

En théorie des champs, les coordonnées $q_r(t)$ sont remplacées par un nombre infini de degrés de liberté qui sont constitués par les amplitudes de champs aux différents points \mathbf{r} ; si on a plusieurs type de champs on les étiquette par un indice s . Ces degrés de liberté sont donc :

$$\Phi_s(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_s(x)$$

On construit alors un objet qui jouera le rôle de fonction de Lagrange. Plus exactement, comme à chaque point \mathbf{r} correspond un degré de liberté, la fonction de Lagrange $L(t)$ est définie à partir d'une *densité de lagrangien* ou plus simplement d'un *lagrangien* $\mathcal{L}(x)$ suivant :

$$L(t) = \int d\mathbf{r} \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$$

Le lagrangien sera alors une fonction des degrés de liberté élémentaires $\Phi_s(x)$ et de ses dérivées non seulement temporelles mais aussi spatiales de façon à ce que espace et temps jouent un rôle similaire comme il se doit en relativité :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}(\Phi_s(x), \partial_\mu \Phi_s(x))$$

Les théories qui ne font intervenir que les champs et leurs dérivées premières sont dites locales et seront les seules considérées ici.

b- Equation d'Euler-Lagrange

Pour établir l'équation d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire "l'équation du mouvement des champs", on part de l'intégrale d'action définie comme

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(t)$$

soit encore

$$S = \int_X d^4x \mathcal{L}(\Phi_s(x), \partial_\mu \Phi_s(x))$$

où l'hypervolume d'intégration X est limité par une hypersurface Σ constituée par les deux surfaces $t = t_i = Cte$ et $t = t_f = Cte$ et une sphère de rayon infini

de l'espace ordinaire. En d'autres termes nous nous intéressons à l'évolution des champs Φ_s pris en n'importe quel point de l'espace ordinaire entre les instants t_i et t_f où ces champs ont une valeur fixée.

La "trajectoire" effectivement suivie par les amplitudes de champs est, d'après le principe de moindre action, celle qui rend l'action extrémale. Pour la déterminer nous envisageons une petite variation autour de cette trajectoire soit

$$\Phi_s(x) \rightarrow \Phi_s(x) + \delta\Phi_s(x)$$

avec la condition que $\delta\Phi_s$ s'annule sur la surface Σ (Φ_s est fixé par hypothèse aux temps initial t_i et final t_f et on suppose qu'il s'annule à l'infini dans l'espace ordinaire). On évalue alors la variation de l'action sous la transformation ci-dessus :

$$\delta S = \int_X d^4x \delta\mathcal{L}(\Phi_s(x), \partial_\mu\Phi_s(x)) = \int_X d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s} \delta\Phi_s + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \delta(\partial^\mu\Phi_s) \right]$$

Remarquant que $\delta(\partial^\mu\Phi_s) = \partial^\mu(\delta\Phi_s)$ et intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_X d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \right) \right] \delta\Phi_s + \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \delta\Phi_s \right) \\ &= \int_X d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \right) \right] \delta\Phi_s + \int_\Sigma d\Sigma^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \delta\Phi_s = 0 \end{aligned}$$

D'après les conditions aux limites ($\delta\Phi_s = 0$ sur Σ) l'intégrale de surface est nulle. δS devant être nulle pour n'importe quelle petite variation $\delta\Phi_s$ il en résulte que :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \right) = 0 \quad (4.2.2)$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange. Nous allons illustrer cette équation dans le cas des champs usuels à savoir les champs scalaires (spin 0), les champs spinoriels ou champs de Dirac (spin 1/2) et les champs vectoriels de masse nulle (spin 1).

2-3 Quelques exemples de lagrangien

Les différents champs se distingueront par leur comportement dans une transformation de Lorentz. On considèrera des transformations du repère \mathcal{R} au repère \mathcal{R}' où les coordonnées d'espace temps se transforment selon :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R}' \\ x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \end{aligned}$$

a- Champ scalaire libre

Dans une transformation de Lorentz le champ associé à une particule de spin zéro se comporte comme un scalaire de Lorentz :

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x)$$

Ce champ obéit à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Phi(x) = 0 \quad (4.2.3)$$

Celle-ci se déduit, grâce à l'équation d'Euler-Lagrange, du lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \quad (4.2.4)$$

b- Champ de Dirac libre

Nous considérons des particules de spin 1/2 telles que l'électron. Sous une transformation de Lorentz Λ , le champ de Dirac se transforme suivant :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (4.2.5a)$$

où $S(\Lambda)$ est une matrice 4×4 , dont la forme explicite est donnée dans l'appendice A, vérifiant :

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (4.2.5b)$$

L'équation du champ est l'équation de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (4.2.6)$$

qui peut se déduire du lagrangien

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.2.7a)$$

comme on peut s'en assurer en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange au champ ψ ou au champ $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. Il est, dans certains cas, souhaitable de réécrire le lagrangien sous une forme plus symétrique en termes des deux variables dynamiques indépendantes ψ et $\bar{\psi}$

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (4.2.7b)$$

qui redonne la même équation du mouvement (4.2.6).

c- Champ électromagnétique en présence de sources extérieures

Les équations satisfaites par les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} en présence du quadri-vecteur courant $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ sont les équations de Maxwell :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.2.8a)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.2.8b)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.2.8c)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.2.8d)$$

On sait que l'on peut introduire un quadri-vecteur potentiel $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (4.2.9a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A} \quad (4.2.9b)$$

De ce fait, les équations (4.2.8c) et (4.2.8d) sont automatiquement satisfaites. Le quadri-vecteur A^μ n'est pas unique et peut subir une transformation de jauge

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f$$

sans altérer \mathbf{E} , \mathbf{B} et par suite les équations du mouvement. Cette non unicité de A^μ rend très délicate sa quantification mais nous laisserons ce problème de côté. On introduit alors le tenseur de champ $F^{\mu\nu}$ qui, lui, est invariant de jauge :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.2.10)$$

Les composantes E_i et B_i ($i = 1, 2, 3$) des champs électriques et magnétiques peuvent être obtenues à partir des six composantes indépendantes de ce tenseur antisymétrique à savoir :

$$E_i = F^{i0} = -F^{0i} = F_{0i} = -F_{i0}$$

$$B_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{ij}$$

On vérifie alors facilement que les équations de Maxwell dépendant des sources (4.2.8a) et (4.2.8b) se mettent sous une forme explicitement covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (4.2.11)$$

où $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ est le quadri-vecteur courant électrique. Nous laisserons au lecteur le soin de montrer que ces équations de Maxwell peuvent être obtenues à partir du lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (4.2.12)$$

Dans le cas de l'électrodynamique d'une particule de charge e telle que l'électron le courant est $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. On obtient le lagrangien de l'électrodynamique en rajoutant le lagrangien fermionique libre soit :

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (4.2.13)$$

Remarque : dans ce chapitre, tout comme dans les chapitres 5 et 9, on désigne par e la charge *négative* de l'électron. Par contre dans le chapitre 11, consacré à l'interaction électrofaible e sera comptée positivement si bien que la charge de l'électron sera notée $q = -e$.

3- SYMETRIES ET LOIS DE CONSERVATION EN THEORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

3-1 Enoncé du théorème de Noether

Le théorème de Noether stipule que à toute transformation continue (c'est-à-dire dépendant d'un paramètre continu) des champs Φ_s laissant le lagrangien invariant, on peut associer une quantité conservée.

Nous allons illustrer ce théorème sur deux types de symétries :

- les symétries d'espace temps telles que les translations,
- les symétries internes.

Faisons tout d'abord une remarque formelle tout à fait générale. Lorsque l'on modifie les amplitudes de champs par une transformation infinitésimale

$$\Phi_s(x) \rightarrow \Phi'_s(x) = \Phi_s(x) + \delta\Phi_s(x)$$

le lagrangien est modifié selon

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s}\delta\Phi_s + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)}\delta(\partial^\mu\Phi_s) \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_s} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \right) \right] \delta\Phi_s + \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi_s)} \delta\Phi_s \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\delta(\partial^\mu\Phi_s) = \partial^\mu(\delta\Phi_s)$. Le premier terme de l'équation précédente est nul car le champ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange (éq. 4.2.2).

On trouve alors que la modification du lagrangien provenant de la modification des fonctions de champ est :

$$\delta \mathcal{L} = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi_s)} \delta \Phi_s \right) \quad (4.3.1)$$

3-2 Invariance par translation et conservation de l'énergie-impulsion

Partons du lagrangien au point M de coordonnées x dans un certain référentiel \mathcal{R} et considérons ce lagrangien au point M' de coordonnées $x' = x + \epsilon$ dans ce même référentiel \mathcal{R} . La variation infinitésimale correspondante du lagrangien sera :

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathcal{L} \epsilon^\mu \quad (4.3.2)$$

Définissons alors un nouveau champ $\Phi'_s(x)$ par :

$$\Phi'_s(x) = \Phi_s(x')$$

Dire que le lagrangien \mathcal{L} possède la propriété d'invariance par translation signifie qu'il ne dépend pas explicitement des coordonnées. La variation précédente du lagrangien provient donc uniquement de la modification des amplitudes de champ $\Phi_s(x) \rightarrow \Phi'_s(x)$. Elle pourra par suite se réécrire en utilisant la relation (4.3.1)

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi'_s(x), \partial_\mu \Phi'_s(x)) - \mathcal{L}(\Phi_s(x), \partial_\mu \Phi_s(x)) = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_s)} \delta \Phi_s \right) \quad (4.3.3)$$

avec

$$\delta \Phi_s(x) = \Phi'_s(x) - \Phi_s(x) = \Phi_s(x') - \Phi_s(x) = \partial_\nu \Phi_s(x) \epsilon^\nu$$

En identifiant les deux formes (4.3.2) et (4.3.3) de la variation du lagrangien on obtient :

$$\partial_\mu \mathcal{L} \epsilon^\mu = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_s)} \partial_\nu \Phi_s \right) \epsilon^\nu$$

Ceci conduit au résultat fondamental

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.3.4a)$$

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion défini par :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_s)} \partial^\nu \Phi_s - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (4.3.4b)$$

On peut intégrer l'équation (4.3.4a) dans tout l'espace ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
0 = \int d\mathbf{r} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \int d\mathbf{r} \partial_0 T^{0\nu} + \int d\mathbf{r} \partial_i T^{i\nu} \\
&= \frac{d}{dt} \left[\int d\mathbf{r} T^{0\nu} \right] + \int_S dS_i T^{i\nu}
\end{aligned}$$

où dS_i ($i = 1, 2, 3$) représente les composantes du vecteur surface d'une sphère S de rayon infini. L'intégrale de surface est nulle car les champs sont supposés s'annuler suffisamment vite à l'infini ; on en déduit alors que le quadri-vecteur P^ν

$$P^\nu = \int d\mathbf{r} T^{0\nu} \quad (4.3.5a)$$

est indépendant du temps soit :

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0 \quad (4.3.5b)$$

Sa composante temporelle se confond avec le hamiltonien du système

$$P^0 \equiv H = \int d\mathbf{r} \left[\Pi_s(\mathbf{r}, t) \dot{\Phi}_s(\mathbf{r}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (4.3.6a)$$

et ses composantes d'espace sont identifiées avec l'impulsion du système

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} \Pi_s(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} \Phi_s(\mathbf{r}, t) \quad (4.3.6b)$$

où

$$\Pi_s(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_s} \quad (4.3.7)$$

est le moment conjugué de l'amplitude de champ $\Phi_s(x)$. Nous allons maintenant prendre quelques exemples.

a- Champ scalaire libre

Le lagrangien est donné par l'équation (4.2.4) et le moment conjugué (équ. 4.3.7) est :

$$\Pi = \dot{\Phi} \quad (4.3.8)$$

Le hamiltonien et l'impulsion s'écrivent d'après (4.3.6) :

$$H = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} \left[\dot{\Phi}^2 + (\nabla_{\mathbf{r}} \Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right] \quad (4.3.9a)$$

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} \dot{\Phi} \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (4.3.9b)$$

b- Champ de Dirac libre

Le lagrangien est donné par l'équation (4.2.7) et le moment conjugué (éq. 4.3.7) du champ ψ est :

$$\Pi = i\psi^\dagger \quad (4.3.10)$$

Le hamiltonien et l'impulsion se mettent sous la forme :

$$H = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger [-i\alpha_k \nabla_k + \beta m] \psi \quad (4.3.11a)$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger (-i\nabla_{\mathbf{r}}) \psi \quad (4.3.11b)$$

où l'on a introduit les matrices $\beta = \gamma^0$ et $\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k$ ($k = 1, 2, 3$).

c- Champ électromagnétique libre

Le lagrangien du champ est :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (4.3.12)$$

On peut noter que A^0 n'a pas de variable conjuguée (ce n'est donc pas un degré de liberté dynamique) car :

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0)} = 0$$

Par contre, les variables conjuguées des variables d'espace sont :

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^i)} = -F_{0i} = -E_i \quad (4.3.13)$$

On en déduit très facilement que le hamiltonien du champ peut se mettre sous la forme :

$$H = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \int d\mathbf{r} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} A^0$$

Le deuxième terme est nul comme on peut s'en assurer en intégrant par partie et en utilisant le fait que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Le hamiltonien a donc la forme bien connue :

$$H = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (4.3.14a)$$

Un calcul similaire conduit à l'expression de l'impulsion du champ :

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{r} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (4.3.14b)$$

4- SYMETRIES INTERNES

4-1 Courants et charges

Certains champs décrivent une famille de particules “semblables”; on va les considérer comme différentes composantes d’un même champ. On peut alors définir des transformations qui n’affectent que les composantes des amplitudes de champ et non les coordonnées. Ces transformations continues concernent seulement l’état interne du champ. Si les interactions ne différencient pas les particules de la famille, le lagrangien sera invariant sous un tel groupe de transformation et on parlera de symétries internes. On ne considèrera pour l’instant que des transformations où les champs sont transformés de la même façon en tout point de l’espace-temps. On les appelle symétrie de jauge globale ou de première espèce.

Remarque: En pratique, on les appelle simplement symétrie globale et on réserve en général le nom de symétrie de jauge aux symétries de jauge de deuxième espèce où la transformation des champs dépend du point d’espace-temps considéré.

Soit un lagrangien où les N champs $(\Phi_1 \dots \Phi_s \dots \Phi_N)$ se transforment suivant une certaine représentation d’un certain groupe de symétrie. Soit $(\Phi)(x)$ le vecteur colonne de composantes $\Phi_1(x) \dots \Phi_s(x) \dots \Phi_N(x)$. Il se transforme sous l’action de la matrice carrée V de dimension N :

$$(\Phi)(x) \rightarrow (\Phi')(x) = V (\Phi)(x) \quad (4.4.1a)$$

$$\Phi_r(x) \rightarrow \Phi'_r(x) = V_{rs} \Phi_s(x) \quad (4.4.1b)$$

où la sommation sur les indices répétés est, selon un usage fréquent, sous-entendue. Dans la suite on ne considèrera que des groupes de Lie unitaire, soit $V^\dagger V = 1$. Une telle transformation, qui dépend de p paramètres continus θ_a , ($a = 1, \dots, p$), est de la forme :

$$V = e^{i\theta_a T_a} \quad (4.4.2)$$

où les matrices hermitiques T_a , dont la dimension N est la dimension de la représentation, satisfont à l’algèbre de Lie du groupe :

$$[T_a, T_b] = iC_{abc} T_c \quad (4.4.3)$$

Les C_{abc} sont les constantes de structure du groupe. On dit que ces matrices T_a constituent une représentation de dimension N de l’algèbre de Lie du groupe. Donnons ou rappelons quelques exemples.

- $U(1)$: c’est le groupe le plus simple $T = 1$

- $SU(2)$: la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie (voir chapitre 2 et 7) est

$$t_a = \frac{\tau_a}{2}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (4.4.4a)$$

où les matrices τ_a sont les matrices de Pauli usuelles. L'algèbre de Lie est

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2} \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\tau_c}{2} \quad (4.4.4b)$$

Ce groupe interviendra tout naturellement lorsque l'espace des états quantiques considérés a deux dimensions.

- $SU(3)$: Ce groupe sera discuté en détail dans le chapitre 7 et il suppose un espace "fondamental" à trois particules. La représentation fondamentale de l'algèbre de Lie est

$$t_a = \frac{\lambda_a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (4.4.5a)$$

où les matrices λ_a sont les matrices de Gell-Mann données dans l'appendice B. Elles satisfont l'algèbre de Lie :

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (4.4.5b)$$

Les f_{abc} sont les constantes de structure du groupe $SU(3)$ données également dans l'appendice B.

Au cours d'une transformation infinitésimale, les champs sont transformés suivant :

$$\Phi_r(x) \rightarrow \Phi'_r(x) = \Phi_r(x) + i\theta_a (T_a)_{rs} \Phi_s(x) \quad (4.4.6)$$

D'après la propriété (4.3.1) le lagrangien est modifié selon :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\theta_a \partial_\mu \left[-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_r)} (T_a)_{rs} \Phi_s \right] \\ &= -\theta_a \partial_\mu j_a^\mu(x) \end{aligned}$$

Si le lagrangien est invariant, le courant

$$j_a^\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_r)} (T_a)_{rs} \Phi_s \quad (4.4.7)$$

satisfait :

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (4.4.8)$$

On en déduit par suite les charges conservées

$$Q_a = \int d\mathbf{r} j_a^0(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} [-i \Pi_r(\mathbf{r}, t) (T_a)_{rs} \Phi_s(\mathbf{r}, t)] \quad (4.4.9)$$

où $\Pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_r}$ est le moment conjugué du champ.

Remarque : Dans le cas où $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$ avec \mathcal{L}_0 invariant et \mathcal{L}' non invariant, le courant (4.4.7) n'est plus conservé et on a

$$\partial_\mu j_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Phi_r} (T_a)_{rs} \Phi_s \quad (4.4.10)$$

où on a supposé que \mathcal{L}' ne dépend pas des dérivées du champ.

4-2 Quelques exemples

a- Charge électrique

Considérons de nouveau le lagrangien de l'électrodynamique pour un champ fermionique de charge e :

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Ce lagrangien est de façon évidente invariant sous la transformation U(1) :

$$\psi \rightarrow e^{ie\theta} \psi \quad (4.4.11a)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\theta} \bar{\psi} \quad (4.4.11b)$$

Le courant conservé (quadri-divergence nulle) est le courant électrique :

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.4.12)$$

et la charge conservée est la charge électrique :

$$Q = e \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.4.13)$$

b- Modèle des quarks : nombre baryonique, saveurs, isospin

Pour introduire le chapitre 7 consacré aux symétries de saveur $SU(2)$ et $SU(3)$ nous considérons un lagrangien de quarks en nous limitant aux trois saveurs les plus légères u , d et s qui ont déjà été mentionnées dans le premier chapitre :

- le quark u de masse $m_u \simeq 5MeV$ décrit par le spineur de Dirac $u(x)$,
- le quark d de masse $m_d \simeq 10MeV$ décrit par le spineur de Dirac $d(x)$,
- le quark s de masse $m_s \simeq 150MeV$ décrit par le spineur de Dirac $s(x)$.

Nous allons écrire le lagrangien de ce système en omettant le couplage des quarks aux champs de gluons mentionnés dans le premier chapitre car ils n'affectent pas les considérations de symétrie présentées ci-dessous. Ce qui suit demeure ainsi valable dans le cadre de la chromodynamique quantique que nous étudierons au chapitre 10.

$$\mathcal{L} = i\bar{u}\gamma^\mu\partial_\mu u + i\bar{d}\gamma^\mu\partial_\mu d + i\bar{s}\gamma^\mu\partial_\mu s - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d - m_s\bar{s}s \quad (4.4.14)$$

(i) Ce lagrangien est manifestement invariant sous les transformations $U(1)$

$$u(x) \rightarrow e^{i\theta_u}u(x), \quad d(x) \rightarrow e^{-i\theta_d}d(x), \quad s(x) \rightarrow e^{-i\theta_s}s(x)$$

ce qui conduit aux charges de saveur conservées

$$U = \int d\mathbf{r} u^\dagger u \quad (4.4.15a)$$

$$D = - \int d\mathbf{r} d^\dagger d \quad (4.4.15b)$$

$$S = - \int d\mathbf{r} s^\dagger s \quad (4.4.15c)$$

où les signes moins pour D et S , provenant des phases dans les lois de transformation, sont purement conventionnels et consacrés par l'usage. Ceci implique que le nombre baryonique B (qui correspond en fait à une transformation $U(1)$ où $\theta_u = -\theta_d = -\theta_s = \theta/3$)

$$B = \frac{1}{3} \int d\mathbf{r} [u^\dagger u + d^\dagger d + s^\dagger s] \quad (4.4.16)$$

est conservé (le facteur $1/3$ assure un nombre baryonique $B = 1$ pour les baryons).

Remarque : Le nombre baryonique B est conservé dans toutes les interactions (forte, électromagnétique, faible) tandis que les nombres de saveur (U, D, S, \dots) ne sont conservés séparément que dans les interactions fortes et électromagnétiques mais pas dans les interactions faibles.

(ii) Si l'on introduit le vecteur colonne dans l'espace des saveurs de quarks u et d , considérés comme deux aspects d'une même particule :

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \quad (4.4.17)$$

Le lagrangien (4.4.14) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{L} = i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q - \frac{m_u + m_d}{2}\bar{q}q - \frac{m_u - m_d}{2}\bar{q}\tau_3 q + i\bar{s}\gamma^\mu\partial_\mu s - m_s\bar{s}s \quad (4.4.18)$$

Considérons la transformation $SU(2)$ dite d'isospin pour laquelle le champ $s(x)$ est inerte :

$$\begin{aligned} q(x) &\rightarrow e^{i\theta_i \tau_i/2} q(x) \\ s(x) &\rightarrow s(x) \end{aligned}$$

On définit alors les trois "charges" d'isospin ($i = 1, 2, 3$) :

$$I_i = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} q^\dagger \tau_i q \quad (4.4.19)$$

On voit immédiatement que l'isospin est conservé si l'on omet dans le lagrangien (4.4.18) le terme proportionnel à $m_u - m_d$. Ce terme induit une non conservation de I_1 et I_2 mais cette violation de la symétrie d'isospin est très faible car la différence de masse entre les quarks d et u , de l'ordre de 5 MeV, est très faible par rapport aux échelles hadroniques typiques de l'ordre de 1 GeV. Nous reviendrons en détail sur cette symétrie presque exacte des interactions fortes dans le chapitre 7.

(iii) Introduisons maintenant le vecteur colonne dans l'espace des saveurs de quarks :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} \quad (4.4.20)$$

le lagrangien (4.4.14) peut se réécrire comme :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \psi \quad (4.4.21)$$

Si l'on introduit en outre les matrices de Gell-Mann (Appendice B)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ce lagrangien peut également se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{m_u + m_d + m_s}{3} \bar{\psi} \psi - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{m_u + m_d}{2} - m_s \right) \bar{\psi} \lambda_8 \psi \\ & - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\psi} \lambda_3 \psi \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Considérons la transformation $SU(3)$ de saveur, que l'on notera $SU(3)_F$ (l'indice F provient du mot anglais "flavour" qui signifie saveur) :

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta_i \lambda_i/2} \psi(x)$$

Ceci permet de définir huit charges F_i ($i = 1, \dots, 8$) (dont les trois premières se confondent avec les composantes d'isospin $I_{1,2,3}$) :

$$F_i = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger \lambda_i \psi \quad (4.4.23)$$

Si les masses des trois quarks étaient égales, la symétrie $SU(3)$ serait exacte et les F_i seraient conservés. En fait, la symétrie $SU(3)$ est violée par le terme en λ_8 du lagrangien (4.4.22). Cette violation est gouvernée par la masse du quark étrange de l'ordre de 150 MeV à comparer de nouveau à une masse hadronique typique de 1 GeV. La symétrie $SU(3)$ de saveur est donc beaucoup moins bonne que la symétrie $SU(2)$ d'isospin mais demeure néanmoins extrêmement utile pour la classification des hadrons comme on le verra dans le chapitre 7.

Mentionnons pour terminer que le lagrangien de quarks libres (4.4.14), en l'absence de terme d'interaction, n'a pas de contenu physique intéressant ; il ne garantit aucunement la conservation des nombres de saveur dans une diffusion de particules. Nous verrons au chapitre 10 que la théorie chromodynamique des interactions fortes préserve l'indépendance de saveur et la conservation de U , D et S .

EXERCICES

[1]- On considère un champ électromagnétique libre dont le lagrangien est donné par l'équation (4.2.12) en l'absence du courant j^μ .

a- Montrer que le tenseur énergie-impulsion "canonique" s'écrit :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha$$

b- Montrer que le tenseur $\theta^{\mu\nu}$ donné par

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha$$

peut également constituer une définition du tenseur énergie-impulsion.

[2]- On considère maintenant le lagrangien de l'électrodynamique de fermions de masse m et de charge e (éq. 4.2.13)

- a- Montrer, en utilisant l'équation du mouvement pour ψ (équation de Dirac) que le tenseur énergie-impulsion peut s'écrire

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}$$

avec

$$M^{\mu\nu} = \bar{\psi}\gamma^\mu (i\partial^\nu - eA^\nu)\psi$$

- b- Montrer en utilisant de nouveau l'équation de Dirac que

$$\partial_\mu M^{\mu\nu} = f^\nu$$

où $f^\nu = F^{\nu\alpha}j_\alpha$ est la densité de force de Lorentz et $j_\alpha = e\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ est le courant électrique.

- c- Dans une description particulaire classique le courant électrique conservé est

$$j^\mu(x) \equiv j^\mu(\mathbf{r}, t) = e v^\mu(t) \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$$

où $\mathbf{R}(t)$ est la trajectoire de la particule de vitesse $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$ et $v^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}(t))$ le quadrivecteur vitesse de la particule à l'instant t . On introduit le tenseur énergie-impulsion de la particule par :

$$M^{\mu\nu}(x) = m v^\mu(t) v^\nu(t) \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \equiv v^\mu(t) p^\nu(t) \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$$

En utilisant l'équation du mouvement classique relier $\partial_\mu M^{\mu\nu}$ à la densité de force de Lorentz. Commenter.

- [3]- On considère de nouveau le lagrangien de l'électrodynamique (éq. 4.2.13). On se place dans la jauge de Coulomb ($\nabla_i A^i = 0$).

- a- Montrer que le hamiltonien peut s'écrire

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\psi^\dagger (i\alpha_j \nabla_j + \beta m) \psi - eA^j \bar{\psi}\gamma^j \psi + \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \right]$$

- b- On décompose le champ électrique en une composante longitudinale $\mathbf{E}_l = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi$ et une composante transverse $\mathbf{E}_t = -\partial\mathbf{A}/\partial t$. Justifier cette terminologie. Montrer que H peut s'écrire sous la forme $H = H_0 + H_{int}$ avec

$$H_0 = \int d\mathbf{r} \left[\psi^\dagger (i\alpha_j \nabla_j + \beta m) \psi + \frac{1}{2}(E_t^2 + B^2) \right]$$

$$H_{int} = -e \int d\mathbf{r} A^j \bar{\psi}\gamma^j \psi + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' (\psi^\dagger \psi)(\mathbf{r}, t) \frac{1}{8\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\psi^\dagger \psi)(\mathbf{r}', t)$$

[4]- On considère un champ libre vectoriel massif $V^\nu(x)$ de masse m . Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m^2 V^\nu V_\nu - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$$

avec $G^{\mu\nu} = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu$.

- a- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le champ V_ν
- b- En déduire que le champ V_ν est conservé, c'est-à-dire $\partial^\nu V_\nu = 0$.
- c- Commenter le signe du terme de masse par comparaison avec le cas du champ scalaire.