

Chapitre 10

INTERACTION FORTE ET CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE (QCD)

1- LES RAISONS DE QCD

Historiquement, la chromodynamique quantique (ou QCD, de l'anglais Quantum Chromodynamics) s'est développée comme un prolongement du modèle des quarks basé sur les symétries de saveur $SU(2)$ et $SU(3)$, car celui-ci conduisait à d'importantes contradictions avec certains principes de base.

Au début des années 60, il a été établi (Gell-Mann) que les hadrons pouvaient être classés suivant des représentations de ce que l'on appellerait aujourd'hui $SU(3)$ de saveur ou $SU(3)_F$. Cette symétrie approximative a été étudiée en détail au chapitre 8. Cependant, comme cela a été déjà mentionné dans ce même chapitre, les représentations fondamentales ne sont pas réalisées dans la nature. Seules les représentations provenant de la décomposition en représentations irréductibles de

$$\begin{aligned} 3 \times \bar{3} & \quad (\text{mésons}) \\ 3 \times 3 \times 3 & \quad (\text{baryons}) \end{aligned}$$

sont observées. Ceci a conduit à penser que les hadrons étaient composites et formés de quarks (u, d, s) appartenant à la représentation fondamentale 3 de $SU(3)$ et d'antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) dans la représentation conjuguée $\bar{3}$. Si on imagine que les quarks sont liés par un certain potentiel, les états de plus basse énergie apparaissent automatiquement comme :

$$\begin{array}{llll} q \times \bar{q} & J^P = 0^- & L = 0 \quad S = 0 & \pi, K, \eta \\ & J^P = 1^- & L = 0 \quad S = 1 & \rho, \omega, \phi \\ q \times q \times q & J^P = \frac{1}{2}^+ & & p, n, \Sigma, \Xi, \Lambda \\ & J^P = \frac{3}{2}^+ & & \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega \end{array}$$

et les différences de masse à l'intérieur des multiplets peuvent être comprises en supposant :

$$m_d - m_u = 4 \text{ MeV} \qquad m_s - m_d = 150 \text{ MeV}$$

Le caractère composite des hadrons permet de comprendre un certain nombre de propriétés telles que leur moment magnétique. Un proton élémentaire aurait (de façon analogue à l'électron) un moment magnétique $(\mu_p)^{\text{elem}} = e/2M_p$ au lieu de la valeur réelle :

$$\mu_p = 2,79 \frac{e}{2M_p}$$

Cependant, cette image composite simple associée au modèle des quarks pose un certain nombre de problèmes. Citons-en quelques uns :

- (i) Seules les configurations $q\bar{q}$ ou qqq sont observées, jamais qq ou encore $qqqq$.
- (ii) Des techniques d'algèbre de courant montrent que $2m_s/(m_u + m_d) \simeq 20$, ce qui implique $m_s \simeq 160$ MeV et $m_d \simeq 10$ MeV. Il devient par conséquent difficilement compréhensible qu'un hadron soit un état lié de quarks dits constituants et qui devraient avoir une masse de l'ordre 300 - 500 MeV.
- (iii) Le problème qui est sans doute le plus sérieux vient de la statistique. En effet, "la fonction d'onde" du Δ^{++} , dans l'état de spin $M_J = 3/2$

$$\Delta^{++} = u \uparrow u \uparrow u \uparrow$$

est complètement symétrique, ce qui viole la statistique de Fermi-Dirac.

On a résolu ce problème en postulant l'existence d'un nouveau nombre quantique appelé couleur. Chaque saveur de quark (u, d, s mais aussi c, b, t) existe en trois couleurs i, j, k (rouge, jaune, bleu). On postule également que les hadrons sont des singlets de couleur. On dit qu'ils sont "blancs", ce qui signifie, mathématiquement, qu'il sont invariants sous la transformation unitaire de déterminant 1, agissant sur les "coordonnées de couleur" :

$$q_i \rightarrow V_{ik} q_k \quad \text{avec} \quad V^\dagger V = 1 \quad (10.1.1)$$

Ceci définit la loi de transformation du groupe $SU(3)$ de couleur noté $SU(3)_c$ à ne pas confondre bien sûr avec $SU(3)_F$ précédemment étudiée. Les représentations singlets apparaissent uniquement dans les configurations

$$3_c \times 3_c \times 3_c \quad (\text{baryons})$$

$$3_c \times \bar{3}_c \quad (\text{mésons})$$

ce qui exclut donc automatiquement les hadrons "exotiques" qq ou $qqqq$.

Dans l'espace des couleurs, la "fonction d'onde" des baryons s'écrit alors :

$$B = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} q_i q_j q_k \quad (10.1.2a)$$

Elle est totalement antisymétrique sous l'échange de couleur. Ainsi la "fonction d'onde" de spin-saveur-couleur du Δ^{++} est :

$$\Delta^{++} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} u_i \uparrow u_j \uparrow u_k \uparrow$$

De même, la "fonction d'onde" de couleur des mésons s'écrit :

$$M = \sum_i q_i \bar{q}_i = J\bar{J} + B\bar{B} + R\bar{R} \quad (10.1.2b)$$

Cette introduction de la couleur peu paraître parfaitement "ad hoc". L'étape suivante a alors été de construire une théorie dynamique de la couleur qui aurait comme conséquence que les quarks colorés n'existent pas à l'état libre et que seuls des états singlets de couleur (ou états "blancs") sont observables : cette propriété est appelée le confinement de la couleur. Cette théorie a progressivement émergé comme une théorie de jauge où le groupe de jauge serait $SU(3)_c$. Dans une telle théorie, il apparaît automatiquement huit gluons colorés qui sont les agents de la force de couleur s'exerçant entre les quarks colorés. Il convient cependant de noter, nous y reviendrons au paragraphe 4, que le confinement de la couleur n'a pas encore été strictement "démontré" dans le cadre de cette théorie, bien que de nombreuses indications favorables existent.

2- THEORIES DE JAUGE ET LAGRANGIEN DE QCD

2-1 Construction d'une théorie de jauge

Le principe d'invariance de jauge locale conduisant à ce que l'on appelle les théories de jauge semble être l'élément fondamental de la description de toutes les interactions et même de leur unification. Ainsi l'électromagnétisme quantique (QED), la chromodynamique quantique (QCD) et la théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ sont des théories de jauge. Nous allons voir comment on peut construire une telle théorie et nous l'appliquerons immédiatement au cas de QCD.

Considérons pour fixer les idées, une théorie de fermions libres de masse m . Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (10.2.1)$$

où ψ dénote en réalité un ensemble de N champs fermioniques $(\psi_1 \dots \psi_s \dots \psi_N)$. $\bar{\psi}$ doit ainsi être compris comme un vecteur colonne (ligne) à N composantes. Dans le cas d'une symétrie interne globale, on demande que le lagrangien soit invariant sous une symétrie (unitaire)

$$\psi(x) \rightarrow V\psi(x) \quad \text{avec} \quad V = e^{i\theta_a T_a} \quad (10.2.2)$$

où la sommation sur a est sous-entendue. V est une matrice $N \times N$ et N est la dimension de la représentation du groupe. Les T_a ($a = 1, \dots, p$) constituent, quant à eux, une représentation matricielle de dimension N de l'algèbre de Lie du groupe (voir chapitre 4). Cette transformation est indépendante du point d'espace-temps dans le sens où les paramètres réels θ_a caractérisant la transformation, sont les mêmes en tout point.

Dans le cas d'une symétrie de jauge (ou symétrie de jauge de deuxième espèce), on exige beaucoup plus. On veut en effet que le lagrangien soit invariant lorsque l'on effectue une transformation de symétrie indépendamment en tout point de l'espace. En d'autres termes, les θ_a deviennent des fonctions $\theta_a(x)$ du point d'espace-temps x :

$$\psi(x) \rightarrow V(x) \psi(x) \quad \text{avec} \quad V(x) = e^{i\theta_a(x) T_a} \quad (10.2.3)$$

Sous une telle transformation, le lagrangien se transforme suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= i \bar{\psi}(x) V^\dagger(x) \gamma^\mu \partial_\mu \left(V(x) \psi(x) \right) - m \bar{\psi}(x) V^\dagger(x) V(x) \psi(x) \\ &= \mathcal{L} + i \bar{\psi}(x) V^\dagger(x) \gamma^\mu \left(\partial_\mu V(x) \right) \psi(x) \end{aligned}$$

Soit encore, dans le cas d'une transformation infinitésimale :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \partial_\mu \theta_a(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu T_a \psi(x)$$

Il apparaît alors que la théorie n'est pas invariante sous cette transformation de jauge. De façon évidente, ceci est dû à la présence d'une dérivée (terme d'énergie cinétique) simulant une non-localité dans le lagrangien. Cette non invariance est ainsi due au fait que les champs en un point x et un point voisin y se transforment de façon indépendante. Pour restaurer la symétrie, il faut faire en sorte qu'il existe un lien entre les champs pris en x et en y .

Pour examiner cette question, discrétisons la théorie sur un réseau cubique à 4 dimensions de maille a . Dans ce qui suit, on supposera pour simplifier (mais cela peut se justifier) que nous sommes dans un espace euclidien à quatre dimensions et non dans un espace de Minkowski ; il n'y a ainsi plus de différence entre covariant et contravariant. Nous reviendrons bien sûr à la fin à l'espace de Minkowski continu.

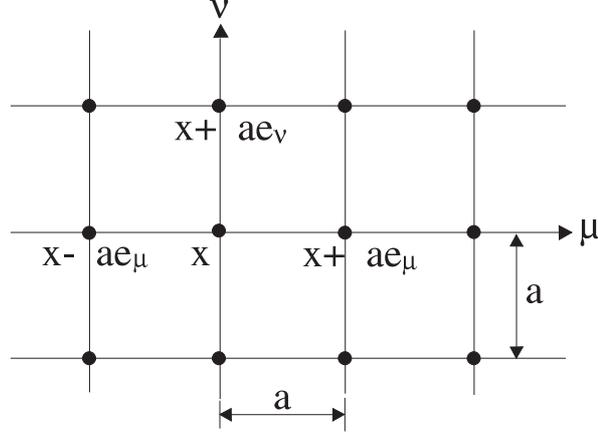


Figure 10.1 : Espace euclidien discrétisé à l'aide d'un maillage cubique.

La partie non invariante du lagrangien peut se discrétiser comme :

$$\mathcal{L}_c = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \frac{i}{a} \sum_{\mu} \left(\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x + a e_\mu) - \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right) \quad (10.2.4)$$

Ce lagrangien est seulement défini en des points discrets x qui correspondent aux nœuds du réseau ; e_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) est un vecteur unitaire sur une des quatre directions de cet espace euclidien à quatre dimensions (voir figure 10.1). En réalité, c'est le premier terme de (10.2.4) qui n'est pas invariant. Il se transforme en effet comme :

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x + a e_\mu) \rightarrow \bar{\psi}(x) \gamma^\mu V^\dagger(x) V(x + a e_\mu) \psi(x + a e_\mu) \quad (10.2.5)$$

Pour rétablir l'invariance de la théorie, on introduit dans le terme non local des nouveaux degrés de liberté appelés variables de lien qui sont des éléments du groupe de jauge ; soient $U(x; y)$ ces variables de lien qui "relient" le point x au point y . Elles satisfont :

$$\begin{aligned} U(x; x) &= 1 \\ U^{-1}(x; y) &= U(y; x) \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

On va ainsi modifier la partie non invariante du lagrangien par l'introduction d'un lien entre x et $x + a e_\mu$:

$$\mathcal{L}_c = \frac{i}{a} \sum_{\mu} \left(\bar{\psi}(x) \gamma^\mu U(x; x + a e_\mu) \psi(x + a e_\mu) - \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right) \quad (10.2.7)$$

Pour que ce lagrangien reste invariant, il suffira d'imposer une transformation des liens qui compense exactement la transformation des champs pris en des

points différents. Cette loi de transformation sera :

$$U(x; y) \rightarrow V(x) U(x; y) V^\dagger(y) \quad (10.2.8)$$

On vérifie alors que (10.2.7) reste invariant sous les transformations simultanées des champs de matière (10.2.3) et des variables de lien (10.2.8).

Le lien élémentaire $U(x; x + dx)$ est un élément du groupe de jauge et il s'écrit nécessairement sous la forme (somme sur a de nouveau sous-entendue) :

$$U(x; x + dx) = e^{iB^\mu(x) dx_\mu} \quad \text{avec} \quad B^\mu(x) = B_a^\mu(x) T^a \quad (10.2.9)$$

Ceci définit les champs de jauge B_a^μ ; il y a, par construction, autant de champs de jauge qu'il y a de paramètres pour spécifier une transformation du groupe de jauge. Cette forme est également valable dans l'espace de Minkowski et l'invariance de Lorentz impose aux champs de jauge $B_a^\mu(x)$ d'être des quadri-vecteurs. A titre d'exemple on aura :

Groupe de jauge $U(1) \longleftrightarrow 1$ champ de jauge (1 photon dans QED)

Groupe de jauge $SU(3) \longleftrightarrow 8$ champs de jauge (8 gluons dans QCD)

Pour obtenir la loi de transformation des champs, on peut considérer un lien élémentaire le long d'un axe μ :

$$U(x, x + a e_\mu) = e^{iB_\mu a} = (1 + iaB_\mu)$$

Pour revenir à la formulation continue, on fait tendre a vers zéro. Le lien se transforme comme :

$$\begin{aligned} (1 + iaB_\mu) &\rightarrow V(x) (1 + iB_\mu a) V^\dagger(x + a e_\mu) \\ &\rightarrow V(x) (1 + iB_\mu a) \left(V^\dagger(x) + a \partial_\mu V^\dagger(x) \right) \end{aligned}$$

En comparant les termes d'ordre a , on obtient la loi de transformation des champs de jauge :

$$B_\mu(x) \rightarrow V(x) B_\mu(x) V^\dagger(x) - iV(x) \partial_\mu V^\dagger(x) \quad (10.2.10)$$

Cette forme reste valable lorsque l'on passe dans l'espace de Minkowski. De même, partant de (10.2.7) et faisant tendre a vers zéro, tout en revenant dans l'espace de Minkowski, on obtient le lagrangien invariant de jauge :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \left(i\partial^\mu - B^\mu(x) \right) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (10.2.11a)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \left(i\partial^\mu - T_a B_a^\mu(x) \right) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (10.2.11b)$$

On voit ainsi qu'il apparaît naturellement un couplage de type Yukawa des champs de jauge aux champs de matière. Cependant, jusqu'à maintenant, ce champ B^μ n'a aucun contenu dynamique. Il faut en particulier lui adjoindre un terme d'énergie cinétique compatible avec l'invariance de jauge. En revenant à notre maillage cubique, on va chercher, à l'aide des liens, à construire le terme le plus simple. C'est le terme de plaquette représenté sur la figure 10.2 ci-dessous ; on somme sur μ et ν pour ne privilégier aucune direction et assurer ainsi lors du retour à l'espace de Minkowski, l'invariance de Lorentz.

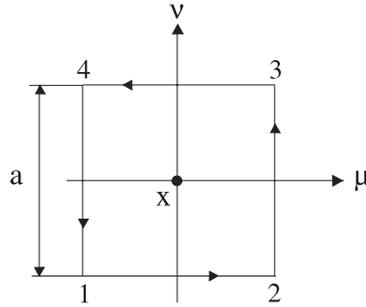


Figure 10.2 : Plaquette : les flèches indiquent le sens des liens suivant les axes μ ou ν .

Le lagrangien correspondant s'écrira au point x du maillage :

$$\mathcal{L}_J = \frac{\beta}{N} \frac{1}{a^4} \sum_{(\mu, \nu)} \text{tr}(U_{12} U_{23} U_{34} U_{41}) \quad (10.2.12)$$

β est un paramètre qui sera relié ultérieurement à la constante de couplage de la théorie. On a introduit conventionnellement un entier N qui ne fait que redéfinir β . Pour $U(1)$ on prend $N = 1$, et pour $SU(N_c)$ on choisit $N = N_c$. \mathcal{L} devant être de la dimension [longueur $^{-4}$] et a étant la seule dimension présente dans le problème, on a nécessairement un facteur $1/a^4$. Vérifions que ce lagrangien est bien invariant sous une transformation de jauge

$$\begin{aligned} \text{tr}(U_{12}, U_{23}, U_{34}, U_{41}) &\rightarrow \text{tr}(V_1 U_{12} V_2^\dagger V_2 U_{23} V_3^\dagger V_3 U_{34} V_4^\dagger V_4 U_{41} V_1^\dagger) \\ &= \text{tr}(U_{12} U_{23} U_{34} U_{41}) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'unitarité des matrices V et la propriété d'invariance cyclique de la trace.

Les différents liens intervenant dans la plaquette sont, d'après la figure (10.2)

$$U_{12} \simeq \exp\left(ia B_\mu\left(x - a\frac{e_\nu}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
U_{23} &\simeq \exp\left(ia B_\nu\left(x + a\frac{e_\mu}{2}\right)\right) \\
U_{34} &\simeq \exp\left(-ia B_\mu\left(x + a\frac{e_\nu}{2}\right)\right) \\
U_{41} &\simeq \exp\left(-ia B_\nu\left(x - a\frac{e_\mu}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété bien connue d'un produit d'exponentielles de matrices ne commutant pas, on obtient à l'ordre a^2

$$\begin{aligned}
U_{12} U_{23} &\simeq \exp\left(ia B_\mu\left(x - a\frac{e_\nu}{2}\right) + ia B_\nu\left(x + a\frac{e_\mu}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{2} \left[B_\mu\left(x - a\frac{e_\nu}{2}\right), B_\nu\left(x + a\frac{e_\mu}{2}\right)\right]\right) \\
&\simeq \exp\left(ia(B_\mu(x) + B_\nu(x)) + \frac{ia^2}{2} B_{\mu\nu}(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + i[B_\mu(x), B_\nu(x)]$$

De même :

$$U_{34} U_{41} \simeq \exp\left(-ia(B_\mu(x) + B_\nu(x)) + \frac{ia^2}{2} B_{\mu\nu}(x)\right)$$

Il vient donc toujours à l'ordre a^2 dans l'exponentielle :

$$\text{tr}(U_{12} U_{23} U_{34} U_{41}) = \exp(ia^2 B_{\mu\nu})$$

En développant l'exponentielle, on obtient :

$$\mathcal{L} = \frac{\beta}{N_c} \frac{1}{a^4} \sum_{(\mu, \nu)} \text{tr}\left(1 + ia^2 B_{\mu\nu} - \frac{a^4}{2} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu}\right)$$

Le premier terme est constant et peut donc être éliminé ; le deuxième terme antisymétrique en μ et ν disparaît ; il reste simplement le dernier terme qui, réécrit dans l'espace de Minkowski, est de la forme :

$$\mathcal{L} = -\frac{\beta}{2N} \text{tr} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu + i[B^\mu, B^\nu] \quad (10.2.13)$$

Réécrivons ce lagrangien sous une forme plus conventionnelle dans différents cas :

Symétrie U(1)

Posant $e = \sqrt{1/2\beta}$ et introduisant $A_\mu = \frac{1}{e}B_\mu$, on retrouve la forme canonique du lagrangien de l'électrodynamique quantique :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\end{aligned}\quad (10.2.14)$$

Symétrie SU(N)

On pose cette fois $g = \sqrt{N_c/\beta}$ et on définit les champs de jauge canonique A^μ par :

$$B^\mu = gA^\mu = g \sum_{a=1}^{N_c^2-1} t_a A_a^\mu$$

Il y a effet $N_c^2 - 1$ générateurs dans $SU(N_c)$ donc $N_c^2 - 1$ champs de jauge. Les t_a appartiennent à la représentation fondamentale (de dimension N_c) de l'algèbre de Lie de $SU(N_c)$.

On définit aussi le tenseur de champ

$$\begin{aligned}G^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu] \equiv t_a G_a^{\mu\nu} \\ G_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu\end{aligned}\quad (10.2.15)$$

où les f_{abc} sont les constantes de structure du groupe.

Le lagrangien peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma_\mu(i\partial^\mu - g A^\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\quad (10.2.16a)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma_\mu(i\partial^\mu - g t_a A_a^\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu}\quad (10.2.16b)$$

où la sommation sur les $N_c^2 - 1$ valeurs de a est sous-entendue.

Le point important est que, contrairement à $U(1)$, dans les théories non abéliennes de type $SU(N)$, on engendre automatiquement des interactions entre champs de jauge. Comme nous allons le voir, ceci a des conséquences considérables dans le cas de QCD.

2-2 Le lagrangien de la chromodynamique quantique

Dans QCD, pour chaque saveur (u, d, s, c, b, t), les quarks peuvent exister en 3 couleurs et ils appartiennent à la représentation fondamentale de $SU(3)_c$.

On obtient une théorie invariante sous les transformations locales $SU(3)_c$ par adjonction de $N_c^2 - 1 = 8$ champs de gluons vectoriels. D'après la section précédente, le lagrangien de QCD est

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma_\mu (i\partial^\mu - g t_a A_a^\mu) \psi_f - \sum_f m_f \bar{\psi}_f \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

où la sommation sur f porte sur la saveur. g est la constante de couplage de la théorie. Le nombre de gluons colorés (huit) est exactement le nombre de générateurs du groupe. Dans le langage de la théorie des groupes, on dit qu'ils appartiennent à la représentation adjointe de $SU(3)_c$. Ce nombre peut se comprendre de façon plus intuitive en considérant le vertex fondamental de couplage quark-gluon :

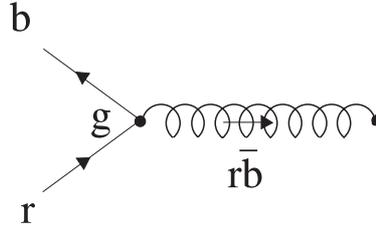


Figure 10.3 : Vertex fondamental de couplage quarks-gluon.

Sur l'exemple ci-dessus, en ce qui concerne la couleur, le gluon émis peut être vu comme un état rouge-antibleu ($r\bar{b}$). On peut *a priori* former 9 états de gluons construits à partir des trois quarks (j, r, b) et des trois antiquarks ($\bar{j}, \bar{r}, \bar{b}$)

$$j\bar{r}, j\bar{b}, r\bar{j}, r\bar{b}, b\bar{j}, b\bar{r}, j\bar{j}, r\bar{r}, b\bar{b}$$

Parmi ces neuf états, la combinaison invariante (ou "blanche") $b\bar{b} + r\bar{r} + j\bar{j}$ n'appartient pas à l'octet et est écartée.

La différence essentielle entre QED et QCD provient de la nature non abélienne de cette dernière théorie. Par suite, la partie purement gluonique du lagrangien

$$\mathcal{L}_J = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

engendre automatiquement des interactions à trois gluons (couplage g) et à quatre gluons (couplage g^2) :

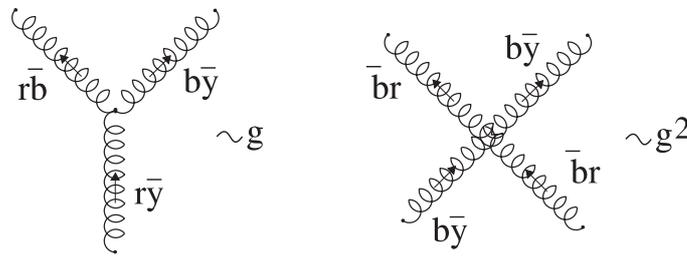


Figure 10.4 : Vertex fondamentaux de self-interaction des gluons.

On voit que tous les vertex élémentaires de QCD conservent la couleur. Pour terminer ce paragraphe, nous donnons les règles de Feynman associées à chacun de ces trois vertex fondamentaux. Les conventions d'écriture sont les suivantes :

- μ, ν représente l'indice de Lorentz,
- $i = 1, 2, 3$ la couleur des quarks,
- $a = 1, \dots, 8$ la couleur des gluons.

Les contributions à $i\mathcal{M}_{fi}$ sont explicitées sur la figure 10.5.

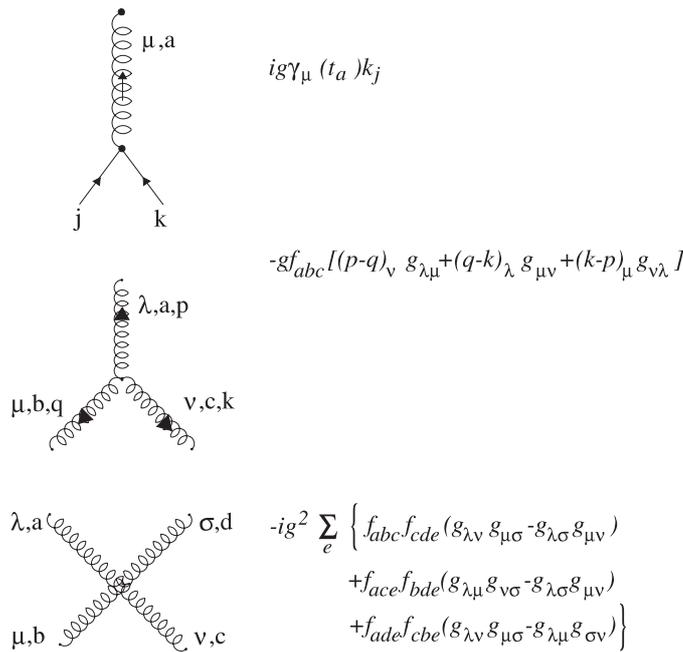


Figure 10.5 : Diagrammes et règles de Feynman associés à chacun des vertex fondamentaux de QCD.

3- LA LIBERTE ASYMPTOTIQUE

3-1 La constante de couplage mobile de QCD

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la charge électrique à l'origine de l'interaction entre deux électrons dépend de la résolution, c'est-à-dire de l'impulsion q portée par le photon assurant cette interaction. Cet effet provient en réalité des fluctuations quantiques de ce même photon sous forme de paires virtuelles e^+e^- .

Pour passer de QED à QCD, il suffit de remplacer les électrons par des quarks, les photons par des gluons et la charge électrique par la constante de couplage de QCD g . Au plus bas ordre en théorie des perturbations, l'échange de gluons (colorés) entre quarks (colorés)

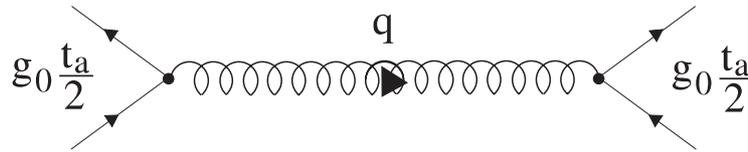


Figure 10.6 : Interaction quark-quark par échange d'un gluon.

sera renormalisé par la présence des fluctuations quantiques :

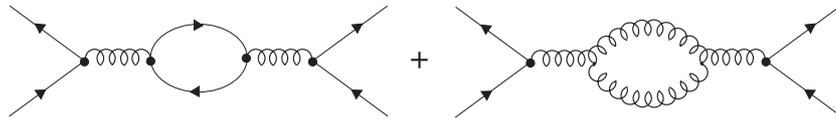


Figure 10.7 : Correction à l'échange de gluons au plus bas ordre en perturbation.

g_0 est la constante de couplage nue de la théorie. Le premier graphe (boucle $q\bar{q}$) est analogue à celui apparaissant dans QED. Le fait nouveau, lié à la nature non abélienne de QCD autorisant des interactions entre gluons, est l'existence d'une fluctuation quantique à deux gluons. Elle est à l'origine de la différence de comportement, déjà mentionnée, entre QCD et QED.

La constante de couplage mobile sera définie de façon analogue à QED (voir Chapitre 9) en autorisant un nombre arbitraire de fluctuations quantiques du type précédent. L'amplitude de diffusion qq corrigée par cet effet de renormalisation contiendra une série géométrique :

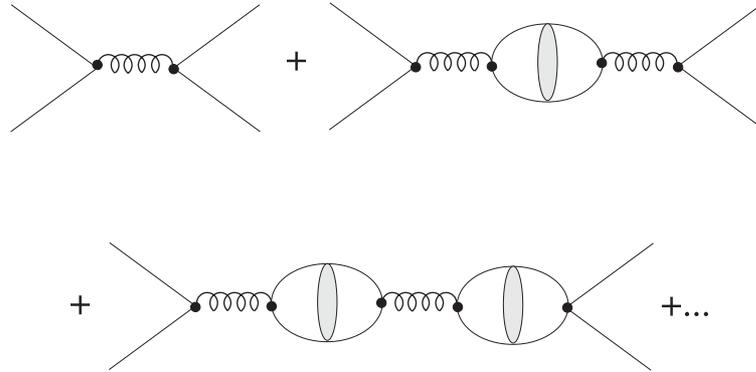


Figure 10.8 : Diagrammes contribuant à la définition de la constante de couplage mobile de QCD.

Ceci revient à substituer à la constante de couplage $\alpha_0 = g_0^2/4\pi$ une constante de couplage variable ou mobile $\alpha_s(Q^2) = g^2(Q^2)/4\pi$

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - 4\pi\alpha_0\Pi(Q^2)}$$

avec $Q^2 = -q^2 > 0$, si q^μ est la quadri-impulsion transférée du genre espace. $\Pi(Q^2)$ (la self-énergie irréductible du gluon) est représentée par la boîte hachurée sur la figure 10.8. A cet ordre en perturbation, $\Pi(Q^2)$ contient la boucle de quarks et la boucle de gluons représentées sur la figure 10.7. Tout comme dans QED, $\Pi(Q^2)$ diverge (divergence ultraviolette) car il contient des fluctuations quantiques de longueur d'onde aussi petite que l'on veut. On élimine cette divergence en soustrayant à $\Pi(Q^2)$, la self-énergie $\Pi(\mu^2)$ prise à une certaine échelle μ^2 appelée point de renormalisation. La constante de couplage $\alpha_s(Q^2)$ s'écrira alors (cf. éq. 9.4.11)

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q^2) &= \frac{\alpha_0}{1 - 4\pi\alpha_0\Pi(\mu^2) - 4\pi\alpha_0(\Pi(Q^2) - \Pi(\mu^2))} \\ &\equiv \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - 4\pi\alpha_s(\mu^2)\tilde{\Pi}(Q^2; \mu^2)} \end{aligned}$$

où

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - 4\pi\alpha_0\Pi(\mu^2)}$$

est la constante de couplage mobile à l'échelle μ^2 . Cette quantité est finie car la divergence de $\Pi(\mu^2)$ est "absorbée" par la constante de couplage nue α_0 qui est infinie. $\tilde{\Pi}(Q^2; \mu^2) = \Pi(Q^2) - \Pi(\mu^2)$ est elle aussi finie. A grand Q^2 et à grand

μ^2 ($Q^2, \mu^2 \gg m_q^2$), un calcul explicite, à l'aide des règles de Feynman, montre que

$$\tilde{\Pi}(Q^2; \mu^2) = -\frac{1}{(4\pi)^2} b_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \quad \text{avec} \quad b_0 = -\frac{2}{3}N_f + \frac{11}{3}N_c \quad (10.3.1)$$

ce qui donne à grand Q^2, μ^2 :

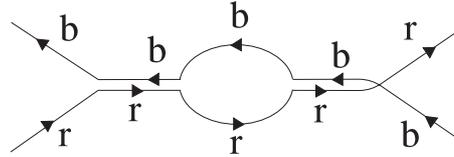
$$\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} b_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad (10.3.2)$$

b_0 est positif si $11N_c = 33 > 2N_f$, ce qui est largement vérifié ($N_c = 3$ nombre de couleurs et N_f nombre de saveurs au plus égal à 6.) Ainsi, si la résolution augmente, la constante de couplage diminue. De ce fait, lorsqu'un quark s'approche d'un autre quark et qu'il rentre dans le nuage de polarisation de cet autre quark, la charge de couleur "vue" diminue. C'est la propriété de liberté asymptotique. Cette propriété très importante signifie que QCD devient une théorie quasi-libre à courte distance ce qui permet d'appliquer la théorie des perturbations. Nous reviendrons un peu plus loin sur les conditions précises de validité d'une telle approche perturbative.

Par suite de l'évolution avec la résolution de la constante de couplage, QCD a un comportement exactement inverse de celui de QED provenant de la boucle de gluons (proportionnelle à N_c) beaucoup plus grande et de signe opposé à la boucle de quarks (proportionnelle à N_f) qui, elle seule, donnerait l'esclavage et non la liberté asymptotique. *L'existence de cette liberté asymptotique provient donc directement de la nature non abélienne de la théorie qui se traduit par les self-interactions des gluons.*

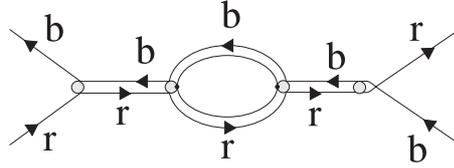
On peut comprendre qualitativement le comportement en N_f ou N_c de ces deux boucles en traitant, en ce qui concerne la couleur, les gluons comme des paires quarks-antiquarks et en utilisant la conservation de la couleur. Considérons l'interaction entre deux quarks (r et b par exemple) :

Boucle de quarks



La couleur étant conservée à chaque vertex, la couleur du quark et de l'antiquark de la boucle est imposée et il n'y a pas de facteur de couleur. Par contre, le gluon ne portant pas de saveur, la boucle de quarks pourra être une boucle $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, \dots$ indépendamment de la saveur des quarks externes ; il y aura donc un facteur N_f explicite.

Boucle de gluons



On utilise de nouveau la conservation de la couleur. Pour fabriquer la boucle de gluons, il faudra ajouter, comme montré sur la figure, une boucle de quark couleur-anticouleur avec une couleur $i = r, j, b$ quelconque. Il y aura donc un facteur N_c explicite.

Il reste, dans la formule (10.3.2), une relique de la renormalisation qui est la présence de cette échelle μ^2 . Pour que cette constante de couplage $\alpha_S(Q^2)$ soit connue de façon absolue, il faut fixer d'une manière ou d'une autre cette échelle. Dans la limite des grands $Q^2 (Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2/c^2)$ ce n'est certainement pas le lagrangien qui la donnera car la masse des quarks devient négligeable si bien que le lagrangien est pratiquement invariant d'échelle. Puisque QCD est la théorie du monde hadronique, l'échelle manquante fera certainement apparaître une taille typique du monde hadronique.

On introduit la quantité :

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp \left(- \frac{4\pi}{\alpha(\mu^2)b_0} \right)$$

Comme on peut le vérifier grâce à (10.3.2) Λ^2 est, par construction, invariant d'échelle c'est-à-dire indépendant de μ^2 . On a par suite :

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})} = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})} \quad (10.3.3)$$

Λ^2 devra être fixée par l'expérience, en suivant l'évolution avec Q^2 de données judicieusement choisies. Une telle analyse conduit à une taille hadronique typique $R_h \sim 1/\Lambda \sim 1 \text{ fm}$. Le nombre de saveurs N_f est le nombre de quarks tels que $m^2 < Q^2$. Lorsque l'on s'approche d'un seuil de production de quarks ($Q^2 \sim m^2$), la formule (10.3.3) n'est plus valable rendant l'analyse conduisant à l'extraction de Λ quelque peu délicate. Les études de diffusion inélastique (voir sous-section suivante) conduisent à :

$$\alpha_S(Q^2 = 100 \text{ GeV}^2) = 0,16$$

Ainsi, dans cette région de grand Q^2 , QCD perturbatif est parfaitement valable. Par contre, à $Q^2 \simeq 4 \text{ GeV}^2/c^2$, α_S est de l'ordre de 0,4 et nous sommes à l'extrême limite du régime perturbatif. Au-dessous de cette valeur de Q^2 , QCD perturbatif perd tout sens. Tout ce que l'on peut dire est que l'interaction

devient extrêmement forte ; c'est la région du confinement ($Q^2 < 1 \text{ GeV}^2/c^2$) où QCD devient une théorie hautement non perturbative que personne ne sait résoudre à l'heure actuelle. Nous discuterons cet aspect brièvement dans le paragraphe suivant.

3-2 Diffusion très inélastique de leptons

a- Généralités et modèles des partons

La diffusion très inélastique de leptons (électrons, muons) a permis de mettre en évidence la structure en quarks des hadrons. Par ailleurs, des analyses détaillées de ce type de processus (que l'on appellera DIS de l'expression anglaise "Deep inelastic scattering") ont ensuite montré que la chromodynamique quantique permettait de rendre compte de l'évolution avec la résolution des distributions de quarks à l'intérieur des hadrons. C'est d'ailleurs un des éléments majeurs permettant de penser que QCD est la bonne théorie régissant le monde hadronique.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à une discussion qualitative concernant le DIS sur un proton. Dans un tel processus, on peut "résoudre" la structure du hadron par échange d'un photon de quadri-impulsion $q^\mu = (q^0, \mathbf{q})$ du genre espace $Q^2 = -q^2 = -q_\mu q^\mu > 0$, l'état hadronique final $|X\rangle$ n'étant pas détecté.

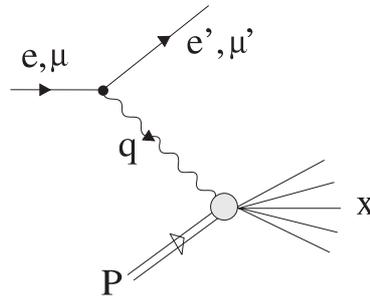


Figure 10.9 : Diffusion très inélastique de lepton (électron, muon) sur un hadron (proton).

La section efficace différentielle de diffusion de l'électron ou du muon se sépare en une partie leptonique exactement calculable, un propagateur de photon et une partie hadronique portant l'information de structure hadronique. Pour un lepton incident d'énergie E et un lepton diffusé dans l'intervalle d'énergie dE' autour de E' et dans l'élément d'angle solide $d\Omega'$ entourant la direction définie par l'angle de diffusion θ , elle vaut

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{(Q^2)^2} \left(\frac{F_2(x, Q^2)}{\nu} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2 \frac{F_1(x, Q^2)}{M} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (10.3.4)$$

où $\alpha = 1/137$ est la constante de structure fine, M la masse du hadron cible (par exemple un proton) et $\nu = E - E'$ est l'énergie dans le référentiel du laboratoire (proton cible au repos) du photon virtuel échangé. L'information hadronique est portée par deux quantités sans dimension et invariantes de Lorentz, F_1 et F_2 , qui elles-mêmes dépendent des deux seuls invariants de Lorentz Q^2 et $P \cdot q$ que l'on peut fabriquer avec la cinématique. On préfère utiliser, outre Q^2 , la variable cinématique de Bjorken :

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (10.3.5)$$

La conservation de l'énergie-impulsion impose :

$$M_X^2 = (P + q)^2 = M^2 + 2P \cdot q - Q^2$$

La masse invariante M_X de l'état final est nécessairement plus grande que la masse M du proton, du fait de la conservation du nombre baryonique, car le proton est le plus léger des baryons. Il en résulte que $Q^2 < 2P \cdot q$, ce qui implique que $x < 1$ pour des raisons cinématiques. Ainsi, toute l'information est portée par deux fonctions de structure :

$$F_1(x, Q^2) \quad \text{et} \quad F_2(x, Q^2) \quad x = Q^2/2P \cdot q < 1$$

Plutôt que Q^2 , il serait d'ailleurs plus adéquat de prendre Q^2/M^2 . Le fait expérimental marquant est que ces fonctions de structure exhibent une propriété remarquable :

$$\text{Si } Q^2 \gg M^2 \quad \text{alors } F(x, Q^2) \simeq F(x) \quad (10.3.6a)$$

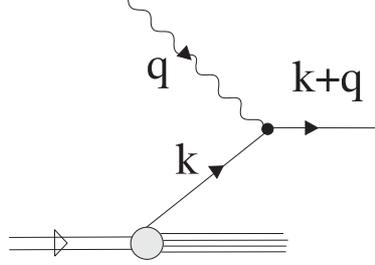
C'est la propriété d'invariance d'échelle ou "scaling" de Bjorken. Cette propriété de quasi indépendance des fonctions de structure vis-à-vis de Q^2 peut s'expliquer phénoménologiquement si l'on admet que le photon interagit avec des objets appelés partons qui sont ponctuels et se meuvent indépendamment les uns des autres. En outre, la relation de Callan-Gross, bien vérifiée expérimentalement

$$\text{Si } Q^2 \gg M^2, \quad \text{alors } F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (10.3.6b)$$

impose que ces partons sont de spin 1/2. Ces résultats expérimentaux constituent une preuve directe et convaincante de la nature composite des hadrons qui sont faits d'objets élémentaires de spin 1/2 qui seront identifiés avec les quarks.

La phénoménologie du modèle des partons permet, en utilisant un ensemble important de données incluant également des processus faibles (diffusion de neutrinos), d'obtenir une image détaillée de la structure en quarks des hadrons (et même des noyaux !). Nous renvoyons le lecteur à des ouvrages ou articles

plus spécialisés et nous nous bornons à quelques propriétés générales. A cet effet, considérons le processus élémentaire d'interaction du photon virtuel avec un quark-parton i présent dans le hadron initial et portant une charge e_i et une impulsion k^μ



La conservation de la masse invariante du quark-parton (que l'on pourra considérer comme nulle à l'échelle Q du processus) impose que :

$$m^2 = 0 = k^2 = (k + q)^2 \Rightarrow Q^2 = 2k \cdot q$$

Il en résulte immédiatement que la variable de Bjorken x doit prendre la valeur

$$x = \frac{k \cdot q}{P \cdot q} = \frac{k_0 \nu - k_3 |\mathbf{q}|}{M \nu}$$

où l'axe noté 3 est l'axe portant l'impulsion \mathbf{q} du photon virtuel. Dans le régime de Bjorken ($Q^2 \gg M^2$) on obtient, le résultat important suivant :

$$x \simeq \frac{k_0 - k_3}{M} = \frac{k_3^*}{P_3^*} = \eta \quad (10.3.7)$$

k_3^* et P_3^* sont les composantes suivant $\hat{\mathbf{q}}$ de l'impulsion du quark et du proton dans le référentiel IMF (IMF de l'anglais Infinite Momentum Frame). Ce référentiel IMF se déplace par rapport au référentiel du laboratoire avec une vitesse tendant vers $c = 1$:

$$\mathbf{v}_{IMF} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{P}{(P^2 + M^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{q}}$$

Dans ce référentiel, l'impulsion du proton est infinie $\mathbf{P}^* = -P\hat{\mathbf{q}} = P_3^*\hat{\mathbf{q}}$, d'où sa dénomination. η est ainsi la fraction d'impulsion du proton portée par le quark-parton dans IMF. La signification de l'équation (10.3.7) est alors la suivante :

Dans la limite de Bjorken ($Q^2 \gg M^2$), le DIS permet de "voir" des quark-partons avec une caractéristique cinématique bien définie telle que la fraction d'impulsion η portée par le quark-parton est égale à la variable cinématique de Bjorken x .

Remarque : Nous avons, selon un usage fréquent, introduit le référentiel du moment infini, la signification de la fraction η y étant plus intuitive. Il importe cependant de garder à l'esprit que ce type d'analyse ne nécessite pas l'introduction de ce référentiel particulier. Cette fraction η peut en effet être définie de façon covariante par :

$$\eta = \frac{k_0 - k_3}{P_0 - P_3} \simeq \frac{k \cdot q}{P \cdot q}$$

On peut montrer que les fonctions de structure sont en fait directement reliées à des distributions de quarks $q_i(x)$ ($i = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$). Avec des notations évidentes, on a par exemple :

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x q_i(x) = x \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(u(x) + \bar{u}(x) \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(d(x) + \bar{d}(x) \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(s(x) + \bar{s}(x) \right) \right] \quad (10.3.8)$$

La présence des charges provient bien sûr de la nature électromagnétique du couplage. Ces distributions de quarks (u, d, s) et d'antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) possèdent de nombreuses propriétés ; citons en quelques unes. La symétrie d'isospin supposée exacte impose par exemple :

$$u_p(x) = d_n(x)$$

La charge 1, le nombre baryonique 1 et l'étrangeté nulle du proton imposent les règles de somme

$$\int_0^1 dx \left(u(x) - \bar{u}(x) \right) = 2, \quad \int_0^1 dx \left(d(x) - \bar{d}(x) \right) = 1, \quad \int_0^1 dx \left(s(x) - \bar{s}(x) \right) = 0$$

signifiant en clair, qu'il y a deux quarks u "nets" (ou deux quarks de valence u), un quark de valence d et pas de quark de valence étrange dans le proton. De façon plus générale, l'analyse de différents processus (diffusion de muons, neutrinos) permet d'obtenir une information précise sur les différentes distributions $u, d, s, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \dots$. Il émerge ainsi une image détaillée de la structure des hadrons en terme de quarks de valence et d'une mer de quark-antiquarks. Mentionnons également que cette analyse permet de révéler (de façon indirecte) la présence des gluons dans les hadrons, bien que ceux-ci ne couplent pas directement aux photons. On trouve en effet expérimentalement que $\int_0^1 dx \sum_i q_i(x) \simeq 0,5$, ce qui montre que les quarks ne portent que la moitié de l'impulsion totale du proton, l'autre moitié devant être fournie par les gluons.

b- Violation de l'invariance d'échelle et QCD perturbatif

Les fonctions de structure mesurées expérimentalement ne présentent pas de dépendance forte en Q^2 pour Q^2 grand, c'est-à-dire dans la limite de Bjorken $Q^2 \gg M^2$; cette propriété est d'ailleurs automatiquement incorporée dans le modèle des partons où le photon se couple avec des partons ponctuels et libres. En d'autres termes, les données nous "disent" que les configurations de quarks de taille $1/Q$, avec Q grand, sont des configurations de quarks libres ou quasi-libres. La théorie sous jacente des interactions entre quarks devra être telle que la constante de couplage effective $\alpha_S(Q^2)$ tende vers zéro lorsque Q^2 tend vers l'infini. Comme on le sait, c'est bien le cas de QCD qui possède la propriété de liberté asymptotique.

En réalité, un examen plus attentif (figure 10.11) montre que les fonctions de structure ont une (faible) dépendance logarithmique en Q^2 . On peut le comprendre qualitativement et quantitativement grâce à QCD perturbatif.

Nous allons reprendre l'argumentation heuristique présentée dans la section 4.1 du chapitre précédent. Si l'on effectue une expérience à une certaine échelle Q_1 , on "voit" des quarks avec une résolution $1/Q_1$. Dans une expérience avec une autre échelle $Q_2 > Q_1$, on voit des quarks avec une meilleure résolution en taille $1/Q_2$. D'après la théorie de la renormalisation, les fluctuations quantiques de tailles comprises entre $1/Q_1$ et $1/Q_2$ qui étaient incluses dans la définition des propriétés (constante de couplage, masse...) des quarks à l'échelle Q_1 seront maintenant traitées comme des corrections radiatives ordinaires, comme illustré sur la figure 10.10 ci-dessous.

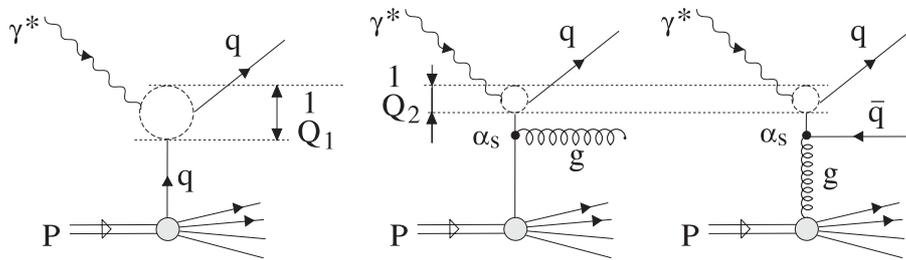


Figure 10.10 : Evolution de la structure en quarks du proton lorsque l'on augmente la résolution.

Ces corrections dépendent comme la constante de couplage α_S de $\ln Q^2$ dans la région asymptotique. Il en résulte donc que les fonctions de structure seront de la forme :

$$F_{1,2} \equiv F_{1,2}(x, \ln Q^2)$$

On montre dans le cadre de QCD perturbatif que l'image et les résultats du modèle des partons demeurent valables à condition de faire le remplacement :

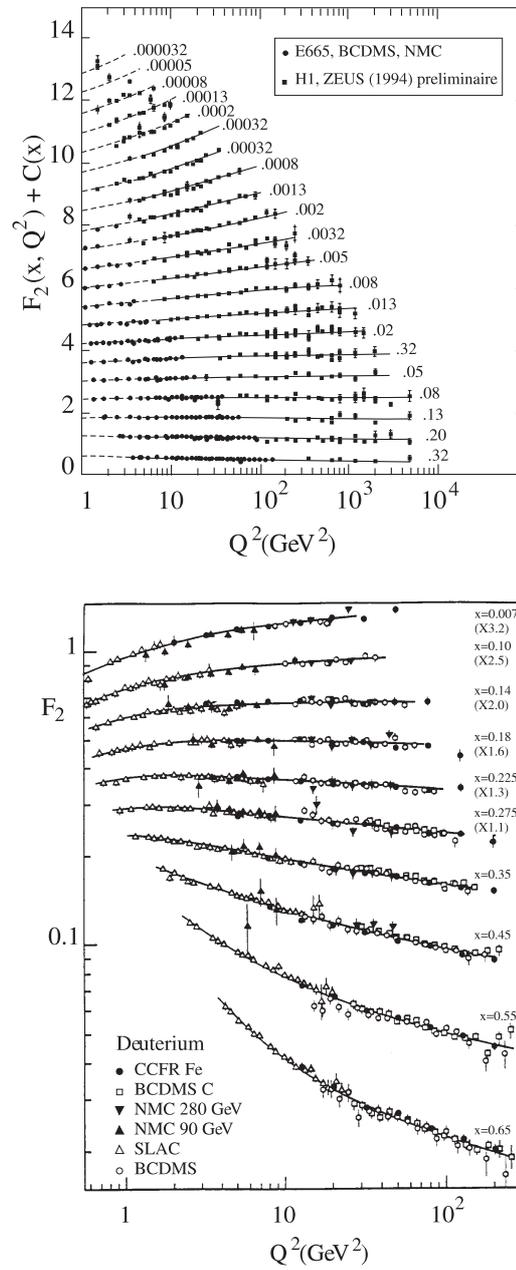


Figure 10.11 : Fonction de structure F_2 en fonction de Q^2 pour différentes valeurs de x .

$$q(x) \rightarrow q(x, \ln Q^2)$$

Ainsi, lorsqu'on sonde le hadron avec une résolution variable Q , on voit une distribution de quarks qui évolue avec $\ln Q^2$. Cette loi d'évolution est gouvernée par les équations d'Altarelli-Parisi que nous ne donnerons pas ici. Cette évolution conduit à un déplacement global des fonctions de distribution vers les petits x lorsque Q^2 augmente. Pour comprendre ce dernier point, considérons un quark portant une fraction x de l'impulsion. Si Q^2 augmente, on va prendre en compte des corrections radiatives du type :

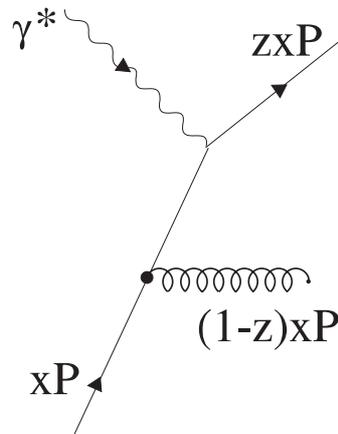


Figure 10.12 : Correction radiative gouvernant l'évolution en Q^2 des distributions de quarks.

Le quark effectivement sondé, compte tenu de ces corrections, portera une fraction z de l'impulsion xP porté par le quark père, la fraction restante étant emportée par le gluon; la distribution des quarks se déplacera par suite vers les petits x .

4- CONFINEMENT

4-1 Le confinement de la couleur : un problème non résolu

Un des enjeux majeurs de la physique actuelle est de montrer que QCD conduit au confinement de la couleur, c'est-à-dire que les seules configurations de quarks et gluons ayant une masse finie se réduisent à des singlets de couleur s'étalant dans une région de taille typique $1fm \sim 1/\Lambda_{QCD}$.

Le confinement, qui est un fait expérimental incontestable, n'a jamais été démontré théoriquement à partir de QCD. La raison est la difficulté à traiter la force entre quarks à longue portée, c'est-à-dire dans une région hautement non perturbative. Le vide de la théorie constitue déjà un "milieu" très complexe car il est constitué de configurations de quarks-antiquarks et gluons compliquées et mal connues. Dans de telles circonstances deux types d'approches sont envisageables.

1/ L'utilisation de simulations numériques de la théorie discrétisée sur réseau. Cette méthode comporte de nombreuses insuffisances (puissance de calcul, taille finie du réseau, etc ...), mais donne des indications nettes en faveur du confinement.

2/ Les modèles ou les théories effectives transposant grâce à des arguments souvent heuristiques, ce que l'on croit être les caractéristiques essentielles de QCD :

- (i) on peut insister sur le confinement des quarks conduisant par exemple au modèle des sacs où les quarks (et les gluons) sont enfermés dans une cavité. Les hadrons sont construits avec des quarks dont les fonctions d'onde correspondent aux modes de cavité de particules de Dirac relativistes.
- (ii) on peut également demander d'incorporer dans des théories effectives les symétries essentielles de QCD et en particulier la symétrie chirale que nous étudierons au paragraphe suivant. On obtient ainsi des modèles où les nucléons sont entourés par un nuage de pions virtuels constamment émis et réabsorbés. On peut également construire des théories effectives où on associe des champs aux hadrons eux-mêmes ce qui permet de rendre compte de leurs interactions. L'exemple le plus achevé est sans doute la théorie des perturbations chirales où on écrit le lagrangien le plus général compatible avec les symétries de QCD comme un développement en termes des dérivées du champ de pion.

Il n'existe cependant pas, à notre connaissance, de théorie effective permettant de rendre compte de façon réellement satisfaisante à la fois du confinement et de la symétrie chirale.

Nous allons discuter ici une image dite diélectrique, ou plus exactement diélectrique, qui repose sur une analogie avec l'électromagnétisme des milieux matériels et fait comprendre l'origine possible du confinement. Les arguments présentés ci-dessous sont simplistes et au mieux qualitatifs.

Dans QED, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les effets de fluctuation du vide font que la charge vue à grande distance n'est pas la charge elle-même, mais une charge corrigée par un effet d'écran. En d'autres termes, si l'on regarde le champ créé par une certaine charge à une distance L de cette

charge, l'effet de polarisation du vide dû aux fluctuations quantiques de taille $\ell < L$, modifie le propagateur du photon, ce qui équivaut à une modification de la charge perçue à la distance L . Nous avons établi dans le chapitre précédent que cette charge diminue avec la distance. La situation est très analogue à l'électromagnétisme des milieux diélectriques. En effet, si l'on place une charge dans un milieu diélectrique, le milieu va se polariser ; il va ainsi se créer une distribution de dipôles qui va avoir tendance à diminuer l'effet du champ exciteur. Macroscopiquement, on introduit la polarisation \mathbf{P} (moment dipolaire par unité de volume) et on montre qu'une telle distribution de dipôles est équivalente à :

$$\text{une distribution volumique de charges : } \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P},$$

$$\text{une distribution surfacique de charges : } \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale sortante au milieu diélectrique.

Les dipôles vont avoir tendance à s'aligner suivant le sens du champ \mathbf{E} . Dans un diélectrique linéaire, homogène et isotrope on a $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$; la susceptibilité χ du milieu est positive et peut en principe être calculée à l'échelle de la physique atomique. Le théorème de Gauss donne alors :

$$\vec{\nabla} \mathbf{E} = \rho_{\text{libre}} - \chi \vec{\nabla} \mathbf{E}$$

Les charges de polarisation vont avoir tendance à diminuer le champ créé par les charges libres. Ainsi, si l'on place une charge q dans le milieu diélectrique, elle va créer un champ à la distance r :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

où $\epsilon = 1 + \chi > 1$ est la constante diélectrique du milieu. Ceci implique qu'à l'échelle macroscopique, les charges sont diminuées, par effet d'écran, par un facteur ϵ qui prend en compte de façon moyenne, la polarisation des molécules du milieu.

Le vide de QCD peut, lui aussi, être considéré comme un milieu complexe caractérisé par la présence de condensats de quarks-antiquarks ou de gluons. Cependant, comme nous l'avons déjà vu, les effets de fluctuation du vide sont opposés car la charge effective augmente avec la distance. Par conséquent, si l'on place dans ce "milieu" une charge de couleur, il va se polariser mais cette fois-ci les dipôles induits vont s'anti-aligner avec le champ exciteur. On introduit un vecteur "polarisation de couleur" \mathbf{P}_c (c est un indice de couleur qui n'interviendra pas explicitement dans la suite), qui va être relié au champ chromo-électrique \mathbf{E}_c ($\mathbf{E}_c = -\vec{\nabla} A_c^0$) par

$$\mathbf{P}_c = \chi \mathbf{E}_c$$

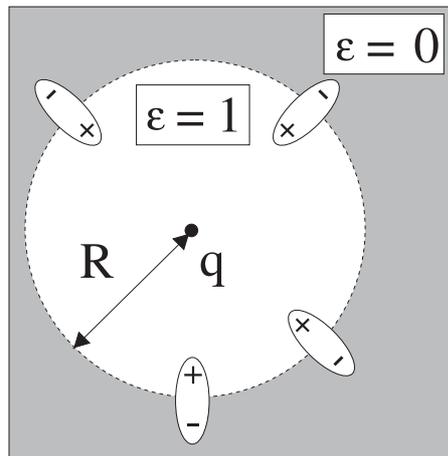
avec cette fois-ci $\chi < 0$. On définit la constante diélectrique de couleur $\epsilon = 1 + \chi$ qui est maintenant plus petite que 1. Le champ créé par une charge de couleur q , placée dans le milieu, sera :

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

A l'échelle macroscopique ($r \sim 1fm$) la charge effective q/ϵ pourra devenir très grande si $\epsilon \ll 1$. Cette constante diélectrique (ou plutôt diaélectrique car $\epsilon < 1$) de couleur caractérisant la théorie à l'échelle hadronique ($L \sim 1fm$) pourrait en principe être calculée à partir de la théorie microscopique (région où s'applique la loi d'échelle de Bjorken) en moyennant de façon appropriée les configurations de quarks et de gluons de courte distance ($\ell < L$). La méthode utilisée est celle du groupe de renormalisation et est très difficile à mettre en œuvre en pratique, malgré quelques tentatives encourageantes. Ceci étant dit, si l'on admet ou si l'on montre que $\epsilon(L = 1fm)$ tend vers zéro, on peut avoir un mécanisme de confinement. Nous allons le voir dans une image très simplifiée et abélienne de QCD où le vide est caractérisé par une constante diélectrique de couleur qui tend vers zéro.

4-2 Un mécanisme de confinement possible

Plaçons une charge de couleur q dans le "milieu" vide de QCD. Les dipôles induits vont s'anti-aligner avec le champ. Ces "dipôles" qui représentent les configurations non perturbatives de quarks et de gluons présentes dans le vide de QCD, vont avoir tendance à être repoussés par la charge q . Il va se créer autour de la charge q un domaine réellement vide, comme indiqué sur la figure ci-dessous, qui peut être identifié avec le vide perturbatif.



Comme le vide physique est l'état fondamental, la formation d'une "bulle" de vide perturbatif dans le vide de QCD coûte de l'énergie. Cette énergie E_V est proportionnelle au volume et si on forme une bulle sphérique de rayon R , on aura

$$E_V = \frac{4}{3} \pi R^3 B$$

où B est une constante phénoménologique appelée parfois "constante du sac". Ce vide perturbatif est bien sûr caractérisé par une constante $\epsilon = 1$. Dans cette version abélienne simpliste, les calculs sont exactement les mêmes qu'en électromagnétisme. Le champ \mathbf{E} s'obtient par utilisation du théorème de Gauss et des conditions de passage en $r = R$:

$$\mathbf{E}_c = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \left(\theta(R-r) + \frac{1}{\epsilon} \theta(r-R) \right)$$

En présence d'une charge ponctuelle, l'énergie chromo-électrique diverge; pour éliminer cette divergence, on soustrait l'énergie perturbative (charge q placée dans le vide perturbatif). On obtient pour l'énergie totale :

$$E_H = E_V + \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{\text{perturbatif}} E^2 d\mathbf{r}$$

Si l'on ne garde que le terme dominant en $1/\epsilon$, on obtient :

$$E_H = \frac{4}{3} \pi R^3 B + \frac{q^2}{8\pi\epsilon R}$$

Le rayon R du domaine est obtenu en minimisant l'énergie, ce qui donne

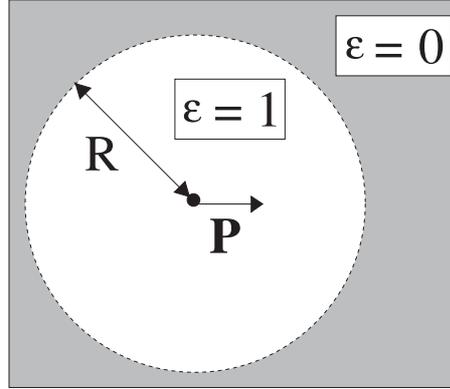
$$R = \left(\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon B} \right)^{1/4} \sim \frac{1}{\epsilon^{1/4}} \rightarrow \infty$$

et l'énergie de ce "hadron" coloré va comme :

$$E_H \sim \frac{1}{\epsilon^{3/4}} \rightarrow \infty$$

Ainsi, si le vide de QCD est assimilable à un milieu avec une constante diélectrique tendant vers zéro, un quark coloré correspond à un mode d'énergie infini, ce qui montre que l'on ne peut observer un objet coloré avec une masse finie.

Nous allons maintenant considérer un dipôle de couleur qui lui est un objet blanc. Ce dipôle de moment \mathbf{p} est placé dans la cavité perturbative ($\epsilon = 1$) de rayon R , elle-même entourée du milieu avec ϵ tendant vers zéro.



En utilisant de nouveau les conditions de passage à la surface ($r = R$), on montre très facilement que les charges de polarisation apparaissant à la surface

- créent à l'intérieur un champ uniforme $\mathbf{E}' = 2 \frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1} \frac{\mathbf{p}}{4\pi R^3}$,
- sont équivalentes en ce qui concerne l'extérieur, à un dipôle placé au centre de la cavité $\mathbf{p}' = -2 \frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1} \mathbf{p}$.

L'énergie de ce "hadron" blanc sera

$$E_H = \frac{4}{3} \pi R^3 B + \int_0^R d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi r^3} + \mathbf{E}' \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi r^3} \right)^2 \right] \\ + \int_R^\infty d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{3(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{4\pi r^3} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi r^3} \right)^2 \right]$$

où l'on a soustrait l'énergie du dipôle dans le vide perturbatif. Lorsque ϵ tend vers zéro, l'énergie chromoélectrique extérieure disparaît ce qui traduit le fait que la couleur est confinée. Dans cette limite, l'énergie chromo-électrique à l'intérieur du hadron devient finie. L'énergie totale de cet objet blanc est :

$$E_H = \frac{4}{3} \pi R^3 B + \frac{p^2}{12\pi R^3}$$

Cette fois-ci, après minimisation, R et par suite E sont finis. Il en résulte ainsi qu'un objet blanc peut avoir une taille et une énergie finie. Bien entendu, l'image précédente est tout à fait irréaliste ; il n'existe pas de mésons constitués d'un dipôle de couleur enfermé dans une cavité sphérique. On peut cependant envisager une situation plus réaliste qui conduit à la notion de tube de flux.

4-3 Tube de flux et corde ; modèle des quarks constituants

On considère un quark lourd (c, b) de charge de couleur q et son antiquark (\bar{c}, \bar{b}) de charge $-q$ placé à une distance L . On suppose que ces quarks sont statiques c'est-à-dire qu'ils sont suffisamment lourds pour que leur dynamique soit gelée. D'après les considérations précédentes, les lignes de champ coloré vont être confinées dans un domaine fini. Ce domaine, qui aura la symétrie cylindrique autour de l'axe reliant les deux quarks, est appelé un tube de flux ou corde.

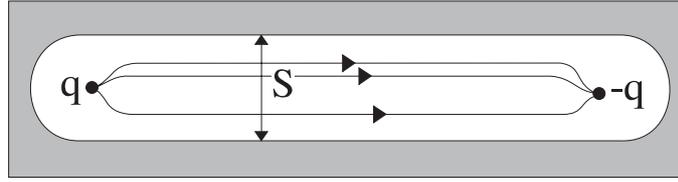


Figure 10.13 : Tube de flux.

D'après le théorème de Gauss, le flux du champ est conservatif à l'intérieur du tube de flux de section S et on a :

$$\phi = ES = q$$

L'énergie totale du système est l'énergie chromo-électrique plus l'énergie nécessaire à fabriquer le domaine, soit :

$$E_H = \frac{1}{2}E^2SL + BSL = \left(\frac{q^2}{2S} + BS \right)L$$

La section du tube de flux s'obtient en minimisant par rapport à S et on obtient après minimisation $S^2 = q^2/2B$, ce qui conduit à :

$$E_H = KL$$

L'énergie d'interaction entre un quark et un antiquark est proportionnelle à la distance. La constante de proportionnalité K est appelée la tension de la corde. Cette quantité fondamentale peut être obtenue par simulation numérique sur un réseau ou bien grâce à la phénoménologie des états $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$:

$$K_{\text{exp}} \simeq (420 \text{ MeV})^2 \sim 0,18 \text{ GeV}^2 \sim 1 \text{ GeV}/fm$$

Dans notre modèle très simple, on a :

$$K = \sqrt{2B} \sqrt{q^2}$$

$\sqrt{q^2}$ doit être quelque peu interprétée. En effet, le couplage élémentaire aux quarks de la charge de couleur est $g\lambda_a/2$ où $g^2 = 4\pi\alpha_S$ est une constante de couplage effective. Par suite, on doit remplacer q^2 par un élément de matrice sur un état singlet de couleur $|q\bar{q}\rangle \sim |j\bar{j} + b\bar{b} + r\bar{r}\rangle$:

$$q^2 \longrightarrow 4\pi\alpha_S \langle q\bar{q} | \sum_{\alpha=1}^8 \left(\frac{\lambda_\alpha}{2}\right)^2 | q\bar{q} \rangle = \frac{16}{3}\pi\alpha_S$$

Un tel système $c\bar{c}$ ou $b\bar{b}$ représente une excellente situation physique pour étudier la dynamique du confinement. On a un quark et un antiquark non relativistes qui interagissent par un potentiel du type :

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r} + Kr$$

La partie à longue distance est régie par la dynamique du confinement via la tension de la corde. La partie à courte distance est, quant à elle, gouvernée par un échange de gluons perturbatifs. Avec divers raffinements tels que l'introduction d'un potentiel spin-spin, provenant de la partie chromomagnétique de l'échange de gluons, on obtient une description extrêmement précise des états $c\bar{c}$ ($\psi, J/\psi\dots$) ou $b\bar{b}$; on parle parfois de l'atome d'hydrogène de l'interaction forte. Cette approche, justifiée en principe pour des hadrons constitués de quarks lourds, permet aussi d'obtenir une spectroscopie excellente des hadrons constitués de quarks légers u, d, s . Dans ce modèle, connu comme le modèle des quarks constituants, des quarks non relativistes de masse $m_u \sim m_d \sim 350$ MeV et $m_s \sim 500$ MeV interagissent avec le potentiel donné plus haut. Il est à noter que ce modèle est conceptuellement très différent des modèles du type sac où des quarks "courant" ($m_u \sim m_d \sim 10$ MeV, $m_s \sim 150$ MeV) sont enfermés dans une boîte (potentiel infini). Le fait peut-être plus suprenant est que deux modèles aussi différents donnent chacun une bonne spectroscopie.

5- SYMETRIE CHIRALE

5-1 Courants vectoriel et axial et interaction électrofaible

a- Courant vectoriel et CVC

Considérons le lagrangien de QCD dans le secteur des quarks légers u et d . On ignore, pour les considérations de symétrie présentées ci-dessous, les champs de gluons qui n'interviennent pas directement car ils sont invariants sous les transformations associées

$$\mathcal{L} = (\bar{\psi}_u, \bar{\psi}_d) \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{m_u - m_d}{2} \bar{\psi}\tau_3\psi \quad (10.5.1)$$

où $m = (m_u + m_d)/2$ est la masse moyenne des quarks légers de l'ordre de 7-8 MeV. Si on oublie la petite violation d'isospin, liée à la différence de masse $m_u - m_d$, ce lagrangien possède une symétrie $SU(2)_V$, c'est-à-dire qu'il est invariant sous la transformation :

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha_i \tau_i/2} \psi \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha_i \tau_i/2} \quad (10.5.2)$$

la sommation sur $i = 1, 2, 3$ étant comme d'habitude sous-entendue. Les courants associés (courant d'isospin) sont :

$$\mathcal{V}_i^\mu(x) = (\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau_i}{2}\psi)(x) \quad (10.5.3)$$

Ces courants se transforment dans une transformation de Lorentz propre ou impropre comme un vrai quadri-vecteur ce qui explique la présence du suffixe V pour la symétrie $SU(2)$ associée. Les charges correspondantes sont :

$$Q^i(t) = \int d\mathbf{r} \left(\psi^\dagger \frac{\tau_i}{2} \psi \right) (\mathbf{r}, t) \equiv I_i(t) \quad (10.5.4)$$

Ces charges presque exactement conservées peuvent être identifiées avec les trois composantes de l'isospin. Si la symétrie est exacte ($m_u = m_d$) le courant est bien sûr conservé ($\partial_\mu \mathcal{V}_i^\mu = 0$) tout comme les charges ($I_i(t) = I_i(0)$). La troisième composante \mathcal{V}_3^μ de ce courant qui correspond à la partie dite isovectorielle du courant électromagnétique (voir ci-dessous) est, quant à elle, toujours conservée.

Les $\mathcal{V}_i^\mu(x)$ appartiennent à un isotriplet vis-à-vis d'une transformation de $SU(2)$. Pour le voir rappelons que, sous une telle transformation, les doublets ψ se transforment comme :

$$\psi \rightarrow U^\dagger \psi U = V \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow U^\dagger \bar{\psi} U = \bar{\psi} V^\dagger \quad (10.5.5)$$

où $U = e^{i\theta_i I_i}$ est l'opérateur transformant les états quantiques et $V = e^{i\theta_i \tau_i/2}$ est une matrice 2×2 agissant sur les vecteurs colonne ψ . Les \mathcal{V}_i^μ se transforment donc suivant :

$$\mathcal{V}_i^\mu \rightarrow U^\dagger \mathcal{V}_i^\mu U = U^\dagger \bar{\psi} U \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} U^\dagger \psi U$$

$$= \bar{\psi} \gamma^\mu \left(V^\dagger \frac{\tau_i}{2} V \right) \psi$$

La matrice V pouvant s'écrire

$$V = \cos \frac{\theta}{2} + i \tau_i \hat{\theta}_i \sin \frac{\theta}{2} \quad \left(\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \hat{\theta}_i = \theta_i / \theta \right)$$

on montre, après un peu d'algèbre et comme dans le chapitre 2, que

$$V^\dagger \tau_i V = \cos \theta (\tau_i - \tau_j \hat{\theta}_j \hat{\theta}_i) - \sin \theta \epsilon_{ijk} \hat{\theta}_k \tau_j + \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \tau_j = R_{ij}^{-1}(\theta) \tau_j \quad (10.5.6)$$

où $R^{-1}(\theta)$ est la matrice rotation (active) ordinaire d'angle $-\theta$ autour de l'axe $\hat{\theta}$ mais agissant dans l'espace d'isospin. Par suite, V_i^μ se transforme comme :

$$\mathcal{V}_i^\mu(x) \rightarrow U^\dagger \mathcal{V}_i^\mu(x) U = R_{ij}^{-1}(\theta) \mathcal{V}_j^\mu(x) \quad (10.5.7)$$

Les $\mathcal{V}_i^\mu(x)$ se transforment donc comme les composantes d'un vecteur ordinaire dans l'espace d'isospin : ils constituent un opérateur isovectoriel. On en déduit les relations de commutation à temps égal :

$$[I_i, \mathcal{V}_j^\mu(x)] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{V}_k^\mu(x) \quad (10.5.8)$$

Il en résulte également que les composantes standard $\mathcal{V}_{1m}^\mu(x)$, définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{11}^\mu(x) &= -\frac{1}{2} (\mathcal{V}_1^\mu + i \mathcal{V}_2^\mu)(x) \\ \mathcal{V}_{10}^\mu(x) &= \mathcal{V}_3^\mu(x) \\ \mathcal{V}_{1-1}^\mu(x) &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{V}_1^\mu - i \mathcal{V}_2^\mu)(x) \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

constituent un isotriplet car ils se transforment comme des états $|II_3\rangle = |1M\rangle$.

Ces courants de Noether (éq. 10.5.3), provenant directement d'une symétrie (presque exacte) des interactions fortes, apparaissent explicitement dans les interactions électromagnétiques et faibles des hadrons. Ainsi, le courant électromagnétique hadronique s'écrit, en se limitant au secteur léger :

$$J_{em}^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{6} + \frac{\tau_3}{2} \right) \psi \quad (10.5.10)$$

On peut se convaincre aisément que, compte-tenu de l'hermiticité de $J_{em}^\mu(x)$, de l'invariance par translation, de la covariance et de la conservation de $J_{em}^\mu(x)$, son élément de matrice entre deux états de nucléon (proton ou neutron) s'écrit avec des notations évidentes ($q = p - p'$)

$$\langle p', n' | J_{em}^\mu(x) | p, n \rangle = e^{i(p'-p)x} \left(F_{p,n}(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu u + \frac{i G_{p,n}(q^2)}{2M} \bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu u \right) \quad (10.5.11)$$

où $F_{p,n}(q^2)$ et $G_{p,n}(q^2)$ sont les facteurs de forme électriques et magnétiques du proton et du neutron qui dépendent de la structure de la fonction d'onde nucléonique. Leurs calculs relèvent de QCD non perturbatif.

La charge du proton (neutron) étant $Q_p = 1$ ($Q_n = 0$), on trouve en intégrant (10.5.11) dans tout l'espace :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \langle p, n | J_{em}^0(\mathbf{r}, t) | p, n \rangle &= Q_{p,n} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) F_{p,n}(0) u_p^\dagger u_p = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) 2E_p F_{p,n}(0) \end{aligned}$$

La première égalité provient directement de la définition de la charge en adoptant une normalisation covariante pour les états ; la seconde provient de l'intégration du deuxième membre de (10.5.11) où l'on a utilisé le fait que $q = 0$ résultant de l'intégration dans l'espace. On obtient ainsi le résultat bien connu : $F_p(0) = 1$ et $F_n(0) = 0$ indiquant que la charge électrique n'est pas modifiée par les interactions fortes. On montre de même que les $G_{p,n}(0)$ sont égaux aux moments magnétiques anormaux du proton et du neutron soit $G_p(0) = K_p = \mu_p - 1 \simeq 1,78$ et $G_n(0) = K_n = \mu_n = -1,91$. Par suite, l'élément de matrice entre deux états de nucléon de la partie isovectorielle du courant électromagnétique sera :

$$\begin{aligned} \langle N' | \mathcal{V}_3^\mu(x) | N \rangle &= \langle N' | \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \psi | N \rangle = e^{i(p'-p)x} \left(\chi_{N'}^\dagger, \frac{(\tau_3^N)}{2} \chi_N \right) \\ &\times \left(F_V(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu u + \frac{iG_V(q^2)}{2M} \bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu u \right) \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

avec $F_V(q^2) = (F_p - F_n)(q^2)$ et $G_V(q^2) = (G_p - G_n)(q^2)$. χ_N et $\chi_{N'}^\dagger$ représentent les isospineurs du nucléon initial et final et (τ_3^N) est un opérateur de Pauli agissant sur les isospineurs de nucléon.

Les composantes $\mathcal{V}_1^\mu(x)$ et $\mathcal{V}_2^\mu(x)$ apparaissent, quant à elles, explicitement dans l'interaction faible. En effet, et en anticipant sur le chapitre 11, dans la limite de basse énergie du modèle standard de l'interaction électrofaible, le lagrangien effectif gouvernant l'interaction faible provenant de l'échange de bosons chargés W^\pm est :

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(J_\lambda^\dagger J^\lambda + J^{\dagger\lambda} J_\lambda \right) \quad (10.5.13a)$$

où G_F est la constante de Fermi ($G_F M_p^2 \sim 10^{-5}$). Le courant faible J^λ se décompose en une partie leptonique J_ℓ^λ

$$J_\ell^\lambda = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \psi_\mu + \dots \quad (10.5.13b)$$

et une partie hadronique J_h^λ . Si on limite aux saveurs légères (quarks u et d), ce courant faible hadronique s'écrit :

$$J_h^\lambda = \cos\theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \psi_d = \cos\theta_c \left[(\mathcal{V}_1^\lambda + i\mathcal{V}_2^\lambda) - (\mathcal{A}_1^\lambda + i\mathcal{A}_2^\lambda) \right] \quad (10.5.13c)$$

L'angle θ_c (parfois incorporé dans la constante de couplage et non pas dans le courant, ceci étant purement conventionnel) est l'angle de Cabibbo ($\cos\theta_c = 0,974$). Sa présence provient de l'existence d'un couplage faible entre le quark u et le quark s (l'interaction faible ne conserve pas l'étrangeté) ; nous reviendrons en détail sur cette question au chapitre 11 . Les courants $\mathcal{V}_{1,2}^\lambda$ coïncident exactement avec les composantes $i = 1, 2$ des courants de Noether vectoriels (éq.10.5.3) de l'interaction forte. Les courants axiaux $\mathcal{A}_{1,2}^\lambda$ pourront également être identifiés avec des courants de Noether d'une autre symétrie de QCD ; nous les étudierons un peu plus loin.

L'amplitude gouvernant la désintégration β du neutron $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ est de la forme

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle e^- \bar{\nu}_e | J_{t\mu}^\dagger | 0 \rangle \langle p | J_h^\mu | n \rangle$$

et mettra donc en jeu l'élément de matrice de $\mathcal{V}_1^\lambda + i\mathcal{V}_2^\lambda$ entre un état de neutron (de quadri-impulsion p) et de proton (de quadri-impulsion p'). Les considérations de covariance seules permettent de l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle p | (\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu)(x) | n \rangle &= e^{i(p'-p)x} \langle p | (\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2)(0) | n \rangle \quad (10.5.14) \\ &= e^{i(p'-p)x} \left(f_1(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu u + i f_2(q^2) \bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu u + f_3(q^2) \bar{u}' q^\mu u \right) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant tirer partie du caractère isovectoriel des courants $\mathcal{V}_i^\mu(x)$. Soient $I_\pm = I_1 \pm iI_2$ les opérateurs qui font augmenter (diminuer) la valeur propre de I_3 d'une unité :

$$I_\pm |IM\rangle = \sqrt{I(I+1) - M(M\pm 1)} |I, M\pm 1\rangle \quad (10.5.15)$$

La relation de commutation (10.5.8) conduit alors à :

$$\left[(\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2)(x), I_- \right] = 2\mathcal{V}_3^\mu(x) \quad (10.5.16)$$

Si de plus, on admet, ce qui est vrai avec une excellente approximation, que le proton et le neutron constituent un doublet d'isospin 1/2, on pourra écrire, d'après (10.5.15) :

$$I_- |p\rangle = |n\rangle \quad \langle p | I_- = 0$$

L'élément de matrice (10.5.14) pourra alors être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \langle p | (\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu)(x) | n \rangle &= \langle p | (\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu(x)) I_- | p \rangle \\ &= \langle p | [(\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu(x)), I_-] | p \rangle \\ &= 2 \langle p | \mathcal{V}_3^\mu(x) | p \rangle \end{aligned}$$

En utilisant (10.5.12), on aboutit ainsi au résultat :

$$\langle p | (\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu)(x) | n \rangle = e^{i(p'-p)x} \left(F_V(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu u + \frac{iG_V(q^2)}{2M} \bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu u \right) \quad (10.5.17)$$

En identifiant avec la forme (10.5.14), on obtient :

$$f_1(q^2) = F_V(q^2), \quad f_2(q^2) = \frac{G_V(q^2)}{2M}, \quad f_3(q^2) = 0$$

La dernière relation $f_3(q^2) = 0$ est en fait une conséquence directe de la conservation du courant. En pratique, les moments transférés sont toujours très petits et le terme de magnétisme faible (terme en $f_2 \sigma_{\mu\nu}$) est une toute petite correction. Le résultat important est que la charge faible définie par $g_V = f_1(0)$ est égale à un ; c'est-à-dire la même que celle apparaissant dans le courant leptonique (éq. 10.5.13b). On peut ainsi en conclure que cette "charge" faible vectorielle n'est pas modifiée par les interactions fortes. Ce fait, extrêmement bien vérifié expérimentalement, est en réalité intimement lié au fait que $SU(2)$ est une symétrie presque exacte des interactions fortes qui elle-même est une conséquence de la conservation du courant $\partial_\mu (\mathcal{V}_1^\mu + i\mathcal{V}_2^\mu)(x) = 0$.

Historiquement, il avait été observé que la désintégration β du neutron était gouvernée, en ce qui concerne la contribution vectorielle, par la même constante de couplage que la désintégration du muon (elles ne diffèrent que par le facteur $\cos \theta_c$ introduit par Cabibbo en 1963). Cette absence de modification de la charge faible par les interactions fortes conduisirent alors Feynman et Gell-Mann en 1958 à postuler que \mathcal{V}_1^μ et \mathcal{V}_2^μ étaient des courants conservés et que $\mathcal{V}_1^\mu \pm i\mathcal{V}_2^\mu$ et \mathcal{V}_3^μ étaient les membres d'un isotriplet de courants vectoriels. Ceci est connu sous le nom d'hypothèse CVC (de l'anglais Conserved Vector Current Hypothesis). Cette suggestion était tout à fait remarquable car elle avait été proposée bien avant la théorie des quarks et la théorie électrofaible. De nos jours, il s'agit d'une conséquence quasi immédiate de la structure du lagrangien électrofaible et de QCD. Ce qui a été dit précédemment peut être étendu à d'autres isomultiplets et même élargi à la symétrie $SU(3)$, de façon à incorporer le secteur étrange, et a conduit à une excellente phénoménologie des interactions faibles, qui inclut aussi la contribution du courant axial que nous allons étudier ci-dessous.

b- Courant axial et PCAC

On considère maintenant la transformation dite axiale des champs de quarks ψ définie par :

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \quad (10.5.18a)$$

La présence de la matrice γ_5 suppose bien sûr que la transformation agit non seulement sur l'indice de saveur mais aussi sur les composantes du spineur de Dirac. Cette matrice de transformation prend la forme développée

$$e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} = \cos \frac{\alpha}{2} + i\tau_i \hat{\alpha}_i \gamma_5 \sin \frac{\alpha}{2} \quad (10.5.18b)$$

avec $\alpha = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$ et $\hat{\alpha}_i = \alpha_i/\alpha$. On notera que, contrairement au cas de la transformation vectorielle, il n'y a pas de changement de signe dans l'argument de l'exponentielle pour la transformation de $\bar{\psi}$; ceci provient du fait que γ_5 anticommute avec γ_0 .

Les trois courants de Noether associés sont

$$\mathcal{A}_i^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \frac{\tau_i}{2} \gamma_5 \psi$$

ce qui donne :

$$\mathcal{A}_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \psi \quad (10.5.19)$$

Ce courant se transforme comme un quadri-vecteur dans une transformation de Lorentz propre. Par contre, sous une réflexion des axes d'espace (voir chapitre 8), la composante de temps change de signe tandis que les composantes d'espace ne changent pas de signe ; ce comportement sous l'opération de parité est exactement l'inverse de celui d'un vrai quadri-vecteur tel que \mathcal{V}_i^μ . Pour cette raison on dit que \mathcal{A}_i^μ est un pseudo-vecteur ou vecteur axial, d'où le nom donné à la transformation (10.5.18).

Tout comme les $\mathcal{V}_i^\mu(x)$, les $\mathcal{A}_i^\mu(x)$ constituent un isotriplet de courants. Ils satisfont également aux relations de commutation :

$$[I_i, \mathcal{A}_j^\mu(x)] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{A}_k^\mu(x) \quad (10.5.20)$$

Les trois charges associées à la transformation axiale sont :

$$Q_5^i(t) = \int d\mathbf{r} \left(\psi^\dagger \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \psi \right) (\mathbf{r}, t) \quad (10.5.21)$$

Sous une telle transformation, le lagrangien devient, en omettant le terme violant la symétrie d'isospin :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi} e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \gamma^\mu e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \psi \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} e^{i\alpha_i \tau_i \gamma_5} \psi \end{aligned}$$

Le terme cinétique est invariant (car γ^μ anticommute avec γ_5) mais le terme de masse n'est pas invariant contrairement à la transformation vectorielle $SU(2)_V$. La conservation du courant axial nécessiterait que les masses de quarks soient toutes nulles ($m_u = m_d = m = 0$) tandis que la conservation du courant vectoriel nécessite seulement qu'elles soient égales entre elles. En utilisant l'équation (4.4.10), on trouve que la divergence du courant axial est :

$$\partial_\mu A_i^\mu = i m \bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi \quad (10.5.22)$$

Du fait de la petitesse de la masse des quarks légers ($m \sim 10$ MeV) par rapport à une échelle hadronique typique, on peut dire que le courant axial est presque conservé. Cette quasi conservation du courant axial a été introduite historiquement sous le nom d'hypothèse PCAC (de l'anglais Partially Conserved Axial Current) bien avant l'introduction des quarks et de la théorie fondamentale des interactions fortes: nous y reviendrons ci-dessous. La charge axiale dépend aussi faiblement du temps :

$$\dot{Q}_5^i(t) = i \left[H, Q_5^i(t) \right] = \int d\mathbf{r} i m \psi^\dagger \gamma_5 \tau_i \psi$$

On en déduit, en utilisant de nouveau les relations d'anticommutations canoniques, que :

$$\left[Q_5^i, [Q_5^j, H] \right] = \delta_{ij} \int d\mathbf{r} m \bar{\psi} \psi \equiv \delta_{ij} H_{\chi SB} \quad (10.5.23)$$

On voit donc que le double commutateur $[Q_5^i, [Q_5^j, H]]$ est égal à la partie de le hamiltonien $H_{\chi SB}$ qui brise explicitement la symétrie axiale ou symétrie chirale (nous justifierons plus loin le terme symétrie chirale). Une mesure de cette brisure explicite est donnée par ce qu'on appelle le commutateur sigma pion-nucléon $\Sigma_{\pi N}$ défini par

$$\delta_{ij} \Sigma_{\pi N} = \langle N | \left[Q_5^i, [Q_5^j, H] \right] | N \rangle = \delta_{ij} \langle N | H_{\chi SB} | N \rangle$$

où $|N\rangle$ est un état de nucléon au repos (normalisé de telle sorte que $\langle N|N\rangle = 1$). La valeur numérique $\Sigma_{\pi N} \sim 40 - 50$ MeV peut être extraite des données de diffusion pion-nucléon grâce à des méthodes qui dépassent le cadre de cet ouvrage. Physiquement, elle représente la différence de masse entre un nucléon physique et un nucléon vivant dans un monde où la symétrie chirale serait exacte. On peut alors conclure que cette symétrie est valable avec une précision de 5%, c'est-à-dire qu'elle est presque aussi bonne que la symétrie d'isospin. Il pourrait sembler *a priori* que ces deux symétries presque exactes des interactions fortes, sont très semblables. Nous verrons qu'elles son réalisées de façons très différentes.

Comme cela a déjà été mentionné, ces courants de Noether axiaux apparaissent eux aussi comme les courants physiques couplés aux bosons W^\pm agents de l'interaction faible (voir éq. 10.5.13).

Considérons la désintégration des pions chargés $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. La partie hadronique de l'amplitude connecte, via le courant hadronique faible J_h^μ , le pion d'impulsion q^μ au vide

$$\langle 0 | J_h^\mu(x) | \pi(q) \rangle \sim \langle 0 | \mathcal{V}^\mu(x) - \mathcal{A}^\mu(x) | \pi(q) \rangle \sim e^{-iqx} q^\mu$$

dont la structure est donnée grâce à l'invariance par translation et la covariance. q^μ étant un quadri-vecteur et le pion un pseudo-scalaire, seul le courant axial peut contribuer. De façon plus précise, on écrira que

$$\langle 0 | (\mathcal{A}_1^\mu \pm i\mathcal{A}_2^\mu)(x) | \pi^\mp(q) \rangle = \mp\sqrt{2} i e^{-iqx} f_\pi q^\mu \quad (10.5.24)$$

où $f_\pi = 94 \text{ MeV}$, appelée constante de désintégration du pion, est une quantité fondamentale associée aux interactions fortes. La structure de cette équation provient de la conservation de charge ($\mathcal{A}_1 \pm i\mathcal{A}_2$ porte une charge \pm) la phase relative provient des propriétés de conjugaison de charge du pion ($C|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle$). Bien entendu, ceci est aussi compatible avec la symétrie d'isospin. Si on suppose la symétrie d'isospin exacte, il est possible d'écrire cette dernière relation sous une forme plus compacte. On introduit à partir des états propres de l'isospin ($|\pi^+\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^-\rangle$) les états "cartésiens" $|\pi_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) par

$$|\pi^\pm\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi_1\rangle \pm i|\pi_2\rangle), \quad |\pi^0\rangle = |\pi_3\rangle$$

de sorte que $|\vec{\pi}\rangle = (|\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle, |\pi_3\rangle)$ se transforme comme un vecteur ordinaire dans l'espace d'isospin. L'équation (10.5.24) devient alors :

$$\langle 0 | \mathcal{A}_i^\mu(x) | \pi_j(q) \rangle = -i \delta_{ij} f_\pi q^\mu e^{-iqx} \quad (10.5.25)$$

Prenons maintenant la divergence de cette équation :

$$\partial_\mu \langle 0 | \mathcal{A}_i^\mu(x) | \pi_j(q) \rangle = \langle 0 | \partial_\mu \mathcal{A}_i^\mu(x) | \pi_j(q) \rangle = -\delta_{ij} f_\pi m_\pi^2 e^{-iqx} \quad (10.5.26)$$

On introduit alors un "champ pionique interpolant" défini par ses composantes cartésiennes

$$\phi_i(x) = -\frac{1}{f_\pi m_\pi^2} \partial_\mu \mathcal{A}_i^\mu(x) \quad (10.5.27)$$

qui tout comme $\mathcal{A}_i^\mu(x)$ ou $\mathcal{V}_i^\mu(x)$ constitue un opérateur isovectoriel.

Le nom "champ pionique" provient du fait que $\phi_i(x)$ est un pseudo-scalaire isotriplet, c'est-à-dire qu'il possède les nombres quantiques du pion $J^P = 0^-, I = 1$. Par ailleurs, en reportant (10.5.27) dans (10.5.26), on peut voir que ses éléments de matrices satisfont à :

$$\langle 0 | \phi_i(x) | \pi_j(q) \rangle = \delta_{ij} e^{iqx} \quad (10.5.28)$$

Ces éléments de matrice sont exactement les éléments de matrice d'un champ isovectoriel canonique élémentaire entre le vide de l'espace de Fock et des états

isovectoriels à une particule de l'espace de Fock. Pour le voir, il suffit de se reporter à la section 3-2 du chapitre 5 et passer de la normalisation discrète à la normalisation covariante.

La relation (10.5.27) est connue sous le nom de relation PCAC. En réalité, cette relation est une simple identité définissant le champ $\phi_i(x)$ qui est un champ quadratique dans les champs de quarks permettant de connecter le vide à un pion ayant lui même une nature composite en $q\bar{q}$. La partie non triviale de PCAC qui permettra d'obtenir des relations entre des quantités physiques observables sera obtenue au prix d'hypothèses supplémentaires. Nous en verrons un exemple ci-dessous : la relation de Goldberger-Treiman. Il se peut, par ailleurs, que la relation PCAC soit satisfaite dans des théories effectives où on associe au pion, considéré comme élémentaire, un champ canonique $\phi_i(x)$. Dans ce cas là, il s'agit d'une propriété non triviale de la théorie effective ; nous en verrons un exemple dans la section consacrée au modèle σ linéaire.

L'élément de matrice de la divergence du courant axial (éq. 10.5.26) est proportionnel à m_π^2 , ce qui entraîne la quasi conservation de ce courant, la masse du pion étant très faible par rapport à toutes les masses hadroniques. Cette masse m_π devrait s'annuler dans la limite de la symétrie axiale exacte mais sa valeur finie provient de la brisure spontanée de la symétrie. Pour introduire ce dernier point, considérons l'élément de matrice de la charge axiale Q_5^i entre le vide et un état de pion :

$$\begin{aligned} \langle 0|Q_5^i(t)|\pi_j(\mathbf{q}) \rangle &= \int d\mathbf{r} \langle 0|\mathcal{A}_i^0(\mathbf{r}, t)|\pi_j(\mathbf{q}) \rangle \\ &= - \int d\mathbf{r} i \delta_{ij} f_\pi e^{-i\omega_q t} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \omega_q \\ &= -i \delta_{ij} f_\pi e^{-im_\pi t} m_\pi (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}) \\ &= -\frac{i}{2} f_\pi e^{-im_\pi t} \langle \pi^i(0)|\pi^j(\mathbf{q}) \rangle \end{aligned}$$

L'amplitude de désintégration faible du pion sur le vide n'étant pas nulle ($f_\pi = 94 \text{ MeV}$), l'action de la charge axiale sur le vide ne l'est pas :

$$Q_5^i|0 \rangle \neq 0$$

Cette propriété est à comparer à l'action sur le vide de la charge vectorielle (isospin) qui, elle, est nulle. La charge axiale du vide n'est pas zéro, ce qui est une manifestation de la brisure spontanée de la symétrie chirale.

c- La relation de Goldberger-Treiman

Revenons à la désintégration β du neutron. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'élément de matrice du courant hadronique faible a également une composante axiale. Compte tenu de l'invariance par translation et de la covariance,

cet élément de matrice peut s'écrire

$$\begin{aligned} \langle p'(p') | (\mathcal{A}_1^\mu + i \mathcal{A}_2^\mu)(x) | n(p) \rangle = & e^{-i(p-p')x} \left(g_1(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu \gamma^5 u \right. \\ & \left. + g_2(q^2) \bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 u + g_3(q^2) \bar{u}' q^\mu \gamma^5 u \right) \end{aligned} \quad (10.5.29a)$$

avec $q = p - p'$ qui reste toujours voisin de zéro ($q \sim M_n - M_p$) du fait de la cinématique. On peut montrer par des considérations de symétrie de charge que le terme en $\bar{u}' \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 u$ doit être éliminé, c'est-à-dire que $g_2(q^2) = 0$. On peut généraliser cet élément de matrice à toutes les composantes du courant axial entre deux états de l'isodoublet de nucléon, en utilisant la symétrie d'isospin :

$$\langle N' | \mathcal{A}_i^\mu(x) | N \rangle = e^{-i(p-p')x} \chi_{N'}^\dagger \frac{\tau_i}{2} \chi_N \left(g_1(q^2) \bar{u}' \gamma^\mu \gamma^5 u + g_3(q^2) \bar{u}' q^\mu \gamma^5 u \right) \quad (10.5.29b)$$

Dans la littérature, on utilise souvent les notations

$$g_A(q^2) = g_1(q^2), \quad g_P(q^2) = g_3(q^2)$$

que nous adopterons également.

Prenons maintenant la divergence du courant axial. L'identité PCAC permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle N' | \partial_\mu \mathcal{A}_i^\mu(x) | N \rangle &= -f_\pi m_\pi^2 \langle N' | \phi_i(x) | N \rangle \\ &= e^{-i(p'-p)x} (-i) \chi_{N'}^\dagger \bar{u}' \left(g_A(q^2) \not{q} + g_P(q^2) q^2 \right) \gamma^5 u \frac{\tau_i}{2} \chi_N \end{aligned}$$

D'après l'équation de Dirac, on a :

$$\bar{u}' \not{q} \gamma^5 u = \bar{u}' (\not{p} - \not{p}') \gamma^5 u = -\bar{u}' \not{p}' \gamma^5 u - \bar{u}' \gamma^5 \not{p} u = -2M \bar{u}' \gamma^5 u$$

On obtient ainsi, grâce à l'invariance par translation appliquée à $\phi_i(x)$:

$$f_\pi m_\pi^2 \langle N' | \phi_i(0) | N \rangle = -i \left(2M g_A(q^2) - q^2 g_P(q^2) \right) \chi_{N'}^\dagger \bar{u}' \gamma^5 \frac{\tau_i}{2} u \chi_N \quad (10.5.30)$$

Pour obtenir des prédictions, il faut posséder une information définie sur l'élément de matrice du champ pionique interpolant. Pour une première orientation, on peut considérer une théorie effective ayant pour champs fondamentaux canoniques, un champ de nucléon $\psi = (\psi_p, \psi_n)$ et un champ de pion $\vec{\phi}$. On pourra écrire la partie pionique du lagrangien effectif sous la forme :

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\phi}^2 - ig \bar{\psi} \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} \psi$$

La structure du lagrangien est déterminée par l'invariance d'isospin ($\bar{\psi} \vec{\tau} \psi$ et $\vec{\phi}$ se transforment comme des isovecteurs donc $\bar{\psi} \vec{\tau} \psi \cdot \vec{\phi}$ est un isoscalaire), et

l'invariance de Lorentz ($\bar{\psi}\gamma_5\psi$ et ϕ sont des pseudoscalaires). La phase i est nécessaire pour assurer l'hermiticité du lagrangien. Le paramètre g caractérise la force du couplage pion-nucléon πNN . L'équation d'Euler-Lagrange appliquée au champ pionique donne :

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\pi^2)\phi_i(x) = -ig\bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi$$

Le champ ψ peut se décomposer en opérateurs de création et destruction de nucléons (protons et nucléons). Si on prend l'élément de matrice de l'équation du mouvement entre deux états de nucléon $|N\rangle$ et $|N'\rangle$, qui sont des états de Fock à une particule, on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\partial^\mu + m_\pi^2) e^{-i(p-p')x} &< N'|\phi_i(0)|N\rangle \\ &= -ig e^{-i(p-p')x} < N'|\bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi|N\rangle \end{aligned}$$

ce qui donne dans ce modèle lagrangien ($q = p - p'$) :

$$< N'|\phi_i(0)|N\rangle = i \frac{g}{q^2 - m_\pi^2} \chi_{N'}^\dagger \bar{u}' \gamma_5 \tau_i u \chi_N$$

On voit ainsi que cet élément de matrice possède une singularité à $q^2 = m_\pi^2$ qui est le pôle du propagateur de pion et dont le résidu est égal à la constante de couplage πNN . Mise à part la présence de la constante g liée au modèle, la structure de cette équation est uniquement donnée par les symétries (isospin, Lorentz).

Guidé par l'exemple précédent, on peut écrire de façon tout à fait générale l'élément de matrice du champ pionique interpolant sous la forme

$$< N'|\phi_i(0)|N\rangle \equiv \frac{ig(q^2)}{q^2 - m_\pi^2} \chi_{N'}^\dagger \bar{u}' \gamma_5 \tau_i u \chi_N \quad (10.5.31)$$

ce qui constitue une définition de la fonction a priori inconnue $g(q^2)$. La dépendance en q^2 provient de l'extension finie des nucléons et des pions contrairement au cas de la théorie effective où ils sont ponctuels. Elle traduit aussi l'existence de singularités, autres que le pôle de pion, affectant l'élément de matrice. *L'hypothèse PCAC consiste à supposer que $g(q^2)$ est une fonction lentement variable pour des q^2 compris entre 0 et m_π^2 .* Elle peut se comprendre qualitativement comme provenant de la petitesse de m_π vis-à-vis de toutes les autres masses hadroniques. Ainsi, les autres singularités affectant $g(q^2)$ apparaissent à des masses invariantes (de l'ordre du GeV) beaucoup plus grandes que m_π .

En identifiant (10.5.30) et (10.5.31), on arrive à une nouvelle identité PCAC :

$$2Mg_A(q^2) - 2f_\pi g(q^2) = q^2 \left(g_p(q^2) - \frac{2f_\pi g(q^2)}{q^2 - m_\pi^2} \right) \quad (10.5.32)$$

Prenant la limite $q^2 = 0$, on obtient un cas particulier de l'identité :

$$Mg_A(0) = f_\pi g(0)$$

La "charge axiale" $g_A = g_A(0) = g_1(0)$ peut être mesurée à partir du temps de vie du neutron.

$$g_A = g_A(0) = 1,25$$

$g(q^2 = 0)$ décrit un vertex πNN où le pion n'est pas sur sa couche de masse. Seule $g(q^2 = m_\pi^2) = g_{\pi NN}$, qui est la constante de couplage pion-nucléon, est une observable dont la valeur peut être obtenue grâce à l'analyse de données de diffusion pion-nucléon ou de photoproduction de pion sur le nucléon :

$$g_{\pi NN} = g(m_\pi^2) = 13,5$$

Si on fait l'hypothèse que $g(q^2)$ varie peu, on arrive à la fameuse relation de Goldberger-Treiman :

$$f_\pi g_{\pi NN} \simeq Mg_A \tag{10.5.33}$$

Cette relation entre observables, hautement non triviale car reliant des quantités intervenant dans l'interaction faible et dans l'interaction forte, est vérifiée avec une précision meilleure que dix pour cent.

Au même niveau d'approximation, on en déduit, grâce à (10.5.32), que :

$$g_p(q^2) \simeq \frac{2f_\pi g}{q^2 - m_\pi^2}$$

On peut alors obtenir une expression explicite du courant axial pour $q^2 < m_\pi^2$

$$\langle N' | A_i^\mu(x) | N \rangle = e^{-iqx} \chi_{N'}^\dagger \bar{u} \left(g_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{2f_\pi g_{\pi NN}}{q^2 - m_\pi^2} q^\mu \gamma_5 \right) u \chi_N \tag{10.5.34}$$

ce qui peut s'interpréter diagrammatiquement (fig. 10.14) :

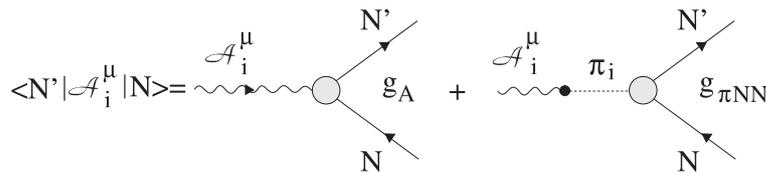


Figure 10.14 : Contributions au courant axial nucléonique.

Le premier terme peut être interprété comme décrivant le couplage direct du courant axial aux quarks du nucléon. La constante de couplage $g_A \neq 1$ montre que la charge axiale est modifiée par les interactions fortes et dépend du détail de la fonction d'onde du nucléon. Le deuxième terme décrit le couplage du

courant axial au champ pionique virtuel constamment émis et réabsorbé par le nucléon. Ce terme souvent appelé pseudoscalaire induit, est associé au principe dit de la dominance du pôle de pion, pour des raisons qui ont été expliquées précédemment.

5-2 La symétrie chirale $SU(2)_R \times SU(2)_L$

A l'aide des relations d'anticommutation canonique des champs, il est très facile d'obtenir l'algèbre des charges vectorielles Q^i et axiales Q_5^i :

$$\begin{aligned} [Q^i, Q^j] &= i \epsilon_{ijk} Q^k \\ [Q_5^i, Q_5^j] &= i \epsilon_{ijk} Q^k \\ [Q^i, Q_5^j] &= i \epsilon_{ijk} Q_5^k \end{aligned} \quad (10.5.35)$$

Ces charges ne forment pas séparément des algèbres fermées. Par contre, les combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} Q_R^i &= \frac{1}{2} (Q^i + Q_5^i) \\ Q_L^i &= \frac{1}{2} (Q^i - Q_5^i) \end{aligned} \quad (10.5.36)$$

forment deux algèbres de Lie de $SU(2)$ indépendantes, soit :

$$\begin{aligned} [Q_R^i, Q_R^j] &= i \epsilon_{ijk} Q_R^k \\ [Q_L^i, Q_L^j] &= i \epsilon_{ijk} Q_L^k \\ [Q_R^i, Q_L^j] &= 0 \end{aligned} \quad (10.5.37)$$

Examinons maintenant quelles sont les transformations associées à ces charges. Pour ce faire, il convient d'introduire les opérateurs P_R et P_L agissant sur les champs de Dirac :

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

L'opérateur (ou plutôt la matrice) P_R (P_L) projette les champs de Dirac sur des états de chiralité droite (R de l'anglais right) ou gauche (L de l'anglais left). Pour des quarks de masse nulle, on peut vérifier directement que la chiralité se confond avec l'hélicité, ce qui est presque réalisé en pratique (m_u, m_d petits). Ceci signifie alors que P_R projette sur des états à hélicité positive (quarks droits) et P_L projette sur des états d'hélicité négative (quarks gauches). On vérifie par

ailleurs très facilement que P_R et P_L obéissent bien aux relations habituelles définissant des opérateurs de projection, à savoir :

$$P_R^2 = P_R \quad P_L^2 = P_L \quad P_R P_L = 0 \quad P_R + P_L = 1$$

On peut décomposer le champ de quark en une composante droite et une composante gauche :

$$\psi = P_R \psi + P_L \psi \equiv \psi_R + \psi_L \quad (10.5.38)$$

Considérons maintenant les opérateurs de transformation des champs associés aux transformations droite et gauche :

$$U_R(\alpha) = e^{i\alpha_i Q_R^i} = e^{i\alpha_i Q^i/2} e^{i\alpha_i Q_5^i/2} \quad (10.5.39a)$$

$$U_L(\alpha) = e^{i\alpha_i Q_L^i} = e^{i\alpha_i Q^i/2} e^{-i\alpha_i Q_5^i/2} \quad (10.5.39b)$$

Les deuxièmes égalités proviennent du fait que $\alpha_i Q^i$ et $\alpha_i Q_5^i$ commutent, d'après les relations de commutation entre Q^i et Q_5^i (éq. 10.5.35).

Sous une transformation droite, le champ de quark se transforme comme

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow U_R^\dagger(\alpha) \psi U_R(\alpha) &= e^{-i\alpha_i Q^i/2} e^{-i\alpha_i Q_5^i/2} \psi e^{i\alpha_i Q_5^i/2} e^{i\alpha_i Q^i/2} \\ &= e^{-i\alpha_i Q^i/2} \left(e^{i\frac{\alpha_i}{2} \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \psi \right) e^{i\alpha_i Q^i/2} \\ &= e^{i\frac{\alpha_i}{2} \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \left(e^{-i\alpha_i Q^i/2} \psi e^{i\alpha_i Q^i/2} \right) \\ &= e^{i\frac{\alpha_i}{2} \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} e^{i\frac{\alpha_i}{2} \frac{\tau_i}{2}} \psi \end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement les lois de transformation des champs sous une transformation axiale et vectorielle. On utilise maintenant le fait que les deux arguments des exponentielles dans la dernière égalité commutent entre eux :

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow U_R^\dagger(\alpha) \psi U_R(\alpha) &= e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} P_R} \psi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\alpha_i \tau_i}{2} \right)^n (P_R)^n \psi \\ &= P_L \psi + e^{i\alpha_i \tau_i/2} P_R \psi \end{aligned}$$

On obtient ainsi séparément la loi de transformation des champs droit et gauche :

$$\begin{aligned} \psi_R = P_R \psi \rightarrow U_R^\dagger(\alpha) \psi_R U_R(\alpha) &= P_R \left(U_R^\dagger(\alpha) \psi U_R(\alpha) \right) \\ &= P_R P_L \psi + e^{i\alpha_i \tau_i/2} P_R^2 \psi \\ &= e^{i\alpha_i \tau_i/2} \psi_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_L = P_L \psi \rightarrow \quad U_R^\dagger(\alpha) \psi_L U_R(\alpha) &= P_L \left(U_R^\dagger(\alpha) \psi U_R(\alpha) \right) \\
&= P_L^2 \psi + e^{i\alpha_i \tau_i / 2} P_L P_R \psi \\
&= \psi_L
\end{aligned}$$

On répète la même démonstration pour une transformation gauche

$$U_L(\theta) = e^{i\theta_i Q_L^i}$$

et on obtient finalement les lois de transformation des champs droits et gauches :

$$\begin{aligned}
U_R^\dagger(\alpha) \psi_R U_R(\alpha) &= e^{i\alpha_i \tau_i / 2} \psi_R \\
U_R^\dagger(\alpha) \psi_L U_R(\alpha) &= \psi_L \\
U_L^\dagger(\theta) \psi_R U_L(\theta) &= \psi_R \\
U_L^\dagger(\theta) \psi_L U_L(\theta) &= e^{i\theta_i \tau_i / 2} \psi_L
\end{aligned} \tag{10.5.40}$$

Sous une transformation droite (gauche), les champs de fermions droits (gauches) se transforment comme une représentation fondamentale de $SU(2)$ appelée $SU(2)_R$ ($SU(2)_L$) tandis que les champs gauches (droits) sont invariants. En d'autres termes, les champs de quarks droits et gauches constituent deux représentations indépendantes de $SU(2)$.

L'invariance de la théorie sous ces transformations droites et gauches est appelée la symétrie chirale $SU(2)_R \times SU(2)_L$. En réalité, cette symétrie n'est pas exacte. Pour le voir, il suffit de réécrire le lagrangien (10.5.1) en faisant apparaître explicitement les champs droits et gauches

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \psi_L \bar{\psi}_R)$$

avec $\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma_0 = (\bar{\psi}) P_L$ et $\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = (\bar{\psi}) P_R$. Les termes cinétiques sont symétriques (invariants) sous $SU(2)_L \times SU(2)_R$ tandis que le terme de masse qui mélange les quarks droits et les quarks gauches brise explicitement la symétrie chirale.

Comme le lecteur l'a probablement déjà noté, la brisure explicite de la symétrie chirale provient directement de la brisure explicite de la symétrie axiale. Pour cette raison, et par abus de langage, une transformation axiale est souvent appelée aussi une transformation chirale. Grâce à la petite masse des quarks, on s'attend à ce que cette symétrie soit excellente.

5-3 Réalisation et brisure spontanée de la symétrie chirale

Si l'on néglige, ce qui est une très bonne première approximation, la masse des quarks, on obtient un monde où la symétrie $SU(2)$ de saveur (ou d'isospin) est doublée. On pourrait par conséquent s'attendre à ce que la structure du spectre hadronique en multiplets d'isospin soit, elle aussi, doublée. Chaque hadron observé devrait avoir un partenaire chirale avec environ la même masse (la différence de masse étant au plus de l'ordre de $10 MeV$) et avec une parité opposée car l'opérateur Q_5^i change la parité. Le spectre hadronique observé ne possède absolument pas cette propriété. Par exemple, le nucléon n'a pas de partenaire chirale ; en effet, le premier "partenaire chirale" ayant les bons nombres quantiques (parité opposée, spin, isospin $1/2$) est la résonance S_{11} dont la masse est de l'ordre de $1,5 GeV$.

Ce paradoxe n'est qu'apparent car une symétrie présente au niveau d'un lagrangien ou d'un hamiltonien ne se traduit pas nécessairement dans le spectre. Si tel est le cas, on dit que la symétrie est spontanément brisée ou réalisée "à la Goldstone". Une telle symétrie est dite "cachée" car on ne la "voit" pas directement au niveau du spectre ; c'est le cas de la symétrie chirale. Il existe dans la nature un nombre considérable de symétries spontanément brisées. Ainsi, l'existence de structures cristallines indique que la symétrie de translation présente au niveau de le hamiltonien est spontanément brisée. On sait également que, en dessous du point de Curie, tous les dipôles d'un matériau ferromagnétique sont alignés ; la symétrie de rotation présente au niveau de l'interaction spin-spin est spontanément brisée.

Une telle réalisation de la symétrie diffère profondément de la réalisation habituelle où la symétrie est manifeste au niveau du spectre. Dans ce dernier cas, on dit que la symétrie est réalisée "à la Wigner". Considérons la symétrie $SU(2)_F$ d'isospin qui, elle, est du type Wigner. Les états $|\alpha IM\rangle$ d'un multiplet (α) de hadrons peuvent se construire à partir du vide, d'isospin nul, grâce à certains opérateurs $\phi_{\alpha IM}$:

$$|\alpha IM\rangle = \phi_{\alpha IM}|0\rangle$$

Au cours d'une transformation d'isospin $U = e^{-i\alpha_i I_i}$, ces opérateurs se transforment comme les états :

$$U\phi_{\alpha IM}U^\dagger = \sum_{M'} \phi_{\alpha IM'} \langle \alpha IM'|U|\alpha IM\rangle$$

On a donc :

$$\begin{aligned} U|\alpha IM\rangle &= U\phi_{\alpha IM}|0\rangle = U\phi_{\alpha IM}U^\dagger U|0\rangle \\ &= \sum_{M'} \phi_{\alpha IM'} U|0\rangle \langle \alpha IM'|U|\alpha IM\rangle \\ &= \sum_{M'} |\alpha IM'\rangle \langle \alpha IM'|U|\alpha IM\rangle \end{aligned}$$

On pourra ainsi, en considérant différentes transformations d'isospin, engendrer tous les états du multiplet irréductible. On a cependant supposé, pour obtenir la dernière égalité, que

$$U|0\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow I_i|0\rangle = 0 \quad (10.5.41)$$

qui caractérise une symétrie de type Wigner car le vide est invariant sous les transformations associées. Le vide possède donc la symétrie.

On pourrait alors engendrer l'hypothétique multiplet partenaire chiral du multiplet, en effectuant des transformations axiales $U_5 = \exp(-i\alpha_i Q_5^i)$:

$$U_5|\alpha IM\rangle = U_5\phi_{\alpha IM} U_5^\dagger U_5|0\rangle$$

Cependant, si la symétrie est spontanément brisée, le vide n'est pas invariant sous les transformations U_5 :

$$U_5|0\rangle \neq |0\rangle \Leftrightarrow Q_5^i|0\rangle \neq 0$$

L'inégalité est mise en évidence par le processus de désintégration du pion, puisque :

$$\langle \pi | Q_5^i | 0 \rangle \neq 0 \quad (10.5.42)$$

Autrement dit, l'action de la charge axiale sur le vide donne des pions. Par suite, l'action des transformations U_5 sur un hadron ne donnera pas des états avec un hadron partenaire chiral mais plutôt un hadron accompagné de pions. On n'engendre donc pas une nouvelle structure de multiplet hadronique.

Bien que la symétrie soit spontanément brisée, la charge axiale commute avec le hamiltonien, tout comme l'opérateur d'isospin I_i . Partant d'un état $|\alpha\rangle$ d'énergie E_α

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$$

on aboutit à :

$$\begin{aligned} H(U|\alpha\rangle) &= UH|\alpha\rangle = E_\alpha(U|\alpha\rangle) \\ H(U_5|\alpha\rangle) &= U_5H|\alpha\rangle = E_\alpha(U_5|\alpha\rangle) \end{aligned}$$

La première égalité signifie simplement que les membres d'un multiplet d'isospin sont dégénérés. Par contre, la deuxième égalité signifie que l'énergie de l'état transformé (hadron + pion) à la même énergie que le hadron initial. Il en résulte nécessairement que, dans la limite où la symétrie chirale est exacte au niveau du lagrangien, le pion doit avoir une masse nulle. Il s'agit en fait un résultat très général, connu sous le nom de théorème de Goldstone. Ce théorème stipule que, à toute symétrie exacte spontanément brisée, correspond un boson de Goldstone de masse nulle.

5-4 Le théorème de Goldstone

On se place de nouveau dans le cas où la symétrie est exacte au niveau du lagrangien ($m = 0$). On considère l'opérateur "pionique" ϕ_j pris au point $x = 0$ et défini par

$$\phi_j(0) = \left(\bar{\psi} \gamma_5 \frac{\tau_j}{2} \psi \right) (0)$$

et l'élément de matrice sur le vide :

$$\langle 0 | [Q_5^i(t), \phi_j(0)] | 0 \rangle$$

Si la symétrie chirale est exacte, $Q_5^i(t)$ est indépendant du temps ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt} \langle 0 | [Q_5^i(t), \phi_j(0)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\dot{Q}_5^i(t), \phi_j(0)] | 0 \rangle = 0$$

Il en résulte, en calculant explicitement le commutateur à $t = 0$, que

$$\begin{aligned} \langle 0 | [Q_5^i(t), \phi_j(0)] | 0 \rangle &= \langle 0 | [Q_5^i(0), \phi_j(0)] | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \bar{\psi} \psi(0) | 0 \rangle \delta_{ij} \end{aligned}$$

où on a utilisé dans le calcul du commutateur à temps égal $\langle 0 | [Q_5^i(0), \phi_j(0)] | 0 \rangle$ les relations d'anticommutation canoniques (éq. 5.4.13) entre champs de quark. Par ailleurs, en insérant une base complète d'états propres $|n\rangle$ et en utilisant l'invariance par translation, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle 0 | [Q_5^i(t), \phi_j(0)] | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | Q_5^i(t) | n \rangle \langle n | \phi_j(0) | 0 \rangle \\ &\quad - \langle 0 | \phi_j(0) | n \rangle \langle n | Q_5^i(t) | 0 \rangle \\ &= \sum_n e^{-iE_n t} \langle 0 | Q_5^i(0) | n \rangle \langle n | \phi_j(0) | 0 \rangle \\ &\quad - e^{iE_n t} \langle 0 | \phi_j(0) | n \rangle \langle n | Q_5^i(0) | 0 \rangle \end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-iE_n t} \langle 0 | Q_5^i(0) | n \rangle \langle n | \phi_j(0) | 0 \rangle - e^{iE_n t} \langle 0 | \phi_j(0) | n \rangle \langle n | Q_5^i(0) | 0 \rangle \\ = -\frac{1}{2} \langle 0 | \bar{\psi} \psi(0) | 0 \rangle \delta_{ij} = -\frac{1}{2} \langle 0 | \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R | 0 \rangle \delta_{ij} \end{aligned} \quad (10.5.43)$$

L'opérateur $\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$ apparaissant dans le membre de droite mélange les quarks droits et les quarks gauches. Si la symétrie chirale était réalisée "à la Wigner", son élément de matrice sur le vide symétrique serait nul. On ne pourrait en effet imaginer de mélange entre quarks droits et quarks gauches car

ceux-ci vivraient dans deux “mondes” indépendants l’un de l’autre. Si le vide ne possède pas la symétrie, cet élément de matrice n’a aucune raison d’être nul :

$$\frac{1}{2} \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \bar{u} u + \bar{d} d | 0 \rangle \neq 0$$

Cette quantité appelée condensat de quark (le facteur 1/2 est purement conventionnel) constitue le paramètre d’ordre associé à la brisure spontanée de la symétrie chirale. Il s’agit d’un paramètre fondamental de QCD. Son calcul (ou sa simulation numérique sur un réseau) requiert une connaissance détaillée des configurations de quarks et de gluons présentes dans le vide. Ceci relève bien entendu de QCD non perturbatif.

Le premier terme de (10.5.43) est alors non nul et également indépendant du temps. L’énergie E_n des états saturant la relation de fermeture doit par suite être nulle. Il existe donc des états d’énergie nulle $|n\rangle$ tels que :

$$\langle n | Q_5^j(0) | 0 \rangle \neq 0$$

$\phi_j(0)$ étant un opérateur isovectoriel et pseudoscalaire, l’état $|n\rangle$ d’énergie nulle est nécessairement un état $J^P = 0^-, I = 1$, c’est-à-dire qu’il porte les nombres quantiques du pion. Les états $|n\rangle$ peuvent alors être identifiés avec des pions au repos de masse nulle. Ainsi, dans la limite de la symétrie chirale exacte, le pion a une masse nulle et doit être vu comme le boson de Goldstone associé à la brisure spontanée de la symétrie chirale. Cependant, à cause de la petite brisure explicite de la symétrie, le pion acquerra une masse non nulle ($m_\pi \simeq 140$ MeV), mais néanmoins très petite par rapport aux autres hadrons.

5-5 La relation de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR)

On ne suppose plus que la symétrie chirale est exacte au niveau du lagrangien. Nous allons établir une relation au premier ordre permettant de relier m_π^2 à m_q . Pour ce faire, on part du double commutateur 10.5.23, dont on prend l’élément de matrice sur le vide de QCD :

$$\langle 0 | [Q_5^i(0), [Q_5^j(0), H]] | 0 \rangle = \int d\mathbf{r} m \langle 0 | (\bar{u} u + \bar{d} d) | 0 \rangle \delta_{ij}$$

On insère une base complète d’états propres $|n\rangle$ d’énergie E_n dans le membre de gauche. On obtient la règle de somme :

$$\sum_n 2E_n |\langle n | Q_5^i(0) | 0 \rangle|^2 = - \int d\mathbf{r} m \langle 0 | (\bar{u} u + \bar{d} d) | 0 \rangle \quad (10.5.44)$$

On s’attend, d’après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, à ce que la contribution principale à la règle de somme vienne des états à un pion. Pour

des états normalisés à 1 dans une boîte de volume V , on a alors

$$\int \frac{V d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} 2\omega_q \left| \left(\frac{1}{2\omega_q V} \right)^{1/2} (-if_\pi \omega_q \delta_{\mathbf{q},0}) \right|^2 = -V \frac{m_u + m_d}{2} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle$$

ce qui donne la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner :

$$\frac{m_u + m_d}{2} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -m_\pi^2 f_\pi^2 \quad (10.5.45)$$

Cette relation valable au plus bas ordre en m_π^2 est particulièrement intéressante car elle relie les grandeurs caractérisant la brisure de la symétrie chirale au niveau microscopique (quarks) et au niveau macroscopique (hadrons)

- 1) au niveau des quarks, la brisure *explicite* de la symétrie chirale est caractérisée par la masse des quarks ; ceci se traduit au niveau hadronique par la petitesse de la masse du pion $m_\pi^2 \sim m$
- 2) au niveau des quarks, la brisure *spontanée* de la symétrie chirale est caractérisée par le condensat de quarks légers $\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle / 2$ qui mélange les quarks droits et gauches. Au niveau hadronique, le paramètre d'ordre correspondant est la constante de désintégration du pion f_π .

5-6 Le modèle σ linéaire

a- Construction d'une théorie effective possédant la symétrie chirale

Le modèle σ linéaire que nous allons présenter ne reflète que très sommairement certains aspects du monde hadronique mais le but de cette section est d'illustrer concrètement les méthodes permettant de construire une théorie effective de hadrons (nucléons, pions) qui reproduise les propriétés de symétrie de QCD. On associe à chaque hadron un champ canonique. On introduit tout d'abord un isodoublet de champs de nucléons, qui sont des spineurs de Dirac $\psi_p(x)$ et $\psi_n(x)$:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad \bar{\psi}(x) = \left(\bar{\psi}_p(x), \bar{\psi}_n(x) \right)$$

Vis-à-vis des transformations de $SU(2)$, le doublet de nucléons se comporte comme le doublet de quarks (ψ_u, ψ_d) . Les lois de transformations pourront être directement transposées.

Transformation vectorielle :

$$\psi \rightarrow V(\alpha)\psi \quad \text{avec} \quad V(\alpha) = e^{i\alpha_i \tau_i / 2} \quad (10.5.46a)$$

Transformation axiale :

$$\psi \rightarrow V_5(\alpha)\psi \quad \text{avec} \quad V_5(\alpha) = e^{i\alpha_i \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} \quad (10.5.46b)$$

Transformation $SU(2)_R$:

$$\psi_R \rightarrow V_R(\alpha)\psi_R \quad \text{et} \quad \psi_L \rightarrow \psi_L \quad \text{avec} \quad V_R(\alpha) = e^{i\alpha_i \tau_i/2} \quad (10.5.46c)$$

Transformation $SU(2)_L$:

$$\psi_L \rightarrow V_L(\alpha)\psi_L \quad \text{et} \quad \psi_R \rightarrow \psi_R \quad \text{avec} \quad V_L(\alpha) = e^{i\alpha_i \tau_i/2} \quad (10.5.46d)$$

où les τ_i sont les matrices de Pauli agissant sur le doublet de nucléons. ψ_R et ψ_L sont les champs droits et gauches : $\psi_{R,L} = (1 \pm \gamma_5)\psi/2$. Si l'on désire construire une théorie effective de nucléons, il pourrait sembler naturel de partir d'un lagrangien de nucléons libres :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - M_N\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - M_N(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$$

Cependant, la masse élevée du nucléon $M_N = 940$ MeV, entraîne une très forte violation de la symétrie chirale. On doit donc exclure un terme de masse de ce type. On va essayer un autre terme et effectuer le remplacement

$$\mathcal{L}_M = -M_N(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) \rightarrow \mathcal{L}_M = -(\bar{\psi}_L W(x)\psi_R + \bar{\psi}_R W^\dagger(x)\psi_L)$$

où W est une certaine matrice 2×2 . Pour que ce lagrangien possède la symétrie chirale il suffit que la loi de transformation de W soit telle qu'elle compense la transformation des $\psi_{L,R}$ au cours d'une transformation de $SU(2)_R \times SU(2)_L$: on doit ainsi avoir :

$$W \rightarrow V_L W V_R^\dagger \quad (10.5.47a)$$

$$W^\dagger \rightarrow V_R W^\dagger V_L^\dagger \quad (10.5.47b)$$

On paramétrise cette matrice W à l'aide de 4 champs réels $\sigma(x)$ et $\vec{\pi}(x) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)(x)$

$$W(x) = g[\sigma(x) + i\tau_i\pi_i(x)] \quad (10.5.47c)$$

où g est une constante. Le lagrangien \mathcal{L}_M peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -g \left(\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})P_R \psi + \bar{\psi}(\sigma - i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})P_L \psi \right) \\ &= -g \bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)\psi \end{aligned}$$

L'invariance d'isospin et l'invariance de Lorentz imposent que :

$-\sigma(x)$ est un champ scalaire isoscalaire,

$-\vec{\pi}(x)$ est un champ pseudoscalaire isovectoriel. On notera ainsi que $\vec{\pi}(x)$ possède les nombres quantiques du pion. On l'identifiera plus loin avec un champ canonique associé au pion.

Il reste maintenant à donner un contenu dynamique aux champs $\vec{\pi}$ et σ par adjonction d'un terme d'énergie cinétique et d'un terme potentiel invariant. De façon évidente, le terme d'énergie cinétique sera

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{4} \text{tr}(\partial_\mu W \partial^\mu W^\dagger) = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i$$

qui est manifestement invariant. Le terme potentiel invariant pourra être construit à partir de :

$$\frac{1}{2} \text{tr}(WW^\dagger) = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$$

Le lagrangien du modèle sera ainsi pris sous la forme :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - g \bar{\psi} (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - V(\sigma, \vec{\pi}) \quad (10.5.48a)$$

On choisira pour $V(\sigma, \vec{\pi})$ une forme limitée à :

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - c \sigma \quad (10.5.48b)$$

Le premier terme, qui est invariant, dépend de deux paramètres λ et v^2 . Pour des raisons de stabilité, λ est toujours positif. Nous avons également ajouté un (petit) terme dépendant du (petit) paramètre c , qui brise explicitement la symétrie chirale. Bien entendu, on aurait pu ajouter d'autres termes à ce potentiel, le choix présent étant simplement guidé par la simplicité. Néanmoins, comme nous allons le voir, ce simple potentiel illustrera de façon concrète le mécanisme de brisure spontanée.

b- Courant vectoriel et axial

Au cours d'une transformation vectorielle, on déduit de l'invariance de \mathcal{L}_M :

$$\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5 \rightarrow V(\alpha) (\sigma + i \vec{\tau} \cdot i \vec{\pi} \gamma_5) V^\dagger(\alpha)$$

Le lecteur vérifiera que ceci conduit à

$$\sigma \rightarrow \sigma \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} \cdot \hat{\alpha} \hat{\alpha} + \cos \alpha (\vec{\pi} - \vec{\pi} \cdot \hat{\alpha} \hat{\alpha}) - \sin \alpha (\hat{\alpha} \times \vec{\pi})$$

ce qui confirme que σ est un isoscalaire et $\vec{\pi}$ un isovecteur.

Le courant \mathcal{V}_i^μ correspondant est (à vérifier à titre d'exercice) :

$$\mathcal{V}_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \psi + \epsilon_{ijk} \partial^\mu \pi_j \pi_k \quad (10.5.49)$$

Il est exactement conservé car l'isospin est une symétrie exacte du lagrangien.

Au cours d'une transformation axiale, on déduit de l'invariance de \mathcal{L}_M que :

$$(\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) \rightarrow V_5(\alpha) (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) V_5^\dagger(\alpha)$$

Le lecteur vérifiera que ceci conduit à :

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma \cos \alpha + \vec{\pi} \cdot \hat{\alpha} \sin \alpha \quad (10.5.50a)$$

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}' = \vec{\pi} - \vec{\pi} \cdot \hat{\alpha} \hat{\alpha} - \sigma \hat{\alpha} \sin \alpha + \vec{\pi} \cdot \hat{\alpha} \hat{\alpha} \cos \alpha \quad (10.5.50b)$$

le courant axial est (à vérifier à titre d'exercice) :

$$\mathcal{A}_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_i}{2} \psi + \sigma \partial^\mu \pi_i - \pi_i \partial^\mu \sigma \quad (10.5.51)$$

Il n'est pas exactement conservé si $c \neq 0$; nous y reviendrons un peu plus loin. Dans la version quantifiée du modèle, ceci conduit, d'après (5.2.12, 5.2.13) aux relations de commutation :

$$\sigma' = e^{-i\alpha_i Q_5^i} \sigma e^{i\alpha_i Q_5^i} \implies [Q_5^i, \sigma] = i\pi_i \quad (10.5.52a)$$

$$\pi_i' = e^{-i\alpha_i Q_5^i} \pi_i e^{i\alpha_i Q_5^i} \implies [Q_5^j, \pi_i] = -i\delta_{ij} \sigma \quad (10.5.52b)$$

c- Brisure spontanée de la symétrie chirale

Nous allons tout d'abord supposer que la symétrie chirale est exacte, soit $c = 0$. L'état de vide décrivant la configuration fondamentale est obtenue en minimisant le potentiel :

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2$$

Si $v^2 < 0$

Dans ce cas, le minimum est obtenu si $\sigma^2 + \pi^2 = 0$ soit $\sigma = 0$ et $\vec{\pi} = 0$. Quantiquement, cela se traduit par :

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | \pi_i | 0 \rangle = 0$$

Le vide possède la symétrie qui est donc réalisée "à la Wigner" et le nucléon a une masse nulle $M_N = 0$; la symétrie se manifeste de façon explicite par la présence d'un multiplet $(\sigma, \vec{\pi})$ de même masse :

$$m_\sigma = m_\pi = \sqrt{-\lambda v^2}$$

Dans cette option le modèle σ linéaire n'a aucun rapport avec la réalité.

Si $v^2 > 0$

Le potentiel présente alors une forme typique dite de “chapeau mexicain”.

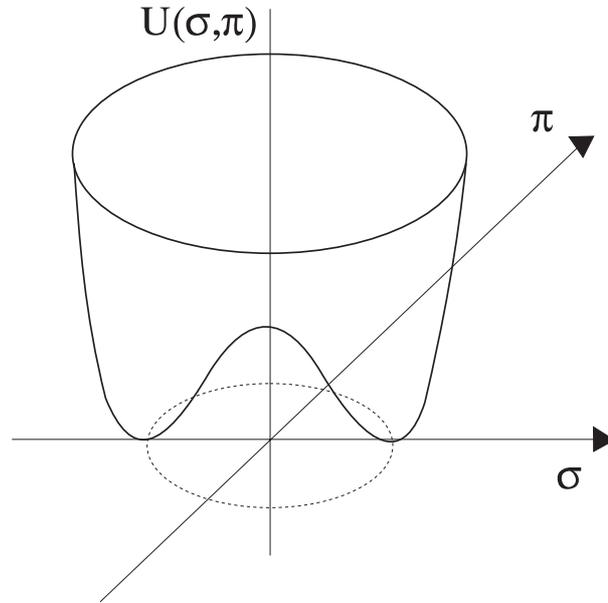


Figure 10.15 : Le potentiel de “chapeau mexicain”.

$\sigma = 0 \vec{\pi} = 0$ n'est plus un minimum mais un maximum. La configuration fondamentale est obtenue le long du “cercle chirale”

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2$$

et le vide est infiniment dégénéré. Soit $|0\rangle$ l'état particulier tel que :

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = v \quad \langle 0|\pi_i|0\rangle = 0 \quad (10.5.53)$$

Ce vide n'est manifestement pas invariant chirale car

$$Q_5^i|0\rangle \neq 0$$

et la symétrie chirale est spontanément brisée. Les configurations dégénérées peuvent être obtenues par une rotation chirale d'angle α qui amène le système dans la direction \hat{a} sur le cercle chirale :

$$|\alpha\rangle = e^{i\alpha_i Q_5^i}|0\rangle$$

Sur cet état, on a en utilisant (10.5.52) et (10.5.50) :

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \sigma | \alpha \rangle &= \langle 0 | e^{-i\alpha_i Q_5^i} \sigma e^{i\alpha_i Q_5^i} | 0 \rangle = v \cos \alpha \\ \langle \alpha | \pi_i | \alpha \rangle &= \langle 0 | e^{-i\alpha_i Q_5^i} \pi_i e^{i\alpha_i Q_5^i} | 0 \rangle = -v \hat{\alpha}_i \sin \alpha\end{aligned}$$

On pourrait, pour construire le spectre de particules, partir de n'importe quel état $|\alpha\rangle$; aucune observable physique ne dépendra du choix de $|\alpha\rangle$. Cependant, il est beaucoup plus judicieux de construire le spectre sur l'état $|0\rangle$ correspondant à $\alpha = 0$, car lui seul a une parité et un isospin ($I = 0$) bien définis. Pour obtenir le spectre de particules, on doit considérer les oscillations autour du vide caractérisé par $\langle \sigma \rangle = v$ et $\langle \pi \rangle = 0$. Pour cette raison, on introduit un champ fluctuant s :

$$s = \sigma - \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sigma - v$$

On effectue donc le changement de variable $\sigma = s + v$, ce qui permet de réécrire le lagrangien sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - gv\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) s^2 \\ & - \lambda v s (s^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (s^2 + \vec{\pi}^2)^2\end{aligned}$$

Le spectre des particules est immédiatement obtenu :

$$m_\pi^2 = 0 \qquad m_\sigma^2 = 2\lambda v^2 \qquad M_N = gv$$

On obtient, en accord avec le théorème de Goldstone, une particule de masse nulle (le pion) et le nucléon acquiert une masse finie.

d- Détermination des paramètres

Nous allons maintenant fixer les paramètres de façon à ce que la théorie effective constitue une "copie convenable" des propriétés de la théorie fondamentale sous-jacente, QCD. Comme il y a une brisure explicite de la symétrie chirale, on incorpore le terme $\mathcal{L}' = -c\sigma$. La configuration fondamentale sera obtenue en minimisant le potentiel :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\vec{\sigma}, \vec{\pi})}{\partial \vec{\pi}} &= \lambda \vec{\pi} (\sigma^2 + \pi^2 - v^2) = 0 \\ \frac{\partial V(\vec{\sigma}, \pi)}{\partial \sigma} &= \lambda \sigma (\sigma^2 + \pi^2 - v^2) - c = 0\end{aligned}$$

La solution est donnée par $\langle \pi_i \rangle = \langle 0 | \pi_i | 0 \rangle = 0$ et $\langle \sigma \rangle = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle$ solution de :

$$\lambda \langle \sigma \rangle (\langle \sigma \rangle^2 - v^2) - c = 0 \qquad (10.5.54)$$

On notera que, en présence du terme de brisure, la “direction” $\alpha = 0$ est fixée. Ceci vient du fait que $\mathcal{L}' = -c\sigma'$ joue le rôle du champ magnétique extérieur en ferromagnétisme qui fixe la direction de la magnétisation.

Pour fixer $\langle \sigma \rangle$, nous allons faire appel à la phénoménologie et imposer

$$\langle 0 | \mathcal{A}_i^\mu(x) | \pi_i(q) \rangle = -\frac{if_\pi}{\sqrt{2\omega_q V}} q^\mu e^{-iqx}$$

qui n'est autre que l'équation (10.5.25) mais pour des états de pion normalisés à un dans une grande boîte de volume V . La seule composante du courant axial contribuant à l'élément de matrice précédent est $\sigma \partial^\mu \pi_i$. On développe le champ du pion en modes propres, soit

$$\pi_i(x) = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2\omega_q V} \right)^{1/2} \left(a_{i\mathbf{q}} e^{-iqx} + a_{i\mathbf{q}}^\dagger e^{iqx} \right)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{A}_i^\mu(x) | \pi_i(q) \rangle &= \sum_{\mathbf{q}'} \left(\frac{1}{2\omega_{q'} V} \right)^{1/2} e^{-iq'x} \langle 0 | (-iq'^\mu) \sigma a_{i\mathbf{q}} | \pi_i(q) \rangle \\ &= -\frac{i \langle 0 | \sigma | 0 \rangle}{\sqrt{2\omega_q V}} q^\mu e^{-iqx} \end{aligned}$$

On est ainsi amenés à identifier $\langle \sigma \rangle$ avec la constante de désintégration du pion :

$$\langle \sigma \rangle = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = f_\pi \quad (10.5.55)$$

Remarque: On aurait aussi bien pu, pour obtenir ce résultat, partir de la relation $\langle 0 | [Q_5^i, \pi_i] | 0 \rangle = -i \langle 0 | \sigma | 0 \rangle$ et saturer le commutateur avec des états de pion.

Nous allons maintenant imposer l'égalité de la valeurs moyenne du terme de brisure de le hamiltonien dans le modèle σ et dans QCD

$$-\langle 0 | c\sigma | 0 \rangle = \langle 0(QCD) | m_q (\bar{\psi}_u \psi_u + \bar{\psi}_d \psi_d) | 0(QCD) \rangle$$

ce qui donne, en utilisant la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner :

$$c \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = c f_\pi = f_\pi^2 m_\pi^2$$

On en déduit :

$$c = f_\pi m_\pi^2 \quad (10.5.56)$$

Reportant ce dernier résultat dans l'équation (10.5.54), on obtient une relation entre λ et v^2 , soit :

$$v^2 = f_\pi^2 - \frac{m_\pi^2}{\lambda}$$

En prenant une transformation axiale infinitésimale, on peut obtenir la divergence du courant axial :

$$\alpha_i \partial_\mu \mathcal{A}_i^\mu = -\delta \mathcal{L}' = -c \delta \sigma = -f_\pi m_\pi^2 \pi^i \alpha_i$$

et la relation PCAC est vérifiée au niveau opératoriel :

$$\partial_\mu \mathcal{A}_i^\mu = -f_\pi m_\pi^2 \pi_i \quad (10.5.57)$$

De nouveau le spectre des particules peut être obtenu en introduisant le champ fluctuant $s = \sigma - \langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \sigma - f_\pi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - g f_\pi \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i - \frac{1}{2} \frac{c}{f_\pi} \pi^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu s \partial^\mu s - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{f_\pi} + 2\lambda f_\pi^2 \right) s^2 \\ & - \frac{1}{2} \bar{\psi} (s + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \psi - \lambda f_\pi s (s^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (s^2 + \vec{\pi}^2) \end{aligned} \quad (10.5.58)$$

Le spectre des particules est ainsi :

$$m_\pi^2 = \frac{c}{f_\pi}, \quad m_\sigma^2 = m_\pi^2 + 2\lambda f_\pi^2, \quad M_N = g f_\pi \quad (10.5.59)$$

g pouvant être identifié avec la constante de couplage πNN , la dernière relation n'est autre que la relation de Goldberger-Treiman obtenue avec $g_A = 1$, ce qui est un défaut du modèle, au moins dans cette version la plus simple. On trouve également que la masse du pion est reliée au petit paramètre de brisure c . Le dernier paramètre restant est λ qui fixe la masse du σ "partenaire chirale" du pion. Ce modèle a, en fait, été "inventé" dans les années 60, c'est-à-dire bien avant l'avènement de QCD, par Gell-Mann et Levy comme une réalisation possible de la brisure spontanée de la symétrie chirale. Bien entendu, on a alors cherché à mettre en évidence expérimentalement, un méson σ scalaire isoscalaire, comme test du modèle. On a longtemps pensé que la diffusion pion-pion dans le canal $I = J = 0$ présentait une résonance autour de 600 - 700 MeV, pouvant être identifiée avec ce méson. Cette idée est aujourd'hui rejetée car le premier méson candidat, le méson ϵ , a une masse voisine de 1,4 GeV. Son identification avec le méson σ du modèle serait toutefois académique, car sa masse est de toute façon bien au-delà de l'échelle de validité de ce type de modèle. Mentionnons pour finir, que lorsque l'on envoie le paramètre λ à l'infini, (la masse du méson σ devient infinie), on obtient au prix de quelques manipulations supplémentaires, le modèle σ -non linéaire qui constitue le premier terme d'un lagrangien dit de perturbation chirale qui est, en principe, une "copie exacte" de QCD dans le domaine des basses énergies ($E < m_\rho$).

EXERCICES

[1]

a- On considère une théorie de jauge où les champs de fermions se transforment avec les matrices $V(x)$ (éq. 10.2.3). Montrer explicitement, à partir des lois de transformation de $\psi(x)$ et $B_\mu(x)$ (éq. 10.2.10), que la dérivée covariante définie comme $D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + iB_\mu(x))\psi(x)$ se transforme aussi suivant $D_\mu\psi(x) \rightarrow V(x)D_\mu\psi(x)$

b- On considère le groupe $SU(N)$; les $N^2 - 1$ générateurs t_a de la représentation fondamentale sont des matrices $N \times N$ vérifiant $tr(t_a t_b) = \delta_{ab}/2$. On introduit N champs mésoniques hermitiques $\Phi_a(x)$ et on définit la matrice $N \times N$ $M(x)$ par $M(x) = t_a \Phi_a(x)$ (sommation sur a sous-entendue). Montrer que le terme d'énergie cinétique du lagrangien peut s'écrire :

$$\mathcal{L}_K = tr(\partial_\mu M(x) \partial^\mu M^\dagger(x))$$

c- Ces champs appartiennent à la représentation adjointe du groupe, c'est-à-dire qu'ils se transforment sous une transformation de jauge suivant $M(x) \rightarrow V(x)M(x)V^\dagger(x)$. Montrer que le lagrangien cinétique, une fois "jaugé" (c'est-à-dire rendu invariant de jauge) devient

$$\mathcal{L}_K = tr(D_\mu M(x) (D^\mu M)^\dagger(x))$$

où la dérivée covariante est définie par :

$$D_\mu M(x) = \partial_\mu M(x) + i[B_\mu(x), M(x)]$$

d- Montrer que le lagrangien de couplage des champs Φ_a au champs de jauge A_b^μ définis suivant $B^\mu(x) = g t_b A_b^\mu(x)$ s'écrit

$$\mathcal{L}_{int} = -g f_{abc} A_a^\mu \Phi_b \partial_\mu \Phi_c + \frac{1}{2} g^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu \Phi_c A_{d\mu} \Phi_e$$

où g est la constante de couplage et les f_{abc} sont les constantes de structure de groupe, complètement antisymétriques par échange des indices.

[2]- On considère la diffusion (très) inélastique d'électrons sur un proton où l'état hadronique final est $|X\rangle$, comme cela est décrit dans la section (3-2) de ce chapitre. Pour déterminer l'amplitude (invariante) de diffusion on traite l'interaction électromagnétique en perturbations. Au deuxième

ordre en perturbations la partie de la matrice S pertinente pour décrire la diffusion électron-hadron est :

$$S = -i \frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) g_{\mu\nu} D_F(x-y) J^\nu(y)$$

D_F est le propagateur de Feynman du photon (éq. 9.2.11) et J^μ est l'opérateur courant électromagnétique total qui est la somme du courant électronique $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ et du courant électromagnétique hadronique provenant du courant associé aux constituants du proton. Ce courant hadronique $J_h^\mu(x)$ en représentation d'interaction correspond donc au courant écrit en représentation de Heisenberg vis-à-vis de l'interaction forte ; autrement dit son évolution est régie par l'interaction forte (QCD).

- a- $|p\rangle$ et $|X\rangle$ désignant les états (exacts par rapport à l'interaction forte) du proton incident et des hadrons finals, montrer que l'invariance par translation impose que

$$\langle X|J_h^\mu(x)|p\rangle = \langle X|J_h^\mu(0)|k\rangle e^{i(P_X - P) \cdot x}$$

où P^μ et P_X^μ désignent les quadrvecteurs énergie-impulsion du proton initial et du système de hadrons finals.

- b- Montrer que l'amplitude décrivant le processus $e(k, s) + p \rightarrow e(k', s') + X$ s'écrit

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_X - P - q) \\ &= \frac{e^2}{Q^2} \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s) \langle X|J_h^\mu(0)|p\rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_X - P - q) \end{aligned}$$

où $q = k - k'$ est le quadrvecteur énergie-impulsion (du genre espace $Q^2 = -q^\mu q_\mu > 0$) transféré par l'électron (fig 10.9). Les états sont normalisés de façon covariante (voir éq. 9.3.7 et les commentaires qui lui sont relatifs).

- c- L'état final $|X\rangle$ n'est pas détecté, l'électron incident est non polarisé et on ne détecte pas la polarisation des électrons diffusés. Montrer que pour un proton au repos ($P = (M_p, \mathbf{0})$), la section efficace de diffusion d'électrons dans l'intervalle d'énergie dE' et d'angle solide $d\Omega'$ s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{(Q^2)^2} \frac{k'}{k} l_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

où $l_{\mu\nu}$ est un tenseur leptonique que l'on calculera à l'aide des théorèmes relatifs aux traces des matrices γ :

$$l_{\mu\nu} = 2[(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(k \cdot k' - m^2)]$$

et $W^{\mu\nu}$ un tenseur hadronique donné par :

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M_p} \sum_X \langle p | J_h^\mu(0) | X \rangle \langle X | J_h^\nu(0) | p \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - P_X)$$

Quelle est la dimension de ce tenseur ?

- d- On suppose que le proton incident n'est pas polarisé ; le tenseur hadronique précédent est donc redéfini par une moyenne sur les états de spin du proton. Montrer, en utilisant des propriétés très générales telles que l'invariance de Lorentz, la conservation du courant électromagnétique hadronique ou l'invariance par parité, qu'il se met nécessairement sous la forme

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{M_p} \left[- \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{p \cdot q} F_2(x, Q^2) \right]$$

avec

$$\tilde{p}^\mu = p^\mu + \frac{p \cdot q}{Q^2} q^\mu$$

et où F_1 et F_2 sont des fonctions de structure sans dimension dépendant des invariants relativiste Q^2 et $x = Q^2/2p \cdot q$. Retrouver alors, dans la limite des électrons ultrarelativistes ($m = 0$), le résultat donné dans l'équation (10.3.4).

- [3]- On se place dans le modèle des sacs, brièvement évoqué dans ce chapitre, dans lequel le nucléon est constitué de trois quarks courants (uud ou udd) de masses très petites ($\leq 10MeV$) enfermés dans une cavité sphérique de rayon R . A la limite des quarks de masse nulle, les fonctions d'onde des quarks à l'intérieur du proton et du neutron sont identiques si l'on néglige l'interaction électrostatique. La masse du nucléon est obtenue comme étant la somme des énergies des orbitales de quarks et de l'énergie de volume proportionnelle à la constante du sac B . On peut alors montrer en utilisant les fonctions d'ondes de ces orbitales que (n_u, n_d nombre de quarks u et d à l'intérieur de chacun des états de nucléon) :

$$\frac{1}{n_u} \langle N | \int d\mathbf{r} (\bar{\psi}_u \psi_u)(\mathbf{r}) | N \rangle = \frac{1}{n_d} \langle N | \int d\mathbf{r} (\bar{\psi}_d \psi_d)(\mathbf{r}) | N \rangle \simeq 0,5$$

En ce qui concerne la distribution de charge, on peut montrer que le proton est (grossièrement) assimilable à une sphère uniformément chargée en volume et que la densité de charge du neutron est nulle en tout point.

- a- Donner les deux effets dominants à l'origine de la différence de masse entre le proton et le neutron.

- b- Montrer, en utilisant la théorie des perturbations au premier ordre, que cette différence de masse peut être estimée par la formule approchée suivante :

$$M_n - M_p = \frac{m_d - m_u}{2} - \frac{3}{5} \frac{\alpha}{R}$$

avec $\alpha = 1/137$. En prenant $R = 1 \text{ fm}$ et $m_d - m_u = 4 \text{ MeV}$, comparer à la valeur expérimentale.

- [4]- On se place dans le modèle sigma linéaire dont le lagrangien est donné par l'équation 10.5.58. Le but de cet exercice est de calculer l'amplitude de diffusion $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$

- a- Donner les règles de Feynman relatives aux vertex $\vec{\pi}^2 \vec{\pi}^2$ et $\vec{\pi}^2 s$ et au propagateur du méson σ décrit par le champ s .

On désire calculer l'amplitude invariante relative au processus :

$$\pi_a(k_a) + \pi_b(k_b) \rightarrow \pi_c(k_c) + \pi_d(k_d)$$

Les indices a d'isospin ($a = 1, 2, 3$) sont des indices cartésiens, si bien que les états $|\pi_a(k_a)\rangle$ sont créés ou détruits par les opérateurs hermitiques $\pi_a(x)$. On introduira les variables de Mandelstam $s = (k_a + k_b)^2$, $t = (k_a - k_c)^2$ et $u = (k_a - k_d)^2$.

- b- Tracer les diagrammes à l'approximation de l'arbre (c'est-à-dire sans-boucle) relatifs à ce processus.
- c- Montrer que la contribution des diagrammes de contact à quatre pions s'écrit :

$$\mathcal{M}_{fi}(4\pi) = 2\lambda(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$$

- d- Montrer que la contribution des diagrammes avec échange de sigma s'écrit :

$$\mathcal{M}_{fi}(\sigma) = 4\lambda^2 f_\pi^2 \left(\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{s - m_\sigma^2} + \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{t - m_\sigma^2} + \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{u - m_\sigma^2} \right)$$

- e- En déduire que l'amplitude totale se met sous la forme :

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{f_\pi^2} \left(\delta_{ab}\delta_{cd} \frac{s - m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + \delta_{ac}\delta_{bd} \frac{t - m_\pi^2}{t - m_\sigma^2} + \delta_{ad}\delta_{bc} \frac{u - m_\pi^2}{u - m_\sigma^2} \right)$$

f- Les projecteurs sur les trois canaux d'isospin $I = 0, 1, 2$ sont donnés par :

$$P_0 = \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc})$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd}$$

En déduire les amplitudes \mathcal{M}_0 , \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 dans chacun de ces canaux.

g- Quelles sont les expressions de \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_2 au seuil ($s = 4m_\pi^2$, $t = u = 0$) ?
Montrer qu'au plus bas ordre dans la masse du pion, on a :

$$\mathcal{M}_0 = -7 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad \mathcal{M}_2 = 2 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2}$$

Ce dernier résultat devient exact en tant que limite lorsque $m_\pi^2 \rightarrow 0$ et peut être considéré comme le premier terme dans un développement de perturbation chirale, c'est-à-dire un développement sur la masse du pion.