

Chapitre 3

LE SPIN DES PARTICULES (RELATIVISTE)

1- LE GROUPE DE LORENTZ ET SES REPRESENTATIONS

1-1 Le système au repos

Nous avons défini le spin non relativiste dans le système au repos de la particule. Cette description est parfaitement légitime dans le domaine relativiste (pour des masses non nulles), mais elle conduit à un formalisme lourd et inélégant, qui n'autorise pas l'écriture condensée des contraintes imposées par la covariance. Dans le traitement relativiste du spin, nous définirons d'abord une représentation des transformations de Lorentz de manière implicite, en imposant une transformation simple des coordonnées spinorielles à partir des composantes au repos, sans nous soucier de la famille d'états d'impulsion p qui correspond à ces composantes. Dans une seconde phase, on "se ramène au cas non relativiste", en définissant un système de coordonnées $Oxyz(p)$ dans le système au repos de la particule quelle que soit son impulsion p . Ceci suppose une masse m non nulle, le cas $m = 0$ sera traité séparément. Les "rotations dans le système au repos" sont des transformations de Lorentz particulières qui laissent le quadrivecteur impulsion de la particule invariant. Elles sont définies par 3 paramètres et les générateurs infinitésimaux obéissent aux relations de commutation du groupe des rotations. On définit ainsi les états propres relatifs à l'un des générateurs. La transformation de ces états est complexe puisque les bases choisies pour chaque impulsion sont indépendantes. On indiquera au paragraphe 3 comment les relier à une *base spinorielle* où les composantes se transforment précisément selon les lois imposées a priori. Ce chapitre un peu aride introduit de manière naturelle les composantes gauches et droites des fermions de spin $1/2$, qui vont jouer un rôle important dans les interactions faibles.

1-2 Le groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est formé des matrices (4×4) Λ qui conservent le

produit scalaire des 4-vecteurs. $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ sera noté matriciellement

$$x' = \Lambda x$$

Nous ne considérerons que les matrices associées à la transformation des composantes contravariantes. Le produit scalaire est défini par

$$x \cdot y = x^{\mu} y^{\nu} g_{\mu\nu} = x^T g y$$

avec le tenseur métrique

$$g^{\mu\nu} = (g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33}) = (1, -1, -1, -1)$$

et $g^{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$. L'invariance du produit scalaire dans les transformations de Lorentz implique $(x')^T g (y') = x^T \Lambda^T g \Lambda y = x^T g y$, soit

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

Les matrices Λ dépendent de 6 paramètres, et toute transformation de Lorentz est le produit unique d'une rotation et d'une transformation de Lorentz spéciale : $\Lambda = RL$.

Dans le cas d'une transformation de Lorentz spéciale d'axe x ,

$$\begin{aligned} (x^0)' &= ch \psi x^0 + sh \psi x^1 \\ (x^1)' &= sh \psi x^0 + ch \psi x^1 \end{aligned}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

avec $\beta = v/c$, $ch \psi = \sqrt{1 - \beta^2}$, $sh \psi = \beta$. On choisira 6 générateurs infinitésimaux associés aux trois rotations et aux trois transformations de Lorentz pures infinitésimales d'axes e_i . Les transformations de Lorentz pures seront paramétrisées par ψ , avec $th \psi = \beta = v/c$, alors que les rotations, qui laissent x^0 invariant ont déjà été vues au chapitre précédent. Les générateurs des rotations J_i , et des transformations de Lorentz spéciales K_i , sont :

$$\begin{aligned} J_i &= i\hbar \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} \\ K_i &= i\hbar \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} \end{aligned}$$

Les transformations de Lorentz considérées ne sont évidemment pas les mêmes : rotations d'axe e_i , dans le premier cas ; Lorentz spéciale d'axe e_i dans le second. Comme dans le cas des rotations, les transformations de Lorentz finies vont s'obtenir par exponentiation, en veillant à la non-commutation des opérateurs \mathbf{J} et \mathbf{K} . Leurs relations de commutations résultent de la loi de groupe

$$R e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} R^{-1} = e^{-i\mathbf{K} \cdot R\mathbf{n}} \quad (3.1.1)$$

où $R = e^{-i\phi \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}}$. La signification géométrique de l'équation (3.1.1) est évidente : $RL(\mathbf{n})R^{-1}$ décrit la même transformation de Lorentz pure dans le nouveau système d'axes où $x' = Rx$. Les relations de commutation des générateurs sont :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \end{aligned}$$

La composition de transformations de Lorentz pures bouclées, telles que la composante de temps d'un quadri-vecteur ne soit pas modifiée, équivaut nécessairement à une rotation, et c'est le sens de la dernière relation de commutation. Elle apparaît naturellement dans le produit de trois ou quatre transformations infinitésimales (exercice 3). Ces relations de commutation vont se conserver dans toutes les représentations du groupe de Lorentz, où les générateurs infinitésimaux seront les images appropriées de \mathbf{J} et \mathbf{K} , avec

$$V(\Lambda) = e^{-i\psi \mathbf{n} \cdot 2\mathbf{K}} e^{-i\phi \mathbf{n} \cdot 2\mathbf{J}}$$

\mathbf{J} et \mathbf{K} sont maintenant des matrices $n \times n$ fixes qui dépendent de la dimension n de la représentation. ϕ est l'angle de rotation autour de l'axe n_1 et ψ l'angle de la rotation imaginaire autour de \mathbf{n}_2 . Pour construire les représentations du groupe de Lorentz, on forme les combinaisons

$$J_{\pm}^k = \frac{1}{2}(J^k \pm iK^k)$$

Les générateurs J_{\pm}^k sont hermitiens. Les parties J_+^k et J_-^k commutent entre elles, et les différentes composantes obéissent aux relations de commutation du moment angulaire.

$$\begin{aligned} [J_+^k, J_-^l] &= 0 \\ [J_{\pm}^k, J_{\pm}^l] &= i\epsilon_{klm} J_{\pm}^m \end{aligned}$$

L'algèbre des J_{\pm}^k se décompose en deux ensembles de générateurs vérifiant l'algèbre de $SU(2)$. Les représentations irréductibles les plus générales sont trouvées par produit tensoriel des représentations irréductibles des deux groupes $SU(2)$ correspondants, soit $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Les représentations de $SU(2)_R$ seront décrites par les états propres de $(\mathbf{J}_+)^2$ et J_+^3 (de moment "angulaire" j_+) et celles de $SU(2)_L$ par les états propres de $(\mathbf{J}_-)^2$ et J_-^3 (de moment "angulaire" j_-). L'action des opérateurs J^k et K^k se déduit de :

$$\begin{aligned} J^k &= J_+^k + J_-^k \\ K^k &= -i(J_+^k - J_-^k) \end{aligned}$$

Ces bases, de représentation de dimension $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$ sont notées (j_+, j_-) . On remarque que K^k est antihermitien : les représentations finies ainsi construites ne sont pas unitaires. Les deux représentations fondamentales (de plus basse

dimension) sont $(0, 1/2)$ et $(1/2, 0)$ respectivement nommées représentations spinorielles droite et gauche. Toutes les autres peuvent être formées à partir de celles-ci par produit tensoriel.

1-3 La transformation des spineurs

Les transformations de Lorentz finies correspondant aux représentations $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$ résultent des définitions précédentes. Pour $(j^+, j^-) = (1/2, 0)$

$$\mathbf{J}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}) = \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\mathbf{J}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) = 0$$

soit $\mathbf{J} = \vec{\sigma}/2$ et $\mathbf{K} = -i\vec{\sigma}/2$

$$\Lambda_L = e^{\frac{\psi}{2} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{\sigma}} e^{i\frac{\psi}{2} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{\sigma}}$$

De même pour $(j^+, j^-) = (0, 1/2)$:

$$\Lambda_R = e^{\frac{\psi}{2} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{\sigma}} e^{i\frac{\psi}{2} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{\sigma}}$$

La définition des représentations $(0,1/2)$ et $(1/2,0)$ implique les lois de transformation suivantes pour les spineurs droits et gauches (à deux composantes) dans une transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} \psi'_R(\Lambda p) &= \Lambda_R(\Lambda) \psi_R(p) \\ \psi'_L(\Lambda p) &= \Lambda_L(\Lambda) \psi_L(p) \end{aligned}$$

Le choix des noms Λ_L et Λ_R sera justifié plus tard. Les transformations de Lorentz vont être décrites par des matrices de $SL(2, C)$, le groupe linéaire des matrices 2×2 , de déterminant unité, à éléments complexes. Les deux représentations précédentes ne diffèrent pas pour les rotations. Elles sont au contraire inverses l'une de l'autre dans les transformations de Lorentz pures. Le paramètre ψ est lié à la vitesse de la transformation de Lorentz pure

$$\exp(\pm \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n} \psi / 2) = ch \frac{\psi}{2} \mathbf{1} \pm sh \frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

où $\mathbf{1}$ désigne la matrice unité et $ch \psi = \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

En particulier, la matrice associée à la transformation de Lorentz pure qui amène le 4-vecteur $(m, \mathbf{0}) \rightarrow (p^0, \mathbf{p})$ est, d'après la relation précédente, avec $ch \psi = E/m$, $sh \psi = p/m$ et $p^0 = E(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$

$$L_R = \frac{m + p^0 + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m + p^0)}} = ch \frac{\psi}{2} + sh \frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.1.2a)$$

La transformation inverse est précisément

$$L_L = \frac{m + p^0 - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m + p^0)}} = ch \frac{\psi}{2} - sh \frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.1.2b)$$

Une transformation de Lorentz Λ est toujours le produit d'une rotation et d'une transformation de Lorentz pure, mais comme les matrices de Pauli $\vec{\sigma}$ ne commutent pas entre elles

$$\Lambda = LR = R'L'$$

Les matrices de $SL(2, C)$ $\Lambda_{L,R}$ associées à une Lorentz pure sont *hermitiennes* alors que les matrices (de $SU(2)$) associées aux rotations sont unitaires.

1-4 Spineurs gauches et droits

L'existence de deux transformations de Lorentz

$$\Lambda_R = \exp \left[-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{n}_1 \phi + \mathbf{n}_2 \psi) \right] \quad (3.1.3a)$$

$$\Lambda_L = \exp \left[-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{n}_1 \phi + \mathbf{n}_2 \psi) \right] \quad (3.1.3b)$$

conduit de manière naturelle à l'introduction de deux bases de spineurs relativistes à deux composantes. Soient ψ_R les composantes initiales du spineur ψ et ψ'_R celles de l'état transformé de Lorentz.

$$\psi'_R(\mathbf{p}) = \Lambda_R \psi_R(\Lambda^{-1} \mathbf{p})$$

et de manière analogue

$$\psi'_L(\mathbf{p}) = \Lambda_L \psi_L(\Lambda^{-1} \mathbf{p})$$

Le spineur "droit" ψ_R se transforme par Λ_R . Le générateur est \mathbf{K} est alors représenté par $\mathbf{K} = +i\vec{\sigma}/2$, et le spineur appartient à la représentation $(0, 1/2)$. Le spineur gauche appartient à $(1/2, 0)$. La même lettre Λ désigne la transformation de Lorentz initiale dans l'espace à 4 dimensions et les deux matrices 2×2 de $SL(2, C)$ (groupe des matrices 2×2 à coefficients complexes de déterminant unité) qui lui sont associées. Ceci présente l'avantage de rappeler qu'il s'agit de trois façons de représenter la même opération dans des espaces qui

sont en correspondance, et l'inconvénient de prêter éventuellement à confusion. Dans le cas du groupe $SU(2)$, il y avait une relation linéaire qui permettait de passer d'une représentation à sa conjuguée, en utilisant la matrice $\epsilon = i\sigma_2$. La matrice ϵ permet également de transformer des spineurs droits en spineurs gauches, mais cette opération doit s'accompagner d'une conjugaison complexe. A partir des définitions (3.1.3) des matrices Λ_R et Λ_L , on voit que

$$\Lambda_R^{-1} = \Lambda_L^\dagger \quad (3.1.4)$$

Toute matrice de $SL(2, C)$ vérifie d'autre part

$$\epsilon \Lambda \epsilon^{-1} = (\Lambda^{-1})^T \quad (3.1.5)$$

la relation précédente devient alors

$$\epsilon \Lambda_R \epsilon^{-1} = \Lambda_L^* \quad (3.1.6)$$

la transformation de $\epsilon \psi_R$ et $\epsilon \psi_L$ en découle :

$$\begin{aligned} (\epsilon \psi_R^{*'}) &= \epsilon \Lambda_R^* \psi_R^* \\ &= \epsilon \Lambda_R^* \epsilon^{-1} \epsilon \psi_R^* = \Lambda_L \epsilon \psi_R^* \end{aligned}$$

$$\epsilon \psi_R^{*'} = \Lambda_L(\Lambda) \epsilon \psi_R^* \quad (3.1.7a)$$

$$\epsilon \psi_L^{*'} = \Lambda_R(\Lambda) \epsilon \psi_L^* \quad (3.1.7b)$$

Les spineurs $\epsilon \psi_R^*$ et $\epsilon \psi_L^*$ sont respectivement du type L (gauche) et R (droit). Lorsque la masse de la particule n'est pas nulle, les transformations de Lorentz connectent ces deux types de représentations. Au contraire, pour les particules de masse nulle, dont le traitement est exposé dans l'appendice D , une seule représentation existe (comme pour les neutrinos), sauf si la symétrie de parité impose l'autre (c'est le cas du photon).

1-5 Préliminaires à la construction de quantités covariantes

On sait que dans le cadre du groupe des rotations, on peut former un vecteur par produit tensoriel de deux spineurs. Une matrice de rotation dans l'espace à trois dimensions peut alors s'exprimer à l'aide du produit de deux transformations de $SU(2)$. Cette méthode est transposable au cas du groupe de Lorentz et permet de former des 4 vecteurs à l'aide de deux spineurs. La matrice de $SL(2, C)$ correspondant à une transformation de Lorentz est le produit d'une Lorentz pure et d'une rotation. Soit $[p]$ la matrice de $SL(2, C)$

associée à une transformation de Lorentz amenant (m, \mathbf{o}) sur (p^0, \mathbf{p}) . Elle sera notée $[p] = L(p)R$. Nous nous proposons de trouver la matrice (4×4) qu'elle représente. D'après les formules (3.1.2) :

$$[p][p]^\dagger = L(p)L(p)^\dagger = L^2(p) = \frac{p^0 \pm \mathbf{p} \cdot \vec{\sigma}}{\mathbf{m}} \quad (3.1.8)$$

avec le signe $+$ pour Λ_R et $-$ pour Λ_L . Pour une autre valeur de la 4-impulsion de la même particule

$$p'^0 \pm \mathbf{p}' \cdot \vec{\sigma} = m[p'] [p']^\dagger = m[p'] [p]^{-1} [p] [p]^\dagger [p^{-1}]^\dagger [p']^\dagger$$

et en substituant à $m[p][p]^\dagger$ sa valeur

$$p'^0 \pm \mathbf{p}' \cdot \vec{\sigma} = [p'] [p]^{-1} (p^0 \pm \mathbf{p} \cdot \vec{\sigma}) [p^{-1}]^\dagger [p]^\dagger \quad (3.1.9)$$

$\Lambda = [p'] [p]^{-1}$ est une transformation qui amène p^μ sur p'^μ ; Nous définirons deux ensembles de matrices quadrivectorielles contravariantes : $\sigma_R^\mu = (\sigma_0, -\vec{\sigma})$ et $\sigma_L^\mu = (\sigma_0, \vec{\sigma})$, avec

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les relations (3.1.9) établies pour le 4-vecteur p^μ peuvent être étendues à deux 4-vecteurs quelconques x^μ et y^μ . On leur associera les matrices X_R et Y_L de $SL(2, C)$

$$X_R = x^\mu \sigma_R^\nu g_{\mu\nu} \quad (3.1.10a)$$

$$Y_L = y^\mu \sigma_L^\nu g_{\mu\nu} \quad (3.1.10b)$$

Les relations (3.1.9) impliquent

$$\begin{aligned} X'_R &= \Lambda_R X_R \Lambda_R^\dagger \\ Y'_L &= \Lambda_L Y_L \Lambda_L^\dagger \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

En introduisant la matrice 4×4 Λ_ν^μ qui relie les composantes de Lorentz contravariantes $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$:

$$\begin{aligned} \Lambda_R \sigma_L^\mu \Lambda_R^\dagger &= \Lambda_\nu^\mu \sigma_L^\nu \\ \Lambda_L \sigma_R^\nu \Lambda_L^\dagger &= \Lambda_\nu^\mu \sigma_R^\mu \end{aligned}$$

L'intérêt principal de ces relations apparaîtra dans le paragraphe suivant, où elles nous permettront de former des quadrivecteurs. Elles peuvent également

être utilisées comme dans l'exercice 4 pour calculer les éléments de matrice de la transformation de Lorentz 4×4 à partir de ceux de $SL(2, C)$. Le produit scalaire étant invariant, on vérifie :

$$\det(X) = \det(X') = (x'^0)^2 - \mathbf{x}'^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$$

1-6 Scalaires et 4-vecteurs

Compte tenu de l'équation 3.1.4, les expressions bilinéaires

$$S = \psi_R^\dagger \chi_L \quad \text{et} \quad S = \psi_L^\dagger \chi_R \quad (3.1.12)$$

sont des invariants de Lorentz, c'est-à-dire des scalaires. De même, l'équation 3.1.6 permet d'établir l'invariance de $\psi_R^T \epsilon \chi_L$ et $\psi_L^T \epsilon \chi_R$. D'après les formules 3.1.14 et 3.1.10, les expressions $\psi_L^\dagger X_{R\chi_L}$ et $\psi_R^\dagger Y_{L\chi_R}$ construites à partir des matrices X_R et Y_L du paragraphe précédent sont également des expressions scalaires

$$J_R^\mu = \psi_L^\dagger \sigma_R^\mu \eta_L \quad \text{et} \quad J_L^\mu = \psi_R^\dagger \sigma_L^\mu \eta_R$$

sont donc deux 4-vecteurs contravariants. Comme dans le cas des rotations, la matrice ϵ permet de construire deux autres 4-vecteurs : $J_R^\mu = \psi_R^T \epsilon \sigma_R^\mu \eta_L$ et $J_L^\mu = \psi_L^T \epsilon \sigma_L^\mu \eta_R$

2- LES SPINEURS DE DIRAC

2-1 L'équation de Dirac

Pour construire les spineurs χ_L et ψ_R , associés à un état d'impulsion \mathbf{p} , on transformera un même spineur au repos χ , spineur usuel à deux composantes.

$$\begin{aligned} \chi_L &= [p]_L \chi \\ \psi_R &= [p]_R \chi \end{aligned}$$

$[p]_L, [p]_R$ sont des transformations de Lorentz arbitraires de la forme L, R amenant le 4-vecteur $(m, \mathbf{0})$ sur (E, \mathbf{p}) . Nous verrons que le choix des axes de repère du spin spécifie $[p]_R$ et $[p]_L$ de manière unique. On définit le spineur de Dirac à 4 composantes

$$u(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Si on choisit pour $[p]_R$ et $[p]_L$ des transformations de Lorentz pures, elles sont égales aux matrices (2×2) L_R et L_L des équations (3.1.2a, b), et le spineur de Dirac $u(p)$ peut être explicité

$$u(p) = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p^0 + m + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(m+p^0)}} \chi_{s_3} \\ \frac{p^0 + m - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(m+p^0)}} \chi_{s_3} \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

le spineur χ_{s_3} avec $s_3 = \pm 1/2$ décrit par la particule dans son système au repos et vérifie $\sigma_3 \chi = 2s_3 \chi$ dans le système d'axes choisi (voir plus loin). Dans le cas des particules de masse nulle, traité dans l'appendice D, c'est la direction de l'impulsion qui définit le troisième axe, et pour un état propre de l'hélicité $\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}$, l'une des composantes, ψ_R ou χ_L est alors toujours nulle. Lorsque $m \neq 0$, les deux spineurs ψ_R et χ_L de $u(p)$ sont reliés linéairement. En vertu de l'équation (3.1.4) $[p_R]^{-1} = [p_R]^\dagger$ puis en utilisant de même $[p_L]^{-1} = [p_L]^\dagger$

$$\begin{aligned} \psi_R &= [p]_R [p]^\dagger_R \chi_L = \frac{p^0 + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \chi_L \\ m \psi_R &= (p^0 + \mathbf{p} \cdot \vec{\sigma}) \chi_L = p^\mu \sigma_R^\nu \mathbf{g}_{\mu\nu} \\ m \chi_L &= (p^0 - \mathbf{p} \cdot \vec{\sigma}) \psi_R = p^\mu \sigma_L^\nu \mathbf{g}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent être condensées sous la forme

$$(p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \vec{\gamma}) u(p, s_3) = m u(p, s_3)$$

à l'aide des matrices 4×4 γ^μ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices γ^μ vérifient la relation de Dirac

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Ce qui implique $tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}$. On introduira $\not{p} = p^0 \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p}$ pour obtenir l'équation de Dirac :

$$\not{p} u = m u \quad (3.2.3a)$$

Le spineur de Dirac $u(p)$ peut être considéré comme l'amplitude dans l'espace p d'un état d'impulsion définie, dont la fonction d'onde serait $u_p(x) = u(p) e^{ip \cdot x}$. L'équation de Dirac (3.2.3a) prend dans l'espace x la forme d'une équation différentielle :

$$(i \not{\partial} - m) u_p(x) = 0 \quad (3.2.3b)$$

2-2 Composantes droites, gauches et chiralité

L'écriture des spineurs de Dirac sous la forme (3.2.2) et de l'équation de Dirac (3.2.3) présuppose que les représentations gauches et droites du groupe de Lorentz contiennent les mêmes particules. Ce n'est vrai pour des particules de masse nulle que si celles-ci interviennent dans des interactions qui conservent la parité (discutée au chapitre 8). La théorie des champs, qui unifie le traitement des particules et des antiparticules dans un champ unique justifie a posteriori d'un autre point de vue, l'emploi de quatre composantes (redondantes) pour un objet de spin 1/2. On va pouvoir projeter le spineur de Dirac sur ses composantes gauches et droites à l'aide de la matrice γ^5 :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1} + \gamma^5}{2} u(p)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} u(p)$$

On utilise le mot *de chiralité* gauche ou droite pour désigner les états de composantes gauches ou droites. Pour de grandes valeurs de l'impulsion, $E/m \gg 1$, la notion de chiralité se confond avec celle d'hélicité. Les états d'hélicité sont obtenus en choisissant l'axe de repère du spin au repos selon l'impulsion. Cette notion n'est manifestement pas invariante de Lorentz lorsque la masse est finie. On montre dans l'exercice 14 qu'à la limite où $E/m \rightarrow \infty$, les états d'hélicité $\lambda = +1/2$ sont des états droits, et que de même, seules les composantes gauches des états $\lambda = -1/2$ restent finies.

2-3 Les expressions covariantes (scalaires, 4-vecteurs, tenseurs)

La loi de transformation d'un spineur de Dirac, représentée par la matrice $S(\Lambda)$ résulte des propriétés des spineurs gauche et droit qui le composent.

$$u' = S(\Lambda)u = \begin{pmatrix} \Lambda_R & 0 \\ 0 & \Lambda_L \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} \Lambda_R & 0 \\ 0 & (\Lambda_R^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} u$$

L'expression de la matrice S en fonction des matrices γ est établie à l'exercice 9. Comme dans le cas des rotations, on utilise en général des expressions covariantes plutôt que ces expressions explicites de $S(\Lambda)$.

a- Scalaires

Soit $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$. Nous allons montrer que l'expression $\bar{u}_2 u_1$ est un invariant de Lorentz

$$\begin{aligned}\bar{u}_2 u_1 &= u_2^\dagger \gamma^0 u_1 = (\psi_{2R}^\dagger \ \chi_{2L}^\dagger) \begin{pmatrix} \chi_{L1} \\ \psi_{R1} \end{pmatrix} \\ &= \psi_{2R}^\dagger \chi_{1L} + \chi_{2L}^\dagger \psi_{R1}\end{aligned}$$

Comme on a établi au paragraphe 1-6 de ce chapitre que $\psi_R^\dagger \chi_L$ était un scalaire de Lorentz, $\bar{u}_2 u_1$ l'est aussi. Cette expression scalaire permet de normaliser les spineurs de Dirac. Les spineurs au repos χ_{s3} obéissent à la normalisation non relativiste

$$\chi_{s3}^\dagger \chi_{s3} = \delta_{s3}$$

On choisit souvent, en multipliant comme dans l'équation (3.2.1) les spineurs par \sqrt{m}

$$\bar{u} u = 2m$$

b- Quadrivecteurs

L'expression

$$V^\mu = \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1$$

se transforme comme un quadrivecteur contravariant. Il suffit en effet de se ramener au cas déjà traité des spineurs :

$$\begin{aligned}V^\mu &= (\chi_L^\dagger(2) \psi_R^\dagger(2)) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_R^\mu \\ \sigma_L^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R(1) \\ \chi_L(1) \end{pmatrix} \\ &= \psi_R^\dagger(2) \sigma_L^\mu \psi_R(1) + \chi_L^\dagger(2) \sigma_R^\mu \chi_L(1)\end{aligned}$$

La normalisation précédente implique

$$\bar{u} \gamma^\mu u = 2p^\mu$$

L'avantage de cette convention est qu'elle reste valable pour les masses nulles. Elle correspond en particulier à la norme covariante $\bar{u}_s \gamma^0 u_r = u_s^\dagger u_r = 2E \delta_{sr}$.

c- Tenseurs

Les tenseurs de la représentation de Dirac seront du type

$$T_{\lambda\mu\dots\xi}^{\alpha\beta\dots\zeta}$$

Les indices supérieurs correspondront aux coordonnées se transformant comme les 4 vecteurs contravariants $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$. Les index inférieurs seront associés à des composantes covariantes comme $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$. Le plus souvent, ces tenseurs sont formés à partir d'une combinaison de 4-vecteurs et de matrices γ^μ . On peut construire d'autres types de tenseurs par produit de représentations J_+^k et J_-^l , mais elles sont peu utilisées.

3- LE SPINEUR CONJUGUE DE CHARGE

3-1 Introduction qualitative

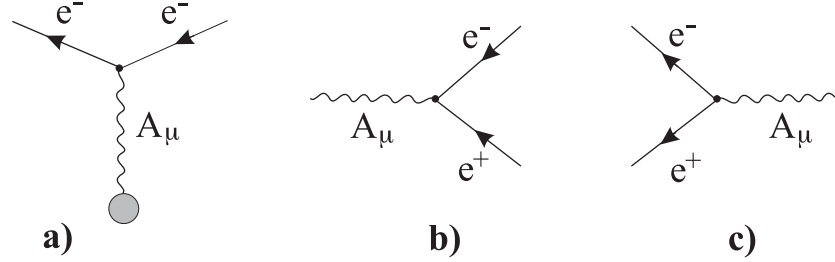


Figure 3.1 : Trois transitions décrites par la même expression :
a) la diffusion ; b) l'annihilation ; c) la création de paire.

Dans le champ électromagnétique défini par le quadrivecteur A_μ , l'amplitude de transition pour une diffusion représentée graphiquement sur la figure 3.1a est, au premier ordre de la constante de couplage e (voir chapitre 9), de la forme

$$\mathcal{M} \sim e \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) A_\mu$$

Cette expression vérifie l'invariance de Lorentz. Le terme $\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1$ est l'analogue du 4-vecteur courant classique, comme on le voit aux faibles transferts d'impulsion ($p_2 \sim p_1 = p$). Le courant $\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1$ est alors voisin de $2p^\mu$ et on retrouve à cette limite le lagrangien d'interaction d'une charge et d'un champ $ep^\mu A_\mu/V$.

Dans l'annihilation fermion-antifermion de la figure 3.1b, ou dans la création de paires (figure 3.1c), il faut décrire l'antifermion par un spineur d'un nouveau type, v , de telle manière que

$$\mathcal{M} \sim e\bar{v}\gamma^\mu u A_\mu \quad (\text{annihilation}) \quad (\text{Fig.3.1b})$$

$$\mathcal{M} \sim e\bar{u}\gamma^\mu v A_\mu \quad (\text{création de paire}) \quad (\text{Fig.3.1c})$$

soient des scalaires. Le spineur v doit se transformer comme u . D'autre part, pour un fermion initial, en mécanique quantique, l'amplitude ne peut dépendre que linéairement des composantes de spin χ et v doit être construit avec χ^* pour que \bar{v} satisfasse cette condition. Il en va de même pour la création de paires, où les composantes des fermions finals doivent être conjuguées.

3-2 La construction du spineur conjugué de charge

Nous avons déjà utilisé la matrice $\epsilon = i\sigma_2$ pour former des vecteurs ou scalaires de $SU(2)$. C'est ainsi que $\zeta_2^T \epsilon \vec{\sigma} \eta_1$ est un vecteur. Nous avons de même montré dans le paragraphe précédent que $\epsilon\psi_R^*$ et $\epsilon\chi_L^*$ se transformaient respectivement par Λ_L et Λ_R . Si

$$S(\Lambda)u = \begin{pmatrix} \Lambda_R \psi_R \\ \Lambda_L \chi_L \end{pmatrix}$$

$$S(\Lambda) \begin{pmatrix} -\epsilon\chi_L^* \\ \epsilon\psi_R^* \end{pmatrix}$$

se transforme de la même façon. On peut ainsi choisir, en précisant la composante de spin λ

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} -\epsilon\chi_{L\lambda}^* \\ \epsilon\psi_{R\lambda}^* \end{pmatrix} = C\gamma^0 u_\lambda^*$$

$$C = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} = i\gamma^2\gamma^0$$

Ce choix de C est conventionnel. D'autres matrices C avec une phase arbitraire entre les composantes R et L sont équivalentes, comme on le montre plus loin (voir aussi l'exercice 13). Le spineur v permet de former les scalaires $\bar{v}u$ et les 4-vecteurs $\bar{v}\gamma^\mu u$, comme nous le souhaitons pour qu'une même formule puisse décrire les trois phénomènes de la figure 3.9. Nous n'avons évidemment pas justifié les expressions postulées, seulement établi qu'elles étaient légitimes vis-à-vis de la covariance et des principes de la mécanique quantique.

3-3 L'équation de Dirac de v

La matrice C qui a été introduite au paragraphe précédent vérifie les deux relations : $C^2 = -\mathbf{1}$ et $C\gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^T C$. Une matrice C générale serait de la forme

$$C = \begin{pmatrix} \eta\epsilon & 0 \\ 0 & \omega\epsilon \end{pmatrix}$$

où η et ω sont des facteurs de phase, avec la relation $(\gamma^\mu\gamma^0)^T C = C\gamma^0\gamma^\mu$. On montre dans l'exercice 13 que les propriétés de transformation des expressions covariantes sont les mêmes. Si le spineur u obéit à l'équation de Dirac 3.2.3a $\not{p}u = mu(\not{p} = p^0\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\vec{\gamma})$, v est la solution de

$$\not{p}v = -mv$$

C'est l'équation de Dirac d'une particule de masse m et d'impulsion $-p^\mu$. Son énergie est en particulier négative. Le positron auquel nous avons choisi d'associer un spineur de type v a évidemment une énergie positive, le spineur v n'ayant été introduit que pour des raisons formelles. D'autre part, la relation $v(p) = C\gamma^0 u^*(p)$ suggère la définition :

$$v(x) = v_p(x) = v(p)e^{ip\cdot x} \quad (3.3.1)$$

Le spineur $v(x)$ obéit à la même équation différentielle que $u(x)$. Celle-ci admet donc des solutions à énergie positive ou négative, qui peuvent être décrites comme des combinaisons linéaires de spineurs $u(x)$ et $v(x)$. On justifie ainsi d'une autre manière la recherche d'une solution générale à 4 composantes, qui n'était pas vraiment motivée dans le paragraphe 2.1. Les spineurs v joueront un rôle important dans la description simultanée des particules et antiparticules par un même champ. Les solutions d'énergie négative seront réinterprétées comme décrivant l'annihilation d'une antiparticule, comme on l'a fait dans la figure 3.1. La nécessité d'une expression simple de la symétrie de parité fournira au chapitre 8 un autre argument plus formel.

3-4 L'équation de Dirac dans un potentiel

C'est dans un champ électromagnétique que l'équation de Dirac passe du statut de relation cinématique à celui d'équation du mouvement. En substituant $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$, l'équation d'une particule libre s'écrit ($\hbar = 1$).

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (3.3.2)$$

et la solution sera $\psi(x) = e^{ip\cdot x}u(p)$ ou $\psi(x) = e^{ip\cdot x}v(p)$. Dans un champ électromagnétique, l'équation du mouvement s'obtient en postulant l'invariance

de jauge des solutions (3.3.2). On impose l'existence de solutions avec différents choix de la phase locale. Si $\psi(x)$ est la solution, $\psi' + e^{i\epsilon\lambda(x)}\psi(x)$ doit être la solution de l'équation transformée. Ceci implique la présence d'un 4-potentielle vecteur $A_\mu(x)$ dont le transformé de jauge est $A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x)$.

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)\psi(x) = m\psi(x) \quad (3.3.3)$$

Si $\tilde{\psi}(x) = C\gamma^0(x)^*$, la fonction d'onde $\tilde{\psi}(x)$ va vérifier

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu^*)\tilde{\psi}^* = m\tilde{\psi}^*$$

($p_\mu^* = i\partial_\mu = -p_\mu$) dans la représentation (x) qui est utilisée pour exprimer l'invariance de jauge, et A_μ est réel. La fonction $\tilde{\psi}(x)$ est ainsi solution de

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu)\tilde{\psi}(x) = m\tilde{\psi}(x)$$

Elle correspond à une particule ayant la même masse et une charge opposée. La transformation par conjugaison de charge de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique ne suffirait évidemment pas à établir l'existence du positron, mais elle permet de comprendre pourquoi le champ fermionique qui correspond aux deux particules comporte les deux types de spineurs.

4- LE REPERE DE SPIN ET LA POLARISATION

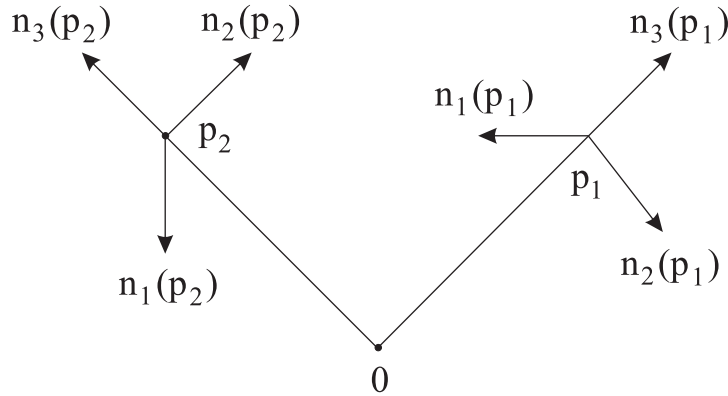


Figure 3.2 : Repères de spin possibles pour deux 4-impulsions différentes.

4-1 La base spinorielle

a- Les "rotations dans le système au repos"

Dans tout ce qui précède, nous avons utilisé les composantes des spineurs et leurs transformées de Lorentz sans expliciter la base choisie pour décrire les états. Il nous faut tout d'abord préciser le groupe de transformation qui va servir à définir dans le domaine relativiste. Pour les particules de masse finie ($m \neq 0$), on peut se placer dans le système au repos où le quadrivecteur impulsion est $p = (m, \mathbf{0})$. Dans ce système, les trois opérateurs $J_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk} J^{jk}$ sont les trois générateurs des rotations, mais ils ne conviennent pas en général pour définir les "rotations dans le système au repos". Celles-ci constituent le sous-groupe des transformations de Lorentz laissant la 4-impulsion p^μ inchangée. Ce ne sont pas, dans un repère où $p \neq (m, \mathbf{0})$, des rotations, et elles sont engendrées par les 4 opérateurs de Pauli-Lubansky W_μ : $\Lambda = e^{-iW.a}$ où les 4 générateurs W_μ sont :

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$$

Le tenseur complètement antisymétrique $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ vérifie $\epsilon_{0ijk} = -\epsilon^{0ijk} = \epsilon_{ijk}$. L'opérateur P^μ est le générateur des 4-translations, et les générateurs antisymétriques $J^{\nu\rho}$ des transformations de Lorentz dans le biplan (μ, ν) sont à un changement de notation près, les 6 opérateurs J_i, K_i déjà définis au premier paragraphe de ce chapitre.

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk} J^{jk} \\ K^i &= J^{0i} = -J^{i0} \end{aligned}$$

On rappelle que les trois opérateurs K^i sont les générateurs des transformations de Lorentz pures (on dit aussi spéciales). Les transformations $\Lambda = e^{-iW.a}$, engendrées par l'opérateur W_μ , qui commute avec P^ν , laisseront le 4-vecteur p invariant, et elles s'identifient pour une particule au repos aux trois générateurs des rotations. C'est bien l'extension relativiste d'une "rotation dans le système au repos".

b- Le repère

Pour les particules de masse non nulle, on choisira un système de repère formé d'un triplet de 4-vecteurs $n_i(p)$ orthogonaux à p (vérifiant $n_i(p).p = 0$), représentés sur la figure 3.2. Les trois opérateurs $S_i(p) = -W.n_i/m$ ont les relations de commutation du moment angulaire $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$ et les états propres de P^μ , et \mathbf{S}^2 et S_3 sont les états $|p, s, \lambda\rangle$. Nous omettrons le spin total s dans la suite de ce paragraphe. Les états $|p, \lambda\rangle$ dépendent du choix à

chaque impulsion de la tétrade de repère $n_i(p)$ et ne peuvent servir de base à une représentation des transformations de Lorentz.

c- Les états de base

Soit $[p]$ la transformation de Lorentz amenant la tétrade de référence

$$e_t = (1, \mathbf{0}) \quad e_1 = (0, 1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 0, 1)$$

sur les 4-vecteurs $p/m, n_i(p)$. Cette transformation de Lorentz va permettre de construire, à partir des états de spin $|[p], \lambda\rangle$, états propres des opérateurs $(\mathbf{S}(p))^2$ et $S_3(p)$, des états spinoriels d'impulsion p qui ne dépendent plus du choix de repère $n_i(p)$, et ont une loi de transformation beaucoup plus simple.

$$|[p], A\rangle_R = \mathcal{D}_{\lambda A}^s([p]^{-1}) |[p], \lambda\rangle$$

$$|[p], A\rangle_L = \mathcal{D}_{\lambda A}^s([p]^\dagger) |[p], \lambda\rangle \quad (3.4.1)$$

Ces relations peuvent ici être considérées comme une définition des états de base spinoriels. Nous établirons plus loin que la projection sur ces états permet de retrouver $u(p, \lambda)$. Les fonctions \mathcal{D} sont ici les extensions lorentziennes des fonctions de rotations usuelles, et dans le cas du spin 1/2, la matrice \mathcal{D} est identique à la matrice 2×2 qui représente $[p]_R$ dans l'équation 3.1.3a. Les états spinoriels ne dépendent pas du choix de $[p]$, mais seulement du quadrivecteur impulsion : soit $|[p'], \lambda\rangle = U'([p'])|[p], \lambda\rangle$ l'état défini par $[p']$ à partir du spineur au repos $|[\hat{p}], \lambda\rangle$.

$$|[p'], \lambda\rangle = U([p])U([p]^{-1})U([p'])|[p], \lambda\rangle = \mathcal{D}_{\mu\lambda}([p]^{-1}[p'])|[p], \mu\rangle$$

La transformation $[p]^{-1}[p']$ est une rotation si les 4-vecteurs p et p' sont les mêmes. La relation (3.4.1), sous la forme $|[p], \lambda\rangle = \mathcal{D}_{A\lambda}([p])|p, A\rangle$ suffit alors à établir que $|p', A\rangle = |p, A\rangle$. Ces états peuvent en particulier être obtenus par une transformation de Lorentz spéciale. Ils forment une représentation (non unitaire) du groupe de Lorentz :

$$U(\Lambda) |p, A\rangle_R = \mathcal{D}_{A'A}^s(\Lambda) |\Lambda p, A'\rangle_R \quad (3.4.2a)$$

$$U(\Lambda) |p, A\rangle_L = \mathcal{D}_{A'A}^s(\Lambda)^{\dagger-1} |\Lambda p, A'\rangle_L \quad (3.4.2b)$$

On voit directement à partir des équations (3.4.1) que bien que $\langle [p], \lambda | [p], \sigma \rangle = \delta_{\lambda\sigma}$ les bases $|p, A \rangle_R$ et $|p, A \rangle_L$ ne sont pas orthonormées :

$$\begin{aligned} {}_R \langle A', p | p, A \rangle_L &= {}_L \langle A', p | p, A \rangle_R = \delta_{A'A} \\ {}_L \langle A', p | p, A \rangle_L &= ([p]_L [p]_L^\dagger)_{A'A} = \frac{(p^0 - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})_{A'A}}{m} \\ \mathbf{1} &= \sum_A |p, A \rangle_R \langle p, A| = \sum_A |p, A \rangle_L \langle p, A| \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

d- Les composantes de Dirac

Il nous reste à identifier les spineurs de Dirac aux projections d'un état donné sur la base spinorielle. Cette identification résulte des équations (3.4.1). Un état $|\psi_\lambda \rangle = \chi_1 | [p], \lambda \rangle$ se développera sur la base spinorielle à l'aide de

$$|[p], \mu \rangle = \mathcal{D}_{A'\mu}^s([p]) |p, A' \rangle_R = \mathcal{D}_{A'\mu}^s(([p]^\dagger)^{-1}) |p, A' \rangle_L$$

$$|\psi_\lambda \rangle = \chi_\lambda \mathcal{D}_{A'\lambda}^s([p]) |p, A' \rangle_R$$

$$(\psi_R)_{A' = L \langle p, A | \psi_\lambda \rangle = \mathcal{D}_{A'\lambda}^s([p]) \chi_\lambda$$

Pour une particule de spin 1/2, les éléments de matrice $\mathcal{D}([p])$ sont précisément ceux de la matrice de $SL(2, C)$ qui est associée à la transformation de Lorentz. On reconnaît l'équation de définition des composantes $\psi_R(p)$ telle qu'elle résulte des équations (3.1.4) ou (3.2.1). La projection sur $-R \langle p, A |$ fournirait les composantes ψ_L . La base d'états où un état représenté par un spineur "au repos" χ_1 est décrit par un spineur de Dirac est fournie par les états spinoriels.

4-2 La matrice densité

Les propriétés statistiques de polarisation sont décrites dans le domaine non relativiste par une matrice densité hermitique de trace unité. Pour un spin $j = 1/2$:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{S} \cdot \vec{\sigma})$$

\mathbf{S} est le vecteur de polarisation. La moyenne d'un opérateur O de l'espace des spineurs sera $Tr(O\tilde{\rho})$.

Les formules de changement de base qui précèdent permettent de transformer la matrice densité dans la base des spineurs de Dirac :

$$\rho = \begin{pmatrix} \Lambda_R \tilde{\rho} \Lambda_L^\dagger & \Lambda_R \tilde{\rho} \Lambda_R^\dagger \\ \Lambda_L \tilde{\rho} \Lambda_L^\dagger & \Lambda_L \tilde{\rho} \Lambda_R^\dagger \end{pmatrix}$$

On montre dans l'exercice 10 que ρ prend la forme

$$\rho = \frac{1}{2} (\not{p} + m)(1 + \gamma_5 \not{A}) \quad (3.4.4)$$

Le 4-vecteur a est le transformé de $(0, s)$ par la transformation de Lorentz pure amenant $(m, \mathbf{0})$ sur le 4-vecteur p . Les composantes de a^μ sont $a^0 = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{m}$ et $a = s + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{m(m+E)}$

4-3 Quelques applications

a- Le moment magnétique de Dirac

L'équation (3.3.3) décrit correctement le moment magnétique de l'électron $\mu = e\hbar/2m$, à des corrections près d'ordre $\alpha = 1/137$. Elle se décompose en deux équations couplées pour des composantes u_R et u_L du spineur de Dirac u .

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial u_L}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A})u_L &= mc^2 u_R \\ i\hbar \frac{\partial u_R}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A})u_R &= mc^2 u_L \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Cette équation peut être résolue par approximation successive. On factorisera la solution connue en l'absence de champ :

$$u = \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E + mc^2 + c\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\xi_R(t) \\ (E + mc^2 - c\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\xi_L(t) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}$$

Nous omettrons dans la suite des facteurs c . En additionnant et soustrayant les deux équations (3.4.6), on fait apparaître la somme Σ et la différence Δ des spineurs à deux composantes ξ_R et ξ_L . La combinaison Δ est forcément d'ordre e puisqu'elle s'annule en l'absence de champ. Sa dérivée par rapport au temps doit aussi être proportionnelle à l'impulsion \mathbf{p} comme on le voit dans l'exercice 15. En identifiant dans l'équation du mouvement de Δ la partie indépendante de \mathbf{p} on trouve

$$\Delta = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{A} \Sigma$$

puis, en substituant $\mathbf{p} = \hbar/i\nabla$, et à la limite $\vec{p}\Sigma = 0, \bar{p}\Sigma = 0, \vec{p}a \vec{A} \neq 0$ des impulsions nulles :

$$i\hbar \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{B} \Sigma$$

Le mouvement de Σ (et Δ) est celui d'un moment magnétique

$$\vec{\mu} = 2 \frac{e\hbar}{2m} \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.4.6)$$

Si l'on définit le facteur de Landé

$$\vec{\mu} = g e \hbar \vec{\sigma} / 4m$$

l'équation de Dirac prédit un facteur de Landé $g = 2$. Ce résultat s'applique à l'électron, qui n'a pas de structure interne, à de petites corrections près calculables en théorie des champs. On leur donne le nom de *moment magnétique anormal*. Les moments magnétiques du proton et du neutron, qui sont composés de quarks, ne sont pas donnés par cette formule. Les nucléons n'obéissent pas à l'équation de Dirac (3.3.3), mais à une variante que nous allons indiquer.

b- La précession de Thomas

L'un des effets les plus spectaculaires liés au spin relativiste est la précession de Thomas, qui modifie en mécanique quantique la valeur du couplage $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$ d'un facteur 2. L'équation non-relativiste du mouvement magnétique $\vec{\mu}$ avec le facteur de Landé g est :

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = g \frac{e}{2m} \vec{\mu} \wedge \mathbf{B} \quad (3.4.7)$$

Cette relation sera supposée vraie pour le mouvement *relatif* du moment dans un système d'axes où la particule est au repos, obtenu par transformation de Lorentz à partir d'un repère fixe (c'est celui qui a été introduit au paragraphe 4. Ce système tourne avec la particule à la vitesse de rotation ω_T , calculée dans l'exercice 1. Le mouvement du moment magnétique par rapport au noyau (repère fixe) est alors :

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = g \frac{e}{2m\gamma} \vec{\mu} \wedge \mathbf{B}' + \vec{\omega}_T \wedge \vec{\mu} \quad (3.4.8)$$

\mathbf{B}' est le champ magnétique dans le référentiel propre, et $\vec{\omega}_T$ le vecteur de la rotation de Thomas

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{a})$$

pour un mouvement de vitesse \mathbf{v} et d'accélération \mathbf{a} . Ceci revient à ajouter un terme complémentaire $-\vec{\omega}_T \cdot \mathbf{S}$ à l'Hamiltonien. Le calcul de ω_T est indiqué en exercice. Un traitement relativiste du mouvement du moment magnétique peut bien entendu être établi directement à partir de l'équation de Dirac pour un spineur dans un champ électromagnétique. La version covariante de l'équation (3.4.8) est l'équation de Bargmann-Michel-Telegdi :

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} a_\nu + 2\mu' F^{\nu\rho} u^\mu u_\nu a_\rho \quad (3.4.9)$$

Le 4-vecteur de polarisation a^μ a été défini par (3.4.4), $\mu' = \mu - e\hbar/(2m)$ est le moment anormal, et τ est le temps propre. Cette équation résulte de l'équation de Dirac (3.3.3) modifiée par un terme de moment magnétique "anormal" qui s'ajoute à eA^μ :

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu + (1/2)\mu' \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\psi(x) = m\psi(x) \quad (3.4.10)$$

La fonction d'onde des particules de spin $J = 1/2$ pourvues de structure, comme les nucléons et les noyaux, vérifie l'équation (3.4.10).

c- La calibration des accélérateurs

Les électrons se polarisent peu à peu dans un accélérateur circulaire selon le champ magnétique (vertical) grâce à la radiation synchrotron. Leur moment magnétique va tourner sous l'effet d'un aimant auxiliaire ayant son axe parallèle à l'orbite, et si l'intensité du champ est choisie judicieusement, il y aura dépolarisation résonnante : l'effet de précession se cumulera sur un grand nombre de rotations de la particule. La vitesse angulaire du mouvement est $\omega_0 = eB/\gamma m$. La précession orbitale du spin au cours de l'orbite s'effectue à la vitesse

$$\omega_S = [1 + \gamma \left(\frac{g}{2} - 1\right)] \frac{eB}{\gamma m}$$

où g est le facteur de Landé de l'électron : $\mu = ge\hbar/2m$. Au cours d'une révolution, le spin de l'électron acquiert un écart angulaire $a_e\gamma$, avec $a_e = (g_e - 2)/2$. L'électrodynamique quantique permet de calculer $a_e = \alpha/(2\pi) \sim 1.159 \cdot 10^{-3}$ au deuxième ordre près en α . La vitesse angulaire dans le champ de dépolarisation B'_D est

$$\omega_D = [1 + \gamma \left(\frac{g}{2} - 1\right)] \frac{eB'_D}{\gamma m}$$

Le champ magnétique B'_D ne s'étend que sur la longueur L , avec une valeur effective $B_D = B'_D L/cT_0$ pour une période de rotation $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Il y a résonance si la précession du spin est de 180 degrés au bout d'un nombre entier de rotations (ou s'il y a un nombre impair de basculements dans une rotation...).

$$\omega_D = \omega_S + k\omega_0$$

avec k entier positif ou négatif. Pour la présence d'ordre k

$$\left[1 + \gamma \left(\frac{g}{2} - 1\right)\right](1 - B_D/B) = k$$

ce qui détermine l'énergie γmc^2 (les ambiguïtés doivent être levées en modifiant l'énergie du faisceau). La précision atteinte est de 1 MeV à 45 GeV, soit de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$.

d- La mesure du moment magnétique anormale du muon

Une troisième application, la mesure de $(g - 2)$, sera décrite au chapitre 11.

EXERCICES

- [1] Le produit de deux transformations de Lorentz pures est-il une transformation de Lorentz pure ? Montrer qu'en général, le produit de plusieurs transformations de Lorentz dont le résultat final laisse invariant le 4 vecteur $(m, \mathbf{0})$ est une rotation. Montrer que dans le cas de trois transformations de Lorentz spéciales consécutives, de vitesses \mathbf{v} , \mathbf{v}^* , et \mathbf{V} , laissant le 4-vecteur $(m, \mathbf{0})$ invariant, les trois transformations sont dans un même plan, et l'axe de la rotation est perpendiculaire à ce plan (on peut raisonner sur le cas d'une particule au repos de masse $m = 1$, subissant successivement les transformations définies par (\mathbf{v}) et (\mathbf{v}^*)).
- [2] En reprenant les notations de la question précédente, soient S_0 , le repère initial, S_1 le transformé par $L(\mathbf{v})$, et S_2 le transformé de S_1 par $L(\mathbf{v}^*)$. **On calculera l'angle de la rotation en comparant la 4-impulsion d'une masse unité au repos dans S_1 , telle qu'elle est dans S_2 , et telle qu'elle est trouvée dans le système obtenu à partir de S_0 par $L(\mathbf{V})$.**
- [3] **On peut retrouver l'angle de rotation en utilisant la représentation à deux dimensions des transformations de Lorentz pures comme dans les équations (3.1.2). Au produit des transformations $L(\mathbf{v}^*)L(\mathbf{v})$ correspond le produit matriciel**

$$(ch \frac{\psi^*}{2} + sh \frac{\psi^*}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n})(ch \frac{\psi}{2} + sh \frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{n})$$

où $th(\psi)v/c$ et $th(\psi^*) = v^*/c$. Le produit des deux transformations de Lorentz spéciales peut être mis sous la forme $R(\mathbf{k}, \phi)L(\mathbf{V})$ soit

$$(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k})(\operatorname{ch} \frac{\chi}{2} + \operatorname{sh} \frac{\chi}{2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k})$$

En déduire l'angle ϕ en identifiant les parties imaginaires.

- [4] Pourquoi une particule scalaire ne peut-elle avoir de moment magnétique ? Peut-elle avoir un moment électrique ?
- [5] On a vu que les spineurs (à deux ou 4 composantes) ne sont pas transformés par une matrice unitaire. Soit un état lié de fonctions d'ondes χ^+, χ^- dans le (système au repos)

$$\begin{pmatrix} \chi^+(x) \\ \chi^-(x) \end{pmatrix}$$

Former le spineur de Dirac associé $\psi(x)$ dans un système de vitesse v par rapport au premier. Vérifier que le spineur transformé est une solution de l'équation de Dirac $(\not{p} - e \not{A})u = mu$ dans le nouveau système.

- [6] Soit une particule d'impulsion \mathbf{p} dans un système \mathbf{K} , et \mathbf{K}' le système au repos obtenu par transformation de Lorentz pure. On appelle repère d'hélicité dans \mathbf{K}' un repère où l'axe de quantification du spin coïncide avec \mathbf{p} . Donner les spineurs de Dirac associés aux états $|+1/2\rangle$ et $|-1/2\rangle$ d'un repère d'hélicité. Qu'arrive-t-il lorsque la masse m de la particule tend vers zero ?
- [7] Montrer que pour $m \neq 0$, le transformé de Lorentz d'un état propre d'hélicité n'est plus un état propre de l'hélicité. On verra que pour $m = 0$ l'hélicité se conserve.
- [8] Montrer que les états spinoriels ne dépendent pas du choix de $[p]$ et établir les formules 3.1.4a, 3.1.4b et 3.4.2. (On peut utiliser $O = |\sigma_3\rangle\langle\sigma_3|O|\sigma_3\rangle\langle\sigma_3|$).
- [9] Montrer que le générateur des rotations pour les spineurs de Dirac est $\vec{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$.

- [10] Démontrer les formules donnant le 4-vecteur polarisation s^μ en fonction de S . On utilisera les formules faisant passer des états de spin aux états spinoriels. On montrera dans une première étape que la matrice densité de Dirac σ s'exprime en fonction de la matrice densité au repos (à 2 composantes) $\tilde{\rho}$ de la manière suivante

$$\rho = \begin{pmatrix} [p]\tilde{\rho}[p]^{-1} & [p]\tilde{\rho}[p]^\dagger \\ [p]^\dagger^{-1}\tilde{\rho}[p]^{-1} & [p]^\dagger^{-1}\tilde{\rho}[p]^\dagger \end{pmatrix}$$

- [11] Ecrire l'équation de Dirac en présence de champ électromagnétique dans la représentation (p) et donner l'équation appropriée pour la solution conjuguée de charge (p_μ est maintenant *réel*).
- [12] Montrer que $E \pm iB$ se transforment respectivement par $D(1,0)$ et $D(0,1)$. On utilisera tout d'abord les formules de transformation de E et H dans une transformation de Lorentz pure, en montrant qu'il s'agit d'une rotation vectorielle d'angle $i\psi$. Le résultat équivaut à l'utilisation du générateur $K = iJ$. La transformation de $E + iB$ par une Lorentz pure d'axe e_k est une rotation de générateur J_k et d'angle $i\psi$.
- [13] Vérifier que les expressions obtenues pour les spineurs v à partir des formes bilinéaires covariantes suivantes ne dépendent pas du choix de la matrice C :

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \\ \bar{u}_2 u_1 \\ \bar{u}_2 \gamma_5 u_1 \end{aligned}$$

- [14] Ecrire les composantes des spineurs de Dirac d'hélicité $\pm 1/2$ lorsque l'impulsion est dirigée selon Oz . Montrer que lorsque l'énergie tend vers l'infini, les états d'hélicité tendent vers les états de chiralité.
- [15] Obtenir à partir des équations (3.4.5) l'équation du mouvement de la somme des spineurs Σ . On supposera l'impulsion p constante.