

# Électromagnétisme

Gérard Smadja

14 octobre 2014

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'électromagnétisme</b>	<b>6</b>
1.1	Le contexte théorique : les champs et le Lagrangien . . . . .	6
1.2	Le 4-potentiel $A^\mu$ . . . . .	6
1.3	Les équations de Maxwell . . . . .	7
1.4	Analyse des équations de Maxwell dans le cas stationnaire . . . . .	8
1.4.1	Les sources du champ . . . . .	8
1.4.2	L'équation (1.15) : sources du champ électrique . . . . .	9
1.4.3	L'équation (1.16) : absence de sources magnétiques . . . . .	9
1.4.4	L'équation (1.17) : mouvement du champ électrique . . . . .	10
1.4.5	L'équation (1.18) : mouvement du champ magnétique . . . . .	10
1.5	Des champs aux potentiels . . . . .	11
1.5.1	Le cas des sources stationnaires . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Équations de l'électrostatique</b>	<b>13</b>
2.1	Généralités . . . . .	13
2.1.1	Propriété de la moyenne . . . . .	13
2.1.2	Théorème de Green . . . . .	13
2.1.3	Théorème de réciprocité (pour les conducteurs) . . . . .	13
2.1.4	Unicité de la solution . . . . .	14
2.2	Fonctions de Green . . . . .	14
2.2.1	Symétrie des fonctions . . . . .	15
2.2.2	Expressions intégrales du potentiel . . . . .	15
2.3	Équations intégrales des fonctions de Green . . . . .	17
2.4	Conditions de Neumann modifiée . . . . .	19
2.5	Équivalence électrostatique : le potentiel . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Électrostatique des conducteurs</b>	<b>21</b>
3.1	La relation d'Ohm dans les conducteurs . . . . .	21
3.2	L'équilibre électrostatique des conducteurs . . . . .	21
3.2.1	Champ et charge dans un conducteur : régime stationnaire . . . . .	21
3.2.2	Lignes de champ . . . . .	21
3.3	Régimes non-stationnaires dans un conducteur . . . . .	22
3.3.1	Courants de surface . . . . .	22
3.3.2	Composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ . . . . .	22
3.3.3	Composantes normales de $\mathbf{E}$ . . . . .	22
3.3.4	Le temps de relaxation électrostatique . . . . .	23
3.3.5	Le temps de relaxation des courants . . . . .	24
3.4	Les coefficients d'influence . . . . .	24
3.4.1	Linéarité . . . . .	24
3.4.2	Symétrie des coefficients d'influence . . . . .	25
3.4.3	Influence totale . . . . .	25
3.5	Équivalence électrostatique : le champ électrique . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Électrostatique des milieux diélectriques</b>	<b>28</b>
4.1	Moment dipolaire d'un système de charges	28
4.2	Le diélectrique neutre	28
4.3	Charges de surface et de volume	29
4.4	Le vecteur induction diélectrique $D$	30
4.5	Les relations de constitution entre $P$ et $E$	30
4.5.1	Milieux isotropes	30
4.5.2	Milieux anisotropes (cristaux)	31
4.6	Le champ local	31
4.7	Symétrie du tenseur diélectrique	32
4.7.1	Modèle classique	32
4.7.2	Modèle quantique	32
4.8	Conditions aux limites	32
4.9	Forces dans les diélectriques	33
<b>5</b>	<b>Solution de quelques problèmes d'électrostatique</b>	<b>36</b>
5.1	Problèmes à deux dimensions	36
5.1.1	Source ponctuelle	36
5.1.2	Méthode des images : plan conducteur et cylindre	37
5.1.3	Formule de Poisson (cercle 2D)	37
5.1.4	Transformation conforme	38
5.1.5	Méthodes numériques 2D	40
5.2	Problèmes à trois dimensions	40
5.2.1	Images	40
5.2.2	Formule de Poisson (sphère 3D)	42
5.2.3	Développements sur des bases polynomiales	42
5.2.4	Pointes à trois dimensions	42
<b>6</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>44</b>
6.1	Potentiel vecteur d'un courant	44
6.2	Moment magnétique	45
6.2.1	Mouvement classique d'un moment magnétique	45
6.3	Mouvement d'un moment magnétique	46
6.4	Champ magnétique d'un moment magnétique	46
6.5	Équivalence magnétique	47
<b>7</b>	<b>Milieux magnétiques</b>	<b>51</b>
7.1	Vecteur de magnétisation	51
7.2	Le potentiel vecteur	51
7.2.1	Milieu magnétique isotrope	52
7.3	Milieu magnétique anisotrope (non ferro-magnétique)	53
7.3.1	Milieu ferro-magnétique	53
7.3.2	La limite des très grands champs	53
7.4	Conditions aux limites à l'interface de deux milieux magnétiques	53
7.4.1	Continuité normale	53
7.4.2	Continuité tangentielle	53
<b>8</b>	<b>Énergie électrostatique d'un système de conducteurs</b>	<b>57</b>
8.1	Introduction	57
8.2	L'énergie électrostatique du champ : cas d'un conducteur unique	57
8.3	Système de conducteurs	58
8.4	La conservation de l'énergie électrostatique	58
8.5	Énergie électrostatique en présence de diélectriques	58
8.6	Symétrie du tenseur diélectrique	59
8.7	Forces électrostatiques	59

<b>9</b>	<b>Énergie magnétique</b>	<b>61</b>
9.1	Énergie fournie par la variation des courants en régime quasi-stationnaire	61
9.2	Expression de l'énergie magnétique à l'aide du champ	62
9.3	Symétrie du tenseur de perméabilité (milieu non ferro-magnétique)	63
<b>10</b>	<b>Le mouvement des charges</b>	<b>64</b>
10.1	Le Lagrangien d'interaction	64
10.2	Les équations du mouvement	64
10.3	Le mouvement d'une charge dans un champ magnétique	65
<b>11</b>	<b>Énergie et impulsion du champ</b>	<b>67</b>
11.1	Énergie transférée aux charges	67
11.2	Impulsion transférée aux charges	68
11.3	La controverse	69
<b>12</b>	<b>Champs rayonnés par les courants</b>	<b>71</b>
12.1	Propagation des potentiels	71
12.1.1	Les équations de propagation	71
12.1.2	Relations entre les potentiels et les sources	72
12.1.3	Propagation des champs	72
12.2	Composantes monochromatiques du champ	73
12.3	Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ à grande distance des sources	74
12.4	L'onde plane monochromatique	75
12.5	Théorème de Lorentz	76
<b>13</b>	<b>Le 4-potential d'une charge ponctuelle</b>	<b>78</b>
13.1	Le 4-potential : méthode temporelle	78
13.2	Le 4-vecteur courant d'une charge ponctuelle : méthode spatiale	79
13.3	Les variables retardées et les potentiels	79
13.4	Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$	80
13.5	Mouvements particuliers	80
13.5.1	Mouvement uniforme	80
13.5.2	Mouvement accéléré	80
13.6	Mouvement périodique d'une charge	81
13.6.1	L'approximation dipolaire	81
13.7	Rayonnement d'une charge isolée (non relativiste) : formule de Larmor	81
13.8	Formule de Larmor relativiste	82
13.9	Réaction de rayonnement	82
<b>14</b>	<b>Équations de Maxwell dans les milieux homogènes</b>	<b>84</b>
14.1	Relations de Maxwell « exactes »	84
14.2	Propagation dans un diélectrique homogène isotrope	85
14.3	Les relations de constitution	86
14.4	Milieu diélectrique anisotrope	86
14.5	Milieu magnétique anisotrope	87
14.6	Activité optique naturelle	87
14.7	Milieu absorbant (tenseur diélectrique non hermitien)	88
14.8	Effets magnéto-optiques (tenseur diélectrique hermitien)	88
14.9	Les limites à haute fréquence	88
14.9.1	Le tenseur diélectrique	89
14.9.2	La perméabilité magnétique	89
14.9.3	Conservation de l'énergie et susceptibilités	89
14.10	Équations du champ dans les conducteurs isotropes	89

<b>15 Antenne linéaire infinie</b>	<b>92</b>
15.1 Les équations du champ à l'intérieur de l'antenne	92
15.2 Les équations du champ à l'extérieur de l'antenne	93
15.3 Les composantes transverses	94
15.4 Conditions aux limites à la surface	95
<b>16 Émission dipolaire d'une antenne</b>	<b>97</b>
16.1 Courant dans une antenne linéaire	97
16.2 L'approximation dipolaire (antenne de faible longueur)	98
16.3 Théorème de réciprocité	99
<b>17 Champs rayonnés par des volumes diélectriques</b>	<b>102</b>
17.1 Expression du champ à l'intérieur d'une surface fermée	102
17.2 Courants et charges magnétiques auxiliaires	102
17.3 Annexe I : Équations intégrales de Chu-Stratton	105
<b>18 Des ondes aux rayons</b>	<b>107</b>
18.1 De l'onde aux trajectoires	107
18.1.1 La fonction de phase : iconale	107
18.1.2 Le vecteur de Poynting	108
18.1.3 Le principe de Fermat	109
18.2 Milieux anisotropes	109
<b>19 Covariance des équations de Maxwell dans les milieux matériels</b>	<b>111</b>
19.1 Changement de repère galiléen	111
19.2 Changement général de coordonnées	113
19.3 Interprétation géométrique de la transformation : cape d'invisibilité	114
<b>20 Diffusion par un diélectrique homogène ou par des charges</b>	<b>117</b>
20.1 Sources du champ diffusé	117
20.2 Le champ électrique « diffusé » dans le milieu ( <i>incidence normale</i> )	118
20.3 Le champ réfléchi ( <i>incidence normale</i> )	120
20.4 Réfraction	120
20.5 Diffusion par une charge libre : diffusion Thomson	121
20.6 Diffusion par une molécule neutre : diffusion Rayleigh	122
<b>21 Diffusion par un milieu diélectrique hétérogène</b>	<b>125</b>
21.1 Milieux homogènes et hétérogènes	125
21.2 Diffusion par un gaz : diffusion Rayleigh	125
21.3 Diffusion par un liquide	127
21.3.1 Corrélations spatiales négligées	127
21.3.2 Corrélations spatiales	128
<b>22 Le rayonnement Cerenkov</b>	<b>129</b>
22.1 Le phénomène observé	129
22.2 Le spectre fréquentiel	129
<b>23 Rayonnement de transition</b>	<b>133</b>
23.1 Introduction	133
23.2 Le cas d'un plan conducteur	133
23.3 La solution directe par les 4-potentiels	134
23.4 Le spectre de fréquence	135
23.5 Rayonnement de transition à l'interface d'un milieu diélectrique	136
23.5.1 Le champ rayonné par la portion de trajectoire dans la région (1)	137
23.5.2 Le champ rayonné par la portion de trajectoire dans la région (2) diélectrique	137

<b>24 La diffraction au delà de l'approximation de Kirchoff</b>	<b>139</b>
24.1 Introduction	139
24.2 L'équation de Helmholtz	139
24.3 L'approximation de Kirchoff	140
24.3.1 L'amplitude du champ au point d'observation	141
24.3.2 Approximation de Fraunffer	141
24.3.3 L'ombre et la diffraction de Fresnel	142
24.4 Diffraction par un volume diélectrique : résolution par équations intégrales	143
24.5 Diffraction par un demi-plan conducteur (incidence normale) : méthode de Lamb	146
24.6 Incidence normale	147
24.6.1 Champ électrique selon l'axe $z$ (bord du demi-plan)	147
24.6.2 Champ électrique selon $Ox$ : perpendiculaire au bord du demi-plan	148
24.6.3 Comportement à grande distance au voisinage de l'ombre	148
24.7 La solution scalaire pour une source linéaire : fonctions de Green dans la géométrie à deux dimensions	149
24.8 Le champ et les courants pour une source linéaire	149
24.9 Équation intégrale de la diffraction pour un demi-plan et une source linéaire	149
24.9.1 Les courants induits sur le demi-plan	150
24.10 Diffraction par un demi-plan : méthode de la transformée de Fourier	150
24.11 Formalisme tridimensionnel : diffraction par une fente	153
24.12 Annexe : Incidence arbitraire	153
24.13 Annexe : Diffraction à deux dimensions, méthode de la transformée de Fourier	154
24.14 Symétries du champ électromagnétique dans la diffraction par les ouvertures d'un plan conducteur	156

# Chapitre 1

## Introduction à l'électromagnétisme

### 1.1 Le contexte théorique : les champs et le Lagrangien

La charge électrique est décrite aujourd'hui comme une propriété incomplètement élucidée des particules élémentaires. Toutes les charges observées existant à l'état libre sont multiples de celle de l'électron, mais la raison de cette quantification n'est pas comprise. Elles interagissent entre elles par l'intermédiaire du champ électromagnétique.

La notion de champ a initialement été introduite pour résoudre le problème de l'action à distance : toutes les interactions des charges avec le champ sont décrites par une densité lagrangienne *locale*, construite à partir des valeurs du champ électromagnétique et des courants en un point  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  de l'espace-temps. Les phénomènes électromagnétiques impliquent la présence simultanée du potentiel électrique  $U(t, \mathbf{x})$  et du potentiel vecteur  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ . La relativité restreinte unifie ces deux potentiels dans un 4-vecteur unique  $A^\mu(x)$ , dont les 4 composantes se transforment comme les coordonnées  $x^\mu$  dans un changement de repère. Le 4-vecteur courant  $j^\mu(x) = (\rho, \mathbf{j})$  permet alors de construire une densité de lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}(x) = j^\mu(x)A_\mu(x)$  invariante de Lorentz.

Les équations de Maxwell, et celles du mouvement des charges découlent de l'application du principe de moindre action aux champs (sources fixées) et aux charges (pour des champs fixés). Les traités disponibles exposant cette méthode, en particulier celui de [Landau1982], étant difficiles à surpasser dans leur élégance, nous choisirons de prendre ces équations comme point de départ. Comme elles peuvent être obtenues dans un cadre relativiste, elles sont exactes dans tous les repères galiléens.

### 1.2 Le 4-potentiel $A^\mu$

Le 4-potentiel  $A_\mu(x) = (A_0, -\mathbf{A})$ , dépend (au plus) des quatre fonctions correspondant aux composantes  $A_\mu$ . Les équations décrivant l'interaction du champ avec les charges font intervenir les tenseurs antisymétriques  $F^{\mu\nu}$  ou  $F_{\mu\nu}$  dont les 6 composantes sont les champs électriques  $E^i(x)$  et magnétiques  $B^i(x)$ .

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (1.1)$$

où

$$A_\nu = g_{\nu\lambda}A^\lambda, \quad (1.2)$$

$g_{\nu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ , les autres valeurs étant nulles. Avec la convention  $\mu =$  colonnes,  $\nu =$  lignes :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Les équations précédentes permettent d'exprimer les champs  $E^i(x)$  et  $B^i(x)$  à l'aide des composantes de  $A_\mu(x)$ . En identifiant la composante  $A^0$  au potentiel électrostatique  $U$ , on obtient :

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Le potentiel n'est pas défini de façon unique : les champs  $E^i(x)$  et  $B^i(x)$  sont inchangés dans les transformations de jauge :

$$U = U' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla f \quad (1.7)$$

Cette propriété d'apparence anecdotique joue désormais un rôle clef dans la construction des interactions fondamentales, et elle doit être incorporée au lagrangien qui régit le mouvement des champs. L'invariance du lagrangien dans cette transformation impose en particulier la conservation de la charge électrique.

$$\begin{aligned} \int j^\mu A_\mu d^4x &= \int j^\mu (A^\mu + \partial_\mu f) d^4x \\ &= \int (j^\mu A_\mu) d^4x + \int \partial_\mu (j^\mu f) d^4x - \int \partial_\mu (j^\mu f) d^4x. \end{aligned} \quad (1.8)$$

En étendant l'intégrale à tout l'espace et en supposant l'absence de courants à l'infini :

$$\int \partial_\mu j^\mu f d^4x = 0. \quad (1.9)$$

La relation doit être vraie quelle que soit la fonction  $f(x^\mu)$ , et implique

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.10)$$

c'est-à-dire la conservation de la charge. Les actions physiques exercées sur les charges ne dépendent que des champs électriques et magnétiques  $\mathbf{E}$ , et  $\mathbf{B}$ . Les effets observés sont décrits plus directement de cette manière. Inversement, on introduit ainsi six fonctions, alors que les potentiels ne dépendent que de quatre. En outre, les conditions aux limites sont souvent imposées sur les potentiels, plutôt que sur les champs. Selon le problème à traiter, l'une ou l'autre des deux descriptions du champ sera plus pratique.

### 1.3 Les équations de Maxwell

Lorsque le 4-vecteur courant  $j^\mu(x) = (\rho(x), \mathbf{j}(x)/c)$  est connu, les équations de Maxwell déterminent l'évolution spatiale et temporelle des champs vectoriels  $E^i$  et  $B^i$ . La densité de charge  $\rho(x)$  détermine la charge  $Q_V$  contenue dans un volume  $V$ , tandis que la densité de courant  $\mathbf{j}(x)$  est liée à l'intensité traversant une surface  $S$  :

$$Q_V = \int_V \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.11)$$

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.12)$$

Dans un modèle où les charges élémentaires  $q_i$  sont ponctuelles :

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (1.13)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (1.14)$$



On montre facilement que l'ensemble constitue les composantes du 4-vecteur courant électrique  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j}/c)$ . Les équations de Maxwell décrivent le mouvement des champs  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  en fonction de la densité de charge  $\rho(t, \mathbf{x})$  et des courants  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E}. \quad (1.18)$$

Les constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  dépendent du choix des unités. On montrera que la vitesse de propagation de la lumière est

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.19)$$

Dans le système MKSA, on adopte par *définition* :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad (1.20)$$

On doit compléter ces équations par celles qui définissent le mouvement des charges (principe de moindre action à champ fixé) :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Toute la diversité des phénomènes électromagnétiques (dans le domaine classique) résulte (*en principe*) de l'application des équations qui précèdent. Cet ensemble d'équations n'admet cependant pas de méthode de résolution générale, et chaque cas relève d'approximations appropriées.

## 1.4 Analyse des équations de Maxwell dans le cas stationnaire

Ce paragraphe reconstitue de manière heuristique l'évolution qui a conduit aux équations de Maxwell à partir des phénomènes dont elles sont issues.

### 1.4.1 Les sources du champ

Comme prévu dans le cadre d'un formalisme invariant de jauge (§ 1.1), les équations de Maxwell ne sont compatibles que s'il y a conservation de la charge :

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.22)$$

soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.23)$$

Le courant d'une charge ponctuelle vérifie cette relation. En régime *stationnaire*, elle se traduit par

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.24)$$

L'intensité

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, d^2\mathbf{x} \quad (1.25)$$

(Fig. 1.1) est alors conservée (*Théorème de Gauss*). Il en va de même en régime périodique dans un conducteur de conductivité  $\sigma$ . On pose  $\rho = \rho_0 e^{-i\omega t}$ , et on utilise la relation (*approchée*) d'Ohm :

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (1.26)$$

Densités de charge et de courant un conducteur

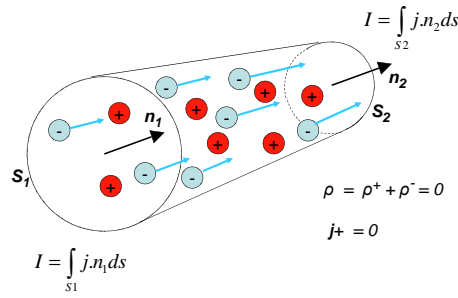


FIG. 1.1 – Charges et courants dans un conducteur

La conservation de la charge (1.10), ou (1.23) entraîne

$$-i\omega\rho_0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho_0 = 0. \quad (1.27)$$

La densité volumique de charge est nulle dans le volume d'un conducteur en régime périodique. Une analyse ultérieure précisera le régime transitoire.

### 1.4.2 L'équation (1.15) : sources du champ électrique

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Pour une charge ponctuelle  $\rho(x) = q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , le champ  $\mathbf{E}$  s'obtient en appliquant le théorème de Gauss à une sphère centrée sur la charge :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int_V \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2x \quad (1.28)$$

soit

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1.29)$$

C'est la loi de Coulomb.

### 1.4.3 L'équation (1.16) : absence de sources magnétiques

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Cette équation exprime l'absence de charges magnétiques. Dans la formulation relativiste, cette propriété est incluse dans l'expression du courant  $j^\mu$ , qui ne contient que des charges électriques. On aurait pu postuler un courant magnétique 4-vectoriel couplé à un 4-potential axial, le champ  $\mathbf{E}$  serait le rotationnel de la partie pseudo-vectorielle du champ axial,  $\mathbf{B}$  le gradient de la composante pseudo-scalaire. Cette description est complètement équivalente aux relations usuelles, et elle n'apporte rien de plus. Ce n'est certainement pas la manière plus simple de décrire la nature où les constituants élémentaires sont pourvus de charges électriques. La situation est plus intéressante si on admet l'existence de (rares) « monopoles » magnétiques. Dirac a montré que la charge électrique devait alors être quantifiée [Dirac1948].

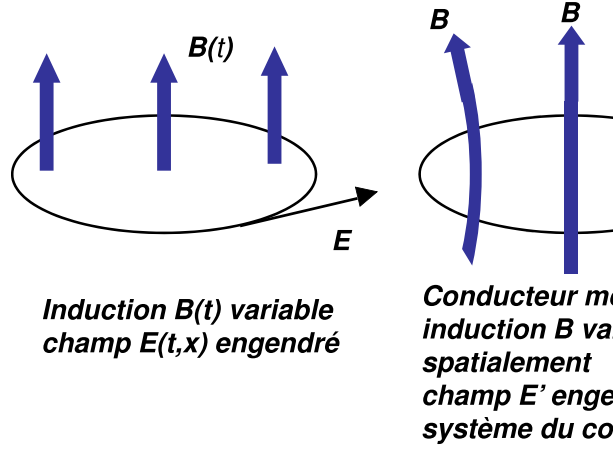


FIG. 1.2 – Mouvement du champ magnétique : « force électromotrice »

#### 1.4.4 L'équation (1.17) : mouvement du champ électrique

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j})$$

En régime stationnaire, cette équation régit le champ créé par un courant :

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \nabla \wedge (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d^2\mathbf{x} \\ &= \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x} \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (1.30)$$

La composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  est  $B_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , c'est la loi d'Ampère. La solution explicite de l'équation précédente est la loi de Biot-Savart :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3\mathbf{x} \quad (1.31)$$

#### 1.4.5 L'équation (1.18) : mouvement du champ magnétique

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E}$$

C'est la loi de Faraday, qui régit la force électromagnétique engendrée par un champ variable dans un circuit fixe (Fig. 1.2).

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x}, \\ &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x}, \\ &= - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Cette loi est *exacte*. Quand on déplace un circuit dans un champ  $\mathbf{B}$  stationnaire mais spatialement variable, le champ  $\mathbf{B}$  apparaît comme soumis à une variation temporelle dans le repère du circuit en translation. Le changement de repère impose cependant une transformation relativiste du champ qui induit des corrections d'ordre  $v^2/c^2$  (voir [Landau1982]). La loi de Faraday pour le flux coupé par un conducteur en mouvement n'est qu'approchée (Fig. 1.2).

## 1.5 Des champs aux potentiels

Au lieu de déduire les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  du 4-potential selon le cheminement naturel dans le cadre relativiste, on peut adopter un point de vue inverse et reconstruire les potentiels scalaires et vecteurs à partir des équations de Maxwell. La relation (1.16) implique l'existence d'un vecteur  $\mathbf{A}$  (non unique) tels que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (1.33)$$

Il suffit par exemple de vérifier que dans le régime statique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = c \int \mathbf{B}(\mathbf{x}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3\mathbf{x} \quad (1.34)$$

répond à la question (ce choix n'est pas unique, un gradient ajouté à  $\mathbf{A}$  ne modifiant pas  $\mathbf{B}$ ). La relation 1.18

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.35)$$

entraîne

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Il existe alors une fonction  $U$  telle que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla U. \quad (1.37)$$

On a ainsi obtenu les relations usuelles :

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (1.39)$$

Le facteur  $c$ , qui a la dimension d'une vitesse, a été introduit de manière que  $U$  et  $\mathbf{A}$  aient la même dimension. Il est naturel de le choisir égal à la vitesse de la lumière mais cette convention n'est pas générale.  $U$  est le potentiel électrostatique, et  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur. Les transformations de jauge laissent  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  invariants.

### 1.5.1 Le cas des sources stationnaires

Les potentiels obéissent à l'équation de Poisson

$$\Delta U(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (1.40)$$

et à l'équation analogue pour le potentiel vecteur

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -c\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}). \quad (1.41)$$

Diverses méthodes de résolutions de ces équations seront présentées dans les chapitres suivant.

## Exercices

**Ex. 1:** La charge est-elle conservée s'il y a des charges et des courants à l'infini ?

**Ex. 2:** Montrer que l'invariance de jauge entraîne que la somme totale des charges dans une cage de Faraday est nulle.

**Ex. 3:** Vérifier la conservation du courant pour les charges ponctuelles (Intégrer sur un volume).

**Ex. 4:** Vérifier que l'on peut toujours trouver une fonction  $f$  telle que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (jauge de Coulomb).

**Ex. 5:** Peut-on en utilisant l'invariance de jauge réduire le nombre de fonctions décrivant le 4-potentiel de quatre à trois? (*L'isotropie implique que les trois composantes de  $\mathbf{A}$  jouent le même rôle.*)

**Ex. 6:** Vérifier que le vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3\mathbf{x}$$

satisfait la relation  $\nabla \wedge \mathbf{A} = c\mathbf{B}$ . On utilisera la relation

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

**Ex. 7:** Vérifier que pour une charge ponctuelle ( $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ ), l'expression

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3}$$

est solution de  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ . On aura besoin de (ou on pourra établir) la relation

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} = \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) = -4\pi \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

**Ex. 8:** Vérifier que l'expression

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{x}$$

(Biot-Savart) est une solution de  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  en régime stationnaire.

Traiter le cas particulier du champ  $\mathbf{B}$  uniforme. On pourra utiliser la relation

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Une intégration par partie permet de substituer  $\nabla \cdot \mathbf{j}$  (qui est nul) à  $\mathbf{j} \cdot \nabla$ .

# Chapitre 2

## Équations de l'électrostatique

### 2.1 Généralités

Les problèmes d'électrostatique impliquent différents types de configuration. Les potentiels sont définis sur certaines surfaces (le plus souvent conductrices), les charges initiales sur d'autres (isolantes ou conductrices), et il s'agit de trouver le champ dans tout l'espace. La méthode la plus générale est la résolution de l'équation de Poisson (1.37), complétée par les conditions aux limites assurant l'unicité de la solution. Nous décrirons tout d'abord quelques propriétés générales des solutions de l'équation de cette équation qui ne nécessitent pas sa résolution explicite.

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 Propriété de la moyenne

Dans le vide, le potentiel  $U$  vérifie  $\Delta U = 0$ . C'est une fonction harmonique, qui jouit de la propriété de la moyenne : la valeur de  $U$  en  $P$  est la moyenne de  $U$  sur une sphère entourant  $P$ . Le potentiel ne peut donc avoir de maximum ou de minimum dans le vide.

#### 2.1.2 Théorème de Green

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3 \mathbf{x} = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n_{\text{ext}}} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n_{\text{ext}}} \right) d^2 \mathbf{x} \quad (2.2)$$

La relation de Green résulte directement de l'application du théorème de Gauss aux gradients  $\nabla \phi$  et  $\nabla \psi$  de deux fonctions régulières  $\phi$  et  $\psi$  définies dans un domaine  $V$  limité par la surface  $S$ . La normale  $\mathbf{n}$  doit être orientée vers l'extérieur du domaine, dont la surface limite  $S$  peut ne pas être connexe : c'est le cas lorsque  $V$  est le volume externe à un ou plusieurs conducteurs.

#### 2.1.3 Théorème de réciprocité (pour les conducteurs)

Lorsque la surface  $S$  coïncide avec une surface physique (diélectrique ou conductrice), on peut appliquer le théorème de Green 2.2 à deux configurations de potentiels et de charges,  $U = \phi$ ,  $U' = \psi$ , en considérant successivement les volumes internes et externes. On choisira dans chaque cas une surface  $S_\epsilon$ , proche de  $S$ , et entièrement contenue dans le volume choisi, comme dans la Fig. 2.1. En tenant compte de l'équation de Poisson  $\Delta U = \rho/\epsilon_0$ , et des dérivées  $\frac{\partial \psi}{\partial n_{\text{ext}}} = -\frac{\partial \psi}{\partial n_{\text{int}}} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}_{\text{int}}$

$$\int_V U \rho' + \int_S U \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}_{\text{int}} = \int_V U' \rho + \int_S U' \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{\text{int}} \quad (2.3)$$

La relation résulte directement du théorème de Green, où l'on a posé  $U = \phi$ ,  $U' = \psi$ , et de l'équation de Poisson  $\Delta U = -\rho/\epsilon_0$ , avec sa limite pour des densités de surface

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\alpha \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

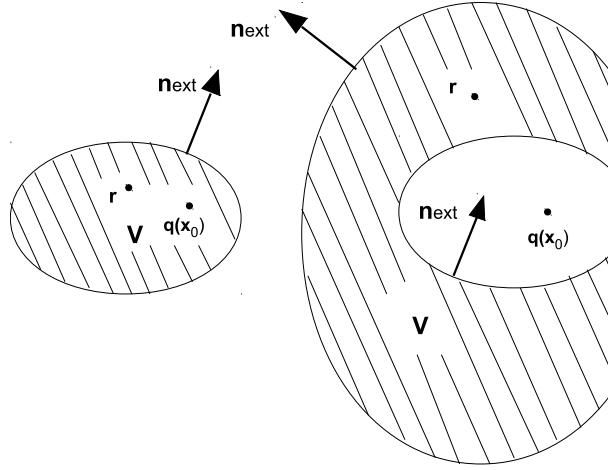


FIG. 2.1 – Surface limite pour un domaine  $V$  électrostatique.

(cette limite sera établie plus loin,  $\alpha = 1$  pour les conducteurs et  $1/2$  pour une feuille diélectrique). La composante normale du champ est  $E_n = \alpha\sigma/\epsilon_0$ , où la densité surfacique  $\sigma$  inclut aussi bien les charges réelles (*libres*), que les charges de surface (*liées*) induites par la polarisation du milieu. La relation (2.4) sera utilisée pour établir la symétrie des coefficients d'influence au Chap. 3. Pour l'appliquer au volume externe, limité par  $S$ , la surface limite doit être externe au conducteur,  $\mathbf{n}_{\text{ext}}$  est alors dirigée vers l'intérieur du conducteur. Ce théorème de réciprocité peut s'interpréter comme l'égalité de deux expressions de l'énergie électrostatique du système de charges combinant les distributions  $\rho$  et  $\rho'$ . L'énergie électrostatique de la distribution  $\rho'$  dans le potentiel  $U$  créé par les charges  $\rho$  et l'énergie électrostatique des charges  $\rho$  dans le potentiel  $U'$  créé par  $\rho'$  sont égales. L'origine mathématique de la réciprocité est la symétrie des fonctions de Green. Le potentiel créé en  $\mathbf{r}$  par une charge  $q$  située  $\mathbf{x}_0$  est le même que celui créé par la charge  $q$  située en  $\mathbf{r}$  au point  $\mathbf{x}_0$  lorsque le domaine considéré est tout l'espace, ou qu'il est borné par des conducteurs dont le potentiel est fixé.

### 2.1.4 Unicité de la solution

L'équation de Poisson admet une solution unique pour des conditions aux limites « appropriées ». Cette unicité se devine à partir de l'observation : le potentiel  $U$  est défini partout lorsque sa valeur à l'infini (en général nulle), et sa valeur sur les conducteurs sont fixées. Cette condition est nommée mathématiquement *condition de Dirichlet*, et l'unicité peut être démontrée. Elle est également démontrée pour une condition limite de *Neumann*, lorsque la dérivée normale du potentiel ( $\partial G_N/\partial n = g(\mathbf{x})$ ) est imposée sur la surface limite. Ce sera par exemple le cas si la distribution de charge sur un conducteur est connue. Les conditions (Dirichlet ou Neumann) peuvent différer sur des surfaces disjointes. L'unicité joue un rôle pratique important : si on trouve une solution, c'est la bonne. Le potentiel étant défini à une constante près, on impose en général  $U = 0$  à l'infini, mais cette condition doit être précisée lorsque le système étudié n'est pas borné : fil cylindrique infini, plans conducteurs, dièdres, etc., la solution va alors dépendre des hypothèses détaillées affectant le comportement du potentiel à grande distance.

## 2.2 Fonctions de Green

Les fonctions de Green sont dans un domaine  $V$  les solutions des équations correspondant à une source ponctuelle située en  $\mathbf{x}_0$ .

$$\Delta_x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} -\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & (3D) \\ -\delta_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & (2D) \end{cases} \quad (2.5)$$

La solution n'est définie qu'à une fonction harmonique près (solution de l'équation sans second membre,  $\Delta f = 0$ ), et ce sont les conditions aux limites qui assurent son unicité dans le domaine  $V$ . La solution à

trois dimensions qui s'annule ainsi que ses dérivées à l'infini est

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (2.6)$$

(Elle se trouve par transformation de Fourier, voir exercice).

À deux dimensions, la fonction

$$G_0 = \frac{1}{2\pi} \log(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.7)$$

vérifie l'Éq. (2.5), et ses dérivées s'annulent à l'infini. Les conditions aux limites sur la surface  $S$  (non nécessairement connexe) qui borne le volume  $V$  et assurent l'unicité sont la valeur de  $G_D$  (*Condition de Dirichlet*), ou celle de  $\partial G_N(\mathbf{x})/\partial n$  (*condition de Neumann*). On choisira dans chaque cas une fonction de Green adaptée au problème traité.

### 2.2.1 Symétrie des fonctions

Les conditions aux limites sur la surface  $S$  (non nécessairement connexe) qui borne le volume  $V$  et assurent l'unicité sont la valeur de  $G_D$  (*Condition de Dirichlet*), ou celle de  $\partial G_N(\mathbf{x})/\partial n$  (*condition de Neumann*). On choisira dans chaque cas une fonction de Green adaptée au problème traité. L'application du théorème de Green à la paire de fonctions  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  et  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  permet de montrer que cette fonction est symétrique (en utilisant  $G_D = 0$  sur la surface limite  $S$ ). En combinant les relations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{aligned} & \int_V d^3\mathbf{x} [G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})\Delta_x G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Delta_x G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})] \\ &= \int_S d^2\mathbf{x} \left[ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le second membre s'annule pour une fonction vérifiant la condition de Dirichlet  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  lorsque  $\mathbf{x} \in S$ .

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_D(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}). \quad (2.9)$$

La condition  $\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)/\partial n(\mathbf{x}) = 0$  pour  $\mathbf{x} \in S$  est incompatible avec l'Éq. (2.5). Si  $\mathbf{r} \in V$  :

$$\int_S d^2\mathbf{x} \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{x})} = \int_V d^3\mathbf{x} \Delta_x G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -1 \quad (2.10)$$

et on ne peut imposer (par exemple) que la condition  $\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)/\partial n(\mathbf{x}) = -1/S$ . En appliquant (2.8), on voit que

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{S} \int_S d^2\mathbf{x} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = G_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}) + \frac{1}{S} \int_S d^2\mathbf{x} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.11)$$

La fonction de Neumann

$$G'_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}) = G_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}) + \frac{1}{S} \int_S d^2\mathbf{x} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (2.12)$$

est symétrique et vérifie la condition  $\partial G'_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r})/\partial n(\mathbf{r}) = -1/S$ . On peut donc supposer que  $G_N$  est également symétrique sans perte de généralité.

### 2.2.2 Expressions intégrales du potentiel

En appliquant le théorème de Green à la paire de fonctions  $U(\mathbf{r})$  et  $G(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ , on obtient lorsque  $\mathbf{r} \in V$

$$-U(\mathbf{r}) - \int_V d^3\mathbf{x} \Delta U(\mathbf{x}) G(\mathbf{r} - \mathbf{x}) = \int_S d^2\mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{x})}{\partial n} - \int_S d^2\mathbf{x} G(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.13)$$

En utilisant l'équation de Poisson (2.1) et la définition de la fonction de Green (2.5) :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{r}) - \int_S d^2\mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{r})}{\partial n} + \int_S d^2\mathbf{x} G(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.14)$$



Le potentiel n'est pas fourni par la seule contribution coulombienne des charges contenues dans le volume  $V$ , il s'y ajoute deux contributions de surface correspondant à une distribution de dipôles orientés selon la normale ( $U \partial G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) / \partial n$ ), et une densité de surface ( $G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial U(\mathbf{x}) / \partial n$ ). Ces intégrales de surface représentent les contributions externes, et ne correspondent pas en général aux sources physiques du champ (c'est évident pour une surface limite arbitrairement tracée dans un milieu homogène). Selon les conditions aux limites, plusieurs choix de fonction de Green sont possibles :

1.  $G = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  : L'Éq. (2.8) est vérifiée dans le volume  $V$ , mais elle requiert la connaissance simultanée de  $U$  et  $\partial U / \partial n$ , ce qui est impossible sauf à connaître la solution. Elle convient cependant dans certains cas : si  $V$  s'étend jusqu'à l'infini, les contributions de surface disparaissent. Dans le cas d'une surface conductrice à l'équilibre,  $U(\mathbf{x}) = U_0$ , la première intégrale de surface dans l'équation (2.14) vaut  $U_0$  (elle se réduit à l'angle solide sous lequel  $S$  est vue du point  $\mathbf{r}$ ). On obtient la formule usuelle où  $U(\mathbf{r}) - U_0$  s'exprime en fonction des charges électriques de volume et de surface, compte tenu de la relation  $E_n = \sigma / \epsilon_0$ . Dans le cas général, l'équation de Poisson se traite à l'aide de deux types de fonction de Green vérifiant des conditions aux limites différentes.
2.  $G = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$  sur  $S$  : fonction de Green de Dirichlet

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x}) - \int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.15)$$

Cette fonction de Green est bien adaptée lorsque c'est le potentiel  $U$  qui est imposé sur la surface  $S$ . C'est le cas le plus fréquent en électrostatique des conducteurs. Pour une source ponctuelle à l'intérieur du volume  $V$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0) - \int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x})}{\partial n}. \quad (2.16)$$

On retrouve évidemment  $U = qG_D$  si  $U$  s'annule sur  $S$ . Le potentiel  $U(\mathbf{r})$  est continu sur la frontière  $S$  du domaine. Au contraire, la composante normale  $dU/dn$  du potentiel (donc le champ électrique) est discontinue, et elle n'est égale au champ physique qu'à l'intérieur du volume  $V$  limité par  $S$ . Si la fonction  $G_D$  est connue (c'est rare), cette équation permet d'évaluer  $U$  dans le volume à partir de ses valeurs sur  $S$ .

3.  $\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) / \partial n = g(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = -1/S$  lorsque  $\mathbf{x} \in S$  : fonction de Green de Neumann

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r}) + \int_S d^2 \mathbf{x} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} - \int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial n}. \quad (2.17)$$

Si la dérivée normale de  $U$  est connue sur la surface (c'est rare)  $U$  est fourni dans le volume par

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_S d^2 \mathbf{x} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} + \langle U \rangle_S \quad (2.18)$$

où  $\langle U \rangle_S(\mathbf{r})$  est la moyenne de  $U$  sur  $S$  pondérée par  $g(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -1/S$ . Lorsque la surface  $S$  est conductrice,  $U(\mathbf{x}) = U_0$ . L'expression 2.17 exprime le potentiel en fonction des charges de volume, de surface, et de sa valeur sur la surface conductrice limite.

Il résulte en outre de 2.17 que

$$\left. \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\text{int}} - \left. \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

où

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \left. \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\text{int}}.$$

La composante normale  $dU/dn$  du potentiel (le champ électrique) est discontinue, et elle n'est égale au champ physique qu'à l'intérieur du volume  $V$  limité par  $S$ . Dans le cas d'un conducteur, la composante normale du champ est égale à  $\sigma / \epsilon_0$ , on retrouve l'expression du champ à la surface  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \sigma / \epsilon_0$ , et d'après (2.19), le champ est nul dans le conducteur situé à l'extérieur du volume (externe) considéré.

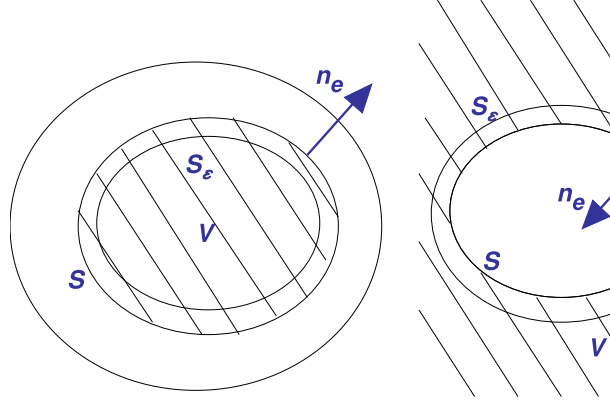


FIG. 2.2 – Le volume restreint  $V_\epsilon$ .

## 2.3 Équations intégrales des fonctions de Green

Il semble que nous ayons échangé un problème : *trouver le potentiel  $U$  vérifiant des conditions aux limites* pour un autre : *trouver une fonction de Green vérifiant une condition aux limites*. Les fonctions  $G_D$ ,  $G_N$ , et  $G_0$  sont cependant reliées par des équations intégrales de Fredholm qui permettent de les obtenir à partir de  $G_0$ . Le théorème de Green (2.2) peut être appliqué aux paires de fonctions  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  et  $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ , ou  $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  et  $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  lorsque  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{x}_0$  appartiennent au volume  $V_\epsilon$  limité par la surface  $S_\epsilon$  voisine de  $S$  (Fig. 2.2).

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \int_{S_\epsilon} d^2\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{x})} \quad (2.20)$$

Comme le suggère l'Éq. (2.20), on cherchera la fonction de Dirichlet ayant la valeur  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  sur  $S$  sous la forme  $G_D = G_0 + W$ , où la fonction harmonique  $W$  s'exprime suivant [Fredholm1900, Fredholm1903] par une intégrale sur la surface limite  $S$ .

$$W(\mathbf{r}) = \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

$\mathbf{n}$  désigne la normale externe. Le potentiel de double couche  $W$  est discontinu sur  $S$ . La limite de  $W$  n'est pas  $W(\mathbf{s})$ , mais  $W(\mathbf{s}_+) = W(\mathbf{s}) + 1/2g(\mathbf{s})$ , en désignant par  $\mathbf{s}_+$  l'intérieur de  $V$  au voisinage du point  $\mathbf{s}$  de la surface. De même,  $\mathbf{s}_-$  sera la limite externe. La Fig. 2.3 montre comment l'intégration sur la surface  $S$  est décomposée en deux parties, une zone hémisphérique proche de  $\mathbf{s}$ , à l'origine de la discontinuité, et le reste de la surface, qui constituera la *partie principale* (régulière) de l'intégrale. La surface de la zone hémisphérique est  $2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2$ , et sa contribution  $1/2g(\mathbf{s})$ .

On cherchera de même  $G_N$  sous la forme  $G_N = G_0 + V$ , où  $V$  est un potentiel de simple couche :

$$V(\mathbf{r}) = \int_S d^2\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) f(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

La dépendance de  $V$  et  $W$  par rapport à la position  $\mathbf{x}_0$  de la source ponctuelle est omise dans le reste de ce paragraphe. Le potentiel  $V$  est continu sur  $S$ . Au contraire, la composante normale du gradient est discontinue. Les contributions proches sont  $E_n(\mathbf{s}_+) = f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)$ , et  $E_n(\mathbf{s}_-) = -f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)$ . Les fonctions  $V$  et  $W$  vérifient les équations intégrales suivantes :

$$-\frac{\partial V(\mathbf{s}_+)}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial V(\mathbf{s}_-)}{\partial \mathbf{n}} = f(\mathbf{s}) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{s}_+)}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial V(\mathbf{s}_-)}{\partial \mathbf{n}} = 2 \int_S d^2\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (2.24)$$

$$W(\mathbf{s}_+) - W(\mathbf{s}_-) = g(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) \quad (2.25)$$

$$W(\mathbf{s}_+) + W(\mathbf{s}_-) = 2 \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}, v\mathbf{x}_0) \quad (2.26)$$

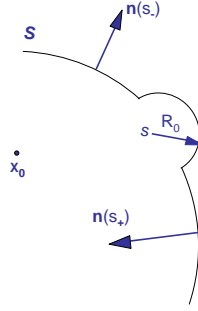


FIG. 2.3 – Surface limite pour un domaine  $V$  électrostatique.

Les deux premières équations décrivent (par exemple) le champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur, avec la densité de charge surfacique  $\epsilon_0 f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)$ . Les équations (2.25–2.26) s'interprètent de la même manière, en considérant qu'elles décrivent la composante normale du champ plutôt que le potentiel.

En appliquant les Éq. (2.23–2.26) à la surface  $S$  limitant un volume  $V$  entièrement incluse dans un milieu homogène, on voit que l'expression du potentiel  $U$  obtenue à partir de 2.14 n'est légitime qu'à l'intérieur de  $V$  : le prolongement à l'extérieur fait apparaître une discontinuité « artificielle » alors que le potentiel électrostatique est continu. On verra dans le chapitre suivant (et dans les exercices de celui-ci) des cas particuliers où une solution exacte est connue pour  $G_D$ , et plus rarement pour  $G_N$ .

On peut cependant établir à partir des relations qui précèdent des relations (dues à Fredholm) entre les fonctions  $G_0$  d'une part,  $G_D$  et  $G_N$  de l'autre.

D'une part, la condition de Dirichlet impose  $W(s_+) = -G_0(s, \mathbf{x}_0)$  sur  $S$ . D'autre part, il résulte de (2.25–2.26) que

$$W(s_+) = -G_0(s, \mathbf{x}_0) = \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} g(s)$$

On obtient ainsi

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = -2G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) - 2 \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (2.27)$$

L'Éq. (2.27) présente également une singularité quand  $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ , mais la divergence de  $G_0$  n'est qu'en  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{s}|$ , contrairement à celle de l'Éq. (2.20). C'est une équation intégrale de Fredholm à deux dimensions qui peut être résolue par itération ou (en discrétisant) par inversion matricielle. On en déduit la fonction de Green  $G_D = G_0 + W$ . Le traitement de la fonction de Green de Neumann se fait de manière similaire en utilisant les Éq. (2.23–2.24). On cherchera une décomposition  $G_N = G_0 + V$ , où  $V$  est représenté comme un potentiel de simple couche vérifiant, en supposant pour simplifier  $U = 0$  sur  $S$ . D'après les remarques suivant (2.10), on doit imposer

$$\partial V(s_+)/\partial \mathbf{n} = -\partial G_0(s, \mathbf{x}_0)/\partial \mathbf{n} - 1/S.$$

(où  $S$  est l'aire de la surface limite) la fonction  $f(s)$  obéit alors à l'équation

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = 2 \frac{\partial G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{s})} + \frac{2}{S} + 2 \int_S d^2 \mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.28)$$

Comme précédemment, la solution trouvée n'a de sens qu'à l'intérieur du volume  $V$  : la surface  $S$  est tout à fait arbitraire et elle ne coïncide pas nécessairement avec les surfaces physiques limitant le milieu considéré.

## 2.4 Conditions de Neumann modifiée

Le champ produit par une source ponctuelle dans une cavité dont les parois sont conductrices vérifie une condition de Neumann externe :  $E_n(s_-) = 0$ , et non plus une condition de Neumann comme dans le paragraphe 2.3. On peut chercher une solution simple couche correspondant précisément à la configuration spatiale d'une densité de charge surfacique  $\epsilon_0 f(\mathbf{s})$ . On recherche donc une solution  $\tilde{G}_N = G_0 + V$  harmonique dans  $S$ , vérifiant, en additionnant (2.25) et 2.26

$$2 \frac{\partial V(\mathbf{s}_-)}{\partial \mathbf{n}} = f(\mathbf{s}) + 2 \int_S d^2 \mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{s}_-)}{\partial n(\mathbf{s}_-)} = - \frac{\partial G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.30)$$

avec  $n(\mathbf{s}_-) = \mathbf{n}_e = \mathbf{n}$  selon nos conventions. Il en résulte

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = -2 \frac{\partial G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{s})} - 2 \int_S d^2 \mathbf{x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

L'Éq. (2.31) est similaire à (mais différente de) (2.28), et permet de décrire le potentiel d'une charge dans une cavité conductrice, ce qui n'est pas le cas de (2.28).  $f(\mathbf{s})$  correspond à une distribution de charges de surface comme sur la Fig. 2.2b.

## 2.5 Équivalence électrostatique : le potentiel

On suppose les sources contenues dans le volume  $V$  limité par la surface conductrice  $S$ . Lorsque le point d'observation est choisi dans le volume  $\tilde{V}$ , complémentaire de  $V$ , comme sur la Fig. ??, l'Éq. (2.13) devient, avec  $vn_{\text{int}} = -n_{\text{ext}}$  pour la normale intérieure à  $V$  :

$$U(\mathbf{r}_{\text{ext}}) = - \int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_{\text{int}}} + \int_S d^2 \mathbf{x} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n_{\text{int}}} \quad (2.32)$$

Si la surface  $S$  est l'équipotentielle d'un conducteur, l'intégrale  $\int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_{\text{int}}}$  est nulle, les contributions des deux éléments de surface interceptés par l'angle solide  $d\Omega$  étant opposées. Le potentiel externe s'exprime alors comme l'intégrale de la composante normale du champ électrique (pondérée par  $G_0$ ) sur  $S$  :

$$U(\mathbf{r}_{\text{ext}}) = - \int_S d^2 \mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n_{\text{ext}}} \quad (2.33)$$

La même expression (2.32) donne une valeur nulle du potentiel si  $\mathbf{r} \in V$  (Exercice 12). Ce résultat est évident pour la couche sphérique, considérée à l'Exercice 13.

## Exercices

**Ex. 1:** Par transformation de Fourier, l'équation de définition de la Fonction de Green devient  $k^2 G(k) = 1$ , mais cette relation ne peut être inversée qu'en attribuant une partie imaginaire au pôle  $k^2 = 0$ .

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d^3 \mathbf{x} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2 \pm i\epsilon}$$

Montrer que  $G = 1/(4\pi|\mathbf{x}|)$  en adaptant le contour à l'infini au choix du signe de  $i\epsilon$ .

**Ex. 2:** Que conclure du théorème de réciprocité dans le cas de deux charges ponctuelles ?

**Ex. 3:** Dans le cas d'un volume  $V_{\text{int}}$  diélectrique borné par la surface  $S$ , quelle est la relation trouvée en appliquant le théorème de réciprocité (ou le théorème de Green) au volume  $V_{\text{ext}}$  extérieur à  $S$  (comme sur la Fig. 2.1),  $V_{\text{ext}}$  s'étendant jusqu'à l'infini ? Appliquer ensuite le théorème à  $V_{\text{int}}$  pour obtenir une relation entre les intégrales de volume.

- Ex. 4:** Cas d'un conducteur plan ou sphérique dans le vide : trouver  $G_D$  en s'inspirant de la méthode des images. Utiliser le volume extérieur à la sphère ou le volume contenant le demi-plan vide pour exprimer  $U$  en présence d'une charge extérieure. Quelles sont les charges  $\rho(\mathbf{x})$  à considérer ?
- Ex. 5:** Vérifier que pour le demi-espace limité par un plan conducteur, la fonction de Green de Dirichlet s'annulant sur le plan conducteur s'obtient à l'aide de la charge miroir  $q' = -q$ . Comment obtient-on la fonction de Green de Neumann ?
- Ex. 6:** Construire à l'aide des charges miroir les fonctions de Green Dirichlet et de Neumann pour une sphère conductrice et un plan conducteur.

$$G_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0|}$$

- Ex. 7:** Y a-t-il unicité de la fonction de Neuman  $G_N$  avec la condition  $\partial G_N / \partial n = -1/S$  ?
- Ex. 8:** Démontrer que si  $U(\mathbf{r}) = \int_S \sigma(s) \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{x}_0|}$  La discontinuité de la dérivée normale est égale à  $\sigma$ . On pourra choisir un petit élément de surface circulaire autour de  $\mathbf{x}_0$ , de rayon  $\rho_0 \gg h$  où  $h$  est la distance de  $\mathbf{r}$  à la surface  $S$ . L'intégrale sur la zone circulaire se calcule explicitement, et l'intégrale externe est continue quand  $h \rightarrow 0$ .
- Ex. 9:** Démontrer la relation 2.23. Pour le point  $\mathbf{r}$  situé à la distance  $h$  de la surface  $S$ , on appellera  $\boldsymbol{\xi}$  le point le plus proche. La surface  $S$  au voisinage du point  $\boldsymbol{\xi}$  sera décomposée en deux parties : l'intérieur et l'extérieur d'un cercle de rayon  $\rho$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ , seul l'intérieur contribue à la discontinuité, que l'on évaluera.
- Ex. 10:** Démontrer par la même méthode la relation (2.25).
- Ex. 11:** Établir l'équation de Fredholm vérifiée par la fonction de Green de Neumann.
- Ex. 12:** Vérifier l'équation intégrale (2.31) obtenue avec la condition de Neumann modifiée. Ce potentiel est-il harmonique ? L'unicité est-elle établie ? quelle est la différence avec la fonction de Green de Dirichlet vérifiant la condition aux limites  $G_D = 0$  ?

# Chapitre 3

## Électrostatique des conducteurs

### 3.1 La relation d'Ohm dans les conducteurs

Dans un conducteur soumis à une différence de potentiel, on observe le passage d'un courant. Celui-ci vérifie approximativement la relation d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

Pour tenir compte du retard (causal) entre les variations du champ et celles du courant, une expression améliorée de la relation (3.1) sera

$$\mathbf{j}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}(t') \sigma(t-t'). \quad (3.2)$$

Après transformation de Fourier

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (3.3)$$

La plupart des observations physiques sont en accord avec cette description approchée. Les relations (3.1–3.3) violent cependant une loi fondamentale microscopique de l'électromagnétisme vérifiée par les équations de Maxwell : l'invariance par renversement du temps. Lorsque le paramètre  $t$  (le temps) change de signe, les vitesses de toutes les charges sont inversées, les courants aussi, mais le champ électrique  $\mathbf{E}$  (comme le champ coulombien statique) est inchangé. Les relations (3.1–3.3), qui sont de nature statistique, sont liées à des phénomènes de diffusion, et ne respectent pas l'invariance (microscopique) du renversement temporel ( $\sigma(\tau) = 0$  pour  $\tau \ll 0$ ). La loi d'Ohm reste une excellente approximation pour les fréquences usuelles ( $\ll 10^{15}$  Hz).

### 3.2 L'équilibre électrostatique des conducteurs

#### 3.2.1 Champ et charge dans un conducteur : régime stationnaire

L'équilibre électrostatique est défini par l'absence de tout courant :  $\mathbf{j} = \sigma(E)\mathbf{E}$  implique que  $\mathbf{E} = 0$ . Le champ électrique est nul dans un conducteur à l'équilibre. Compte tenu de  $\mathbf{E} = -\nabla U$  (régime stationnaire) le potentiel est constant, et la surface est une équipotentielle.

L'équation de Maxwell (1.15)  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  entraîne  $\rho = 0$ . La densité de charge est nulle dans un conducteur à l'équilibre.

#### 3.2.2 Lignes de champ

En électrostatique,  $\mathbf{E} = -\nabla U$  avec  $\Delta U = 0$  dans l'espace externe aux conducteurs. Il en résulte qu'il existe des lignes de champ tangentes en chaque point au champ électrique local, et perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Les lignes de champ permettent de définir des tubes de champ où le flux de  $\mathbf{E}$  se conserve. Comme les lignes de champ ne peuvent se terminer que sur une charge ou à l'infini, des tubes de champ connecteront des éléments des surfaces conductrices : l'application du théorème de Gauss au tube implique qu'elles auront des charges opposées comme le montre la Fig. 3.1.

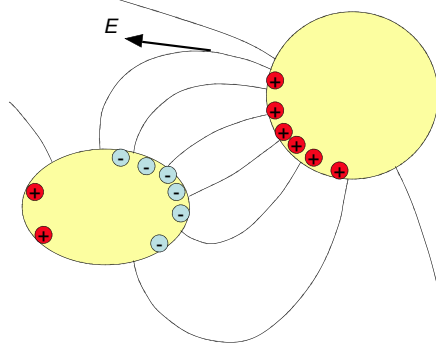


FIG. 3.1 – Lignes de champ et éléments correspondants.

### 3.3 Régimes non-stationnaires dans un conducteur

#### 3.3.1 Courants de surface

Les électrons étant confinés, la composante normale du courant est nulle :

$$\mathbf{j}_n = 0. \quad (3.4)$$

On admettra cependant la possibilité d'un courant surfacique de densité  $\mathbf{j}_s$ . Pour une petite couche d'épaisseur  $\delta$ ,  $I = \mathbf{j}_s dl = \mathbf{j} \delta dl$  soit  $\mathbf{j}_s = \mathbf{j} \delta$ . On peut définir une conductivité surfacique :  $\mathbf{E}_s = \mathbf{j} / \sigma = \mathbf{j}_s \delta / \sigma = \mathbf{j}_s / \sigma_s$  soit  $\sigma_s = \sigma / \delta$ .

#### 3.3.2 Composantes tangentielles de $\mathbf{E}$

On intégrant la relation 1.18

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (3.5)$$

sur le contour  $C$  indiqué sur la Fig. 3.2,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.6)$$

où la surface  $S$  s'appuie sur le contour  $C$  de la Fig. 3.1. En définissant les vecteurs unitaires tangents  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2$  sur les portions externes et internes du contour, ainsi que les normales unitaires  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ .

$$(E_{t_1} + E_{t_2})L + (E_{n_1} + E_{n_2})h \leq \int \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right| hL \quad (3.7)$$

La dérivée temporelle de l'induction magnétique est bornée : en choisissant  $h \ll L$  on obtient  $E_{t_1} + E_{t_2} = 0$ , soit

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2} \quad (3.8)$$

La composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est continue. Cette relation reste vraie à l'interface de deux diélectriques, ou d'un conducteur et d'un diélectrique.

#### 3.3.3 Composantes normales de $\mathbf{E}$

On intégrera les deux membres de l'équation de Maxwell (1.15)  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  sur le volume du cylindre droit représenté sur la Fig. (3.2) Les cotés du cylindre sont dirigés selon la normale  $\mathbf{n}$  :  $\mathbf{E}$  étant parallèles, ces cotés le flux du champ électrique est nul.

$$(E_{n_1}^1 + E_{n_2}^2)dS = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS \quad (3.9)$$

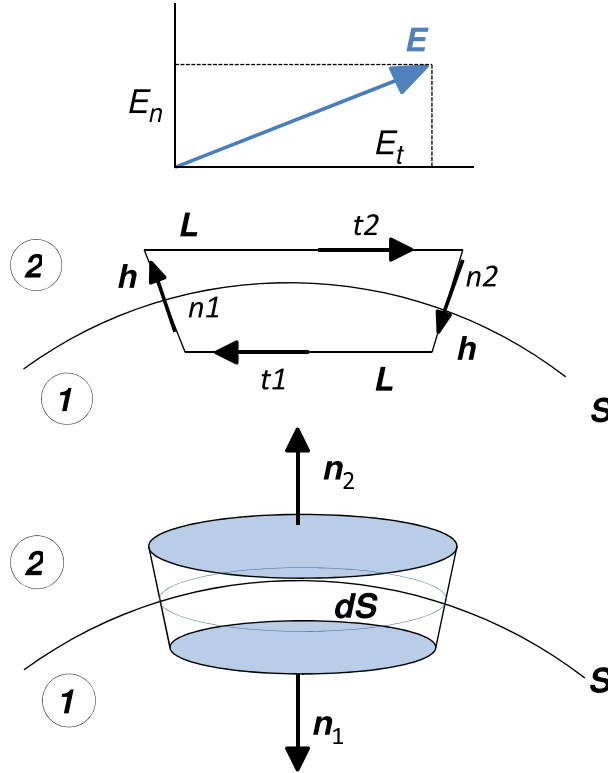


FIG. 3.2 – Le contour  $C$  pour la discontinuité tangentielle, et le volume cylindrique utilisé pour la discontinuité normale.

où  $\sigma$  est la densité surfacique de charges. Les normales  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  étant opposées, on note  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$

$$E_n^1 - E_n^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

comme  $E_{n_2} = 0$  à l'intérieur,

$$E_n^1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.11)$$

En régime non stationnaire, le champ électrique s'annule dans le conducteur, mais conserve une composante tangentielle à la surface. Des expressions quantitatives seront fournies ultérieurement pour un conducteur résistif. L'application du théorème de Gauss au petit cylindre de la Fig. 3.2 entraîne

$$E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.12)$$

Pour évaluer le temps caractéristique pour la transition vers un régime stationnaire dans un conducteur isolé, on admettra la validité de la loi d'Ohm dans le volume des conducteurs (des conditions plus faibles ne changeraient pas les conclusions).

### 3.3.4 Le temps de relaxation électrostatique

Le coefficient de conductivité  $\sigma$  est supposé, pour simplifier, indépendant de  $|\mathbf{E}|$ . La continuité du courant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.13)$$

entraîne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.14)$$

or

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.15)$$



et on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho \quad (3.16)$$

$$\rho(t) = \rho(0)e^{-t/\tau_e} \quad (3.17)$$

où  $\tau_e = \epsilon_0/\sigma$  est un temps de relaxation caractéristique. Pour des valeurs typiques,  $\sigma = 10^8(\Omega\text{m})^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-15}$  s. En pratique, la densité de charges électriques est toujours nulle à l'intérieur du conducteur.

### 3.3.5 Le temps de relaxation des courants

Dans un conducteur isolé où la conductivité est finie (bien que élevée), les pertes ohmiques vont de même rapidement conduire à l'annulation de tous les courants : on montrera que l'effet joule induit une variation d'énergie

$$\frac{dW_M}{dt} = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x} = -\frac{1}{\sigma} \int_V j^2 d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

alors que l'énergie magnétique des conducteurs est

$$W_M = \frac{1}{2} L \int_V j^2 d\mathbf{x} \quad (3.19)$$

où  $L$  est un coefficient de self-induction volumique dont l'ordre de grandeur est très inférieur à  $\mu_0 a$ ,  $a$  étant une dimension caractéristique du conducteur concerné. Pour  $a = 10^{-2}$  m, le temps caractéristique de la décroissance exponentielle est ainsi  $\tau_M = \sigma L/2 < 0.5$  s. Le temps de décroissance des courants de Foucault est très supérieur au temps de relaxation électrostatique.

## 3.4 Les coefficients d'influence

### 3.4.1 Linéarité

La condition de stationnarité  $\mathbf{E} = 0$  implique la constance de  $U$  sur l'étendue de chaque conducteur. Pour un ensemble de conducteurs dont la géométrie est fixée, la solution de l'équation de Poisson  $\Delta U = -\rho/\epsilon_0$  sera définie par les fonctions  $U_k$  ou  $\sigma_k(\mathbf{x})$  et chaque conducteur aura une charge  $Q_k$ . (Si la tension à l'infini est  $U_0 \neq 0$ , on substitue  $U_k - U_0$  à  $U_k$ .) L'équation étant linéaire en  $\rho$ , l'ensemble de valeurs  $\lambda U_k, \lambda \sigma_k$  sera une nouvelle solution (on suppose  $U_\infty = 0$ ). Il y a donc des coefficients  $C_{ij}$  dépendant de la géométrie de l'ensemble des conducteurs, tels que  $Q_i = C_{ij} U_j$ , ou plus généralement  $Q_i = C_{ij}(U_j - U_\infty)$ . Ce sont les coefficients d'influence. Ces coefficients peuvent être calculés pour une géométrie donnée des conducteurs à l'aide de la fonction de Green de Dirichlet  $G_0 = 1/(4\pi R)$ . En dehors des conducteurs, et en tirant partie de l'absence de charge dans le volume extérieur l'intégrale  $\partial U/\partial n = 0$  à l'infini D'après la relation (2.13)

$$U(\mathbf{r}) = - \sum_k \int_S V_k d^2 \mathbf{x} \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial n} \quad (3.20)$$

En prenant la limite de cette expression quand  $\mathbf{r}$  s'approche de la surface limite  $S$  (le potentiel est continu)

$$U(\mathbf{r}) = - \sum_k V_k \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial n} \quad (3.21)$$

L'intégrale est singulière au voisinage d'un point de la surface, et la normale est dirigée vers l'intérieur des conducteurs).

D'autre part, la charge portée par le conducteur  $k$  est donnée par

$$Q_k = -\epsilon_0 \int_{\Sigma_k} \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{\Sigma}_k \quad (3.22)$$

où le vecteur  $d\mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{n}_k d\Sigma_k$  est orienté vers l'extérieur et de module égal à l'élément de surface d'intégration  $d\Sigma_k$ .

Il en résulte

$$Q_i = C_{ik}V_k \quad (3.23)$$

$$C_{ik} = \epsilon \int_{\Sigma_i} d\Sigma_i \frac{\partial}{\partial n_i} \int_{\Sigma_k} \frac{\partial G_D}{\partial n_k} d\Sigma_k \quad (3.24)$$

**Remarques :**

1. La relation (3.24) explicite directement la relation linéaire

$$Q_i = \sum C_{ij}U_j \quad (3.25)$$

2. La relation entre les charges et les potentiels n'est exactement linéaire que pour des conducteurs parfaits (champ interne nul). Elle n'est qu'approchée en présence de diélectriques, où la capacité est fonction du champ.
3.  $C_{12}$  dépend évidemment de la position des autres conducteurs.
  - Il n'y a *pas* de relation directe entre la géométrie des lignes de champ (qui dépendent des charges) et les coefficients d'influence (qui n'en dépendent pas).
  - Les éléments « correspondants » interceptés par le même tube de champ ont des charges de surface égales et opposées (*Théorème de Gauss appliqué au tube de champ* : Fig. 3.1 et 3.4).

### 3.4.2 Symétrie des coefficients d'influence

La relation explicite (3.24) suffit à établir la symétrie des coefficients d'influence  $C_{ij}$ , compte tenu de la symétrie des fonctions de Dirichlet. On peut également utiliser le théorème de réciprocité 2.3 en l'appliquant à une surface conductrice. On considère alors une surface proche externe, le volume externe (vide de toute charge), et la normale externe au volume externe (dirigée vers l'intérieur de  $V$ ) :

$$\int_{S_{\text{ext}}} U(E_{n_{\text{ext}}})' = \int_{S_{\text{ext}}} U'(E_{n_{\text{ext}}}) \quad (3.26)$$

Au voisinage d'une surface conductrice  $E_{n_{\text{ext}}} = -\sigma/\epsilon_0$  On obtient ainsi par continuité

$$\int_S U\sigma' = \int_S U'\sigma \quad (3.27)$$

$$\sum U_i Q_i' = \sum U_j' Q_j \quad (3.28)$$

$$\sum U_i C_{ij} U_j' = \sum U_j' C_{ji} U_i \quad (3.29)$$

En identifiant les coefficients de  $U_j' U_i$  :

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (3.30)$$

### 3.4.3 Influence totale

Lorsque toutes les lignes de champ issues d'un conducteur aboutissent sur l'autre, le premier est dit sous influence totale. Il en résulte que pour deux conducteurs sous influence totale  $Q_1 = C(U_1 - U_2) = -Q_2$ . Deux exemples sont représentés sur la Fig. 3.3.

## 3.5 Équivalence électrostatique : le champ électrique

Le champ dans un volume  $\tilde{V}$  ne contenant aucune source peut s'exprimer à l'aide de ses valeurs sur la surface limitant  $\tilde{V}$ . Le point de départ est l'utilisation de la fonction de Green  $G_0$  utilisable dans un domaine infini ( $G_0(|\mathbf{x} - \mathbf{r}|) = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{r}|)$ ). On introduit un vecteur auxiliaire fixe arbitraire  $\mathbf{e}$ .

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_{\tilde{V}} d^3x \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \quad (3.31)$$

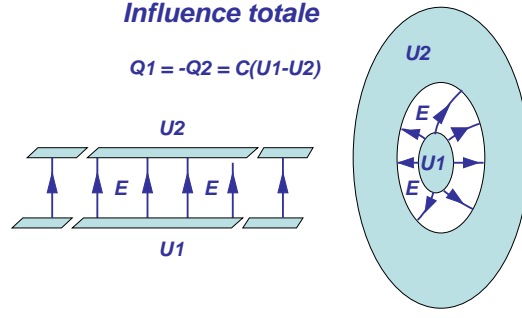


FIG. 3.3 – Deux conducteurs sous influence totale

On substitue dans (3.31) au laplacien  $\Delta$  l'expression  $\Delta = \nabla \nabla \cdot - \nabla \wedge (\nabla \wedge)$  :

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} (G\mathbf{e})) - \nabla_{\mathbf{x}} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}))]. \quad (3.32)$$

Chacun des deux termes du membre de droite se ramène à une intégrale de surface

$$\int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (G\mathbf{e}))] = \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G) \quad (3.33)$$

$\mathbf{E} \cdot [\nabla \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}))]$  est transformé à l'aide de

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \nabla \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (3.34)$$

En posant  $\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e})$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{E}$

$$\int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}))] = \int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \wedge ((G\mathbf{e}) \wedge \mathbf{E})] - \int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} (G\mathbf{e} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E})) \quad (3.35)$$

Le rotationnel de  $\mathbf{E}$  étant nul dans le volume considéré

$$\int_{\tilde{V}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}))] = \int_S d^2 \mathbf{x} \mathbf{n} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}) \wedge \mathbf{E}] \quad (3.36)$$

En utilisant  $\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e}) = \nabla_{\mathbf{x}} G \wedge \mathbf{e}$ , on obtient finalement en développant le double produit vectoriel, et en utilisant l'arbitraire du choix de  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2 \mathbf{x} \mathbf{n} (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G) - \mathbf{E} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G) - \nabla_{\mathbf{x}} G (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.37)$$

On utilise alors le développement du double produit vectoriel

$$\mathbf{E} \cdot \nabla G - \mathbf{E} (\mathbf{n} \cdot \nabla G) = \nabla G \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2 \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} G \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) - \nabla_{\mathbf{x}} G (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.38)$$

Le champ électrique à l'extérieur d'un volume contenant les sources s'exprime directement en fonction des valeurs de  $\mathbf{E}$  sur la surface limite  $S$  de  $V$ . Cette surface, de même que  $V$  est arbitraire et ne coïncide pas nécessairement avec les limites des conducteurs ou des diélectriques. Le terme  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})$  se comporte comme une densité de charges de surface (fictives), et  $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})$  sera identifié au Chap. 14 à un courant de surface (fictif) de magnétisation (Éq. (??)). Lorsque la surface  $S$  est une équipotentielle (par exemple celle d'un conducteur)  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0$ , et le double produit vectoriel ne contribue pas. Le champ externe s'exprime directement en fonction de la densité de surface, comme on s'y attendrait.

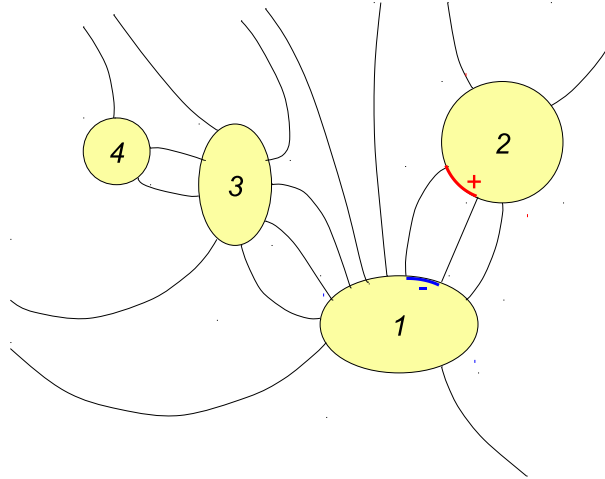


FIG. 3.4 – Coefficients d’influences entre conducteurs

On vérifie facilement que le champ calculé à partir de 3.38 est nul à l’intérieur de la surface limite  $S$  contenant les sources : la distribution de charges de surfaces compense exactement le champ des sources (voir exercices 11 et 12). Ce n’est (évidemment) *pas* le champ électrique physique. Le cas d’une distribution uniforme de charges sur une surface sphérique illustre de manière très simple le champ électrique nul à l’intérieur, et le champ électrique externe calculable à partir de sa valeur sur la surface. (Exercices 11,12)

## Exercices

- Ex. 1:** Montrer que deux lignes de champ ne peuvent se croiser que si  $\mathbf{E} = 0$  ou sur une charge ponctuelle.
- Ex. 2:** Pourquoi la relation entre charges et potentiels n’est-elle linéaire que pour des conducteurs parfaits ?
- Ex. 3:** Le coefficient d’influence  $C_{14}$  de la Fig. 3.4 est-il nul ?
- Ex. 4:** Donner une méthode de calcul des coefficients d’influence à l’aide des fonctions de Green
- Ex. 5:** Capacité d’un fil parallèle à un plan conducteur (utiliser son image).
- Ex. 6:** Capacité d’un fil parallèle à l’axe d’un cylindre (utiliser son image).
- Ex. 7:** Quel est le changement de tension  $\delta U_i$  du conducteur  $i$  quand la charge  $\delta Q_m$  est transportée du conducteur  $m$  au conducteur  $n$  ? examiner également les cas où  $m = i$ ,  $n = i$  et le cas de deux conducteurs sous influence totale.
- Ex. 8:** Comparer le champ électrique à la surface d’un plan conducteur uniformément chargé, et celui d’un plan diélectrique. On pourra utiliser le théorème de Gauss, mais on justifiera aussi le résultat par l’examen des relations de discontinuité ??
- Ex. 9:** Montrer que les coefficients d’influence calculés à partir de 3.24 sont symétriques.
- Ex. 10:** Quelles sont les discontinuités normales et tangentielles de  $\mathbf{E}$  engendrées par la densité de surface  $\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  ? En déduire que la limite sur  $S$  de la composante normale de  $\mathbf{E}$  est nulle à l’intérieur. Quelles sont les discontinuités normales et tangentielles engendrées par le courant de surface  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$  ? En déduire que la limite sur  $S$  de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est nulle à l’intérieur de  $S$ . À partir des deux résultats précédents, montrer que 3.38 donne un résultat nul pour  $\mathbf{E}$  dans le volume  $V$ .
- Ex. 11:** Une charge  $q$  est placée au centre d’une couche sphérique conductrice isolée de rayon  $R$  portée à un potentiel nul. Quelles sont les densités de charge sur les faces internes ( $\sigma_1^i$ ) et externes ( $\sigma_1^e$ ) ? Quel est le champ à l’extérieur et à l’intérieur ? On porte maintenant la couche sphérique au potentiel  $q/(4\pi\epsilon_0 R)$ . Quelles sont les densités internes ( $\sigma_2^i$ ) et externes ( $\sigma_2^e$ ), quels sont les champs électriques internes et externes ? On considère maintenant une couche surfacique unique externe de densité  $\sigma_2^e$ . Quel est le champ à l’intérieur de la sphère ?
- Ex. 12:** Démontrer plus généralement que les densités de charges ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ ) et de courants magnétiques surfaciques ( $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$ ) annulent le champ produit par les sources à l’intérieur de  $S$ .

## Chapitre 4

# Électrostatique des milieux diélectriques

### 4.1 Moment dipolaire d'un système de charges

Le potentiel d'un système de charges de position  $\mathbf{y}_i$  est

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}_i|} \quad (4.1)$$

On supposera la distance  $r = |\mathbf{r}|$  est grande par rapport aux dimensions  $a = \max(|\mathbf{x}_i|)$  du système. Le développement en puissance de  $\mathbf{y}_i$  sera :

$$4\pi\epsilon_0 U(\mathbf{r}) = \sum q_i \frac{1}{r} + \sum -q_i \mathbf{y}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{r} \right) + \sum q_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{1}{r} \right) y_k y_l + \dots \quad (4.2)$$

Le premier terme domine à grande distance pour un système chargé, mais pour un système neutre, c'est le second qui sera prépondérant. Le potentiel sera de la forme

$$4\pi\epsilon_0 U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$  est le moment dipolaire du système de charge, qui ne dépend pas de l'origine lorsque  $\sum q_i = 0$ . Le champ électrique  $\mathbf{E} = -\nabla U$  (Fig. 4.1) est donné par l'expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} (3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{p}). \quad (4.4)$$

### 4.2 Le diélectrique neutre

On supposera (pour simplifier) que le diélectrique est neutre, c'est à dire qu'aucune charge étrangère n'y a été apportée : la charge totale contenue dans un volume  $dV$  arbitraire est nulle.

$$Q = \sum_{dV} q_i = 0 \quad (4.5)$$

La contribution dominante à des distances grandes par rapport aux dimensions du volume sera contrôlée par le potentiel dipolaire engendré par la distribution des charges contenues dans les molécules à l'échelle microscopique. On définira le vecteur polarisation électrique  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  par l'expression du moment dipolaire de l'élément de volume  $dV$  lorsque sa charge est nulle :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) dV = \sum_{dV} q_i \mathbf{x}_i \quad (4.6)$$

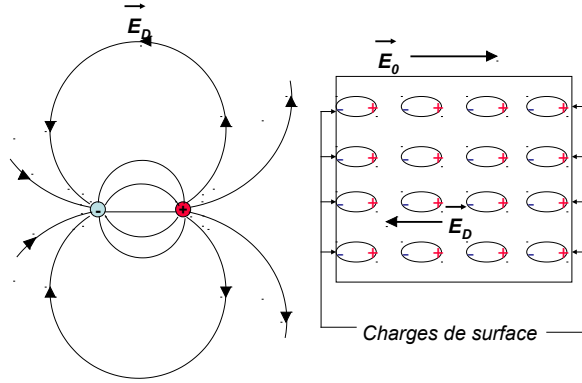


FIG. 4.1 – Configuration schématique du champ électrique pour un un dipôle et un ensemble de dipôles.

Le vecteur  $\mathbf{P}$  est indépendant du choix de l'origine. Le potentiel du diélectrique sera

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (4.7)$$

Bien entendu, le vecteur polarisation dépend du champ électrique externe auquel le diélectrique est soumis. S'il est naturel de décrire un milieu neutre comme une somme de dipôles en ajoutant leurs contributions au potentiel, l'expression de ce potentiel n'est justifiée qu'à des distances grandes par rapport aux dimensions du système élémentaire de charge nulle, la molécule. La formule employée implique ainsi (tacitement) une moyenne à des échelles significativement supérieures aux dimensions moléculaires. On montre facilement que la contribution de l'intégrale aux petites distances est négligeable (ce qui n'exclue pas une contribution finie des charges discrètes proches).

### 4.3 Charges de surface et de volume

L'intégrale précédente sur une distribution de dipôles équivaut à la somme d'une contribution de charges volumiques et d'une densité de surface.

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} = \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) \quad (4.8)$$

A l'aide de la relation

$$\nabla \cdot (f\mathbf{V}) = \nabla f \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (4.9)$$

on établit

$$4\pi\epsilon_0 U(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}, \quad (4.10)$$

soit

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (4.11)$$

Le potentiel  $U(\mathbf{r})$  s'écrit ainsi comme la somme d'une distribution de charges de surface et de volume. La densité de surface est  $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  (la normale  $\mathbf{n}$  étant orientée vers l'extérieur), et la densité de charges volumiques est  $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})$ . Le milieu étant neutre, les charges volumiques sont fictives : elles résultent uniquement d'un artifice mathématique traduisant la variation spatiale de la polarisation. On donne parfois le nom de *charges liées* à la densité  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ . Au contraire, Les charges de surface (qui proviennent aussi des charges élémentaires liées aux molécules) apparaissent aussi bien sur la surface externe que sur les parois d'une cavité creusée dans le diélectrique. Ce sont également elles qui permettent au papier d'être attiré par une surface ionisée comme l'ambre (elektro). La Fig. 4.2 donne une interprétation visuelle de la relation entre gradient de polarisation et distribution de charge « effective ».

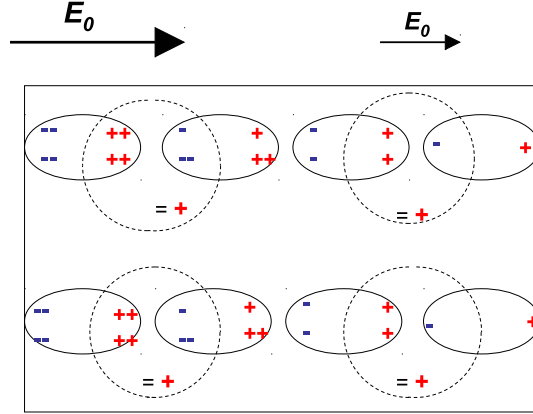


FIG. 4.2 – Équivalence entre gradient de polarisation et distribution de charges de surface et de volume.

## 4.4 Le vecteur induction diélectrique $\mathbf{D}$

Nous admettrons maintenant la présence éventuelle d'une distribution continue  $\rho_r$  de charges réelles dans le diélectrique, outre la distribution de charges fictives  $\rho_f$  précédemment introduites. D'après les relations précédentes :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_r - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (4.12)$$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_r}{\epsilon_0} \quad (4.13)$$

En introduisant l'induction électrique

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r. \quad (4.15)$$

Dans le diélectrique, la divergence de  $\mathbf{D}$  ne dépend que des charges réelles contenues dans le milieu. La résolution des équations en est (le plus souvent) simplifiée, mais il faut connaître la relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$ . Les deux vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  (ou  $\mathbf{P}$ ) traduisent la présence de deux types de charges élémentaires dans le diélectrique : les charges moléculaires liées (dont la somme est nulle), et les charges libres.

## 4.5 Les relations de constitution entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{E}$

### 4.5.1 Milieux isotropes

La relation la plus générale possible est de la forme :

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{x} K(|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

où la fonction  $K(l)$  décroît rapidement. Les modèles microscopiques vérifient en effet cette propriété dans les conditions usuelles : à l'échelle microscopique, la polarisation d'une molécule dépend du champ électrique régnant à son emplacement, et la polarisation moyenne sera déterminée par la valeur moyenne de  $\mathbf{E}$  dans un « petit » volume autour du point  $\mathbf{r}$ , la taille étant seulement déterminée par la nécessité d'une précision statistique suffisante. On pourra alors supposer une relation *locale* :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(E) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.18)$$

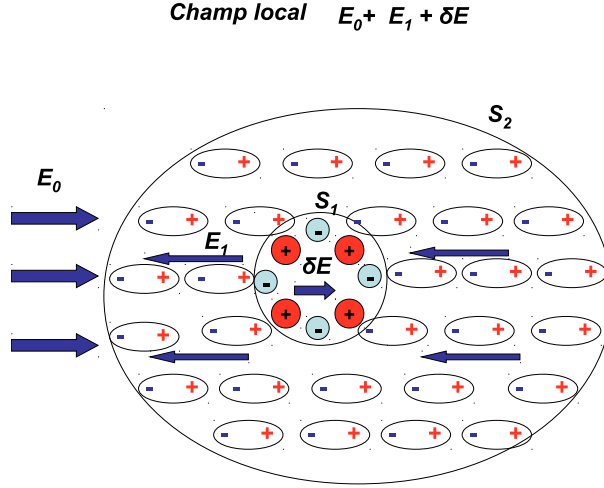


FIG. 4.3 – Les composantes du champ local dans un milieu diélectrique.

$\epsilon = 1 + \chi$  est la constante diélectrique. La susceptibilité  $\chi$  et la constante diélectrique  $\epsilon$  sont sans dimension.  $\epsilon$  peut varier de 1 à 10 (5 pour le Silicium). La compréhension quantitative de la relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  n'est possible que dans le cadre d'une théorie microscopique.

#### 4.5.2 Milieux anisotropes (cristaux)

Comme précédemment, nous substituerons à la relation linéaire la plus générale une relation locale :

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij}(E) E_j \quad (4.19)$$

où  $\epsilon_{ij}(E)$  est un tenseur qui dépend de la structure cristalline. Si le tenseur  $\epsilon_{ij}(E)$  n'est pas symétrique, on peut lui associer un pseudo-vecteur  $\mathbf{s}_k = \sum_{ij} e_{ijk} \epsilon_{ij}$  qui définit une direction privilégiée  $\mathbf{s}$ . On verra au paragraphe suivant (Éq.(4.25)) que c'est impossible en électrostatique (mais possible lorsqu'une onde se propage).

### 4.6 Le champ local

Le champ qui agit sur les molécules individuelles, et va (statistiquement) déterminer la densité de polarisation n'est pas le champ moyen, mais le champ local :

- Le champ local n'inclut pas l'effet des charges sur lesquelles il agit. Au contraire, le champ moyen les inclut.
- La contribution détaillée des charges individuelles voisines doit être prise en compte. Leur effet est « lissé » dans le champ moyen.

Pour analyser cet effet, il convient de découper le diélectrique en deux parties, comme le montre la Fig. (4.3) un petit volume  $dV$  limité par une surface  $S_1$  contenant les charges  $q_i$  proches du point considéré  $\mathbf{r}$ , le reste du diélectrique occupant le volume  $V$  limité par une surface  $S_2$  lointaine.

$$4\pi\epsilon_0 U(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \int_{S_1} d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \int_{S_2} d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (4.20)$$

$-\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$  est le potentiel induit par les charges externes lointaines. Comme le diélectrique est neutre, les charges  $q_i$  du volume proche  $dV$  vérifient  $\sum q_i = 0$ . Le champ électrique local peut de même être décomposé en cinq contributions :

$$\mathbf{E}_{local} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{S_1} + \mathbf{E}_{S_2} + \mathbf{E}_V + \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (4.21)$$



On montrera en exercice que  $\mathbf{E}_{S_1} \sim \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ . Le champ  $\mathbf{E}_{S_2}$  provenant de la surface lointaine  $S_2$  du diélectrique est le champ de dépolariation. Le champ des charges proches  $q_i$  doit être évalué en tenant compte des symétries de la structure cristalline. Il est souvent faible, et peut être strictement nul. Le champ moyen pourra être identifié aux contributions variant lentement :

$$\mathbf{E}_{moyen} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_V. \quad (4.22)$$

## 4.7 Symétrie du tenseur diélectrique

Sous l'effet du champ externe, les positions moyennes des charges (en fait, les électrons) se déplacent, et c'est ce déplacement qui engendre les dipôles à l'origine de la différence entre le champ externe appliqué  $\mathbf{E}_0$  et le champ moyen.

### 4.7.1 Modèle classique

Dans une approximation quadratique au site  $(i)$  du milieu, le potentiel de liaison d'un électron peut être décrit par le développement du potentiel mécanique  $V(i)$  au second ordre. Soit  $\mathbf{x}^{(i)}$  le déplacement de l'électron du site  $i$ , son énergie totale sera  $W = 1/2 V_{kl}(i) x_k^{(i)} x_l^{(i)} - q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}^{(i)}$ . Seule la partie symétrique du potentiel harmonique  $V_{jk}(i) = V_{kj}(i)$  contribue. L'énergie  $W$  doit être minimale à l'équilibre, il en résulte

$$\sum_{kl} V_{kl}(i) x_k^{(i)} = qE_l^0. \quad (4.23)$$

On peut noter l'équation précédente

$$V(i) \cdot \mathbf{x}^{(i)} = q\mathbf{E}_0, \quad (4.24)$$

où  $V(i)$  est une matrice symétrique fonction du site  $(i)$ . On obtient par inversion

$$\mathbf{x}^{(i)} = qV^{-1}(i)\mathbf{E}_0 \quad (4.25)$$

où  $V^{-1}$  est également symétrique. Le vecteur polarisation étant proportionnel à la moyenne (locale) des  $\mathbf{x}^{(i)}$  avec un poids (fonction de la distance)  $w^{(i)}$ ,  $P_l = \alpha \sum w^{(i)} \langle x_l^{(i)} \rangle = \alpha \sum w^{(i)} [V^{-1}(i)]_{lk} E_k^0$  sera lui aussi lié au champ  $\mathbf{E}$  par un tenseur diélectrique *symétrique*.

### 4.7.2 Modèle quantique

Le changement de fonction d'onde sous l'effet du champ externe est donné par

$$\delta\psi^{(i)} = -q \sum_l W_l \mathbf{E}_l^0 \cdot \mathbf{x} |\psi\rangle \quad (4.26)$$

où  $W_l = 1/(E_l - E_i)$ . Le déplacement se calcule (au premier ordre) par

$$x_l^{(i)} = -q \langle \psi^{(i)} | x_l^{(i)} | \delta\psi^{(i)} \rangle = -q \sum_l W_l \langle \psi^{(i)} | E_k^0 x_k^{(i)} x_l^{(i)} | \psi \rangle \quad (4.27)$$

Là aussi,  $\mathbf{x}^{(i)}$  est donné en fonction de  $\mathbf{E}^0$  par une matrice symétrique.

## 4.8 Conditions aux limites

Le vecteur induction électrique  $\mathbf{D}$  vérifie l'équation (4.15) :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r. \quad (4.28)$$

L'analyse des discontinuités normales se fait comme pour le champ électrique à l'aide de la Fig. 3.2. À l'interface de deux milieux neutres ( $\rho_r = 0$ ), la composante normale du vecteur  $\mathbf{D}$  sera continue :

$$D_{n_1} = D_{n_2}. \quad (4.29)$$

## Ecrantage

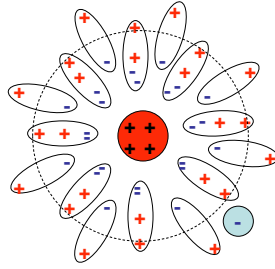


FIG. 4.4 – Écrantage d'une charge dans un diélectrique.

En présence d'une densité surfacique  $\sigma$  à l'interface d'un conducteur et d'un diélectrique :

$$(\mathbf{D}(1) - \mathbf{D}(2)) \cdot \mathbf{n} = \sigma. \quad (4.30)$$

Au voisinage d'une densité surfacique  $\sigma$  plongée dans un diélectrique, le théorème de Gauss conduit à :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma/2. \quad (4.31)$$

Combinée à la continuité tangentielle de  $\mathbf{E}$ , et à la relation (4.18) :

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} \quad (4.32)$$

Ces équations permettent de traiter la transition entre deux milieux diélectriques, et le champ à la surface d'un conducteur plongé dans un milieu neutre.

## 4.9 Forces dans les diélectriques

L'équation  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r$  correspond à une dépendance coulombienne pour l'induction  $\mathbf{D}$  créée par une charge ponctuelle  $q$  introduite dans le milieu, comme pour le champ électrique.

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (4.33)$$

Le champ électrique  $\mathbf{E}$  qui détermine les forces va être divisé par  $\epsilon$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (4.34)$$

La polarisation dipolaire des molécules du diélectrique écrantent la charge  $q$  (Fig. 4.4). Cette propriété explique la dissolution de certains composés dans l'eau.

La force exercée sur un dipôle se calcule directement comme la somme des forces sur chacune des charges :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{x}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{x}_-)) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}. \quad (4.35)$$

On retrouve (voir exercice **Ex. 7** :) ce résultat à partir du potentiel électrostatique  $U$  du dipôle dans le champ  $\mathbf{E}$  dans le cas d'un champ  $\mathbf{E}$  uniforme :

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (4.36)$$

Le travail  $\delta W$  du couple de forces dans une rotation  $\delta\phi$  du dipôle dans le champ électrique uniforme est  $dW = \mathbf{C} \cdot \delta\phi = \delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$  la variation du dipôle  $\mathbf{p}$  est  $\delta\mathbf{p} = \delta\phi \wedge \mathbf{p}$

Il en résulte  $\delta\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = \delta\phi \cdot (\mathbf{p} \wedge \mathbf{E})$  :

$$\mathbf{C} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} \quad (4.37)$$

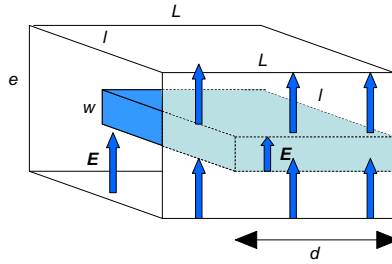


FIG. 4.5 – Le condensateur diélectrique.

## Exercices

- Ex. 1:** Un diélectrique limité par deux plans parallèles, d'épaisseur  $e$  (Fig. 4.5) est inséré dans un condensateur plan où le champ est  $\mathbf{E}$ . Le potentiel des deux plans conducteurs du condensateur est fixé et vaut 0 et  $U_0$ . Quel est en l'absence de toute charge externe sur les faces du diélectrique le champ électrique à l'intérieur? Quel est le potentiel sur les quatre plans (condensateur et diélectriques)?
- Ex. 2:** Dans la configuration précédente, des particules ionisantes créent des charges libres dans l'air. Ces charges vont se déplacer vers les plans limites du diélectrique. Donner le champ interne au diélectrique et les potentiels sur les deux plans du diélectrique lorsque l'équilibre est atteint.
- Ex. 3:** On suppose maintenant le diélectrique limité par deux plans parallèles l'exercice **Ex. 1** : inséré dans un champ uniforme  $\mathbf{E}_0$  mais les plans ne sont plus perpendiculaires au vecteur champ électrique (Fig. ??). Calculer le vecteur champ électrique à l'intérieur et dessiner les lignes de champ issues d'une face métallique jusqu'à l'autre.
- Ex. 4:** Établir l'équation d'Euler lorsqu'un terme cinétique de rotation du dipôle est pris en compte par une contribution supplémentaire  $(1/2)I_{ij}\omega_i\omega_j$  dans le lagrangien ( $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur rotation).
- Ex. 5:** Quel est le moment  $\mathbf{C}$  des forces exercées sur un dipôle  $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$ ? Retrouver la même expression à partir de la variation d'énergie du dipôle dans une rotation infinitésimale de vecteur  $\delta\phi : \delta\mathbf{p} = \delta\phi \wedge \mathbf{p}$ , avec  $\delta W = \mathbf{C} \cdot \delta\phi$ .
- Ex. 6:** On considère un condensateur formé de deux plaques de longueur  $L$  et de largeur  $l$ , séparées par une distance  $e$ . Un diélectrique de constante diélectrique  $\epsilon$  est introduit entre les plaques sur une longueur  $d$  (voir Fig. 4.5). Le champ  $\mathbf{E}$  est supposé uniforme entre les plaques. Calculer la densité de charge sur les surfaces supérieures et inférieures du diélectrique, et en déduire la force exercée sur le diélectrique.
- Ex. 7:** Calculer la force exercée sur un dipôle à l'aide du lagrangien

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}.$$

Le mouvement du centre de gravité est donné par l'équation d'Euler

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E})$$

On utilisera la relation

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$$

pour montrer que

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

et retrouver la formule (4.35) dans le cas où le champ  $\mathbf{E}$  est uniforme.

**Ex. 8:** Sphère diélectrique dans un champ uniforme : Polarisation à l'intérieur de la sphère et champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur. Utiliser les conditions aux limites.

# Chapitre 5

## Solution de quelques problèmes d'électrostatique

*Note YC : la structure des exercices est à revoir.*

### 5.1 Problèmes à deux dimensions

Il arrive que les problèmes d'électrostatique concernent des configurations à trois dimensions invariantes pour des translations perpendiculaires à un plan (symétrie cylindrique), comme dans la Fig. 5.2. On est ainsi en présence d'un problème ramené à deux dimensions. Dans le cas d'un système de conducteurs, il s'agit de trouver *la* solution de l'équation

$$\Delta U = 0 \tag{5.1}$$

avec des valeurs de  $U$  imposées sur les conducteurs (avec la présence éventuelle de charges ponctuelles). La méthode générale pour résoudre ce type de problème à l'aide des fonctions de Green a été exposée au Chap. 2, mais certaines configurations géométriques simples peuvent être traitées analytiquement. La transformation par inversion, qui conserve l'harmonicité des fonctions permet également de relier différents cas impliquant des plans et de sphères. Dans les configurations à deux dimensions, la méthode privilégiée est celle des transformations conformes, complétée parfois, pour des sources ponctuelles, par la méthode des images : les fonctions complexes  $f(x + iy)$  analytiques dans un domaine ont en effet, comme le potentiel, un laplacien nul en l'absence de charges.

#### 5.1.1 Source ponctuelle

Une source ponctuelle à deux dimensions (Fig. 5.1) correspond au cas d'un fil linéaire infini portant une densité de charge  $\lambda$  constante (en trois dimensions). La solution de

$$\Delta_2 U = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \delta_2(x - x_0) \tag{5.2}$$

est

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log(r) + \text{cste} \tag{5.3}$$

Cet exemple présente plusieurs caractéristiques instructives :

1. Le potentiel à l'infini ne peut pas être fixé à une valeur nulle, elle contredirait la valeur imposée par le fil dans son voisinage.
2. La décroissance du champ électrique radial  $E(r) = 1/(2\pi\epsilon_0 r)$  est plus lente que pour une source ponctuelle à trois dimension, ce qui se comprend puisqu'il s'agit en 3D d'une distribution linéaire, et qu'on somme les contributions de toutes les charges.
3. Si le fil est conducteur, la capacité par unité de longueur est nulle, et il ne peut porter une densité de charge finie.

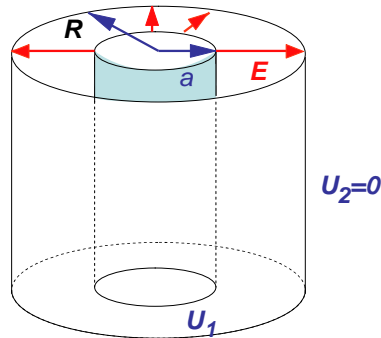


FIG. 5.1 – Source cylindrique 2D (fil).

**Exercice**

Le démontrer en examinant pour deux cylindres concentriques  $U(r_1) - U(r_2)$ ,  $U(r_2) = 0$  (le champ électrique et la densité de charge sont alors définis) et en passant à la limite  $r_2 \rightarrow \infty$ .

**5.1.2 Méthode des images : plan conducteur et cylindre**

Le cas d'un fil parallèle à un plan ou à l'axe d'un cylindre sont des problèmes à deux dimensions. Lorsqu'on impose  $U = \text{cste}$  sur un plan conducteur la solution de l'équation  $\Delta U = 0$  en présence d'une charge ponctuelle  $q$ , s'obtient en ajoutant le potentiel de la charge dans le vide et celui de la charge opposée, placée symétriquement par rapport au plan (Fig. 5.2). Cette solution est évidemment acceptable dans le demi-plan où est située la charge  $q$ , et comme il y a unicité, c'est la solution correcte. Elle ne convient pas dans le demi-plan contenant la charge image, puisque celle-ci est absente dans la géométrie initiale. Par inversion par rapport à un point arbitraire, on obtient alors la solution du potentiel pour une charge ponctuelle (2D) en présence d'un conducteur circulaire plan. Les deux charges sont à des positions conjuguées l'une par rapport à l'autre (Fig. 5.2), et le rapport des charges doit être choisi de manière que la surface conductrice soit l'équipotentielle  $U = 0$ , soit  $q' = -qR/d$ , où  $d$  est la distance du centre de la sphère à la charge  $q$ .

**5.1.3 Formule de Poisson (cercle 2D)**

Les propriétés des fonctions complexes permettent de trouver directement la relation entre la valeur du potentiel en un point et sa valeur sur une surface circulaire, en utilisant le théorème des résidus :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C dz' \frac{f(z')}{z' - z}. \tag{5.4}$$

Il suffit de prendre la partie réelle de cette expression dans le cas d'un contour  $C$  circulaire pour obtenir la relation de Poisson :

$$U(\mathbf{r}) = R^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \int d\phi \frac{f(\phi)d\phi}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \phi}. \tag{5.5}$$

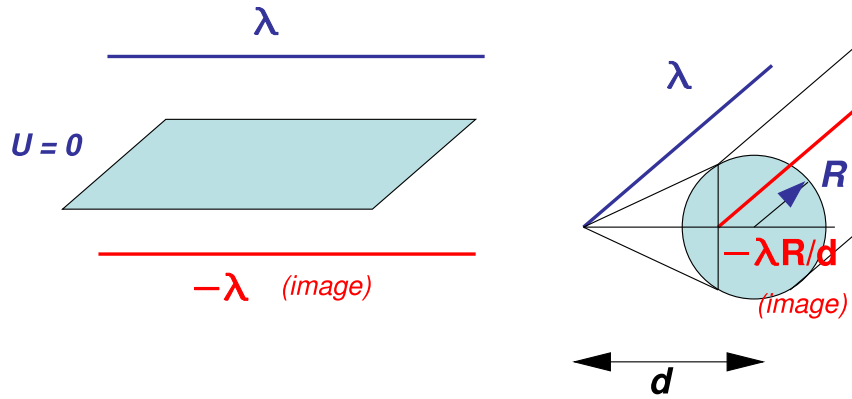


FIG. 5.2 – Source ponctuelle 2D.

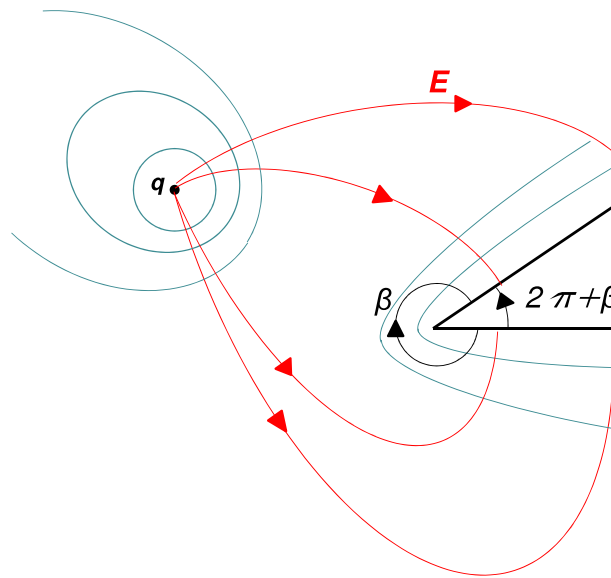


FIG. 5.3 – Les lignes de champ au voisinage du coin à deux dimensions.

### Exercice

Trouver le rapport entre la charge et la charge image assurant  $U = 0$ . Vérifier que la formule de Poisson (5.4) pour le potentiel donne même résultat que l'ensemble charge + charge image lorsque  $f(\phi) = U_0$ .

### 5.1.4 Transformation conforme

Les fonctions analytiques complexes  $f(z)$  vérifient

$$\Delta \Re(f(z)) = 0 \quad \Delta \Im(f(z)) = 0 \quad (5.6)$$

une transformation analytique régulière  $z = g(Z)$  préservera cette propriété mais peut simplifier les surfaces limites et permettre de trouver une solution explicite.

### Exercices

**Ex. 1:** Un plan  $U = 0$  en présence d'une charge ponctuelle  $q$  a déjà été traité.

**Ex. 2:** Un coin d'angle  $\beta$  ( $-2\pi\beta < 0$  pour un coin aigu) limite par deux demi-plans  $U = 0$  et une charge ponctuelle  $q$  : en posant  $Z = z^{\pi/\beta}$  : les  $1/2$  plans d'azimut  $\phi = 0$  et  $\phi = \beta$  (Fig. 5.3) sont transformés dans les  $1/2$  plans  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$  pour la variable  $Z$  : on est ramené au cas d'une charge ponctuelle

en présence d'un plan  $U = 0$ . En l'absence de charge ponctuelle, le potentiel peut être choisi comme combinaison de fonctions

$$U = \Im(z^{n\pi/\beta})$$

( $n > 0$ ). Il n'y a pas unicité : ces fonctions sont singulières à l'infini, et n'y ont pas de valeur définie. En présence d'une charge  $q$ , on doit ajouter le charge image  $z'_0$ . Si

$$\begin{aligned} z_0 &= |z_0|e^{i\phi_0} \\ z'_0 &= (|z_0|)^{\pi/\beta}e^{-i\phi_0\pi/\beta} \end{aligned}$$

Avec le choix  $n = 1$  :

$$U = \Re \left[ \log \left( \frac{z^{\pi/\beta} - (z_0)^{\pi/\beta}}{z^{\pi/\beta} - (z'_0)^{\pi/\beta}} \right) \right]$$

Les conditions à l'infini sont  $U = 0$  sur les plans limites, mais la solution proposée n'est pas unique (le domaine des conditions limites est restreint). Des puissances plus élevées de  $z^{\pi/\beta}$  sont permises mais elles ne domineront pas au voisinage du coin. Le champ électrique est fourni par les relations

$$E_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho} \sim \rho^{\pi/\beta-1} \sin \frac{\pi\phi}{\beta} \quad (5.7)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \sim \rho^{\pi/\beta-1} \cos \frac{\pi\phi}{\beta} \quad (5.8)$$

Le champ électrique tend vers zéro comme  $\rho^{\pi/\beta}$  si le coin est entrant ( $\beta < \pi$ ) et tend vers l'infini comme  $\rho^{\pi/\beta-1}$  si le coin est sortant (pointe) avec un angle  $2\pi - \beta$

## Exercices

**Ex. 1:** Chambre à fils proportionnelle. Ces détecteurs permettent de reconstituer la trajectoire des particules chargées. Un fil situé entre deux plans conducteurs ( $y = \pm L, U = 0$ ) est porté au potentiel  $V$ . Montrer à l'aide d'une transformation conforme que dans le plan complexe  $z = x + iy$ , le potentiel d'une source située au point  $z'$  est  $-2R\rho \cos \phi$

$$\phi(z, z') = -2 \ln \left( \frac{\sinh[(\pi/4L)(z - z')]}{\cosh[(\pi/4L)(z - \bar{z}')] } \right)$$

où  $\bar{z}$  est le conjugué complexe de  $z$ .

**Ex. 2:** Le potentiel  $U = \Im(E_0 z)$  est-il une solution en présence de deux conducteurs linéaires (2D)  $x > 1$  et  $x < -1$  (ou de deux demi-plans en 3D)? Y a-t-il unicité?

**Ex. 3:** La transformation  $Z = z + \sqrt{z^2 - 1}$  transforme la fente de la Fig. (5.4) dans l'axe  $x'Ox$  de la figure (5.4) si l'on prend les déterminations appropriées par continuité de la racine. Préciser ces déterminations. la fonction  $U = \Im E_0(z + \sqrt{z^2 - 1})/2$  s'annule sur les 1/2 droites  $x > 1$  et  $x < -1$ . Quel est le champ électrique à l'infini de ce potentiel?

**Ex. 4:** Quel est le potentiel d'une charge ponctuelle (2D)  $q$  localisée sur l'axe  $Oy$  (Fig. 5.4) en présence des demi-plans conducteurs précédents et s'annulant à l'infini.

**Ex. 5:** Charge ponctuelle (ou fil) et disque 2D (ou cylindre 3D), Fig. 5.4. Montrer que

$$U = \Re [qA \log(z - z_0)/(z - z'_0)]$$

est une solution en ajustant  $A$  pour avoir  $U = 0$  sur le contour du cylindre ( $z'_0$  est le conjugué de  $z_0^*$  par rapport au cylindre). Quel est le comportement à l'infini trouvé?

**Ex. 6:** Quelle est la limite du potentiel précédent quand la charge ponctuelle est éloignée et crée un champ électrique uniforme  $E_0$  (ajouter la charge image située au centre)?

**Ex. 7:** Même question pour une charge ponctuelle en présence d'un segment conducteur  $-1 < x < 1$ . On pourra utiliser la transformation conforme  $Z = z + \sqrt{z^2 - 1}$  pour transformer le segment en disque.

**Ex. 8:** Déterminer le passage d'un rayon au suivant pour un maillage  $(r, \phi)$  du plan à partir d'un développement au deuxième ordre.



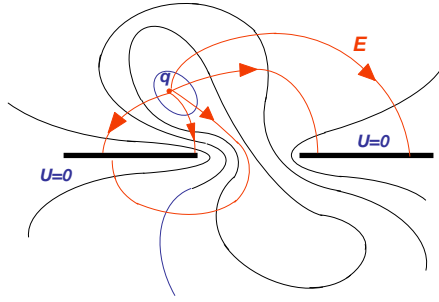


FIG. 5.4 – Source ponctuelle et plan fendu.

### 5.1.5 Méthodes numériques 2D

Il existe de très nombreuses méthodes numériques de résolution de problèmes électrostatiques. Nous citerons à deux dimensions :

- Maillage : les conditions aux limites peuvent être propagées en respectant de manière approchée la condition du laplacien nul.

$$U(x, y) = a_{00} + a_{11}x + a_{12}y + a_{21}(xy) + a_{22}(x^2 - y^2) + a_{31}(x^3 - 3xy^2) + a_{32}(y^3 - 3yx^2) + \dots \quad (5.9)$$

Les coefficients sont déterminés de proche en proche. La maille initiale (large) sera réduite peu à peu. La base polynomiale peut être choisie en fonction des symétries de la configuration :

- polynômes harmoniques  $r^l P_l(\phi)$  (pas de singularité)
- $j_l(kr)P_l(\phi)$  ou  $h_l(kr)P_l(\phi)$  (symétrie cylindrique régulière ou singulière, le nombre  $k$  étant lié au rayon des surfaces limites)

#### Exercices

*Nous décrirons une méthode de calcul sur une grille spatiale.*

**Ex. 1:** Montrer que pour de petites valeurs de  $h$  :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

**Ex. 2:** Transformer l'équation du laplacien à deux dimensions  $\Delta\Phi(x, y) = 0$  à l'aide de l'exercice précédent et montrer qu'en coordonnées cartésiennes, la solution vérifie

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{4} [\Phi(x_0 + h, y_0) + \Phi(x_0 - h, y_0) + \Phi(x_0, y_0 + h) + \Phi(x_0, y_0 - h)]$$

Noter l'analogie avec le théorème de la moyenne (Chap. 2, § 2.1.1).

**Ex. 3:** Reprendre l'exercice précédent en coordonnées cylindriques.

## 5.2 Problèmes à trois dimensions

### 5.2.1 Images

Si le potentiel est harmonique dans le volume  $V$  (aucune charge), et qu'il est donné sur la surface limite  $S$ , le plus simple est d'utiliser l'équation 2.10

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x}) - \int_S d^2\mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x})}{\partial n}$$

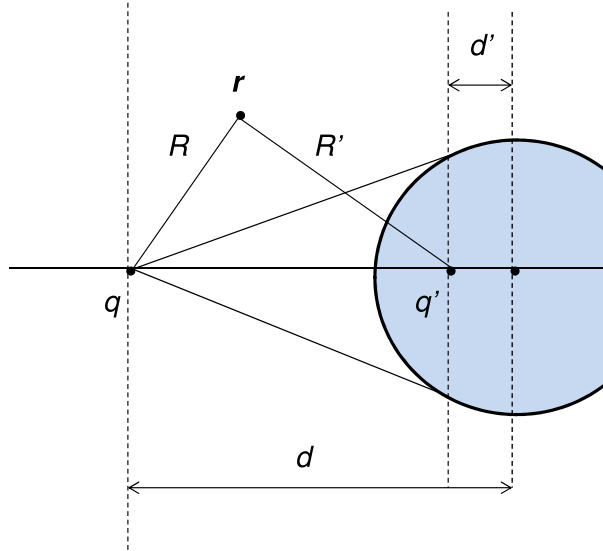


FIG. 5.5 – Image électrique d’une source ponctuelle extérieure à une sphère conductrice.

La fonction  $G_D$  est en général trouvée par les équations intégrales (2.27), mais l’utilisation des images électrostatique permet de deviner la solution dans quelques cas simples. Dans le cas d’une sphère, on ajoute à la solution ponctuelle dans tout l’espace la contribution image (Fig. 5.5) du point  $\mathbf{r}$  où on calcule le potentiel.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R} + \frac{q'}{4\pi R'} \quad (5.10)$$

avec  $q'/d' = -1/d$ .

L’inversion a permis de passer d’une configuration avec des surfaces limites planes à une surface limite sphérique, puisqu’elle préserve l’équation  $\Delta U = 0$ . L’analyse de l’effet de pointe en 3D est techniquement plus complexe, et nous suivrons la démarche de ???. La formule générale est donnée par 2.10

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x}) - \int_S d^2\mathbf{x} U(\mathbf{x}) \frac{\partial G_D(\mathbf{r} - \mathbf{x})}{\partial n}$$

peut être utilisée si  $U$  est connu sur une sphère contenant le point : la fonction de Green  $G_D$  peut être trouvée par la méthode des images. On ajoute à la solution ponctuelle dans tout l’espace la contribution image (Fig. 5.4) du point  $\mathbf{r}$  où on calcule le potentiel.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R} + \frac{q'}{4\pi R'} \quad (5.11)$$

avec  $q'/d' = -1/d$ .

L’inversion a permis de passer d’une configuration avec des surfaces limites planes à une surface limite sphérique, puisqu’elle préserve l’équation  $\Delta U = 0$ .

## Exercice

- Ex. 1:** Utiliser la méthode des images pour le champ d’une charge en présence d’un volume diélectrique limité par un plan ou pour une charge et une sphère diélectrique.
- Ex. 2:** Même problème pour un fil parallèle à l’axe d’un cylindre diélectrique ou à un plan.
- Ex. 3:** Utiliser une transformation conforme pour le champ d’une charge et d’un demi plan pourvu d’une fente rectangulaire. Adapter au cas d’un champ uniforme.

### 5.2.2 Formule de Poisson (sphère 3D)

Dans le cas particulier d'une sphère de rayon  $R$ ,  $\partial_x G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x})/\partial n = \partial G_D/\partial r$  ( $r = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ ).

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} R \left( \frac{\rho'^2}{R^2} - 1 \right) \int_S d^2\mathbf{x} \frac{U(\mathbf{x})}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \theta)^{3/2}}, \quad (5.12)$$

$\rho'$  est la distance du point image au centre de la sphère.

### 5.2.3 Développements sur des bases polynomiales

- polynômes harmoniques  $r^l Y_l^m(\theta, \phi)$  (pas de singularité)
- $j_l(kr) Y_l^m(kr)$  ou  $h_l(kr) Y_l^m(kr)$  (symétrie cylindrique régulière ou singulière, le nombre  $k$  étant lié au rayon des surfaces limites)

### 5.2.4 Pointes à trois dimensions

Lorsque le potentiel est cherché dans tout le domaine angulaire de  $4\pi$ , une base complète de fonctions *harmoniques* à trois dimensions est constituée par les fonctions dont la dépendance angulaire est fournie par les polynômes de Legendre à indices  $l$  et  $m$  entiers. Nous suivons la méthode proposée par [Jackson1998] :

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} A_m e^{\pm im\phi} P_l(\cos \theta) (B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}) \quad (5.13)$$

avec  $C_l = 0$  pour une fonction potentiel moins singulière qu'une charge ponctuelle.

Lorsque le domaine d'harmonicité est restreint à l'intérieur ou l'extérieur d'un cône, rien n'impose à l'indice  $l$  d'être entier. C'est la plus petite valeur de  $\nu_k$  vérifiant  $P_{\nu_k}(\cos \beta) = 0$  qui aura la contribution dominante. Lorsque l'angle d'ouverture  $\beta \rightarrow \pi$  (pointe),  $\cos \beta \rightarrow -1$  et l'exposant le plus petit  $\nu_k$  vérifiant  $P_{\nu_k}(\cos \beta) = 0$  tend vers 0. On utilise pour  $n$  réel arbitraire la relation

$$P_n(\cos \beta) = \cos(n\pi) P_n(\cos -\beta) - 2 \frac{\sin n\pi}{\pi} Q_n(-\cos \beta). \quad (5.14)$$

Les zéros de  $P_n(-\cos \beta)$  (à  $\beta$  fixé) satisfont

$$\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi} = \tan(n\pi) = \frac{\pi P_n(-\cos \beta)}{2 Q_n(-\cos \beta)} \quad (5.15)$$

$$n\pi = \arctan \left( \frac{\pi P_n(-\cos \beta)}{2 Q_n(-\cos \beta)} \right) \quad (5.16)$$

mais

$$Q_n(-\cos \beta) = \frac{1}{2} P_n(-\cos \beta) \log \left( \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} \right) - W_{n-1}(-\cos \beta) \quad (5.17)$$

où  $W_n$  est de degré  $n - 1$  pour  $n$  entier. Quand  $\cos \beta \rightarrow -1$ , l'indice  $n$  est proche de zéro, et le terme dominant sera

$$n = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\pi}{\log \left( \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} \right)} \right) \quad (5.18)$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos(\beta/2)^2 = 2 \sin[(\pi - \beta)/2]^2 \sim \frac{(\pi - \beta)^2}{2} \quad (5.19)$$

si bien que

$$n \sim \frac{1}{2 \log(\frac{\pi - \beta}{2})} \quad (5.20)$$

Le comportement du potentiel d'une pointe fine sera  $U \sim r^\epsilon$ , avec  $\epsilon < 0$  quand l'ouverture du cône  $\cos \beta \rightarrow -1$ . Le champ électrique  $E_r$  pour une pointe effilée aura un comportement en  $r^{n-1}$ , croissant vers l'infini au voisinage de la pointe, comme dans le cas d'un fil infini (c'est à dire d'une source ponctuelle dans deux dimensions). C'est le cas à l'extrémité d'un paratonnerre.

## Annexe

À partir de [Jackson1998].

$$\text{bib : } \text{Hobson} P_n(-\cos \theta) = \cos(n\pi) P_n(\cos \theta) - 2 \frac{\sin n\pi}{\pi} Q_n(\cos \theta)$$

Les zéros de  $P_n(-\cos \theta)$  (à  $\theta$  fixé) satisfont

$$\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi} = \tan(n\pi) = \frac{\pi P_n(\cos \theta)}{2 Q_n(\cos \theta)}$$

$$n\pi = \arctan \left( \frac{\pi P_n(\cos \theta)}{2 Q_n(\cos \theta)} \right)$$

mais

$$Q_n(\cos \theta) = \frac{1}{2} P_n(\cos \theta) \log \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) - W_{n-1}(\cos \theta)$$

où  $W_n$  est de degré  $n - 1$  pour  $n$  entier  $W_{n-1}$  est évalué p. 54 and 70.

# Chapitre 6

## Magnétostatique

### 6.1 Potentiel vecteur d'un courant

Le potentiel vecteur créé par une distribution de courants obéit à une équation analogue à l'équation de Poisson (2.1) qui sera établie dans ce paragraphe. Le champ magnétique correspondant s'obtient par la loi de Biot-Savart, (1.26) déjà vue au Chap. 1 à partir des équations de Maxwell. Le moment magnétique sera introduit à partir de la contribution d'un circuit fermé au potentiel vecteur, mais l'apparition d'un moment magnétique n'implique pas forcément l'existence de courants. De nombreuses particules élémentaires (électrons, muons) sont pourvues d'un moment magnétique intrinsèque. Pour l'électron et les autres particules sans structure :

$$\mu_e = 2 \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (6.1)$$

Le neutron (neutre, mais constitué de quarks chargés) a également un moment magnétique de l'ordre de (mais différent de)  $\frac{e\hbar}{2M_N}$ . Leur contribution au potentiel vecteur sera donné par la même formule. L'équation de Maxwell qui régit le champ magnétique en régime stationnaire (1.17)

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.2)$$

Et l'expression de  $\mathbf{B}$  en fonction du potentiel vecteur :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (6.3)$$

impliquent, en choisissant une jauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (voir l'exercice 6 du Chap. 1)

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\frac{1}{c} \Delta \mathbf{A} \quad (6.4)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -c\mu_0 \mathbf{j} = -\frac{1}{c\epsilon_0} \mathbf{j} \quad (6.5)$$

Cette équation est l'analogue pour le potentiel vecteur de l'équation de Poisson (2.1). La seule solution s'annulant à l'infini pour des courants fixés est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (6.6)$$

On obtient  $\mathbf{B}$  à l'aide de la relation

$$\nabla \wedge (f\mathbf{V}) = \nabla f \wedge \mathbf{V} + f \nabla \wedge \mathbf{V} \quad (6.7)$$

où la fonction  $f = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (6.8)$$

En substituant  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (6.9)$$

C'est la loi de Biot-Savart (1.29), déjà établie au Chap. 1.

Lorsque les dimensions du conducteur sont négligeables, il est dit linéaire. Dans ces conditions :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}. \quad (6.10)$$

Et en prenant le rotationnel par rapport au vecteur  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C d\mathbf{x} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (6.11)$$

## 6.2 Moment magnétique

On choisira un circuit linéaire pour simplifier les calculs, la méthode se généralise facilement à une distribution arbitraire de courants en sommant sur des « tubes » dont chacun conserve l'intensité.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \left[ \nabla_x \wedge \left( \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (6.12)$$

La surface  $S$  est une surface arbitraire s'appuyant sur le circuit  $C$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \left[ \nabla_x \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \wedge \mathbf{e}_i \right) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (6.13)$$

$$= \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \wedge \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{n} \quad (6.14)$$

$$= \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \left( \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \right) \cdot \mathbf{e}_i \quad (6.15)$$

Et en sommant les 3 composantes :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (6.16)$$

$\mathbf{n}$  est la normale en  $\mathbf{x}$  à la surface  $S$  s'appuyant sur le circuit. Lorsque  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{x}|$ , ce qui implique une distance très supérieure aux dimensions du circuit, on définira le *moment magnétique* du circuit linéaire

$$\mathcal{M} = I \int_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \quad (6.17)$$

Le premier terme du potentiel vecteur dans un développement en puissances de  $1/r$  est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (6.18)$$

### 6.2.1 Mouvement classique d'un moment magnétique

Le mouvement *classique* d'un moment magnétique dont la position est fixée peut être obtenu à partir du lagrangien

$$L = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j + \mathcal{M} \cdot \mathbf{B} \quad (6.19)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur rotation instantanée, et  $I_{ij}$  le tenseur d'inertie du système magnétique (supposé fixe, avec l'origine au centre de gravité) :  $I_{ij} = \sum (\delta m) x_i x_j$ . L'expression de l'énergie potentielle  $U = -\mathcal{M} \cdot \mathbf{B}$  sera justifiée plus loin. On admettra qu'il existe une relation linéaire entre le moment magnétique et le moment cinétique  $\mathbf{J}$ , deux pseudo-vecteurs :

$$\mathcal{M} = g\mathbf{J} \quad (6.20)$$

ou pour les composantes

$$\mathcal{M}_i = gI_{ij}\omega_j \quad (6.21)$$

L'équation d'Euler du mouvement est

$$I_{ij}\omega_j + gI_{ij}B_j = 0 \quad (6.22)$$

soit  $\omega_k = -gB_k$  ou  $\boldsymbol{\omega} = g\mathbf{B}$ . Le vecteur rotation définissant le mouvement du moment magnétique est fixe et proportionnel à l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ .

Le mouvement de  $\mathcal{M}$  est un mouvement de rotation

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = -g\mathbf{B} \wedge \mathcal{M} \quad (6.23)$$

La valeur de  $g$  est facilement trouvée pour le mouvement orbital *classique* d'une charge :  $L = mr^2\omega$  et

$$\mathcal{M} = IS = \frac{q\omega}{2\pi}\pi r^2 = \frac{q\omega}{2}r^2 \quad (6.24)$$

si bien que  $g_L = \frac{q}{2m}$ . La mécanique quantique aboutit à un facteur 2 fois plus grand dans le cas du moment magnétique intrinsèque d'une particule ponctuelle de spin 1/2. Ce facteur, justifié dans de nombreux manuels est une conséquence naturelle de l'invariance de jauge dans un cadre relativiste.

Un moment magnétique placé dans un champ magnétique a un mouvement de rotation autour de  $\mathbf{B}$ . Il n'y a pas d'émission de rayonnement *dans l'approximation examinée dans ce chapitre*. Différents niveaux d'énergie, observables en spectroscopie sont possibles, et la population de ces niveaux peut être contrôlée (pompage optique).

### 6.3 Mouvement d'un moment magnétique

On ajoute au lagrangien (6.19) l'énergie cinétique du moment magnétique  $\mathcal{M}$ , considéré comme un système unique de masse  $m$ .

$$L = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j + \mathcal{M} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.25)$$

Si on ne s'intéresse pas à la variation de l'orientation de  $\mathcal{M}$ , mais seulement au mouvement de translation du moment magnétique, on peut omettre l'énergie de rotation

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{M} \cdot \mathbf{B} \quad (6.26)$$

Le mouvement de la masse  $m$  est donné par

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla(\mathcal{M} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.27)$$

La force exercée est ainsi

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathcal{M} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.28)$$

Les exercices 10,11,12, proposent deux autres méthodes d'évaluation, l'une donnant un résultat différent, et une expérience permettant de trancher.

### 6.4 Champ magnétique d'un moment magnétique

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \wedge \left( \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (6.29)$$

le rotationnel se transforme à l'aide de

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (6.30)$$

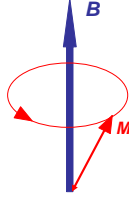


FIG. 6.1 – Mouvement de rotation d'un moment magnétique.

Il en résulte

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 4\pi\delta_3(\mathbf{r})\mathcal{M} + \frac{3\mathbf{r}(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r}) - \mathcal{M}r^2}{r^5} \right) \quad (6.31)$$

La singularité apparente  $\delta_3(\mathbf{r})$  provient de  $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = -\Delta(1/r) = 4\pi\delta_3(\mathbf{r})$ . Elle n'a pas de sens général et doit être examinée cas par cas, l'expression du potentiel vecteur qui lui a donné naissance n'étant justifiée qu'à des distances grandes par rapport aux dimensions  $a$  du système magnétique. Nous retiendrons la forme du champ  $\mathbf{B}$  pour des distances  $r > a$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}(\mathcal{M} \cdot \mathbf{n}) - \mathcal{M}}{r^3} \quad (6.32)$$

Le champ magnétique d'un dipôle magnétique décroît comme  $1/r^3$ , de même que le champ électrique d'un dipôle électrostatique.

## 6.5 Équivalence magnétique

En dehors du volume  $V$  contenant les courants sources, le champ magnétique vérifie l'équation de Laplace  $\Delta\mathbf{B} = 0$ , son rotationnel et sa divergence sont nuls dans  $\tilde{V}$ . Il n'y a aucune différence avec le calcul effectué au Chap. 3 pour l'équivalence électrostatique (3.38), et pour  $\mathbf{r}$  dans  $\tilde{V}$ , le champ  $\mathbf{B}$  s'exprime de la même manière à l'aide des valeurs sur la surface limite  $S$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_S d^2\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} G_0 \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \nabla_{\mathbf{x}} G_0 \quad (6.33)$$

En l'absence de charges magnétiques physiques, l'utilisation de  $G_0$  n'est plus liée qu'à la similitude mathématique avec le cas traité en électrostatique, et à l'extension infinie de  $\tilde{V}$ . Le terme  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}$  s'interprète comme un courant électrique de surface (fictif), et le terme  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  comme une densité surfacique de charges magnétiques.

## Exercices

**Ex. 1:** Montrer que par une transformation de jauge on peut éliminer la divergence de  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \\ \nabla \cdot \mathbf{A}' &= 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta f \end{aligned}$$

la solution pour  $f$  est alors directement transposée de l'équation de Poisson.



**Ex. 2:** Potentiel vecteur externe d'un solénoïde cylindrique de  $N$  spires proches, de longueur  $L$ , parcouru par un courant  $I$ . Ce potentiel peut-il avoir une composante axiale? Calculer sa composante tangentielle à la distance  $r$  de l'axe à l'aide du théorème de Stokes. En déduire que  $\mathbf{A}$  peut être mis sous forme d'un rotationnel, et que  $\mathbf{B}$  est nul à l'extérieur du solénoïde (*infini*).

**Ex. 3:** Fonctionnement d'un solénoïde cylindrique + fer courant alternatif — Aspects énergétiques

**Ex. 4:** L'exercice établit la formule du moment magnétique pour une distribution volumique de courants.

(a) Montrer que pour un volume  $V$  fini contenant les courants stationnaires :

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = 0$$

On pourra tirer partie de l'équation de continuité ( $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ), et de l'identité  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur la surface  $S$  bornant le volume des conducteurs  $V$ ,  $\mathbf{n}$  étant la normale à  $S$ .

(b) Déduire de la question précédente que la contribution dominante à grande distance au potentiel vecteur est, pour un circuit proche de l'origine des coordonnées

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

(c) Montrer que :

$$\int d^3\mathbf{x} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j} = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})$$

(utiliser la conservation du courant et l'annulation de la composante normale en surface).

**Démonstration :** Nous considérons pour alléger la notation un conducteur linéaire selon la troisième composante et une section rectangulaire. Dans le cas général, il suffit d'additionner les relations similaires et d'utiliser  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

$$\begin{aligned} \int x_1 j_2 dx_1 dx_2 dx_3 &= \int x_1 dx_1 dx_3 \left( [x_2 j_2]_S - \int dx_2 x_2 \frac{\partial j_2}{\partial x_2} \right) \\ &= - \int dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 \frac{\partial j_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

De même

$$\int x_2 j_1 dx_1 dx_2 dx_3 = - \int dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 \frac{\partial j_1}{\partial x_1}$$

En additionnant

$$\begin{aligned} \int dx_1 dx_2 dx_3 (x_1 j_2 + x_2 j_1) &= - \int dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 \left( \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} \right) \\ &= - \int dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 \frac{\partial j_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

(La dernière égalité a tiré partie de la conservation du courant.) Il en résulte (avec l'annulation de la composante normale de la densité de courant à la surface) que

$$\int x_1 j_2 d^3x = - \int x_2 j_1 d^3x$$

Pour une section non rectangulaire, on ferait apparaître la divergence de  $\mathbf{j}$  en sommant sur les composantes

(d) Montrer par un argument similaire que

$$\int x_1 j_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

(e) En déduire

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c |\mathbf{r}|^3} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \wedge \mathbf{j} d^3x$$

**Ex. 5: Potentiel magnétique scalaire.** Pour éviter les confusions, on utilisera dans cet exercice les notations **rot** et **grad** pour les dérivées vectorielles. Pour un circuit linéaire, on a établi

$$\mathbf{A} = \frac{c\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C d\mathbf{x} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3}$$

L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  peut également être obtenue comme le gradient d'un pseudo-potentiel. Soit  $\mathbf{e}$  un vecteur de la base cartésienne  $(xyz)$  :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot \text{rot}_{\mathbf{x}} \left( \mathbf{e} \wedge \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{R} \right)$$

En utilisant la relation (6.30) donnant  $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$  :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int d^2\mathbf{x} (\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \left( \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{R} \right)$$

soit

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \nabla_{\mathbf{r}} \int d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (1/R)]$$

En prenant garde aux signes opposés des vecteurs  $\nabla_{\mathbf{x}}(1/R) = -\nabla_{\mathbf{r}}(1/R)$ , on obtient :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \text{grad}\Omega$$

$$\Omega = \int d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

$\Omega$  est l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point  $\mathbf{r}$

- Ex. 6:** Comparer pour  $z \gg a$ , la décroissance du champ magnétique en fonction de la coordonnée  $z$  lorsque  $Oz$  est l'axe de symétrie d'un cercle de rayon  $a$  (6.2a), ou l'axe de symétrie perpendiculaire au plan de deux fils parallèles (6.2b)
- Ex. 7:** On peut ajuster les pôles d'un électro-aimant de manière que le potentiel vecteur créé soit quadrupolaire (Fig. ??). Le potentiel vecteur dirigé selon  $Oz$  est alors décrit par un polynôme de degré deux. Quels sont les polynômes possibles? Quelle est la forme du potentiel vecteur dans la configuration de la Fig. (6.2)? Calculer le champ magnétique  $\mathbf{B} = 1/c \nabla \wedge \mathbf{A}$ .
- Ex. 8:** Quel est le mouvement d'un moment magnétique dont le centre de gravité *n'est pas* fixe. Écrire le lagrangien en s'inspirant du cas du dipôle électrique).
- Ex. 9:** Quelle est la différence d'énergie  $\Delta E$  de deux protons fixes de moments magnétiques opposés dans un champ  $\mathbf{B}$  uniforme. Application numérique :  $\mathbf{B} = 1 \text{ T}$ ,  $\mu_P = 2.79 \times 2 \times e\hbar/(2m_N c)$ ,  $m_p = 938.27 \text{ MeV}$ . Quelle est la fréquence de résonance et la longueur d'onde correspondante? L'imagerie par résonance magnétique utilise cette transition.

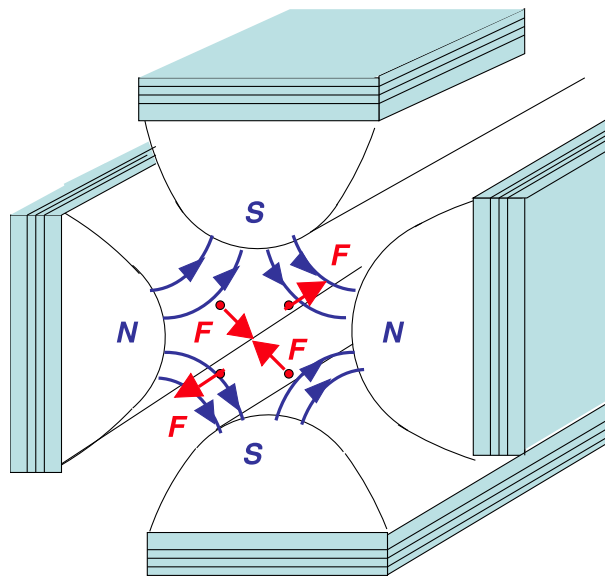


FIG. 6.2 – Configuration d'un champ magnétique quadrupolaire.

# Chapitre 7

## Milieux magnétiques

### 7.1 Vecteur de magnétisation

Dans un milieu continu, on attribue à chaque élément de volume  $d^3\mathbf{x}$  un moment magnétique  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$

$$d\mathcal{M} = \mathbf{M}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \quad (7.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  est le vecteur de magnétisation du milieu. Si le milieu est décrit par un modèle microscopique à l'aide d'une distribution  $\rho(\mathbf{x})$  de moments magnétiques intrinsèques  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ , le vecteur de magnétisation est la moyenne des moments individuels dans un petit volume entourant  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \langle \rho(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \rangle \quad (7.2)$$

Ceci suppose l'existence d'une échelle intermédiaire entre celle des particules magnétisées et l'échelle macroscopique, choisie de manière que la moyenne ait un sens. À partir du vecteur d'aimantation, on pourra définir un vecteur de champ magnétique  $\mathbf{H}$  dont le rotationnel ne dépend que des courants externes, comme si le milieu magnétisé pouvait être ignoré : c'est l'intérêt de  $\mathbf{H}$ . En revanche, une particule en mouvement dans un milieu magnétique subissent une force  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ . Le choix d'utiliser un vecteur plutôt qu'un autre dépend du problème concret à résoudre.

### 7.2 Le potentiel vecteur

Le potentiel vecteur s'exprime en fonction du vecteur magnétisation comme au chapitre précédent par l'Éq. (6.18) où

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int d\mathbf{x} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (7.3)$$

On transformera l'expression de manière similaire à ce qui a été fait pour les milieux électrostatiques.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int d\mathbf{x} \mathbf{M}(\mathbf{x}) \wedge \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}. \quad (7.4)$$

En utilisant de nouveau l'expression

$$\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (f\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{x}} f \wedge \mathbf{u} + f \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}, \quad (7.5)$$

on obtient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left[ \int d^3\mathbf{x} \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \int d^3\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right], \quad (7.6)$$

mais

$$\int_V d^3\mathbf{x} \nabla \wedge \mathbf{M} = \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad (7.7)$$

donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left( \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} - \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right). \quad (7.8)$$

Le potentiel vecteur (moyen) d'un milieu magnétique est ainsi représenté par la somme de deux contributions à l'aide de densités de courant (*fictifs*) de volume et de surface.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left( \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) \quad (7.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_M &= \nabla \wedge \mathbf{M} \\ \mathbf{j}_S &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

L'expression correspondante de l'induction magnétique  $\mathbf{B} = 1/c \nabla \wedge \mathbf{A}$  est

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V d^3\mathbf{x} \mathbf{j}_M \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} + \int_S d^3\mathbf{x} \mathbf{j}_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \right]. \quad (7.11)$$

Le terme de surface ne contribuera pas au rotationnel de  $\mathbf{B}$  pour un point situé à l'intérieur du volume magnétisé :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{ext}} + \mathbf{j}_M) \quad (7.12)$$

Le courant  $\mathbf{j}_{\text{ext}}$  représente ici le courant électrique réel associé à un mouvement des charges.

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{ext}} + \nabla \wedge \mathbf{M}). \quad (7.13)$$

Cette équation peut être interprétée sous la forme

$$\nabla \wedge (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (7.14)$$

En définissant le vecteur  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (7.15)$$

on obtient

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (7.16)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}} \quad (7.17)$$

Le champ  $\mathbf{H}$  est régi par les courants externes. Dans des milieux para-magnétiques où le champ magnétique est induit par des sources (courants par exemple),  $\mathbf{H}$  est facilement calculé et il va induire une magnétisation. Le calcul ultérieur de l'induction n'est cependant possible que si l'on connaît la relation entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  : la relation de constitution.

### 7.2.1 Milieu magnétique isotrope

On définit la susceptibilité magnétique  $\chi(H)$

$$\mathbf{M} = \chi(H) \mathbf{H} \quad (7.18)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi(H)) \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}. \quad (7.19)$$

La relation

$$\mathbf{M} = \chi(H) \mathbf{H} \quad (7.20)$$

contredit les équations antérieures antérieures : le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  dépend en effet de la valeur de  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  en des points autres que  $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ , et il en va de même pour  $\mathbf{B}$ . La factorisation n'est légitime que pour des fréquences spatiales (ou longueurs d'onde) suffisamment grandes. Elle reste cependant fréquemment une excellente approximation. Dans un milieu anisotrope,  $\chi$  sera un tenseur  $\chi_{ij}$ .

## 7.3 Milieu magnétique anisotrope (non ferro-magnétique)

On peut postuler dans certains milieux l'existence d'un potentiel magnétique analogue à celui qui a été introduit pour les diélectriques soumis à un champ électrique externe (section 4.7.1). En désignant par  $\boldsymbol{\mu}$  un moment magnétique moléculaire au site  $i$  du milieu :

$$W_M = \frac{1}{2} X_{kl} \mu_k^{(i)} \mu_l^{(i)} - \mu_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (7.21)$$

La valeur de  $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$  sera donnée à l'équilibre par

$$\boldsymbol{\mu}^{(i)} = X^{-1} \mathbf{H} \quad (7.22)$$

et  $X^{-1}$  est un tenseur symétrique. On associe à ces milieux un tenseur de perméabilité  $\xi_{ij}$  *symétrique*, avec

$$\mathbf{B}_i = (\delta_{ij} + \xi_{ij}) H_j = \mu_{ij} H_j \quad (7.23)$$

Une autre démonstration sera proposée au Chap. 9 à l'Éq. (9.15).

### 7.3.1 Milieu ferro-magnétique

Dans un tel milieu, la fonction  $\chi(H)$  n'existe pas. La magnétisation  $\mathbf{M}$  est une somme de contributions spontanées et induites qui dépend de l'état initial de l'échantillon. Celui-ci est le plus souvent inconnu. C'est l'origine du phénomène d'hystérésis (*vs*  $\tau\epsilon\rho\epsilon$  : être en retard, venir en arrière). L'aimantation dépend de l'histoire antérieure, et ne s'annule pas quand le champ externe disparaît. Les milieux ferro-magnétiques cristallins sont le plus souvent anisotropes :  $M_i = \chi_{ik}(H) H_k$  : l'orientation de  $\mathbf{M}$  peut différer de celle de  $\mathbf{H}$ .

### 7.3.2 La limite des très grands champs

Lorsque tous les dipôles magnétiques sont alignés, l'aimantation est maximale et ne peut plus croître :  $\chi(H) \rightarrow 0$  quand  $H \rightarrow \infty$ .

## 7.4 Conditions aux limites à l'interface de deux milieux magnétiques

### 7.4.1 Continuité normale

La conservation du flux magnétique  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  entraîne la continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  (appliquer le théorème de Gauss au cylindre de la Fig. 7.1).

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(1) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(2). \quad (7.24)$$

### 7.4.2 Continuité tangentielle

Pour évaluer le comportement des composantes tangentielles, on appliquera le théorème de Stokes au parcours indiqué sur la Fig. 7.2.

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{t}_1 = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2x. \quad (7.25)$$

(On suppose  $h \ll L$  et on néglige la contribution des segments normaux à la surface.)

$$L(\mathbf{H}(1) - \mathbf{H}(2)) \cdot \mathbf{t}_1 = L \mathbf{j}_S \cdot (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n}_2) \quad (7.26)$$

On a défini le courant de surface  $\mathbf{j}_S = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{j}h$ . Comme le vecteur tangent  $\mathbf{t}$  est arbitraire

$$\mathbf{H}(1) - \mathbf{H}(2) = \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{j}_S. \quad (7.27)$$

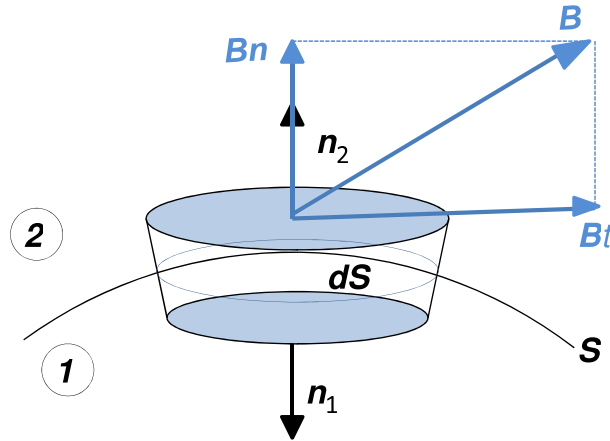


FIG. 7.1 – La discontinuité normale de  $\mathbf{B}$ .

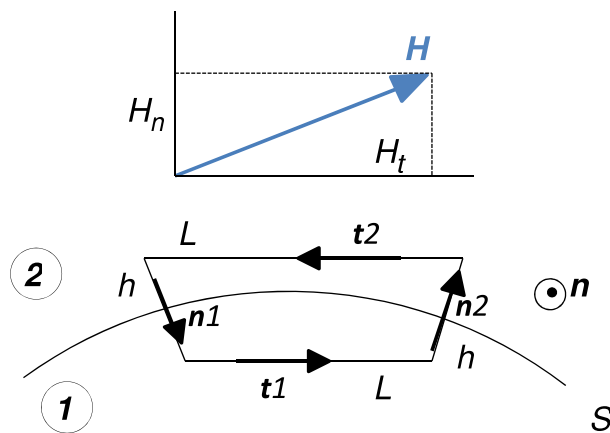


FIG. 7.2 – La continuité tangentielle de  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{n}_2 \wedge (\mathbf{H}(1) - \mathbf{H}(2)) \quad (7.28)$$

En l'absence de courants de surface, la composante tangentielle est continue

$$\mathbf{H}_t(1) = \mathbf{H}_t(2) \quad (7.29)$$

Dans le cas d'un supra-conducteur de type I, le champ magnétique ne pénètre pas et  $\mathbf{B} = 0$  à l'intérieur, la densité volumique de courant est nulle. À l'extérieur,  $\mathbf{B}(2) = \mu_0 \mathbf{H}(2)$ .

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{H}(2) \quad (7.30)$$

Le courant de surface s'étend en réalité sur une couche très fine avec une décroissance exponentielle dont la longueur caractéristique varie de quelques centaines à plus de 1000 Å. Un supra-conducteur de Type II se comporte comme un Type I pour une température  $T \leq T_{c1}$ . pour  $T_{c1} \leq T \leq T_{c2}$ , le champ magnétique pénètre partiellement dans des zones filamentaires.

## Exercices

### Méthode des images

**Ex. 1:** Fil linéaire et plan magnétisé

**Ex. 2:** Fil linéaire axial externe ou interne à un cylindre

## Effet de blindage magnétique

**Ex. 1:** Vérifier directement que si dans un milieu magnétique sans courants :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3\mathbf{x} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{M} \end{aligned}$$

On utilisera les relations

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \right] d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

puis

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \right) = -4\pi \delta_3(\mathbf{r} - \mathbf{x}).$$

- Ex. 2:** On fait varier (lentement) le champ  $\mathbf{B}$  engendré par une source externe dans un solénoïde, de manière à y faire apparaître un courant. Le courant est-il modifié si on introduit un noyau de fer magnétisé ?
- Ex. 3:** On considère un ensemble de plans parallèles en Fer (magnétisable), l'axe  $z$  est perpendiculaire aux plans. Comment varie en fonction de  $z$  l'intensité de la composante du champ magnétique parallèle à  $z$  ? Comment varie en fonction de  $z$  l'intensité de la composante  $B_y$  ? On pourra approcher le champ externe à chaque plaque par une charge magnétique que l'on précisera.
- Ex. 4:** Quel est le vecteur magnétisation d'une sphère homogène de perméabilité  $\mu$  placée dans un champ magnétique uniforme. Quel est le champ extérieur, comparer à celui d'un dipôle.
- Ex. 5:** Un anneau conducteur de résistivité  $\rho$  est placé dans un champ magnétique variable, et un courant  $I$  est engendré. Quelle est la valeur de l'intégrale  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  ? Quelle est la différence de potentiel électrostatique entre deux points arbitraires de l'anneau ? En déduire la valeur du courant.
- Ex. 6:** Un cylindre de Fer est situé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant sinusoïdal. Estimer les courants de Foucault en utilisant le problème précédent. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule ? Quel est le champ  $\mathbf{H}$  à l'intérieur du Fer ?
- Ex. 7:** Pourquoi un transformateur coaxial (Fig. 7.2) est-il avantageux par rapport à un transformateur conventionnel ?
- Ex. 8:** On considère une bille supra-conductrice, le champ  $\mathbf{B}$  étant nul à l'intérieur. Elle est placée dans un champ magnétique (externe) uniforme. Calculer le champ magnétique résultant, les courants de surface, et le moment dipolaire magnétique de la bille. Quelle est la force exercée sur la bille ?
- Ex. 9:** Même problème pour une bille supra-conductrice placée au dessus d'une boucle de courant.



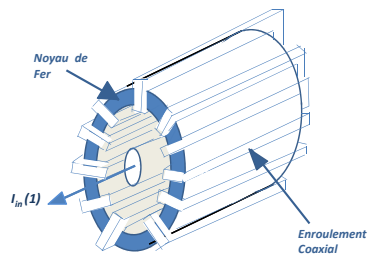


FIG. 7.3 – Le transformateur coaxial.

## Chapitre 8

# Énergie électrostatique d'un système de conducteurs

### 8.1 Introduction

L'énergie d'un système de conducteurs chargés sera calculée en tirant partie de la conservation de l'énergie : c'est le travail qu'il a fallu fournir aux charges pour aboutir à la configuration électrostatique finale. Dans cette évaluation, certains effets sont ignorés : le courant associé au déplacement des charges engendre un champ magnétique dont les variations induisent une modification du champ électrique. On supposera les déplacements suffisamment lents pour que ces effets soient négligeables. Ils seront au contraire considérés dans les problèmes de rayonnements, avec l'introduction du vecteur de Poynting, au Chap. 12.

### 8.2 L'énergie électrostatique du champ : cas d'un conducteur unique

Pour amener une charge  $\delta q$  à la surface  $S$  du conducteur porté au potentiel  $U$ , on exerce une force  $\mathbf{F} = -\delta q \mathbf{E}$  opposée au champ électrique (Fig. 8.1). Le travail fourni au système de charges est

$$\delta W_q = \delta q U. \quad (8.1)$$

Le champ électrique a fourni aux charges une énergie égale et opposée.

$$\delta W_q = \int_S d^2 \mathbf{x} \delta q U = \int_S d^2 \mathbf{x} \delta \sigma U(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \int_S U d^2 \mathbf{x} \delta E_n. \quad (8.2)$$

En changeant le signe de la normale  $\mathbf{n}_{\text{ext}} = -\mathbf{n}_{\text{int}}$  l'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale sur le volume externe aux conducteurs à l'aide d'une deuxième application théorème de la

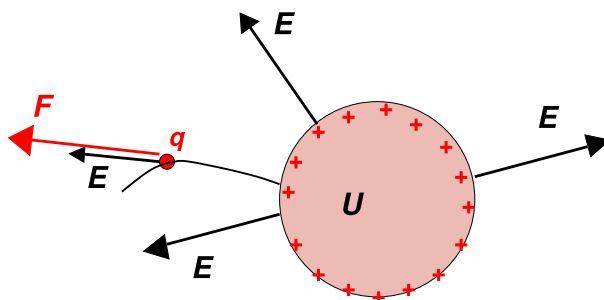


FIG. 8.1 – Travail fourni au système de charges.

divergence :

$$\begin{aligned}\delta W_q &= \epsilon_0 \int_S U d^2 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} \\ &= -\epsilon_0 \int_S U d^2 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{\text{int}}\end{aligned}\quad (8.3)$$

$$= -\epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot (U \delta \mathbf{E}) \quad (8.4)$$

$$= -\epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3 \mathbf{x} \nabla U \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3 \mathbf{x} U \nabla \cdot \delta \mathbf{E}.\quad (8.5)$$

Comme il n'y a pas de charges en dehors des conducteurs dans le problème examiné, la divergence du champ électrique est nulle, et la deuxième intégrale ne contribue pas. On exprime ainsi l'énergie électrostatique fournie aux charges pour les apporter au système de conducteurs en fonction du champ électrique final dans le volume qui leur est extérieur, ce qui définit une énergie du champ  $W_E$ .

$$\delta W_q = \delta W_E = \epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} \quad (8.6)$$

En intégrant jusqu'à la valeur finale du champ électrique on trouve pour l'énergie du champ :

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (8.7)$$

### 8.3 Système de conducteurs

Si la répartition finale des charges est  $Q_i$  et que les potentiels ont les valeurs  $U_i$  sur les conducteurs (le potentiel à l'infini étant supposé nul), on supposera qu'elles sont atteintes par une succession de pas  $\delta Q_i$ .

$$\delta W_q = \sum_i \delta Q_i U_i(\lambda) = \sum_{ij} C_{ij} \delta U_j U_i \quad (8.8)$$

$$W_q = \frac{1}{2} \sum C_{ij} U_j U_i = \frac{1}{2} \sum Q_i U_i = \epsilon_0 \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (8.9)$$

$W_q$  est l'énergie électrostatique du système de charges. Elle s'exprime de deux manières équivalentes à l'aide d'une intégration sur le volume du conducteur, ou au contraire sur l'espace où règne le champ. Le point de vue du champ est représenté dans la Fig. (??)

### 8.4 La conservation de l'énergie électrostatique

Nous avons trouvé deux expressions de la variation de l'énergie électrostatique, l'une obtenue en intégrant sur la surface des conducteurs, l'autre sur tout l'espace :

$$\delta W_q = \delta W_E \quad (8.10)$$

En introduisant le travail  $\delta W'_q$  fourni par le champ électrique  $\mathbf{E} = -\mathbf{F}/q$  :  $\delta W_q = -\delta W'_q$  l'égalité (8.10) devient une loi de conservation

$$\delta W_S = \delta W'_q + \delta W_E = 0. \quad (8.11)$$

L'énergie totale des charges et du champ est conservée pour un système électrostatique isolé.

### 8.5 Énergie électrostatique en présence de diélectriques

L'analyse s'effectue de manière similaire à celle des conducteurs dans le vide, mais on le suppose maintenant plongé dans un diélectrique. Le travail fourni à la charge  $\delta q$  pour la porter au potentiel  $U$  est toujours donné par l'expression

$$\delta W_q = \int_S d^2 \mathbf{x} \delta \sigma U(\mathbf{x}) \quad (8.12)$$

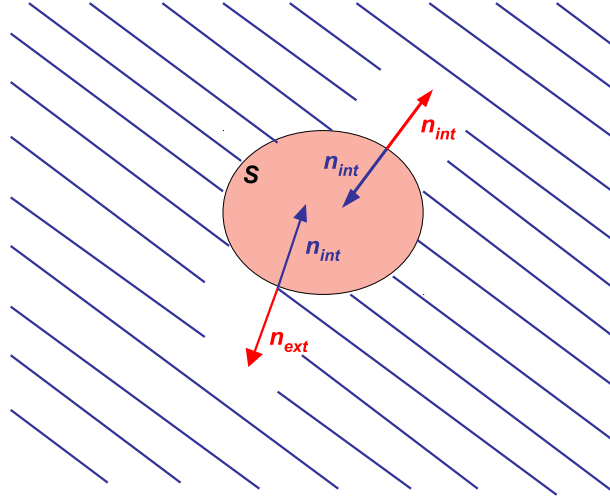


FIG. 8.2 – Énergie du champ électrique.

En substituant  $\delta\sigma = \delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ ,

$$\delta W_q = \int_S d^2\mathbf{x} \delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} U(\mathbf{x}) = - \int_{V_{\text{ext}}} d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (U \delta\mathbf{D}). \quad (8.13)$$

$$\delta W_q = - \int_{V_{\text{ext}}} d^3\mathbf{x} \nabla U \cdot \delta\mathbf{D} + \int_{V_{\text{ext}}} d^3\mathbf{x} U(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \delta\mathbf{D}). \quad (8.14)$$

L'absence de charges dans le volume externe entraîne, comme pour le conducteur dans le vide, la nullité de la deuxième intégrale.

$$\delta W_q = \int_{V_{\text{ext}}} d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} \quad (8.15)$$

Lorsque le milieu est isotrope, et linéaire (constante diélectrique indépendante de  $E$ ) :

$$W_q = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \int_{V_{\text{ext}}} d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (8.16)$$

## 8.6 Symétrie du tenseur diélectrique

Dans un milieu anisotrope, la relation linéaire entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  est décrite par le tenseur diélectrique  $\epsilon$ , et  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Si on admet que l'énergie du système de conducteurs est une fonction de la configuration du champ électrique  $\mathbf{E}$  et ne dépend pas du chemin suivi pour y parvenir :

$$W(E) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^T \epsilon \mathbf{E} \quad (8.17)$$

(Nous avons abandonné l'indice  $q$ , et identifié l'énergie des charges à celle du champ)

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_i \partial E_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_j \partial E_i} = \epsilon_{ji} \quad (8.18)$$

On retrouve la symétrie du tenseur diélectrique, antérieurement signalée au Chap. 4 Éq. (4.25) et (4.27).

## 8.7 Forces électrostatiques

Soit  $\mathbf{x}$  une coordonnée caractérisant la position d'un conducteur. La force électrique exercée sur le conducteur vérifie dans une translation  $\delta\mathbf{x}$  à charges constantes

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{x}} W \quad (8.19)$$

Si le mouvement est effectué à charges constantes.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} Q^T \nabla_{\mathbf{x}}(C) / C^2 Q = \frac{1}{2} U^T \nabla_{\mathbf{x}}(C) U \quad (8.20)$$

Si le mouvement est effectué à potentiel constant. Les conducteurs ne sont plus isolés, le changement d'énergie est la somme du travail mécanique et électrostatique fournis :  $\delta W = \frac{1}{2} \delta Q^T U = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} + \sum \delta Q_i U_i$ , mais comme  $\delta Q = \delta C U$

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} = U^T \nabla_{\mathbf{x}}(C) U \quad (8.21)$$

et on retrouve le résultat antérieur.

L'énergie d'un dipôle électrique s'obtient en le considérant comme composé de deux charges égales et opposées comme dans l'équation (4.33) du Chap. 4, et  $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ . L'expression permet également de chercher le couple exercé, comme dans l'Éq. (4.35).

## Exercices

- Ex. 1:** Vérifier la loi de conservation pour un condensateur plan, une charge  $\delta Q$  passant de l'électrode supérieure (potentiel  $U = V$ ) à l'électrode inférieure (potentiel  $U = 0$ ).
- Ex. 2:** Justifier le facteur  $1/2$  dans l'expression de l'énergie d'un système de conducteurs par comptage, en comparant à l'énergie d'une charge  $qU$  dans un champ.
- Ex. 3:** Quelle est l'énergie de liaison d'une paire d'ions  $\text{Cl}^- \text{Na}^+$  à une distance de  $1 \text{ \AA}$ , exprimée en MKSA et en eV.
- Ex. 4:** Forces entre deux plaques d'un condensateur en présence d'une lame diélectrique d'épaisseur donnée. Reprendre l'exercice 7 du Chap. 4 en utilisant l'énergie
- Ex. 5:** Un condensateur limité par deux plans verticaux est plongé dans un liquide diélectrique. Calculer le niveau auquel le liquide monte lorsqu'une tension est appliquée.
- Ex. 6:** Une sphère conductrice de charge  $Q$  est placée dans un champ uniforme  $\mathbf{E}$ . Calculer la distribution surfacique des charges et la force exercée. Mêmes questions pour le champ d'une charge ponctuelle.

# Chapitre 9

## Énergie magnétique

### 9.1 Énergie fournie par la variation des courants en régime quasi-stationnaire

Le champ magnétique peut être engendré en portant un ensemble de courants à une valeur finie. Il ne peut s'agir d'un régime stationnaire, puisque ces courants doivent varier, mais quasi-stationnaire où ils varient « lentement » (on précisera ultérieurement). En régime stationnaire, l'énergie des charges varie par effet joule d'une valeur

$$\frac{\delta W}{\delta t} = - \int_{V_{\text{int}}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} = - \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.1)$$

Le volume  $V$  est ici le volume interne des conducteurs. Les sources doivent fournir une énergie égale pour compenser les pertes par effet joule. Au contraire, si les courants subissent une variation  $\delta \mathbf{j}$ , celle-ci entraîne une variation  $\delta \mathbf{B}$  du champ magnétique, et il lui correspond une force électromotrice induite (loi de Faraday) que les sources de courant doivent compenser. C'est cette contribution (transitoire) qui sera comptabilisée comme variation de l'énergie magnétique du système de conducteurs.

$$\delta \left( \frac{\delta W}{\delta t} \right) = - \int_{V_{\text{int}}} \delta \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} - \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{E} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.2)$$

La première intégrale correspond à la variation de l'effet joule et doit être omise : elle est rayonnée et non transférée au champ. La deuxième intégrale correspond au travail de la f.e.m induite par le flux magnétique et doit être fournie par les sources

$$\delta \left( \frac{\delta W_M}{\delta t} \right) = - \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{E} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.3)$$

On peut déduire de l'Éq. (9.4), en substituant  $\delta \mathbf{E} = -\delta \partial \mathbf{A} / \partial t$

$$\delta W_M = \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.4)$$

Cette relation, qui ne sera pas utilisée ultérieurement dans ce chapitre, joue un rôle important dans la formulation du lagrangien d'interaction entre charges et courants. D'autre part,

$$\mathbf{j} = \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (9.5)$$

dans les conducteurs. Ce n'est qu'une approximation puisque les champs ne sont pas stationnaires : comme dans le Chap. 8, on considère des variations *lentes* n'induisant pas de rayonnement, et la contribution de  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  (qui constitue un rayonnement décrit par le vecteur de Poynting) est omise. De manière équivalente, l'énergie magnétique est celle que fournissent les sources de courant (hors effet joule), dans la limite des variations lentes.

$$\delta \left( \frac{\delta W_M}{\delta t} \right) = - \int_{V_{\text{int}}} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{E} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.6)$$

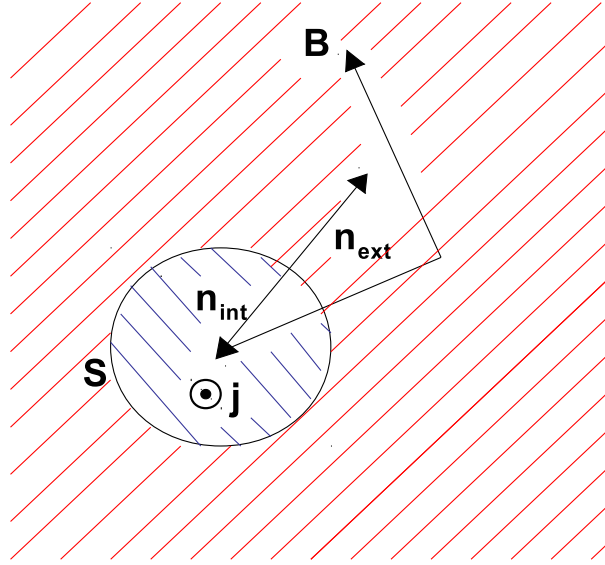


FIG. 9.1 – Courants, champs et domaines de l'énergie magnétique.

## 9.2 Expression de l'énergie magnétique à l'aide du champ

En utilisant la formule vectorielle

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \quad (9.7)$$

$$\delta \left( \frac{\delta W_M}{\delta t} \right) = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^3 \mathbf{x} - \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \delta \mathbf{E} d^3 \mathbf{x}, \quad (9.8)$$

à l'aide du théorème de Gauss, et en introduisant la normale externe  $\mathbf{n}_{\text{ext}}$  à la surface des conducteurs (Fig. ??) :

$$\delta \left( \frac{\delta W_M}{\delta t} \right) = - \int_S \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^2 \mathbf{x} + \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.9)$$

La surface des conducteurs de normale  $\mathbf{n}_{\text{ext}}$  est aussi la surface des diélectriques de normale  $\mathbf{n}_{\text{int}} = -\mathbf{n}_{\text{ext}}$ .

$$- \int_S \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^2 \mathbf{x} = \int_S \mathbf{n}_{\text{int}} \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^2 \mathbf{x} = \int_{V_{\text{ext}}} \nabla \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^3 \mathbf{x}. \quad (9.10)$$

En utilisant de nouveau la formule vectorielle :

$$\int_{V_{\text{ext}}} \nabla \cdot (\mathbf{H} \wedge \delta \mathbf{E}) d^3 \mathbf{x} = \int_{V_{\text{ext}}} (\nabla \wedge \mathbf{H}) \cdot \delta \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} - \int_{V_{\text{ext}}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \delta \mathbf{E}) d^3 \mathbf{x}. \quad (9.11)$$

La première intégrale est nulle puisqu'il n'y a pas de courants dans les diélectriques où  $\nabla \wedge \mathbf{H} = 0$ . Dans la deuxième, on substitue  $\nabla \wedge \delta \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t) \delta t$ . On trouve ainsi

$$\delta \left( \frac{\delta W_M}{\delta t} \right) = \int_{V_{\text{ext}}} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \delta t d^3 \mathbf{x} + \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3 \mathbf{x} \quad (9.12)$$

On peut donc étendre l'intégration à tout l'espace

$$\frac{\partial \delta W_M}{\partial t} = \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3 \mathbf{x}. \quad (9.13)$$

Pour des variations finies de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ , il faut connaître la relation entre les deux. Si  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$

$$W_M = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int \mathbf{B}^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (9.14)$$

Dans ce calcul, la séparation entre les contributions de Joule et les contributions à l'énergie magnétique n'est pas complètement rigoureuse, et l'approximation du changement « lent » justifiant  $\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}$  demanderait à être précisée. L'introduction de l'énergie rayonnée et du vecteur de Poynting permettra une présentation plus linéaire. D'autre part, l'intégrale de volume initiale aurait pu être directement étendue à tout l'espace. On comprendrait alors moins bien le passage d'une intégration sur le volume fini des conducteurs (où  $\mathbf{j} \neq 0$ ) au volume des diélectriques qui interviennent dans l'énergie magnétique. Ce sont bien les termes de surface qui l'imposent.

### 9.3 Symétrie du tenseur de perméabilité (milieu non ferro-magnétique)

Si on admet que l'énergie magnétique du système considéré ne dépend que du champ magnétique final (en particulier qu'il n'y a pas d'hystérésis) :

$$\mu_{ij} = \frac{\partial^2 W_M}{\partial H_i \partial H_j} = \frac{\partial^2 W_M}{\partial H_j \partial H_i} = \mu_{ji} \quad (9.15)$$

On retrouve le résultat du Chap. 7 : le tenseur de perméabilité magnétique est symétrique en l'absence d'hystérésis. L'énergie magnétique, dans l'hypothèse envisagée, ne dépend que de la configuration finale du champ.

### Exercices

- Ex. 1:** Retrouver le vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans un solénoïde cylindrique de  $N$  spires, de longueur  $L$ , parcouru par un courant  $I$ . Quelle est l'énergie magnétique du solénoïde pour un courant  $I$  donné ?
- Ex. 2:** Fonctionnement d'un solénoïde cylindrique + fer lorsque le courant est continu ou alternatif
- Ex. 3:** Trouver le champ magnétique et l'énergie (par unité de longueur) d'un système de deux fils parallèles à la distance  $d$  l'un de l'autre. En déduire la force exercée par unité de longueur.
- Ex. 4:** Calculer l'énergie magnétique d'un milieu anisotrope linéaire.
- Ex. 5:** Champ magnétique et énergie d'un moment magnétique de module constant tournant autour d'un axe.
- Ex. 6:** Champ magnétique et énergie d'une étoile neutron de rayon  $R$  ? Le résultat est-il le même qu'à l'exercice précédent ?
- Ex. 7:** On considère à nouveau une bille magnétique supra-conductrice placée au dessus d'une boucle de courant. Y a-t-il toujours une position d'équilibre ? Cet équilibre est-il stable ?



# Chapitre 10

## Le mouvement des charges

### 10.1 Le Lagrangien d'interaction

Le mouvement des charges se déduit d'un lagrangien comprenant le lagrangien libre des charges, et le lagrangien d'interaction entre les charges et le champ électromagnétique. On définit le vecteur vitesse  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ . Le Lagrangien est la somme du lagrangien libre et du lagrangien d'interaction.

$$L = L_0 + L_{em} \quad (10.1)$$

avec

$$L_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2. \quad (10.2)$$

Le lagrangien le plus simple construit à partir des composantes scalaires et vectorielles du champ électromagnétique et vérifiant l'invariance de jauge (et l'invariance par rotation) est

$$L_{em} = -q \left( U - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (10.3)$$

Les équations du mouvement découlent des équations d'Euler-Lagrange pour l'action

$$S = \int (L_0 + L_{em}) dt. \quad (10.4)$$

### 10.2 Les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ &= mv_i + \frac{q}{c} \frac{dA_i}{dt} \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_i \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial x_i}. \quad (10.7)$$

On utilisera l'expression du gradient d'un produit scalaire :

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}). \quad (10.8)$$

En l'appliquant au produit  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ , et en notant que  $\mathbf{v}$ , variable indépendante, ne dépend pas de  $x_i$ , il en résulte

$$\frac{d m \mathbf{v}}{dt} = -q \nabla U - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}), \quad (10.9)$$

soit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (10.10)$$

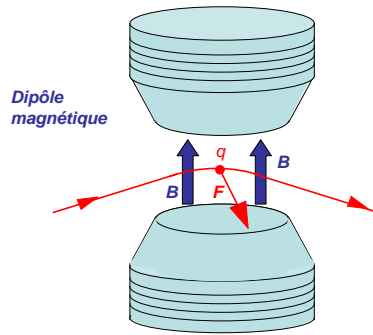


FIG. 10.1 – Mouvement d’une charge dans un champ magnétique.

### 10.3 Le mouvement d’une charge dans un champ magnétique

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (10.11)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (10.12)$$

Écrite sous cette forme, l’Éq. (10.10) est également relativiste, avec la définition  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ , où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Comme la même forme sera conservée dans les milieux matériels, on voit que ce sont les vecteurs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , obtenus directement à partir des potentiels, qui déterminent les forces exercées, et non pas  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$ . Nous conservons en effet la forme du lagrangien d’interaction du vide, au lieu de faire intervenir les potentiels auxiliaires dont dérivent les champs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$ . Cette hypothèse est naturelle puisque l’action sur une charge est affectée par la présence des dipôles électriques ou magnétiques, alors que  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$ , qui ne dépendent que des charges ou courants externes, ne le sont pas.

#### Exercices

- Ex. 1:** Montrer que dans un champ magnétique constant la trajectoire est circulaire si la vitesse initiale est perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  (comparer l’équation vectorielle du mouvement au cas d’une rotation). En déduire le rayon pour une vitesse initiale transverse au vecteur  $\mathbf{B}$ .
- Ex. 2:** Bouteille magnétique : variation du rayon de la trajectoire pour une variation spatiale lente du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Quel est le critère de lenteur ? En déduire le point extrême atteint lorsque la particule est pourvue initialement d’une vitesse dont la composante sur  $\mathbf{B}$  n’est pas nulle et que  $\mathbf{B}$  croît en conservant la même direction.
- Ex. 3:** Mouvement dans un onduleur (*wiggler*).
- Ex. 4:** Vérifier la conservation de l’espace de phase dans un accélérateur (déterminant unité) dans le cas d’un dipôle et d’un quadrupôle (on fera le calcul dans l’approximation linéaire et pour un mouvement plan).
- Ex. 5:** Invariants adiabatiques. On considère le mouvement d’une charge  $q$  dans un plan perpendiculaire au champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}(t)$ . Le champ  $\mathbf{B}(t)$  varie lentement dans le temps, de manière que sur un tour le mouvement puisse être considéré comme circulaire.
- Montrer que le potentiel vecteur est  $\mathbf{A} = c/2(\mathbf{B} \wedge \mathbf{r})$ , en déduire le champ électrique créé  $\mathbf{E}$
  - Montrer que l’équation du mouvement (10.4) implique que  $\mathbf{p}$  effectue un mouvement circulaire dont le vecteur rotation est  $\boldsymbol{\omega} = -q\mathbf{B}/m$ . En déduire que le mouvement est circulaire, de rayon  $R$ , et que  $p = m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ .

(c) Montrer que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$  est une constante.

(d) Montrer en projetant (10.4) sur  $\mathbf{p}$  (et en utilisant la valeur de  $\omega$ ) que

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{q}{2} r^2 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(e) En déduire

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

L'impulsion croît comme  $\sqrt{B}$ , et le rayon  $P/(qB)$  décroît comme  $1/\sqrt{B}$ .

(f) Vérifier que dans ces changements lents (adiabatiques), qui préservent la relation  $p = qBr$ , le flux de  $\mathbf{B}$  à travers la surface circulaire enclose est un invariant. C'est un invariant adiabatique.

(g) Vérifier que sur un tour, le gain d'énergie correspond au travail du champ électrique.

**Ex. 6:** Une charge  $q$  a une vitesse  $\mathbf{v}$  parallèle à l'axe ( $Oz$ ) du quadrupôle de longueur  $L$  représenté sur la Fig. ???. Un utilisant les résultats de l'exercice 8 du Chap. 6, calculer les valeurs de  $(dx/dz, dy/dz)$  à la sortie du quadrupôle pour une charge dont l'impact dans le plan d'entrée  $z = -L/2$  est  $(x, y)$ . Calculer les pentes  $(dX/dz, dY/dz)$  dans le système de coordonnées défini par  $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  et  $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$ . En déduire que s'il y a focalisation pour  $X$ , il y a défocalisation pour  $Y$ . Donner la matrice reliant  $(dX/dz, dY/dz)$  à  $(X, Y)$ .

**Ex. 7:** On ajoute un deuxième quadrupôle dont les propriétés de focalisation/défocalisation sont opposées au précédent, à la distance  $D$  du premier. Montrer que l'ensemble peut être focalisant dans les deux coordonnées (c'est l'élément de base de la focalisation *forte*).

**Ex. 8:** On admet l'existence d'une charge magnétique ponctuelle  $q_M$  (monopole). Cette charge est un pseudo-scalaire, qui change de signe dans une symétrie miroir (nommée *parité*). Le 4-potential de cette charge va être décrit par un 4-vecteur axial,  $X\mu = (X^0, \mathbf{X})$ , avec  $\mathbf{B} = -\nabla X^0 - 1/c \partial \mathbf{X} / \partial t$ . Écrire l'expression du couplage du champ électrique à cette charge magnétique, et donner l'équation du mouvement, par analogie avec l'Éq. (10.10).

# Chapitre 11

## Énergie et impulsion du champ

### 11.1 Énergie transférée aux charges

Nous utiliserons les équations de Maxwell applicables aux milieux matériels homogènes, la méthode se restreignant facilement au cas d'une distribution de charges dans le vide.  $E_c$  sera l'énergie des charges. Pour une charge unique, en adoptant la définition relativiste de l'impulsion ( $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ )

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (11.1)$$

$$E_c \frac{dE_c}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = qc^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (11.2)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = qc^2 \frac{\mathbf{p}}{E} \cdot \mathbf{E} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (11.3)$$

où

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t)). \quad (11.4)$$

En sommant sur toutes les charges :

$$\frac{dE_c}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{x} \quad (11.5)$$

Cette énergie est transférée par le champ électromagnétique aux charges du système. On substituera au courant son expression en fonction des champs :

$$\mathbf{j} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (11.6)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \int d^3\mathbf{x} \left( \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}. \quad (11.7)$$

L'identité

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} \quad (11.8)$$

permet de faire apparaître une divergence

$$\frac{dE_c}{dt} = \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} - \int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \quad (11.9)$$

D'autre part

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.10)$$

En appliquant le théorème de Gauss au volume  $V$  (supposé fini) qui contient les charges, limité par la surface  $\Sigma$  (d'élément de surface  $d^2\mathbf{x}$ ) :

$$\frac{dE_c}{dt} + \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = - \int_{\Sigma} d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \quad (11.11)$$

Cette relation exprime la conservation de l'énergie : on reconnaît dans le membre de droite la somme des différentielles de l'énergie des charges, de l'énergie électrostatique, et de l'énergie magnétique. La variation d'énergie contenue dans le volume  $V$  limité par la surface  $\Sigma$  est donnée par le flux du vecteur de Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (11.12)$$

Dans le vide :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (11.13)$$

Un certain arbitraire prévaut dans la définition du vecteur de Poynting, un vecteur de divergence nulle pouvant lui être ajouté tout en préservant la conservation de l'énergie. La définition adoptée a cependant le mérite de préserver la relation entre l'impulsion et l'énergie du champ pour une particule de masse nulle (telle le photon).

## 11.2 Impulsion transférée aux charges

En sommant sur toutes les charges l'équation déterminant la variation d'impulsion d'une charge unique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (11.14)$$

on obtient pour leur impulsion totale  $\mathbf{P}_c$

$$\frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \int d^3\mathbf{x} (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \quad (11.15)$$

On exprime comme précédemment la densité de charge  $\rho$  et le courant  $\mathbf{j}$  en fonction des champs

$$\frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B} - \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \wedge \mathbf{B} \quad (11.16)$$

On symétrisera en ajoutant la divergence (nulle) de  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} &= \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B} \\ &\quad - \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial(\mathbf{D} \wedge \mathbf{B})}{\partial t} + \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.17)$$

En substituant  $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \wedge \mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} &= \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B} \\ &\quad + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge \mathbf{D} - \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial(\mathbf{D} \wedge \mathbf{B})}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{P}_c + \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \wedge \mathbf{B} \right) &= \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge \mathbf{D} \\ &\quad + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} + \int d^3\mathbf{x} (\nabla \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{P}_c + \int d^3\mathbf{x} \mathbf{D} \wedge \mathbf{B} \right) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \int d^2\mathbf{x} n_i T_{ij} \quad (11.20)$$

L'exercice 7 montre que dans un milieu homogène et linéaire caractérisé par les susceptibilités  $\epsilon$  et  $\mu$  :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ij}^B + T_{ij}^E \\ T_{ij}^B &= B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ T_{ij}^E &= D_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Lorsque  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des constantes dans l'espace, les tenseurs précédents peuvent être symétrisés

$$T_{ij}^B = \frac{1}{2}(B_i H_j + B_j H_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (11.21)$$

et de même pour  $T^E$ . L'Éq. (11.20) s'interprète comme une loi de conservation de l'impulsion. On considère un volume  $V$  contenant les charges et les courants : toutes les intégrales peuvent être limitées à ce volume. Dans le membre de gauche,  $\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}$  est la densité d'impulsion. Le membre de droite est la divergence du tenseur  $\partial T^{ij} / \partial x^j$  (voir l'exercice 7).

Le théorème de Gauss permet alors d'écrire l'Éq. (11.20) sous forme d'une intégrale de surface : c'est le flux d'impulsion à travers la surface. Le champ électromagnétique contient ainsi une densité d'impulsion

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{D} \wedge \mathbf{B} \quad (11.22)$$

Pour une onde plane

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = n \frac{\mathcal{U}}{c} \mathbf{k} \quad (11.23)$$

où  $\mathcal{U}$  est la densité d'énergie, et  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (11.24)$$

Il est naturel d'introduire une densité de moment cinétique du champ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (11.25)$$

### 11.3 La controverse

L'expression de  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  proposée à l'équation (11.22) est initialement due à [Minkowski1908]. Elle a été critiquée par [Abraham1909] qui a proposé pour l'impulsion dans un milieu matériel

$$\mathbf{P}_A = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \frac{1}{n} \frac{\mathcal{U}}{c} \mathbf{k}, \quad (11.26)$$

et pour une onde plane, avec les notations de (11.23)

$$\mathbf{P}_A = \frac{1}{n} \frac{\mathcal{U}}{c} \mathbf{k}. \quad (11.27)$$

Les expressions (11.23) et (11.27) diffèrent par un facteur  $n^2$ . La discussion sur le choix correct s'étend jusqu'à nos jours [Crenshaw2014, Ramos2011]. La conservation de l'impulsion invoquée dans l'interprétation de (11.20) n'inclut pas l'impulsion transférée au milieu, et ne respecte pas la conservation de l'impulsion totale. Ce défaut apparaît clairement dans un milieu à gradient d'indice : la trajectoire courbée des rayons implique un transfert d'impulsion au milieu, qui n'est pas pris en compte dans l'équation (11.20). Les champs dans un milieu ne sont pas directement observables, et en dépit de la grande différence apparente des deux expressions de l'impulsion, les expériences existantes ne permettent pas de trancher entre les deux choix, Lorsque l'impulsion totale du système est évaluée de manière cohérente.

## Exercices

- Ex. 1:** Vérifier que la densité d'énergie  $E$  champ électromagnétique d'une onde plane satisfait à  $E = c|\mathbf{P}|$  comme une particules de masse nulle.
- Ex. 2:** Quelle est la pression exercée par une onde électromagnétique plane en incidence normale sur un plan diélectrique lorsque le rapport entre les intensités réfléchies et incidentes est  $E_x^r/E_x^i = -\alpha$  ?
- Ex. 3:** Onde plane incidente sur un diélectrique de forme arbitraire. Quel est le transfert d'énergie et d'impulsion au diélectrique en l'absence d'absorption ? Donner le transfert d'énergie et d'impulsion pour une lame diélectrique à faces parallèles en présence d'une conductivité  $\sigma$ .

**Ex. 4:** On considère une onde plane linéairement polarisée :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , le vecteur  $\mathbf{B}$  vérifiant  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}/c$ . Cette onde a-t-elle une densité de moment cinétique ?

**Ex. 5:** Même question pour une onde circulairement polarisée  $\mathbf{E} = (\mathbf{i} + i\mathbf{j})e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$  étant les vecteurs unitaires des axes  $x$  et  $y$ .

**Ex. 6:** Énergie et impulsion rayonnées par un conducteur linéaire de section  $S$ , de conductivité  $\sigma$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

**Ex. 7:** Démontrer pour un milieu homogène (où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants) et linéaire :

$$[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} + (\nabla \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B}]_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( B^i H^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right)$$

$$[(\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + (\nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge \mathbf{D}]_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D^i E^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right)$$

**Ex. 8:** Vérifier que la densité d'énergie  $E$  champ électromagnétique d'une onde plane satisfait à  $E = c|\mathbf{P}|$  comme une particules de masse nulle.

# Chapitre 12

## Champs rayonnés par les courants

### 12.1 Propagation des potentiels

#### 12.1.1 Les équations de propagation

En combinant les équations de Maxwell 1.17 et 1.18, on obtient une équation différentielle d'ordre 2 pour le potentiel  $\mathbf{A}$  :

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = c\mu_0\mathbf{j} + \nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right). \quad (12.1)$$

À partir de 1.15 :

$$-\Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (12.2)$$

En ajoutant  $\partial U/c^2\partial t^2$  aux deux membres :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t^2} - \Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right). \quad (12.3)$$

En notant  $\square$  l'opérateur D'Alembertien :

$$\square = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \quad (12.4)$$

et en substituant  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ , les équations de propagation des potentiels prennent la forme

$$\square\mathbf{A} = c\mu_0\mathbf{j} + \nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) \quad (12.5)$$

$$\square U = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right). \quad (12.6)$$

On peut alors choisir une jauge dans laquelle  $\partial U/(c\partial t) + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$  : c'est la condition de Lorenz. Les deux équations sont alors des équations de propagation, la vitesse de propagation étant la constante  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Dans la jauge de Lorenz, les potentiels vérifient l'équation des ondes avec source :

$$\square\mathbf{A} = c\mu_0\mathbf{j}, \quad (12.7)$$

$$\square U = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (12.8)$$

La fonction de Green de l'équation de propagation

$$\square U = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \quad (12.9)$$

qui s'annule à l'infini pour une source rayonnant dans tout l'espace est, avec  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$

$$G^\pm(R, t - t') = \frac{\delta(t' - [t \pm R/c])}{R} \quad (12.10)$$



### 12.1.2 Relations entre les potentiels et les sources

Les solutions des équations de propagation dépendent des conditions initiales. On doit simultanément trouver les sources et les potentiels associés. Ces deux termes sont liés par les équations de propagation :

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t \pm R/c, \mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x} \quad (12.11)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{j}(t \pm R/c, \mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x} \quad (12.12)$$

On a posé  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ . Lorsque les sources incluses dans les relations précédentes sont à l'origine du champ électromagnétique, le principe de causalité impose le choix du signe *négligé*, et on notera  $\tau = t - R/c$  la valeur du temps retardé. Comme la densité de charge est nulle dans les conducteurs, il convient d'interpréter ces relations en substituant l'intégrale de  $\int \sigma d^2\mathbf{x}$  à  $\rho d^3\mathbf{x}$ , et de procéder de manière analogue dans les autres formules où intervient la densité de charge. Dans l'approximation où  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  sont donnés, les équations précédentes fournissent une solution à laquelle on peut ajouter la solution générale de l'équation de propagation sans second membre (champ électromagnétique libre). Dans le cas contraire —  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  inconnus — il faut traiter l'influence des champs sur les courants, et des équations complémentaires permettant d'évaluer les courants créés par les champs sont nécessaires, telle celle qui définit le mouvement des charges 10, ou la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  dans la matière. Les conditions aux limites doivent être précisées pour assurer une solution unique, la jauge étant (*partiellement*) fixée par la condition de Lorenz.

### 12.1.3 Propagation des champs

Les équations reliant les champs aux potentiels

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (12.13)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (12.14)$$

permettent d'exprimer les relations du paragraphe précédent sous forme d'une relation entre champs et sources. En posant  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$ , et  $\tau = t - R/c$  :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{\rho(\tau, \mathbf{x})}{R^3} \mathbf{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\mathbf{R}}{R^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(t - R/c)}{\partial t} \quad (12.15)$$

La première intégrale, qui correspond à la contribution coulombienne, décroît en  $1/R^2$ . Les deux autres, qui supposent une variation temporelle des courants ou une accélération des charges décroissent en  $1/R$ .

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}(\tau, \mathbf{x})}{R^3} \wedge \mathbf{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x} \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{j}(t - R/c, \mathbf{x})}{R} \quad (12.16)$$

Le premier terme décrit la contribution d'un courant stationnaire au champ magnétique, et il décroît en  $1/R^2$  : c'est la loi de Biot-Savart. Le second terme peut être simplifié à grande distance :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \frac{\mathbf{j}(t - R/c, \mathbf{x})}{R} = \nabla_{\mathbf{r}}(1/R) \wedge \mathbf{j} + \frac{1}{R} \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{j} \quad (12.17)$$

Le rotationnel du courant, qui décroît en  $1/R$ , domine à grande distance, et le premier terme est alors négligeable. On peut expliciter ce rotationnel, la seule dépendance en  $\mathbf{r}$  provenant de l'argument  $\tau = t - R/c$  du courant :

$$\frac{\partial}{\partial r^k} = \frac{\partial \tau}{\partial r^k} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial j^i}{\partial r^k} = \frac{\partial j^i}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r^k} \quad (12.19)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \tau = -\frac{\mathbf{R}}{cR} \quad (12.20)$$

Il en résulte que

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{R} \wedge \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \tau}}{cR} \quad (12.21)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}(t - R/c, \mathbf{x})}{R^3} \wedge \mathbf{R} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} \frac{\mathbf{R} \wedge \partial \mathbf{j}(t - R/c, \mathbf{x}) / \partial \tau}{cR^2} \quad (12.22)$$

le deuxième terme, qui représente la composante rayonnée s'annule manifestement pour des courants stationnaires.

Les Éq. (11.17–12.22) de ce chapitre sont en général inexploitable : les courants ou densités comprennent non seulement les sources « premières » du champ, mais aussi les courants « secondaires » que celui-ci induit. Les solutions devront les prendre en compte et des approximations adaptées doivent être considérées dans chaque cas. Des exemples seront ultérieurement fournis avec les diélectriques, les conducteurs, les cristaux, les antennes, etc. D'autre part, lorsque les conducteurs sont en mouvement, la différentiation des potentiels par rapport au temps fait intervenir la variation des surfaces limites qui sont « masquées » dans l'écriture de la dérivée des courants. Ces formules sont ainsi d'un emploi délicat pour une charge ponctuelle en mouvement, compte tenu de la présence des distributions de Dirac, et nous avons adopté pour traiter ce cas, au Chap. 13, comme la plupart des ouvrages, une approche directe.

## 12.2 Composantes monochromatiques du champ

Toute dépendance temporelle peut être considérée comme une somme de composantes monochromatiques. On supposera les courants périodiques

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{x}) = \Re(e^{-i\omega\tau} \mathbf{j}(\mathbf{x})) \quad (12.23)$$

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int e^{-i\omega(t-R/c)} \frac{\rho(\mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x} \quad (12.24)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int e^{-i\omega(t-R/c)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x} \quad (12.25)$$

On définira

$$U(t, \mathbf{r}) = \int d\omega e^{-i\omega t} U(\omega, \mathbf{r}) \quad (12.26)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \int d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) \quad (12.27)$$

et des relations semblables pour  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\rho(\omega, \mathbf{x})}{R^3} \mathbf{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} (-i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \rho(\omega, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{R}}{R^2} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} (i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{R} \end{aligned} \quad (12.28)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{R^3} \wedge \mathbf{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} (i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{cR^2}. \quad (12.29)$$

Les composantes monochromatiques du potentiel obéissent à l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)(U, \mathbf{A}) = -(\rho(\omega, \mathbf{r}), \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}/c)) \quad (12.30)$$

dont la fonction de Green est

$$G(\omega, \mathbf{r}) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (12.31)$$

## 12.3 Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ à grande distance des sources

À grande distance, les deux contributions « statiques » (le terme coulombien et la contribution de Biot-Savart), qui subsistent pour des charges et des courants stationnaires, décroissent en  $1/R^2$ , alors que l'effet des charges et des courants variables varie comme  $1/R$ . Ces termes seront négligeables si

$$\frac{1}{R} \ll \frac{\omega}{c} = k \quad (12.32)$$

soit  $kR \gg 1$  où  $k$  est le module du vecteur d'onde dans le vide. La distance doit être beaucoup plus grande que la longueur d'onde associée à la composante monochromatique.

Nous considérons maintenant des distances suffisantes pour que la contribution des courants stationnaires et de la partie coulombienne puissent être négligées ( $kR \gg 1$ ) on aura pour les composantes monochromatiques ( $\omega \gg c/R$ ) :

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} (-i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \rho(\omega, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{R}}{R^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} (i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{R} \quad (12.33)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (i\omega) \int d^3\mathbf{x} e^{i\omega R/c} \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{cR^2}. \quad (12.34)$$

Le module  $R$  du vecteur  $\mathbf{R}$  vérifie  $R^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2$ , et en posant  $r = |\mathbf{r}|$  et  $x = |\mathbf{x}|$

$$R = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + x^2)^{1/2} \quad (12.35)$$

Au dénominateur,  $R \sim r$  est une approximation justifiée à grande distance si  $L/R \ll 1$ . Cette condition permet également de supposer la direction  $\mathbf{n}$  du vecteur  $\mathbf{R}$  fixe dans l'intégration. Les termes d'ordre 2 en  $x$  ne pourront être négligés dans le facteur de phase  $e^{i\omega R/c}$  que si  $r \gg \pi|x|^2/\lambda$ , c'est à dire si le rapport entre la distance et la dimension du système  $L$  est très supérieure au rapport entre la dimension du système et la longueur d'onde : on supposera toutes ces conditions vérifiées pour simplifier l'analyse ultérieure, soit :

$$kR \gg 1 \quad (\text{termes statiques négligeables}) \quad (12.36)$$

$$L/R \ll 1 \quad (\text{termes du premier ordre négligeables dans } R) \quad (12.37)$$

$$r/L \gg \pi L/\lambda \quad (\text{termes de phase du second ordre négligeables}) \quad (12.38)$$

On posera :

$$\mathbf{R} = R\mathbf{n} \quad (12.39)$$

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} \quad (12.40)$$

$$\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \sim \frac{e^{i\omega r/c}}{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (12.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (-ik) \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rho(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (ik) \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (ik) \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}). \quad (12.43)$$

Lorsque la direction de  $\mathbf{k}$  ne dépend pas du point d'intégration  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire à grande distance, on reconnaît dans les intégrales précédentes les transformées de Fourier spatiales des densités de charge et de courant :

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (-i)\rho(\omega, \mathbf{k})\mathbf{k} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (ik)\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}), \quad (12.44)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (i)\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}). \quad (12.45)$$

On va utiliser l'équation de conservation pour simplifier l'expression du champ électrique en exprimant la densité de charge à l'aide du courant :

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (12.46)$$

$$-i\omega \rho(\omega, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \quad (12.47)$$

$$-i\omega \rho(\omega, \mathbf{k}) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (12.48)$$

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (-i)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}))\mathbf{k} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (i\mathbf{k})\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) \quad (12.49)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (i\mathbf{k})\mathbf{j}_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) \quad (12.50)$$

avec

$$\mathbf{j}_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) \wedge \mathbf{n}), \quad (12.51)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} (i\mathbf{k})\mathbf{n} \wedge \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}). \quad (12.52)$$

On vérifie que

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \quad (12.53)$$

## 12.4 L'onde plane monochromatique

À grande distance, nous avons vu qu'une composante monochromatique avait un comportement d'onde plane (Éq. (12.48-12.49))

$$\mathbf{E} = \Re(E_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + E_2 \boldsymbol{\epsilon}_2) e^{-i\omega t} \quad (12.54)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (12.55)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (12.56)$$

$$(12.57)$$

Les amplitudes  $E_1$  et  $E_2$  sont des nombres complexes. Les vecteurs  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  sont unitaires et perpendiculaires à la direction d'observation  $\mathbf{n}$  d'après (12.56). En un point  $\mathbf{r}$  donné, le vecteur  $\mathbf{E}$  décrit en général une ellipse au cours du temps, cette ellipse devenant un segment si  $E_1$  ou  $E_2$  sont nuls, ou un cercle si  $E_1 = iE_2$ . La lumière naturelle est en général une somme d'ondes de ce type, déphasées les unes par rapport aux autres de manière aléatoire. On emploie également l'expression de *mélange incohérent*. Un tel mélange est décrit de manière statistique par une matrice densité de polarisation moyennée dans le temps, ou *matrice de polarisation*. En choisissant comme vecteurs de base  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_1 E_1^* & E_1 E_2^* \\ E_2 E_1^* & E_2 E_2^* \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

**Pour une lumière non polarisée.**

$$\rho = \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

**Pour une lumière circulairement polarisée :** La polarisation circulaire positive correspond à un déphasage de  $\pi/2$  des composantes selon  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  :  $E_2 = iE_1$

$$\rho = \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (12.60)$$

C'est la matrice hermitienne conjuguée qui décrit la polarisation circulaire négative. D'autres exemples sont proposés dans l'exercice 9.

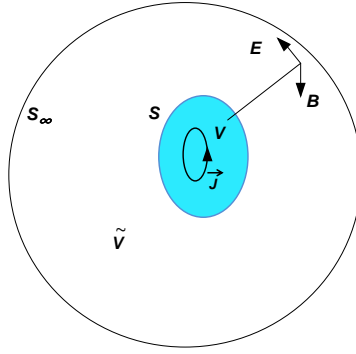


FIG. 12.1 – Les surfaces limites dans le théorème de Lorentz.

La matrice densité hermitique de l'Éq. (12.58) peut toujours être représentée à l'aide des trois matrices de Pauli  $\sigma_i$  et de la matrice unité  $\sigma_0$  :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.61)$$

On définit ainsi le vecteur de polarisation  $\mathbf{P}$  qui décrit la polarisation moyenne de l'onde (sa matrice densité).

$$\rho = \frac{1}{2} (\sigma_0 + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (12.62)$$

## 12.5 Théorème de Lorentz

D'après les Éq. (12.46) et (12.49), les composantes monochromatiques des champs électromagnétiques rayonnés par les courants à grande distance ont la configuration d'une onde plane et sont de la forme :

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (12.63)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (12.64)$$

où  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

Le « *théorème de Lorentz* » relie deux configurations de champ vérifiant les équations de Maxwell. L'une avec les courants  $\mathbf{J}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ , et l'autre  $\mathbf{J}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ . On partira pour l'établir des identités

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_2) = (\nabla \wedge \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{B}_2 - (\nabla \wedge \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{E}_1 \quad (12.65)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_1) = (\nabla \wedge \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{B}_1 - (\nabla \wedge \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{E}_2 \quad (12.66)$$

À partir des équations de Maxwell (1.17-1.18), dans un domaine  $\Delta$  où les champs n'ont pas de singularité, et pour les composantes monochromatiques des champs, le théorème de la divergence entraîne :

$$\int_{\Sigma} d^2 \mathbf{x} \cdot (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_2 - \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_1) = \mu_0 \int_{\Delta} (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1). \quad (12.67)$$

On considère d'abord le volume  $\tilde{V}$  extérieur à la surface  $S$  qui englobe tous les conducteurs sur la Fig. 12.1. Les champs décroissent à l'infini comme  $1/r$ . En outre, le produit  $\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_2$  est parallèle à  $\mathbf{n}$ . La surface  $\Sigma$  est la réunion de  $S$  et  $S_{\infty}$

- l'intégrale de surface sur  $S_{\infty}$  est nulle ;
- le volume  $\tilde{V}$  ne contient aucun conducteur : l'intégrale de volume (terme de droite) est nulle.

$$\int_S d^2 \mathbf{x} \cdot (\mathbf{E}_1(\omega) \wedge \mathbf{B}_2(\omega) - \mathbf{E}_2(\omega) \wedge \mathbf{B}_1(\omega)) = 0 \quad (12.68)$$

C'est le théorème de Lorentz sous sa première forme. En appliquant la relation trouvée au volume  $V$  limité par  $S$  et contenant les conducteurs, il en résulte que pour toute surface  $S$  incluant la totalité des conducteurs :

$$\int_V \mathbf{j}_1(\omega) \cdot \mathbf{E}_2(\omega) - \mathbf{j}_2(\omega) \cdot \mathbf{E}_1(\omega) = 0 \quad (12.69)$$

C'est la deuxième forme du théorème. Elle relie le courant  $\mathbf{j}_2$  produit dans un conducteur (2) par le courant source  $\mathbf{j}_1$  au courant  $\mathbf{j}_1$  produit dans le conducteur (1) par la source  $\mathbf{j}_2$ .

## Exercices

- Ex. 1: Jauge de Lorenz.** Montrer que l'on peut choisir la fonction de jauge de manière à vérifier la condition de Lorenz. La solution est-elle unique ?
- Ex. 2: L'approximation grande distance.** Vérifier que la prise en compte de la variation de  $R$  induit une correction en  $a^2/R^2$  où  $a$  est la dimension du système de conducteurs.
- Ex. 3:** Pour une antenne linéaire de longueur  $L$ , on suppose  $\mathbf{j} = z j_0 \delta(x) \delta(y) \cos(\omega t) \cos(\pi z/L)$  Calculer  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ , et les champs  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Comment varie le module du vecteur de Poynting avec la direction d'observation du champ (identifiée à celle de  $\mathbf{k}$ ) ?
- Ex. 4:** Calculer  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  pour une boucle linéaire plane  $\mathbf{j} = j_0 \delta(x - \rho_0 \cos \psi) \delta(y - \rho_0 \sin \psi) \delta(z) \cos(\omega t)$  quelle est la direction d'observation où le rayonnement est maximal ?
- Ex. 5:** Quel est le rapport des flux rayonnés à la même distance  $R$  (grande) par une boucle et une antenne linéaire dans la même direction pour la même intensité ?  
Est-il correct d'écrire l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho(t - R/c, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(t - R/c, \mathbf{x}) = 0.$$

- Ex. 6:** Écrire la matrice densité de polarisation dans les différents cas suivants :
- une onde polarisée selon  $\mathbf{e}_1$ ,
  - une onde polarisée selon  $\mathbf{e}_2$ ,
  - une onde polarisée selon  $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ .
- Ex. 7:** Déterminer le vecteur polarisation dans les trois cas qui précèdent ainsi que pour une polarisation circulaire positive ou négative.
- Ex. 8:** Quelle est la matrice densité associée à une composante monochromatique du champ produit à grande distance selon l'Éq. (12.50) ?
- Ex. 9:** Établir le théorème de Lorentz dans un milieu anisotrope.

## Chapitre 13

# Le 4-potentiel d'une charge ponctuelle

### 13.1 Le 4-potentiel : méthode temporelle

La position de la charge à l'instant  $t$  est  $\mathbf{M}(t)$ , et sa vitesse  $\mathbf{v}(t)$  :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{M}}{dt} \quad (13.1)$$

La densité de charges et le vecteur courant sont

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t)) \quad (13.2)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = q\mathbf{v}\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t)). \quad (13.3)$$

Le 4-vecteur courant associé à la charge de position  $\mathbf{M}(\tau)$  à l'instant  $\tau$  dans le laboratoire est  $j_\mu(\tau, \mathbf{x})\delta(\tau - (t - R/c)) = (\rho, \mathbf{j}/c)$ . Le 4-potentiel vecteur est donné par l'expression usuelle :

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d\tau \frac{j^\mu(\tau, \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \delta(\tau - (t - R/c)), \quad (13.4)$$

où  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{M}(\tau)$  et  $R = |\mathbf{R}|$ , la « fonction »  $\delta$  imposant  $\tau = t - R/c$ . L'intégration sur la coordonnée  $\mathbf{x}$  est absorbée par la fonction  $\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\tau))$  contenue dans l'expression du courant. On définira  $x^\mu = 1/c(c\tau, \mathbf{x})$  :

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, \mathbf{v}/c) \quad (13.5)$$

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{traj} \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau \frac{\delta(\tau - t + R/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (13.6)$$

L'intégration sur le temps du laboratoire  $d\tau$  nécessite l'évaluation de  $d/d\tau(\tau + R(\tau)/c)$  à  $t$  fixé

$$R dR = \mathbf{R} \cdot (-\mathbf{v}/c) d\tau. \quad (13.7)$$

En posant  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  et  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{1}{R} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \quad (13.8)$$

soit

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (13.9)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}. \quad (13.10)$$

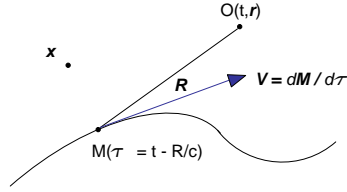


FIG. 13.1 – Potentiel de Liénard-Wiechert.

## 13.2 Le 4-vecteur courant d'une charge ponctuelle : méthode spatiale

Cette deuxième méthode, moins élégante, prépare le calcul de dérivées partielles qui seront utiles dans l'évaluation du champ rayonné.

## 13.3 Les variables retardées et les potentiels

Les potentiels engendrés par les charges sont donnés par les formules usuelles

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\rho(t - R/c), \mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x} \quad (13.11)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{j}(t - R/c), \mathbf{x})}{R} d^3\mathbf{x}, \quad (13.12)$$

où  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$  et  $R = |\mathbf{R}|$ .

On effectuera l'intégration des trois variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  à l'aide de  $\xi_i = x_i - M_i(t - R/c)$ .

$$\int d^3\mathbf{x} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t - R/c)) = \int d^3\xi \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \delta_3(\xi(t)). \quad (13.13)$$

On voit apparaître le jacobien

$$J = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi}. \quad (13.14)$$

qui se calcule facilement à partir de

$$\delta\xi = \delta\mathbf{x} - \delta\mathbf{M}(t - R/c) = \delta\mathbf{x} + \mathbf{v} \frac{\delta R}{c} \quad (13.15)$$

La variation  $\delta R$  vérifie

$$R \delta R = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{R} = -\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{x} \quad (13.16)$$

$$\delta\xi = \delta\mathbf{x} - \beta(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{x}) \quad (13.17)$$

où  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  et  $\beta = \mathbf{v}/c$ . Le jacobien, invariant par rotation, peut se calculer en choisissant par exemple  $Oz$  selon la direction de la vitesse  $\beta$  (voir exercice).

$$\frac{1}{J} = 1 - \beta \cdot \mathbf{n} \quad (13.18)$$



Les potentiels de Lienard-Wiechert en résultent :

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|_{ret}} \quad (13.19)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{v}|_{ret}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|_{ret}} \quad (13.20)$$

Ils permettent la transition entre les Éq. (??, 12.7) relatives aux distributions continues et le champ des charges ponctuelles (13.19-13.20).

## 13.4 Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

Les relations usuelles entre les potentiels et les champs  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  :

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (13.21)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (13.22)$$

permettent, en utilisant l'expression des dérivées partielles indiquées dans l'exercice d'obtenir  $\mathbf{E}$  comme somme d'un champ coulombien et d'un champ d'accélération

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{acc} \quad (13.23)$$

$$\mathbf{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})|_{ret} \quad (13.24)$$

$$\mathbf{E}_{acc} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} [\mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})]|_{ret} \quad (13.25)$$

À ces deux contributions au champ électrique sont associées deux contributions au champ magnétique comme on l'établit dans les exercices :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}|_{ret} \quad (13.26)$$

Tous les membres de droite des équations sont évalués au temps retardé  $\tau = t - R/c$ .

## 13.5 Mouvements particuliers

### 13.5.1 Mouvement uniforme

Lorsque l'accélération est nulle ( $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ ), le champ  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C$  est le transformé de Lorentz du champ de Coulomb associé à une charge au repos. La direction du champ électrique  $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}|_{ret}$  est alors celle du vecteur  $\mathbf{n}(t)$  (voir Exercice). Pour une charge en mouvement, le champ va décroître dans la direction transverse sous l'effet du facteur  $(1 - \beta^2)$  sauf vers l'avant où cet effet est compensé par le facteur  $(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3$ . L'effet de ce champ sur un électron lié peut être calculé de manière approchée dans un cadre classique, et il permet d'établir la perte d'énergie d'une particule dans un milieu due à l'ionisation (Exercice).

Le champ magnétique issu de la contribution coulombienne est celui qu'on obtient par la loi de Biot-Savart (champ créé par un courant) à partir du courant  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ .

### 13.5.2 Mouvement accéléré

On voit apparaître une dépendance en  $1/R$  caractéristique du rayonnement. Le champ d'accélération s'annule lorsque le rayon vecteur  $\mathbf{n}$  a la direction de l'accélération  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , en particulier vers l'avant pour un mouvement linéaire.

## 13.6 Mouvement périodique d'une charge

On s'intéresse au champ d'accélération d'une charge effectuant un mouvement périodique. Ce problème surgit par exemple dans la diffusion d'une onde électromagnétique incidente par un électron libre. L'accélération est alors  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = -i\omega\boldsymbol{\beta}$  avec  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 e^{-i\omega(t-R/c)}$ .

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} [\mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge (-i\omega\boldsymbol{\beta}))]_{ret} \quad (13.27)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} (-i\omega) e^{-i\omega(t-R/c)} [\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta})] \quad (13.28)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} (-i\omega) e^{-i\omega(t-R/c)} [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] \quad (13.29)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} i\omega e^{-i\omega(t-R/c)} \boldsymbol{\beta}_\perp \quad (13.30)$$

Lorsque le facteur  $(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3$  est proche de l'unité, on retrouve la formule établie au chapitre précédent pour une distribution de courant

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{k}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(t)} \quad (13.31)$$

### 13.6.1 L'approximation dipolaire

Dans le cadre de « l'approximation dipolaire », l'amplitude du déplacement de la charge est très inférieure à la longueur d'onde, et on peut supposer  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(t)) = 1$  ceci revient à remplacer  $\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t))$  par  $\delta_3(\mathbf{x})$  dans les transformées de Fourier définissant  $\rho(\mathbf{k})$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ . On peut ainsi *dans l'approximation dipolaire* calculer le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle à l'aide des formules générales du chapitre précédent en posant

$$\rho^*(\omega, \mathbf{k}) = q \quad (13.32)$$

$$\mathbf{j}^*(\omega, \mathbf{k}) = q\mathbf{v}_0 \quad (13.33)$$

$\rho^*(\omega, \mathbf{k})$  et  $\mathbf{j}^*(\omega, \mathbf{k})$  ne sont *plus* les transformées de Fourier des distributions spatio-temporelles comme on le voit dans l'exercice 1.

## 13.7 Rayonnement d'une charge isolée (non relativiste) : formule de Larmor

Dans l'expression du champ d'accélération (13.25), les vecteurs  $\mathbf{n}(t - R/c)$  et  $\mathbf{n}(t)$  sont alors identiques, et au dénominateur, le facteur  $(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) = 1$ . La puissance rayonnée dans l'angle solide  $d\Omega$  à la distance  $R$  sera

$$\frac{dW}{dt} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = R^2 \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}^2 \quad (13.34)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R} \dot{\boldsymbol{\beta}}_\perp \quad (13.35)$$

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}_\perp^2 \quad (13.36)$$

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}_\perp^2 \quad (13.37)$$

Si  $\theta$  désigne l'angle entre la direction  $\theta$  et l'accélération

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \dot{\mathbf{v}}^2 \quad (13.38)$$

Après intégration sur les directions :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (13.39)$$

C'est la formule (non-relativiste) de Larmor.

## 13.8 Formule de Larmor relativiste

Le calcul relativiste est effectué à l'aide de l'expression du champ d'accélération 13.25. Le vecteur de Poynting est dirigé selon  $\mathbf{n}(t - R/c)$ , et l'intégration peut se faire sur une sphère centrée en  $\mathbf{M}(t - R/c)$ , et de rayon  $R(t - R/c)$ . Le résultat ne sera pas explicité pour un mouvement général. Il peut être calculé exactement pour un mouvement circulaire uniforme (voir exercice) :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (13.40)$$

On observe deux modifications substantielles :

- L'apparition du facteur  $\gamma^4 = (E/mc^2)^4$  où  $E$  est l'énergie de la charge et  $m$  sa masse. Le facteur  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  vaut 1 à la limite non-relativiste.
- L'accélération doit être évaluée à l'instant  $t - R/c$ , comme dans les Éq. (13.24, 13.25) et non pas à l'instant  $t$  comme dans l'expression non relativiste. Cette deuxième différence n'a évidemment aucun impact pour un mouvement périodique (le module de l'accélération est constant), mais il a des conséquences importantes pour un mouvement général : on ne peut pas substituer une « force équivalente » à l'expression de la puissance rayonnée à partir de (13.40).

**Remarque :** la formule (13.40) ne s'applique que pour un mouvement *circulaire uniforme*. Elle fournit par exemple l'énergie rayonnée dans un accélérateur d'électrons destiné au rayonnement synchrotron (quelques GeV), ou par des protons dans un accélérateur de très haute énergie, tel le *Large Hadronic Collider* (3 à 7 TeV).

## 13.9 Réaction de rayonnement

Une charge accélérée par un champ extérieur rayonne. Cette perte d'énergie peut être représentée dans le laboratoire par une force de freinage opposée à l'accélération, et cette force fournira une puissance égale à l'énergie rayonnée. D'après (13.40),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -K \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \quad (13.41)$$

En étendant l'équation du mouvement à un champ extérieur nul :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{m}{K} = -\frac{1}{T_0} \quad (13.42)$$

et l'évolution de la vitesse sera  $v = v_0 e^{-t/T_0}$ . Ce résultat est absurde puisqu'en l'absence de champ externe, la charge n'est pas accélérée : elle ne rayonne pas et ne perd pas d'énergie. Il vaut mieux ne pas utiliser la notion classique de force pour décrire une charge ponctuelle soumise aux effets électromagnétiques qu'elle engendre.

## Exercices

**Ex. 1:** Établir l'équation reliant le temps  $\tau = t - R/c$  à l'instant  $t$  pour un mouvement linéaire uniforme de vitesse  $\mathbf{v}$ . Le point d'observation est situé à la distance  $h$  de la droite. Préciser le domaine où une solution existe si nécessaire.

**Ex. 2:** Établir les formules exactes donnant  $\rho(\omega, \mathbf{k})$  et  $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ . Soit  $\mathbf{M}(t)$  la position de la charge. On montrera que les formules

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t)) \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= q\mathbf{v}(t)\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(t)) \end{aligned}$$

entraînent

$$\begin{aligned}\rho(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{q}{(2\pi)^4} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{M}(t)} \\ \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{q}{(2\pi)^4} \mathbf{v}_0 \\ \rho(t, \mathbf{x}) &= \int d\omega d\mathbf{x} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \rho(\omega, \mathbf{k}) \\ \rho(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{q}{(2\pi)^4} \int dt e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{M}(t))} \\ \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{q}{(2\pi)^4} \int dt e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{M}(t))} \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

$k$  est-il égal à  $\omega/c$  dans ces formules ?

**Ex. 3:** Si la charge  $q$  dépend du temps (on la modifie en connectant le conducteur à une source), le champ  $\mathbf{E}(t)$  est proportionnel à  $q(t)$  et non pas  $q(t - R/c)$  : l'effet coulombien de la charge semble instantané. Pourquoi n'y a-t-il pas violation de la relativité ?

**Ex. 4:** Vérifier explicitement l'équation 13.26 en calculant  $\nabla \wedge \mathbf{A}$ .

**Ex. 5:** Soit  $\mathbf{x}$  le point d'observation,  $\mathbf{M}(t - R/c)$  la position de la charge,  $t' = t - R/c$ , et  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt'$  : Établir les dérivées partielles suivantes, avec  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{M}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \\ \nabla_{\mathbf{x}}(R) &= \frac{\mathbf{n}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \\ \nabla_{\mathbf{x}}(t - R/c) &= -\frac{\mathbf{n}}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial x_i} &= -\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}_i}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \boldsymbol{\beta} &= \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} \wedge \mathbf{n}}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}\end{aligned}$$

**Ex. 6:** Établir à l'aide des formules précédentes (et en s'armant de courage) les Éq. (13.23), (13.24) et (13.25).

# Chapitre 14

## Équations de Maxwell dans les milieux homogènes

### 14.1 Relations de Maxwell « exactes »

Les relations établies pour l'électrostatique et la magnéto­statique des milieux matériels ont conduit à l'introduction des vecteurs polarisation électrique  $\mathbf{P}$  et magnétisation  $\mathbf{M}$ . Le vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  induit une distribution de charges (liées)  $\rho_V = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  qui s'ajoutent aux charges libres. En présence de champs variables, les charges moléculaires (liés) qui sont à l'origine de la polarisation se déplacent, et engendrent un *courant de déplacement*  $\mathbf{j}_P$ . D'autre part, l'induction électrique  $\mathbf{D}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  restent définis par

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (14.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (14.2)$$

On conserve dans la matière la forme des équations de Maxwell avec une modification minimale nécessitée par la conservation de la charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{Définition (i)} \quad (14.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Pas de charges magnétiques (ii)} \quad (14.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad \text{Inchangée (iii)} \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} [\nabla \wedge \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}] \quad \text{Formellement inchangée (iv)} \quad (14.6)$$

Dans la dernière équation (iv),

$$- \mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P$$

-  $\mathbf{j}_e = \rho \mathbf{v}$  est le courant électrique usuel

-  $\mathbf{j}_M = \nabla \wedge \mathbf{M}$  est la contribution de magnétisation vue en magnéto­statique.

-  $\mathbf{j}_P$  est la contribution du vecteur polarisation, le courant de déplacement, que nous allons préciser.

En prenant la divergence de (iv) :

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e - \nabla \cdot \mathbf{j}_P + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (14.7)$$

Comme la conservation de la charge impose l'équation de continuité.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0 \quad (14.8)$$

On conclue

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (14.9)$$

L'équation (iv) devient

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) - \mu_0 \mathbf{j} \quad (14.10)$$

On a introduit le courant total  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \nabla \wedge \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (14.11)$$

Le vecteur  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  s'interprète comme un courant (courant de déplacement) en régime variable.

En multipliant les deux membres par  $\epsilon_0$  l'équation (iv) équivaut à

$$\frac{\partial \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) - \mu_0 \mathbf{j}_e \quad (14.12)$$

En conservant les relations du régime statique :  $\mathbf{D} = (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$  et  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{j}_e. \quad (14.13)$$

Les équations de Maxwell dans les milieux homogènes prennent ainsi la forme :

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (14.14)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (14.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (14.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{j}_e \quad (14.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (14.19)$$

## 14.2 Propagation dans un diélectrique homogène isotrope

Dans un milieu neutre et isolant :

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (14.20)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (14.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (14.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (14.24)$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \nabla \wedge \mathbf{D} \quad (14.25)$$

Ces équations sont les mêmes que celles du vide du Chap. 1, Éq. (1.15–1.18), à la substitution près de  $\epsilon \epsilon_0$  à  $\epsilon$  et de  $\mu \mu_0$  à  $\mu_0$ . La vitesse de la lumière dans le milieu vérifie

$$\epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 c'^2 = 1, \quad (14.26)$$

soit

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (14.27)$$

L'onde électromagnétique se propage avec une célérité  $c/n$ , l'indice optique  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ , et la jauge de Lorenz naturelle vérifie

$$\frac{1}{c'} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (14.28)$$

Dans un milieu diélectrique de ce type, une onde plane monochromatique sera de la forme

$$\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (14.29)$$

$$\mathbf{k} = \frac{n\omega}{c} \mathbf{u} \quad (14.30)$$

$\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire dans la direction de propagation, avec l'expression analogue pour  $\mathbf{B}$ . Les équations de Maxwell (par exemple la dernière) impliquent alors

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \wedge \mathbf{E} \quad (14.31)$$

### 14.3 Les relations de constitution

Pour compléter les équations de Maxwell à l'intérieur des matériaux, il faut connaître la relation entre le vecteur  $\mathbf{P}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  d'une part, entre la magnétisation et  $\mathbf{H}$  de l'autre : ce sont les *relations de constitution*.

Le terme dominant de ces relations de constitutions est la partie linéaire, ce qui n'exclue pas des contributions non-linéaires significatives dans les champs électromagnétiques intenses (lasers), que nous ignorerons.

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{x} \chi_e(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) \mathbf{E}(\tau, \mathbf{x}) \quad (14.32)$$

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d\mathbf{x} \chi_M(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) \mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) \quad (14.33)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{x} \sigma(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) \mathbf{E}(\tau, \mathbf{x}) \quad (14.34)$$

Pour alléger les relations, nous abandonnerons dans la suite la convolution spatiale, bien qu'elle joue un rôle important dans certains cas (cristaux en particulier).

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(t - t') \mathbf{E}(t') \quad (14.35)$$

$$\mathbf{M}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi_M(t - t') \mathbf{B}(t') \quad (14.36)$$

On définit alors les composantes monochromatiques. La dépendance temporelle se traduit, après transformation de Fourier des intégrales par une relation entre composantes monochromatiques qui est semblable au cas statique, mais  $\chi_e$  et  $\chi_M$  deviennent fonction de la fréquence :

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (14.37)$$

$$\mathbf{M}(\omega) = \chi_M(\omega) \mathbf{H}(\omega) \quad (14.38)$$

Les limites adoptées pour les intégrales méritent un examen et sont liées à des hypothèses physiques de causalité :

- S'il n'y a pas de polarisation électrique spontanée d'un milieu neutre (ferro-électricité), les variations du vecteur  $\mathbf{P}$  sont induites par l'action du champ électrique, et celles-ci sont forcément antérieures.
- Nous avons de même déjà mentionné le caractère statistique de la loi d'Ohm : elle décrit la diffusion des charges sous l'effet du champ électrique, et la résistivité doit également vérifier la causalité.
- La variation de la magnétisation spontanée (ferro-magnétisme) résulte d'un équilibre entre relaxation et effets induits. Il n'y a pas causalité : les limites s'étendent de  $-\infty$  à  $+\infty$ .
- Le diamagnétisme est induit par les champs externes et vérifiera une relation de causalité : les limites sont  $-\infty$  et  $t$ .

### 14.4 Milieu diélectrique anisotrope

Nous avons déjà introduit au Chap. 4 le tenseur diélectrique *symétrique* (équation 4.23). dans un milieu anisotrope. Le terme dominant régissant la propagation d'une onde monochromatique est de même

$$D_i = \hat{\epsilon}_{ij}^{(0)} E_j \quad (14.39)$$

avec un tenseur diélectrique  $\hat{\epsilon}^{(0)}$  symétrique qui vérifie

$$\epsilon(\hat{0}) = \hat{\epsilon}^{(0)T} \quad (14.40)$$

Un champ électrique *externe*  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  peut induire une anisotropie qui modifie le tenseur diélectrique

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^{(0)} + a\mathbf{E}_{\text{ext}}\mathbf{E}_{\text{ext}}^T. \quad (14.41)$$

C'est l'effet Kerr. Lorsque le champ électromagnétique de l'onde incidente est très élevé (laser), le même terme  $a$  donnera naissance à des effets non linéaires (en l'absence de champ externe).

## 14.5 Milieu magnétique anisotrope

Nous avons vu au Chap. 7 (éq. 7.23) et 9 (éq. 9.15), en supposant l'existence d'une fonction d'état  $\Phi = 1/2\boldsymbol{\mu}^T X \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  (en l'absence de ferro-magnétisme) ou une énergie fonction de  $\mathbf{B}$  (et non de l'historique de l'établissement de l'état final), que le tenseur de perméabilité magnétique était symétrique.

## 14.6 Activité optique naturelle

Un autre effet apparaît aux champs élevés dans le domaine des longueurs d'ondes optiques : Le gradient de champ électrique induit un gradient de polarisation, et les effets modifient le champ moyen observé. Suivant [?]

$$D_i = \epsilon_{ij}^{(0)} E_j + \gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \quad (14.42)$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ de l'onde monochromatique elle-même. La symétrie de parité n'est pas conservée dans le milieu actif considéré, les populations de stéréo-isomères (énantiomères) étant alors différentes, mais la transformation par parité des deux membres de (14.42) impose au tenseur  $\gamma_{ijk}$  de changer de signe dans cette opération (changement de signe des 3 axes  $x, y, z$ ). Le champ incident étant monochromatique,  $\partial E_j / \partial x_k = ik_l E_j$ . En introduisant le pseudo-tenseur complètement antisymétrique  $\epsilon_{imn}$

$$\gamma_{ijk} E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_k} = i\epsilon_{imj} (bF_l^m) k_l E_j + \dots \quad (14.43)$$

Le tenseur  $F$  doit être invariant par parité. Dans l'approximation linéaire en  $\mathbf{E}$  considérée, les seules possibilités sont  $\delta_{ml}$  et  $n_m n_l$ . Ces deux possibilités aboutissent à la même expression pour  $\mathbf{D}$ , à une redéfinition près des coefficients.

$$D_i = \hat{\epsilon} + ib\epsilon_{ijk} n_j E_k \quad (14.44)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E} + ib\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (14.45)$$

Le tenseur diélectrique complet est alors hermitien. Une propriété plus générale peut être déduite de l'analyse quantique des opérateurs moment dipolaire et moment magnétique des molécules ([Barron2009]).

$$\boldsymbol{\mu} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad \text{moment dipolaire électrique} \quad (14.46)$$

$$\mathbf{m} = \sum \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i \quad \text{moment dipolaire magnétique} \quad (14.47)$$

l'hamiltonien contient la perturbation des interactions dipolaires

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (14.48)$$

On établit dans l'appendice I (en suivant [Barron2009]) que les moments moléculaires sont de la forme

$$\begin{aligned} \mu'_\alpha &= \mu_\alpha + a_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{a'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{E}_\beta + G_{\alpha\beta} B_\beta + \frac{G'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{B}_\beta + \dots \\ m'_\alpha &= m_\alpha + \chi_{\alpha\beta} B_\beta + \frac{\chi'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{B}_\beta + G_{\alpha\beta} E_\beta - \frac{G'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{E}_\beta + \dots \end{aligned} \quad (14.49)$$

Les tenseurs  $a'$  en présence d'un champ magnétique externe statique  $\mathbf{B}$  engendre la rotation Faraday. le tenseur  $G'$  provoquera une activité optique naturelle.



## 14.7 Milieu absorbant (tenseur diélectrique non hermitien)

Dans un milieu absorbant non isotrope,  $j_i = \sigma_{ik} E_k$ . Si le diélectrique est (légèrement) conducteur, la propagation se fera avec pertes, avec la puissance rayonnée par effet Joule  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Compte tenu des relations d'Onsager ([Landau1990]), le tenseur de conductivité  $\sigma_{ik}$ , qui décrit un phénomène statistique de diffusion, sous l'effet du champ électrique, est symétrique. L'origine de cette symétrie peut se comprendre en postulant que dans un milieu résistif, les courants s'établissent en minimisant une fonction dissipation  $D = dW/dt$  quadratique en fonction des courants de conduction  $\mathbf{j}$  :

$$D = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{j}_e^T R \mathbf{j}_e - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_e. \quad (14.50)$$

Le tenseur  $R$  peut évidemment être supposé symétrique. Le minimum de la dissipation d'énergie  $D$  sera

$$R \mathbf{j}_e = \mathbf{E} \quad (14.51)$$

Le courant de conduction sera  $\mathbf{j}_e = R^{-1} \mathbf{E}$ , est relié au champ électrique par un tenseur symétrique  $\sigma = R^{-1}$ , et  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ .

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ij} E_j \quad (14.52)$$

En présence de pertes dues à une conduction résistive, on définira par analogie avec 14.39 un tenseur diélectrique complexe

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \quad (14.53)$$

Ce tenseur symétrique n'est évidemment *pas* hermitique.

## 14.8 Effets magnéto-optiques (tenseur diélectrique hermitien)

En présence d'un champ magnétique, la force exercée sur une charge élémentaire est modifiée. La relation d'équilibre (4.24) du Chap. 4 devient

$$V \mathbf{x}^{(i)} = q \mathbf{E}_0 + q \mathbf{v}^{(i)} \wedge \mathbf{B}$$

Le dipôle associé  $\mathbf{p}$  vérifiera une relation

$$\mathbf{p} - \frac{d\mathbf{p}}{dt} \wedge \mathbf{B} = V^{-1}(\mathbf{E}_0) \quad (14.54)$$

et pour une composante monochromatique

$$\mathbf{p}(\omega) - i\omega \mathbf{p}(\omega) \wedge \mathbf{B} = V^{-1} \mathbf{E}_0 \quad (14.55)$$

$$\mathbf{p}(\omega) = X(\mathbf{B}) \mathbf{E}_0 \quad (14.56)$$

Le tenseur  $X(\mathbf{B})$  est hermitien, et il vérifie  $X(\mathbf{B}) = -X(-\mathbf{B})$  On définit alors un tenseur diélectrique complexe hermitien

$$\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{B}) = \epsilon^{(0)} + X(\omega, \mathbf{B})$$

dont les manifestations se traduiront par une dépendance de l'activité optique vis à vis du champ magnétique. Ce tenseur est antisymétrique, et peut se représenter par un (pseudo-)vecteur  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{D}(\omega) = \hat{\epsilon}^{(0)} \mathbf{E}_0 + i\mathbf{g} \wedge \mathbf{E}_0. \quad (14.57)$$

## 14.9 Les limites à haute fréquence

Après transformation de Fourier, les relations de constitution induisent une dépendance fréquentielle des susceptibilités (équations 14.37-14.38). En terme de perméabilité électriques et magnétiques :

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi_e(\omega)) \mathbf{E}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (14.58)$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu_0(1 + \chi_M(\omega)) \mathbf{H}(\omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega) \quad (14.59)$$

### 14.9.1 Le tenseur diélectrique

On a vu au Chap. 4, éq. (4.23) que la relation (approchée) entre une force de rappel harmonique de pulsation  $\omega_0$  et un champ électrique induisait un déplacement des positions électroniques

$$\delta \mathbf{x} = \frac{1}{m\omega_0^2} q E_{\text{ext}} \quad (14.60)$$

Pour un champ oscillant  $E = E_0 e^{-i\omega t}$  la solution *classique* sera recherchée sous la forme  $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$  et l'amplitude moyenne du dipôle variera comme  $\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$ . On s'attend à ce que la susceptibilité électrique  $\chi_e$  s'annule aux fréquences élevées, la constante diélectrique  $\epsilon(\omega)$  tend alors vers l'unité, et les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  s'identifient.

### 14.9.2 La perméabilité magnétique

En partant de la relation

$$\nabla \wedge \mathbf{M} = \mathbf{j}_M \quad (14.61)$$

comme dans le cas statique, et en utilisant

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (14.62)$$

on en déduit

$$\mathbf{j}_M = \chi_M \left( \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (14.63)$$

Si on admet que la loi  $\mathbf{j}_e = \sigma(\omega) \mathbf{E}$  s'applique, et que  $\sigma(\omega)$  reste borné quand  $\omega$  tend vers l'infini, les courants  $\mathbf{j}_M$  et  $\mathbf{j}_e$  restent finis, ce qui impose que  $\chi_M(\omega) \rightarrow 0$ . La relation précédente ne peut cependant *jamais* être vérifiée exactement : Les courants  $\mathbf{j}_M$  et  $\mathbf{j}_e$  ne sont reliés qu'en l'absence de magnétisation intrinsèque (pas de ferro-magnétisme). Même dans ces conditions, les temps de relaxation associés aux effets magnétiques et électriques dans les milieux continus sont différents. La relation de constitution qui définit la susceptibilité magnétique n'a de sens qu'à basse fréquence, lorsque l'effet de ces temps de relaxation est négligeable : ( $\omega \ll 1/\tau$ ). La susceptibilité magnétique conserve un sens jusqu'aux fréquences mettant en jeu les effets des moments magnétiques électroniques. Ces fréquences seront de l'ordre de  $10^{10}$  Hz à  $B = 1$  T. La propagation dans la matière aux fréquences plus élevée implique la prise en compte de la structure microscopique.

### 14.9.3 Conservation de l'énergie et susceptibilités

Les densités d'énergie électrique et magnétiques vérifient d'après (11.10) du Chap. 11  $\delta \rho_E = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$  et  $\delta \rho_M = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}$ . Pour interpréter l'Éq. (11.10) comme une loi de conservation, il faut que les termes électriques et magnétiques soient respectivement les dérivées de

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (14.64)$$

Ce n'est possible que si les tenseurs  $\epsilon$  et  $\mu$  sont symétriques (ou hermitiens quand on considère les moyennes temporelles). On retrouve une propriété déjà signalée à partir d'autres considérations.

## 14.10 Équations du champ dans les conducteurs isotropes

Les équations de Maxwell dans les milieux matériels obtenues précédemment (14.14-14.19) sont

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{j} \quad (14.65)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (14.66)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (14.67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (14.68)$$

L'hypothèse d'un milieu neutre (sauf en surface) est légitime puisque l'équation de continuité et la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  impliquent une constante de temps

$$\tau = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\sigma} = 10^{-19} \text{ s} \quad (14.69)$$

pour une conductivité  $\sigma = 10^8$ . On en déduit dans le volume l'équation

$$\left( \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (14.70)$$

Pour une onde de pulsation  $\omega$  se propageant selon  $Oz$ , on cherchera une solution de la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t - kz} \quad (14.71)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t - kz} \quad (14.72)$$

où le vecteur d'onde  $k$  reste à déterminer. Il vérifie

$$-\frac{\omega^2 n^2}{c^2} + k^2 - i\sigma \mu \mu_0 \omega = 0 \quad (14.73)$$

$$k^2 = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \omega \left( \omega + i \frac{\sigma \mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0} \right) \quad (14.74)$$

Pour un bon conducteur  $\sigma = 2 \cdot 10^8$ . Le terme imaginaire vaut  $10^{19} \text{ s}^{-1}$ , et il domine complètement la partie réelle  $\omega$  dans toute la gamme de fréquences.

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma \mu \mu_0 \omega} \quad (14.75)$$

Il y a atténuation exponentielle avec

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \quad (14.76)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma \mu \mu_0 \omega}} \quad (14.77)$$

Fréquence (Hz)	$\delta$ (mm)
50	5,03
$10^5$	0,1125
$10^8$	0,00356

Il est ainsi difficile de se protéger des rayonnements parasites à 50 Hz, et inversement les rayonnements à haute fréquence (portables, télévision analogique) traversent mal les murs même lorsqu'ils sont de piètres conducteurs.

## Exercices

**Ex. 1:** Montrer que l'intégrale suivante sur la surface  $S_r$  d'une sphère de (grand) rayon  $r$

$$\int_{S_r} (\mathbf{E}_1^s \wedge \mathbf{H}_2^s - \mathbf{E}_2^s \wedge \mathbf{H}_1^s) \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} = O(r^{-1}) \quad \text{quand } r \rightarrow \infty.$$

décroît comme  $1/r$ . En considérant le volume de surface  $S = S_o \cup S_r$  externe à l'obstacle et limité par  $S_r$ , montrer que

$$\int_S (\mathbf{E}_1^s \wedge \mathbf{H}_2^s - \mathbf{E}_2^s \wedge \mathbf{H}_1^s) \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} = 0$$

Montrer également que

$$\int_S (\mathbf{E}_1^i \wedge \mathbf{H}_2^i - \mathbf{E}_2^i \wedge \mathbf{H}_1^i) \cdot \mathbf{n} \, d^2\mathbf{x} = 0$$

et en utilisant le théorème de Lorentz pour le champ total, en déduire

$$\int_S (\mathbf{E}_1^s \wedge \mathbf{H}_2^i - \mathbf{E}_2^i \wedge \mathbf{H}_1^s) \cdot \mathbf{n} \, d^2\mathbf{x} = \int_S (\mathbf{E}_2^s \wedge \mathbf{H}_1^i - \mathbf{E}_1^i \wedge \mathbf{H}_2^s) \cdot \mathbf{n} \, d^2\mathbf{x} \quad (14.78)$$

En déduire le théorème de réciprocité à partir des expressions de  $\mathbf{F}_{1,2}$  résultant des Éq. (16.24–16.25) du Chap. 16.

**Ex. 2:** La continuité des potentiels suffit-elle à établir les relations (??) ?

## Appendice : activité optique

Nous évaluons tout d'abord, en suivant [Barron2009] la modification des fonctions d'onde sous l'effet de la perturbation hamiltonienne donnée par (14.48) due à la radiation incidente de fréquence  $\omega$

$$\psi'_n = \psi_n + \sum_{j \neq n, \beta} e^{-i\omega n t} [a_{jn\beta} E_\beta + b_{jn\beta} E_\beta^* + c_{jn,\beta} B_\beta + d_{jn,\beta} B_\beta^* + \text{termes quadrupolaires} \dots] \quad (14.79)$$

L'équation de Schrödinger dépendant du temps conduit à

$$\begin{aligned} a_{jn,\beta} &= \langle j | \mu_\beta | n \rangle / (2\hbar(\omega_j n - \omega)) \\ b_{jn,\beta} &= \langle j | \mu_\beta | n \rangle / (2\hbar(\omega_j n + \omega)) \\ c_{jn,\beta} &= \langle j | m_\beta | n \rangle / (2\hbar(\omega_j n - \omega)) \\ d_{jn,\beta} &= \langle j | m_\beta | n \rangle / (2\hbar(\omega_j n + \omega)) \end{aligned} \quad (14.80)$$

Il en résulte finalement

$$\begin{aligned} \mu'_\alpha &= \mu_\alpha + a_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{a'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{E}_\beta + G_{\alpha\beta} B_\beta + \frac{G'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{B}_\beta + \dots \\ m'_\alpha &= m_\alpha + \chi_{\alpha\beta} B_\beta + \frac{\chi'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{B}_\beta + G_{\alpha\beta} E_\beta - \frac{G'_{\alpha\beta}}{\omega} \dot{E}_\beta + \dots \end{aligned} \quad (14.81)$$

Ce sont les *mêmes*  $n$  coefficients tensoriels qui interviennent pour la perturbation du dipôle électrique  $\boldsymbol{\mu}$  en fonction du champ magnétique et pour la perturbation du dipôle magnétique  $\mathbf{m}$  en fonction du champ électrique. Ces tenseurs sont fournis par les formules :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= +\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega_{jn}}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Re(\langle n | \mu_\alpha | j \rangle \langle j | \mu_\beta | n \rangle) \\ a'_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Im(\langle n | \mu_\alpha | j \rangle \langle j | \mu_\beta | n \rangle) \\ G_{\alpha\beta} &= +\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega_{jn}}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Re(\langle n | \mu_\alpha | j \rangle \langle j | m_\beta | n \rangle) \\ G'_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Im(\langle n | \mu_\alpha | j \rangle \langle j | m_\beta | n \rangle) \\ \chi_{\alpha\beta} &= +\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega_{jn}}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Re(\langle n | m_\alpha | j \rangle \langle j | m_\beta | n \rangle) \\ \chi'_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \Im(\langle n | m_\alpha | j \rangle \langle j | m_\beta | n \rangle) \end{aligned} \quad (14.82)$$

On voit que les tenseurs  $\alpha$ ,  $G$ , et  $\chi$  sont symétriques, alors que  $\alpha'$ ,  $G'$  et  $\chi'$  sont antisymétriques.

# Chapitre 15

## Antenne linéaire infinie

### 15.1 Les équations du champ à l'intérieur de l'antenne

L'intérêt de l'analyse de ce cas quelque peu idéal est de mettre en lumière le rôle des conditions aux limites, et de souligner la différence des vecteurs d'onde intérieurs et extérieurs. La vitesse de propagation et la distribution du courant en découlent. D'autre part, les calculs effectués permettent de quantifier l'impact d'une conductivité finie sur les conditions aux limites à la surface : le champ électrique tangentiel n'y est pas nul. Nous considérons une antenne émettrice linéaire, de forme cylindrique, et nous chercherons des solutions de fréquence et de vecteur d'onde donnés, c'est à dire en supposant une dépendance factorisée  $e^{-i(\omega t - kz)}$ , où  $k$  reste à déterminer. La démarche de ce chapitre suit de très près celle de [Sommerfeld1964], tout en explicitant certaines approximations. L'équation de propagation dans la matière devient, en géométrie cylindrique

$$\left( \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (15.1)$$

et pour une fréquence donnée

$$\left( -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2}{z^2} - i\omega\sigma\mu\mu_0 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (15.2)$$

Nous avons vu que pour de bons conducteurs, avec  $\sigma \sim 10^8$ , le terme imaginaire est très supérieur à  $\omega^2 n^2 / c^2$ , que nous négligerons *dans le conducteur* et comme la densité de charge est nulle (sauf en surface), la divergence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  est nulle. Nous rechercherons une solution  $E_\phi = 0$  (en dépit de l'existence possible de solutions à composante azimutale). On supposera que la dépendance en  $z$  de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$  est caractérisée par un vecteur d'onde  $k$ , et de la forme  $F(r, z) = e^{ikz} f(r)$  qui factorise les dépendances en  $z$  et  $r$  et traduit l'invariance par translation vis à vis de la coordonnée  $z$ .

$$\left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - i\omega\sigma\mu\mu_0 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (15.3)$$

On définira

$$\rho_i = r \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} + i\omega\sigma\mu\mu_0 - k^2} \quad (15.4)$$

et par convention, on choisira la racine dont la partie imaginaire est positive. Comme le terme en  $\omega^2$  est en pratique négligeable on peut poser

$$\rho_i = r \sqrt{i\omega\sigma\mu\mu_0 - k^2} = h_i r \quad (15.5)$$

(où  $k$  reste à déterminer d'après les conditions aux limites). On obtient

$$\left( \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + 1 \right) f = 0 \quad (15.6)$$

C'est un cas particulier de l'équation de Bessel générale :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) J_m(\rho) = 0 \quad (15.7)$$

dont la solution régulière à  $\rho = 0$  est  $J_0(\rho)$ . Dans le cas considéré, c'est  $J_0(\rho_i)$  qui convient à l'intérieur de l'antenne d'indice  $n$  et de rayon  $a$ .

$$|\rho| \ll a \sqrt{i\omega\sigma\mu\mu_0 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k^2} \quad (15.8)$$

Un prolongement analytique de la fonction  $J_0(x)$  permet de définir sa valeur pour des arguments complexes. En introduisant la profondeur de pénétration  $\delta = \sqrt{2/\sigma\mu\mu_0\omega}$  définie dans le précédent chapitre, le comportement de la composante  $E_z(x)$  sera de la forme

$$E_z(r) = e_z J_0\left(\frac{r\sqrt{2}}{\delta} \sqrt{i}\right). \quad (15.9)$$

Le cas intéressant est celui où le rayon du fil conducteur est très supérieur à  $\delta$ , mettant en évidence la concentration du courant à la surface :

$$\rho_i = h_i r = (1+i) \frac{r}{\delta} \quad (15.10)$$

est alors très supérieur à l'unité pour  $r = a$ . Aux grandes valeurs de l'argument  $x$  :

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh(x - \pi/4) \quad (15.11)$$

et pour  $r/\delta \gg 1$

$$E_z(r) \sim E_z \frac{2}{\pi\rho} \cosh(\rho - \pi/4) \quad (15.12)$$

compte tenu de la partie imaginaire de  $x = \rho_i = (1+i)r/\delta$ , le deuxième terme est exponentiellement plus grand.

$$E_z(r) = e_z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{(1-i)r/\delta} e^{i\pi/4} \quad (15.13)$$

On observe une croissance exponentielle du champ (donc de la densité de courant) au voisinage de la surface.

## 15.2 Les équations du champ à l'extérieur de l'antenne

Les équations ont la même forme, mais l'indice  $n$  du milieu vérifie  $n = 1$ . La relation entre la coordonnée réduite  $\rho$  et la coordonnée radiale  $r$  est modifiée :

$$\rho_e = r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = h_e r \quad (15.14)$$

La solution doit être décroissante à l'infini à l'extérieur de l'antenne ( $r \geq a$ ), et n'a pas lieu d'être régulière à l'origine. La seule possibilité est la fonction  $f = H_0^1(\rho_e)$ , qui se comporte à l'infini comme

$$H_0^1(\rho_e) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho_e}} e^{i(\rho_e - \pi/4)} \quad (15.15)$$

Il y a une décroissance du champ électrique en  $1/\sqrt{r}$ . L'argument  $\rho_e \sim \omega/cr = 2\pi r/\lambda$  va en général être très inférieur à l'unité pour  $r = a$ , à la surface du conducteur cylindrique, son rayon étant presque toujours faible par rapport à la longueur d'onde. On est alors autorisé à utiliser pour la fonction  $H_0(\rho_e)$  l'approximation valable pour des arguments  $\rho \ll 1$ .

$$H_0(\rho_e) \sim 1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{\gamma k \rho_e}{2} \quad (15.16)$$

où  $\log(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n) - \log(n) = 0,5772\dots$ , la constante d'Euler. À l'extérieur de l'antenne, le champ est ainsi de la forme

$$E_z(r) = e'_z \left( 1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{\gamma\omega/cr}{2} \right). \quad (15.17)$$

### 15.3 Les composantes transverses

En utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques (donnée en Annexe), les équations de Maxwell prennent en supposant un courant  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  la forme :

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \sigma E_z \quad (15.18)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} - \sigma E_r \quad (15.19)$$

$$\frac{\partial D_\phi}{\partial t} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sigma E_\phi \quad (15.20)$$

et des relations similaires pour les composantes transverses de  $\mathbf{H}$  à partir de l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{E}) \quad (15.21)$$

La symétrie du problème suggère de chercher une solution vérifiant  $E_\phi = 0$  :

$$\frac{\partial H_z}{\partial \phi} = \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = 0 \quad (15.22)$$

Pour les composantes monochromatiques : concernant les dérivées temporelles de  $E_r$  et  $H_\phi$  deviennent

$$-i\omega\epsilon\epsilon_0 E_r = -ikH_\phi - \sigma E_r \quad (15.23)$$

$$-i\omega H_\phi = -\frac{1}{\mu\mu_0} \left( ikE_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right). \quad (15.24)$$

En substituant, on voit que  $H_\phi$  et  $E_r$  s'expriment en fonction de  $\partial E_z / \partial r$  :

$$E_r = ik \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{1}{i\sigma\omega\mu\mu_0 + \omega^2 n^2 / c^2 - k^2} \quad (15.25)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\sigma\mu\mu_0\omega - i\omega^2 n^2 / c^2}{i\sigma\omega\mu\mu_0 + \omega^2 n^2 / c^2 - k^2} \quad (15.26)$$

où l'indice  $n$  (complexe) vérifie  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ .

Pour alléger les notations, on se placera dans la gamme de fréquences usuelles où  $\sigma\mu\mu_0\omega \gg \omega^2 n^2 / c^2$ . L'expression de  $H_\phi$  diffère à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur, où  $\sigma = 0$  :

1. À l'intérieur :

$$H_\phi = -\frac{1}{i\mu\mu_0\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} = i \frac{1}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} = i \frac{e_z}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial J_0 h_e r}{\partial r} \quad (15.27)$$

2. À l'extérieur

$$H_\phi = i \frac{1}{\mu_0\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\omega^2 / c^2}{\omega^2 / c^2 - k^2} = i \frac{e_z}{\mu_0\omega} \frac{\partial H_0^1(h_e r)}{\partial r} \frac{\omega^2 / c^2}{\omega^2 / c^2 - k^2}. \quad (15.28)$$

Les deux autres équations de Maxwell pour les composantes transverses

$$i\omega\mu\mu_0 H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = 0 \quad (15.29)$$

$$-i\omega\epsilon\epsilon_0 E_\phi = ikH_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (15.30)$$

entraînent (en tenant compte de  $\partial E_z / \partial z = 0$ )  $H_r = 0$ , puis  $H_z = 0$ .

On vérifie facilement à l'aide de l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques que  $\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

## 15.4 Conditions aux limites à la surface

Les composantes tangentielles  $E_z$  et  $H_\phi$  doivent être continues, ainsi que  $B_n$ .

**Continuité de  $E_z$**

$$e_z J_0(\rho_i) e^{ik_i z} = e'_z H_0(\rho_e) e^{ik_e z} \quad (15.31)$$

les deux vecteurs d'onde  $k_i$  et  $k_e$  sont égaux, et

$$e_z J_0(\rho_i) = e'_z H_0(\rho_e) \quad (15.32)$$

**Continuité du champ magnétique**

$$i \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r} = i \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\omega^2/c^2}{\omega^2/c^2 - k^2} \quad (15.33)$$

En divisant terme à terme les équations de continuité de  $E_z$  et  $H_\phi$ , on obtient la relation définissant le vecteur d'onde  $k$  :

$$\frac{\partial E_z / \partial r}{E_z J_0(h_i a)} = \mu \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\omega^2/c^2}{\omega^2/c^2 - k^2} \quad (15.34)$$

En utilisant l'expression approchée de  $h_i$  :

$$E_z(r) = e_z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} e^{(1-i)r/\delta} e^{i\pi/4} \quad (15.35)$$

Le comportement de  $E_z(\rho)$  en fonction de  $\rho$  est représenté sur la Fig. 15.1.

$$\frac{(1-i)a}{\delta} = \mu \frac{\omega^2/c^2}{h_e^2} \frac{2i/\pi}{a(1+2i/\pi \log(\gamma h_e a/2))} \quad (15.36)$$

Il est avantageux de modifier l'expression de  $H_0(h_e r)$

$$1 + 2i/\pi \log(\gamma h_e a/2) = \frac{2i}{\pi} \log \frac{\gamma h_e r}{2i} \quad (15.37)$$

L'équation du vecteur d'onde  $k$  devient :

$$\left( \frac{\gamma a h_e}{2i} \right)^2 \log \left( \frac{\gamma a h_e}{2i} \right)^2 = -\pi^2 \mu (1+i) \frac{\delta a}{\lambda^2} \quad (15.38)$$

Dans les conditions de fonctionnement usuelles, le terme de droite est très petit : en effet, la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi c/\omega \gg a$  et  $a \gg \delta$ .

En posant  $x = (\gamma a h_e / 2i)^2$ , on est conduit à la solution de

$$x \log x = -\alpha e^{i\pi/4} \quad (15.39)$$

où  $\alpha = \pi^2 \mu \delta a / \lambda^2$  est un réel positif vérifiant  $\alpha \ll 1$ .

Cette équation a deux solutions, l'une voisine de zéro, l'autre de un, mais seule la première convient pour la description du champ au voisinage d'une antenne de grande longueur (la deuxième est très rapidement amortie). Comme l'indique [Sommerfeld1964], la solution proche de  $x = 0$  peut être trouvée par itération. On montre également dans l'exercice que la phase de  $x$  est  $\pi/2$ .

$$x = i\rho = - \left( \frac{\gamma a h_e}{2} \right)^2 \quad (15.40)$$

Le module du vecteur d'onde  $k$  (selon l'axe  $z$ ) en découle :

$$k^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 + i\rho \left( \frac{2}{\gamma a} \right)^2 \quad (15.41)$$

La valeur de  $\rho$  est indiquée pour quelques valeurs typiques de  $\alpha$  dans le tableau qui suit.



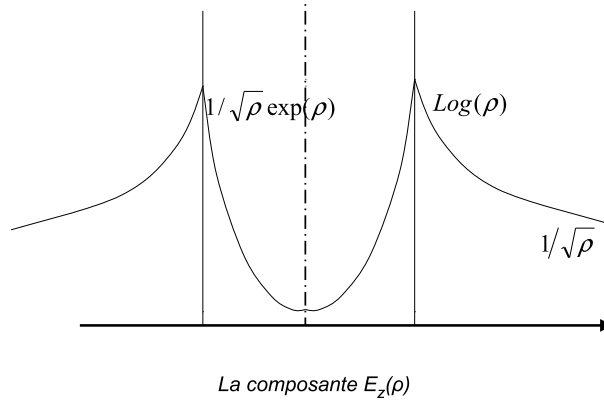


FIG. 15.1 – Variation radiale de la composante longitudinale  $E_z$  du champ électrique.

$\alpha$	$\rho$
$10^{-2}$	0.00154494
$10^{-3}$	$1.0967309 \cdot 10^{-4}$
$10^{-4}$	$8.57109954 \cdot 10^{-6}$
$10^{-5}$	$7.0603515 \cdot 10^{-7}$

$$k \sim \frac{\omega}{c} \left[ 1 + i \frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda}{\pi \gamma a} \right)^2 \right] \quad (15.42)$$

Le tableau précédent, combiné à la relation de dispersion, suggère une estimation semi-quantitative

$$k \sim \frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{0.05 \mu \delta}{\gamma^2} \frac{\delta}{a} \right) \quad (15.43)$$

La partie réelle du vecteur d'onde  $k$  est très proche de sa valeur  $\omega/c$  dans le vide, et sa partie imaginaire correspond à une (faible) décroissance exponentielle aux valeurs positives de  $z$ , et à une (faible) croissance exponentielle pour  $z < 0$ . Ce comportement est lié au choix du signe (arbitraire) de la phase de l'onde selon  $Oz$  et doit être examiné en fonction des conditions initiales : il n'y a pas d'antenne infinie. Une configuration proche du cas idéal est obtenue avec lorsqu'une antenne de longueur très supérieure à la longueur d'onde est placée au-dessus d'un plan conducteur.

## Exercices

**Ex. 1:** Évaluer Le rapport  $E_z/E_r$  en fonction de la fréquence.

**Ex. 2:** Quelle est la plage de validité de l'estimation de l'exercice précédent ?

# Chapitre 16

## Émission dipolaire d'une antenne

### 16.1 Courant dans une antenne linéaire

Ce chapitre tire partie des formules obtenues dans le Chap. 12, mais en précisant les courants mis en jeux, qu'ils soient induits par une onde incidente (réception), ou engendrés par une source (émission). On supposera pour un fil de section nulle le courant de la forme

$$J(\mathbf{z}) = \hat{z}I(z)\delta(x)\delta(y) \quad (16.1)$$

Si le rayon de la section est  $a$ , on admettra l'approximation (suggérée par le Chap. 15) d'une densité surfacique

$$J(\mathbf{z}) = \hat{z}\frac{1}{2\pi a}I(z)\delta(\rho - a) \quad (16.2)$$

Dans les deux cas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{z}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int I(z)\frac{e^{ikR}}{R}dz \quad (16.3)$$

On obtient en intégrant sur les azimuts  $\phi$  une fonction de convolution

$$G(z, z') = \int d\phi \frac{e^{ikR}}{R} \quad (16.4)$$

la singularité est prise en prenant la limite externe quand  $\rho \rightarrow a$  (partie principale). En choisissant la jauge de Lorenz

$$U = -ik\partial_z A_z, \quad (16.5)$$

comme

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (16.6)$$

$$ikE_z(z, \rho) = -(k^2 + \partial_z^2)A_z(z, \rho) \quad (16.7)$$

Le champ total  $\mathbf{E}^{tot}$  vérifie (pour un conducteur parfait) la condition limite  $E_z = 0$  à la surface  $\rho = a$

$$E_z^{tot} = E_z(z, a) + E_z^{in}(z, a) = 0 \quad (16.8)$$

Cette condition semble incompatible avec la relation (16.15) du Chap. 15 établie pour une antenne infinie, mais  $E_r \gg E_z$  et cette contrainte est une approximation légitime. Pour une antenne courte par rapport à la longueur d'onde, on ne dispose pas d'approximation analytique simple, mais à basse fréquence, on se rapproche du cas électrostatique pour lequel elle est également vérifiée. L'exercice 1 du Chap. 15 propose un examen quantitatif du rapport  $E_r/E_z$ .

En présence d'une onde plane incidente,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} I(z')(k^2 + \partial_z^2)G(z, z')dz' = ikE_z^{in}(z, a) \quad (16.9)$$

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \phi/2} \quad (16.10)$$

Pour une antenne émettrice  $E_z^{in}(z, a) = 0$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int I(z)(k^2 + \partial_z^2)G(z, z') dz = 0 \quad (16.11)$$

La solution de (16.11) se présente comme une équation intégrale

$$a \cos(kz + \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} I(z')(k^2 + \partial_z^2)G(z, z') dz' \quad (16.12)$$

Les solutions  $I(z)$  de (16.9) ou (16.11) doivent en outre vérifier  $I(-L/2) = I(L/2) = 0$  aux extrémités de l'antenne de longueur  $L$ . De nombreuses références présentent des méthodes numériques de résolution. La solution approchée sinusoïdale pour  $I(z)$  est examinée dans l'exercice **Ex. 2** : pour l'antenne demi-onde.

## 16.2 L'approximation dipolaire (antenne de faible longueur)

On rappelle la définition

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) \quad (16.13)$$

Pour une antenne linéaire

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = \int dz e^{ikz} I(z) \quad (16.14)$$

Dans le cas particulier où  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sim 1$  (dimensions des sources très inférieures à la longueur d'onde)

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) \sim \int d\mathbf{x} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) = \int dz I(\omega, z) \quad (16.15)$$

L'intégrale portant sur la densité peut s'exprimer à l'aide d'un dipôle :

$$\int d\mathbf{x} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{x}) = \int_S dS \mathbf{x}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) - \int d\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{j}) \mathbf{x} \quad (16.16)$$

L'intégrale sur la surface de l'antenne est nulle. L'intégrale de volume peut être transformée à l'aide de l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{t} = i\omega \rho \quad (16.17)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -i\omega \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (16.18)$$

La composante de Fourier  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  est égale (au facteur  $i\omega$  près) au dipôle électrique des charges de l'antenne.

$\mathbf{P}$  est le dipôle électrique associé au système émetteur et indépendante de  $\mathbf{k}$ . On la notera  $\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j}(\mathbf{k})$ . Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à des distances  $R \gg (\lambda, a)$  sont donnés par les formules

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \mathbf{n} \wedge (\tilde{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{n}) \quad (16.19)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \quad (16.20)$$

Le flux d'énergie rayonnée dans la direction  $\mathbf{n}$  est donné par le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = 1/\mu_0 (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$  soit

$$\mathbf{S} = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}^2 \mathbf{n} \quad (16.21)$$

La dépendance angulaire fait apparaître un facteur  $|\mathbf{n} \wedge \mathbf{P}|^2 = P^2 \sin^2 \theta$ . La moyenne temporelle (compte tenu du facteur  $(\cos \omega t - kr)^2$ ) sera

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{k^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \tilde{\mathbf{j}}^2 \sin^2 \theta \quad (16.22)$$

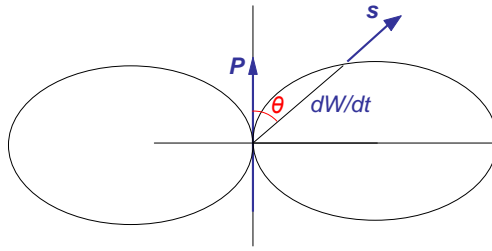


FIG. 16.1 – Rayonnement dipolaire d’une antenne.

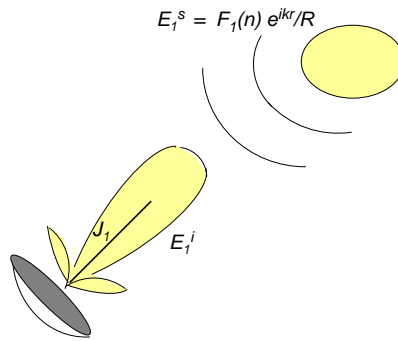


FIG. 16.2 – Diffusion par un obstacle lointain.

Comme l’indique la Fig. 17.1, l’émission est maximale dans le plan perpendiculaire au dipôle, qui est celui de l’antenne. En outre, pour une antenne de longueur  $L$ , on a vu que  $\vec{j} = \int dz I(\omega, z)$ , soit  $|\vec{j}| \sim IL$  : pour augmenter la puissance de l’émission on augmentera la longueur de l’antenne, l’intensité du courant, et la fréquence. L’intégration sur la totalité du domaine angulaire conduit à

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{ck^2}{4\pi\epsilon_0} \vec{j}^2 \quad (16.23)$$

Le cas d’une antenne en boucle, comme sur la Fig. 16.1 est traité dans l’exercice Ex. 7 : Pour une boucle de petite dimension par rapport à la longueur d’onde, on s’attend (sans calculs) à un champ rayonné plus faible que celui d’une antenne linéaire ayant le même courant puisque les contributions diamétralement opposées se soustraient si elles sont en phase.

### 16.3 Théorème de réciprocité

D’après les Éq. (12.46 et 12.49), les composantes monochromatiques des champs électromagnétiques rayonnés à grande distance par les courants sont de la forme

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (16.24)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (16.25)$$

où  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

En anticipant sur l'étude détaillée de la diffraction de la lumière (Chap. 24), on admet facilement que lorsque une onde électromagnétique plane rencontre un obstacle, elle y engendre des courants (courants de conduction, courants de déplacements, courants de magnétisation) qui vont eux-mêmes constituer une source de rayonnements. On s'attend à pouvoir décrire le champ total comme la somme du champ incident et du champ rayonné par les courants qu'il produit, comme le représente la Fig. 17.1

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\omega, \mathbf{r}) \quad (16.26)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{B}^i(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{B}^s(\omega, \mathbf{r}) \quad (16.27)$$

(l'indice  $s$  pour « *scattered* », diffusé).

$$\mathbf{E}^s(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2}) \quad (16.28)$$

$$\mathbf{B}^s(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}(\mathbf{n})) \frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2}) \quad (16.29)$$

La démonstration de la réciprocité s'appuie sur le *théorème de Lorentz*. Pour une surface  $S$  de normale  $\mathbf{n}$  où les composantes tangentielles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont régulières (on choisira la surface de l'obstacle), deux solutions différentes des équations de Maxwell  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$  et  $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$  vérifient

$$\int_S (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (16.30)$$

Cette relation a été établie en exercice au Chap. 14. Elle repose sur la symétrie des tenseurs diélectrique (établie § 4.7.1), du tenseur de magnétisation, et du tenseur de conductivité (démontrée ultérieurement). Aux deux ondes planes incidentes :

$$\mathbf{E}_1^i = \mathbf{E}_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \quad (16.31)$$

$$\mathbf{E}_2^i = \mathbf{E}_2 e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \quad (16.32)$$

$$\mathbf{B}_1^i = \frac{1}{c} (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{E}_1) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \quad (16.33)$$

$$\mathbf{B}_2^i = \frac{1}{c} (\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{E}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \quad (16.34)$$

de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{n}_2$  sont associées les ondes diffusées d'amplitude  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  de la formule (??,??). On établit alors (exercice 4), en utilisant le volume limité par une sphère infinie et l'objet diffusant de la Fig. 17.1 le *théorème de réciprocité* :

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{F}_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{F}_2 \quad (16.35)$$

Ce théorème est souvent utilisé pour ramener l'évaluation du champ électromagnétique à des configurations ou des géométries plus simples (voir exercices); en particulier, le champ  $\mathbf{E}(2)$  produit par l'antenne 1 est ainsi relié au champ  $\mathbf{E}(1)$  produit par l'antenne 2.

## Exercices

**Ex. 1: Antenne demi-onde.** L'antenne s'étend en  $z$  de  $-L/2$  à  $L/2$  (on n'est PLUS dans l'approximation dipolaire) et  $L = \lambda/2$ . Une solution approchée pour le courant est  $I(z) = I_0 \sin(kL/2 - k|z|)$  puisqu'il doit s'annuler aux extrémités. Le vecteur  $\mathbf{P}$  est

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = I \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{ikz} \sin(kL/2 - k|z|)$$

Montrer que la solution est de la forme

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \left( \frac{\cos(kL/2 \cos \theta) - \cos kL/2}{\sin \theta} \right)^2$$

- Ex. 2:** Pourquoi la densité  $\rho$  dans l'équation (16.18) ne doit-elle pas être considérée comme nulle ?
- Ex. 3: Détection par une antenne linéaire.** Comment varie l'énergie détectée en fonction de la direction des deux antennes ?
- Ex. 4:** Montrer que la relation 16.22 se ramène à la formule de Larmor (Éq. 13.40 du Chap. 13) pour un dipôle oscillant.
- Ex. 5:** Calculer l'impédance  $Z$  d'une antenne linéaire dans l'approximation d'un courant sinusoïdal en fonction de  $z$  comme dans l'exercice **Ex. 1** : ( $P = ZI^2$ ).
- Ex. 6:** Montrer que le rayonnement du dipôle donné par la formule (16.23) est compatible avec la formule de Larmor (13.39) en utilisant la relation (16.18) entre  $\tilde{\mathbf{j}}$  et le dipôle  $\mathbf{P}$  d'une part, et la dérivée temporelle  $d^2\mathbf{p}/dt^2$  de l'autre.
- Ex. 7: Propriétés d'une antenne en boucle.** Montrer que pour une boucle de rayon  $a$  très inférieur à la longueur d'onde  $\lambda$ , le potentiel vecteur est

$$\mathbf{A} = -i\mathbf{M} \wedge \mathbf{k} \frac{e^{ikR}}{R}$$

où  $\mathbf{M} = IS\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  normale unitaire au plan de la boucle (Fig. 16.2),  $k = 2\pi/\lambda$ . Calculer  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , et montrer que  $\mathbf{E}$  est polarisé circulairement. Comparer l'intensité des champs rayonnés transverses à la direction d'observation pour une boucle et un dipôle linéaire de même intensité.

## Chapitre 17

# Champs rayonnés par des volumes diélectriques

### 17.1 Expression du champ à l'intérieur d'une surface fermée

Le champ d'une composante monochromatique à l'intérieur d'un volume  $V$ , limité par la surface fermée  $S$ , de normale externe  $\mathbf{n}$  s'exprime directement en fonction des valeurs qu'il prend sur  $S$ , en utilisant la fonction de Green de l'équation de Helmholtz vue au Chap. ??  $G = e^{ikR}/4\pi R$  (Éq. (12.28–12.29)). Ce type de relation a déjà été établi en électrostatique à l'Éq. (3.38) du Chap. 3 et en magnétostatique (6.33). Les expressions qui suivent constituent l'extension au cas de champs périodiques de fréquence déterminée et sont dues à [Stratton-Chu1939] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G + i\omega G (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla G) \quad (17.1)$$

L'équation analogue pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'obtient en remplaçant  $\omega$  par  $-\omega$  et en échangeant les rôles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) \wedge \nabla G - i\omega G (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\nabla G) \quad (17.2)$$

Ces deux relations sont démontrées dans l'Annexe de ce chapitre. Elles peuvent cependant être établies de manière plus directe en introduisant des courants de surface fictifs qui engendrent le champ interne, et leur interprétation est alors plus transparente.

### 17.2 Courants et charges magnétiques auxiliaires

Les équations de Maxwell (14.14–14.19) ne sont pas symétriques par rapport aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à cause de l'absence de charges et de courants magnétiques. En revanche, les Éq. (17.1–17.2) peuvent s'interpréter comme le champ produit par une distribution de courants et de charges surfaciques *fictifs* : le champ produit par ces courants et densités électriques et magnétiques est le même à l'intérieur de  $S$ , et nul à l'extérieur. Bien entendu, intérieur et extérieurs peuvent être échangés en inversant le signe de la normale  $\mathbf{n}$  à  $S$ . Les équations de Maxwell ainsi symétrisées prennent la forme suivante

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_e = i\omega \mathbf{B}_e \quad \nabla \wedge \mathbf{E}_m = i\omega \mathbf{B}_m - \mu_0 \mathbf{j}_m \quad (17.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_e = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}_e + \mu_0 \mathbf{j}_e \quad \nabla \wedge \mathbf{B}_m = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}_m \quad (17.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0 \quad (17.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m \quad (17.6)$$

Charges et courants magnétiques doivent (pour la compatibilité de ces équations) vérifier l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

Nous allons chercher les densités surfaciques de courant et de charge  $\mathbf{J}$  et  $\sigma$  qui reproduisent le champ initial à l'intérieur de  $S$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale externe à  $S$ . Les courants de surface auxiliaires sont définis à partir des Éq. (17.3) en procédant comme dans l'Éq. (7.28) du Chap. 7

$$\mathbf{J}_e = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) \quad (17.7)$$

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_m) \quad (17.8)$$

Le signe est inversé pour  $\mathbf{J}_m$  compte tenu des conventions adoptées dans les Éq. (17.3) pour  $\nabla \wedge \mathbf{E}_m$ . On montre de même, comme dans l'Éq. (3.12) du Chap. 3 que

$$\sigma_e = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) \quad (17.9)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) \quad (17.10)$$

Le choix de  $(\mathbf{E}_e, \mathbf{B}_e)$  est arbitraire puisque nous ne cherchons à décrire le champ qu'à l'intérieur de  $S$ . Il est souvent commode de choisir  $\mathbf{E}_e = \mathbf{B}_e = 0$  (un autre choix sera utilisé au Chap. 24). En suivant de nombreuses références, revues dans [Schelkunoff1936], on utilisera les densités de charge et les courants (17.7–17.9) pour calculer les fonctions potentiel, puis le champ total à l'intérieur de  $S$ . Par analogie avec l'introduction des potentiels électriques  $(U, \mathbf{A})$  au Chap. 1 (Éq. 1.38–1.39), on introduit les potentiels

$$\mathbf{E}_m = -\nabla \wedge \mathbf{F} \quad \mathbf{B}_m = -\frac{1}{c} \nabla U_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \quad (17.11)$$

et pour les composantes monochromatiques

$$\mathbf{E}_m = -\nabla \wedge \mathbf{F} \quad \mathbf{B}_m = -\frac{1}{c} \nabla U_m + \frac{1}{c^2} i\omega \mathbf{F} \quad (17.12)$$

Le champ électrique complet sera  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m$  et de même pour  $\mathbf{B}$ , soit, pour les composantes de pulsation  $\omega$

$$\mathbf{E} = -\nabla U + i\omega \frac{1}{c} \mathbf{A} - \nabla \wedge \mathbf{F} \quad (17.13)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} - \frac{1}{c} \nabla U_m + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{F} \quad (17.14)$$

En choisissant la jauge

$$-i\frac{\omega}{c} U_m + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

les potentiels magnétiques obéissent aux mêmes équations de propagation que  $(U, \mathbf{A})$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{F} = -\mu_0 \mathbf{j}_m \quad (17.15)$$

$$(\Delta + k^2) U_m = -c\mu_0 \rho_m \quad (17.16)$$

L'expression de la solution a déjà été vue au Chap. 12, Éq. (12.8–12.10) et met en jeu les potentiels retardés. On substituera aux densités volumiques des Éq. (17.3) et (17.15) les densités et charges surfaciques dans l'expression des potentiels. Par passage à la limite d'une couche mince,  $U_m$  et  $\mathbf{F}$  peuvent ainsi être reconstruits à partir des densités et courants magnétiques de surface comme les potentiels ordinaires dans le volume interne. En définissant

$$G_0 = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$$

$$\mathbf{F}(\omega, \mathbf{r}) = \mu_0 \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{J}_m(\omega, \mathbf{x}) G_0 \quad (17.17)$$

$$U_m(\omega, \mathbf{r}) = c\mu_0 \int_S d^2\mathbf{x} \sigma_m(\omega, \mathbf{x}) G_0 \quad (17.18)$$



Pour les densités surfaciques définies par (17.7)

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{c\epsilon_0} \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{(\mathbf{n} \wedge \mathbf{B})}{\mu_0} G_0(\omega, R) \quad (17.19)$$

$$U_e(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \epsilon_0 G_0(\omega, R) \quad (17.20)$$

$$\mathbf{F}(\omega, \mathbf{r}) = \mu_0 \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})}{\mu_0} G_0(\omega, R) \quad (17.21)$$

$$U_m(\omega, \mathbf{r}) = -c\mu_0 \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})}{\mu_0} G_0(\omega, R) \quad (17.22)$$

On obtient ainsi sans calcul les champs internes  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à partir des Éq. (15.1–15.2)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla_{\mathbf{r}} G_0 - i\omega G_0 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) (\nabla_{\mathbf{r}} G_0) \quad (17.23)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_S d^2 \mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) \wedge \nabla_{\mathbf{r}} G_0 + \frac{i\omega}{c^2} G_0 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) (\nabla_{\mathbf{r}} G_0) \quad (17.24)$$

Les gradients  $\nabla G$  sont ici pris par rapport à la variable  $\mathbf{r}$ . Dans la variante de ce calcul exposée dans l'annexe de ce chapitre, c'est le gradient par rapport à la variable d'intégration  $\mathbf{x}$  qui intervient, et son signe est opposé : les deux résultats sont identiques. Ces relations sont bien entendu en accord avec les relations trouvées pour les champs stationnaires (3.38), (6.33). Le calcul effectué à l'aide des courants auxiliaires permet en revanche de comprendre directement pourquoi les expressions 17.23 conduisent à champ extérieur nul : les valeurs limites externes des composantes tangentielle et normale à la surface sont nulles, compte tenu des relations de discontinuité associées aux courants de surface (17.7), et la forme même de l'Éq. (??) garantit alors que les champs externes sont nuls partout.

## Exercices

**Ex. 1:** Montrer que  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$  et  $\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}$  sont continus à la surface  $S_o$  d'un obstacle, en déduire que les conditions d'applicabilité du théorème de Lorentz sont vérifiées en choisissant pour  $S$  la surface de l'obstacle.

**Ex. 2:** Montrer que dans un milieu où  $\hat{\epsilon}$  est hermitien, la variation moyenne d'énergie par unité de temps donnée par l'équation (11.10) du Chap. 11

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

est nulle.

**Ex. 3:** Rayonnement d'une ligne coaxiale ouverte (d'après [Schelkunoff1936]) Ce problème illustre une utilisation pratique du principe d'équivalence. La configuration du champ est 'transverse électromagnétique', avec le champ électrique radial et le champ magnétique circulaire. On suppose le rayon  $R$  de la ligne est  $R \ll \lambda$ . La surface équivalente  $S$  couvre le cylindre externe et l'extrémité ouverte (Fig. 17.1). Le champ électrique tangentiel est nul le long des parois cylindriques (parfaitement conductrices). Le courant magnétique  $\mathbf{M} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$  y est nul. Il est également nul à l'extrémité ouverte compte tenu de la direction radiale de  $\mathbf{E}$  à l'intérieur. Seul subsiste le courant de surface magnétique à l'extrémité ouverte, calculable à partir de  $\mathbf{E}$  ans la ligne coaxiale, ou de la différence de potentiel entre les deux conducteurs. Le champ produit est le même que celui d'une distribution de courants magnétiques sur la surface ouverte. On suppose le champ électrique nul dans la zone de la ligne selon le principe d'équivalence

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \frac{V}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{\rho}$$

En déduire le potentiel  $\mathbf{F}$ , puis  $\mathbf{B}$  par (17.12), en notant que

$$\frac{\partial U_m}{\partial c dt} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

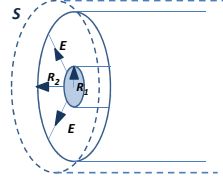


FIG. 17.1 – Application du principe d'équivalence à l'extrémité d'une ligne coaxiale.

La puissance rayonnée en découle en utilisant le vecteur de Poynting. Montrer que

$$W = \frac{\pi^2}{360} \left( \frac{S}{\lambda^2 \ln(R_2/R_1)} \right)^2 V^2.$$

### 17.3 Annexe I : Équations intégrales de Chu-Stratton

Bien que l'on puisse directement partir du théorème de Green lui-même, pour chacune des composantes du champ électrique, il est plus rapide d'utiliser une relation (issue du théorème de Gauss) proposée par Chu et Stratton dans [Stratton-Chu1939] :

$$\int_V d^3\mathbf{x} [\mathbf{U} \cdot \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{U})] = \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{V} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{U}) - \mathbf{U} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V})] \quad (17.25)$$

Les gradients sont calculés dans cette équation par rapport à la variable d'intégration  $\mathbf{x}$ , et il en va de même dans toutes les équations de cette annexe. On choisit par exemple  $\mathbf{U} = \mathbf{E}$  et  $\mathbf{V} = G\mathbf{e}$ , où  $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire fixe arbitraire, et  $\mathbf{n}$  la normale externe à la surface  $S$ . La fonction de Green  $G$  est, avec  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (17.26)$$

On considère un volume  $V$  dépourvu de sources, limité par la surface fermée  $S$ . Les intégrales de volume sont transformées en utilisant les propriétés du volume homogène sans sources :  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , et  $(\Delta + k^2)\mathbf{E} = 0$ .

$$\int d^3\mathbf{x} G\mathbf{e} \cdot [\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E})] = \int d^3\mathbf{x} G\mathbf{e} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}] \quad (17.27)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} k^2 G(\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}) \quad (17.28)$$

D'autre part, nous utiliserons

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (17.29)$$

$$\nabla \wedge (\nabla G \wedge \mathbf{e}) = -\mathbf{e}(\nabla \cdot \nabla G) + (\mathbf{e} \cdot \nabla)\nabla G \quad (17.30)$$

si bien que

$$\nabla \wedge (\nabla G \wedge \mathbf{e}) = -\mathbf{e}\Delta G + \nabla(\nabla \cdot (G\mathbf{e})) \quad (17.31)$$

$$\begin{aligned}
\int_V d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla \wedge (\nabla \wedge (G\mathbf{e}))] &= \int_V d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot [\nabla(\nabla G \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}\Delta G] \\
&= - \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})\Delta G + \int_V d^3\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \nabla)(\nabla G \cdot \mathbf{e}) \\
&= - \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})\Delta G + \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G \cdot \mathbf{e}) \quad (17.32)
\end{aligned}$$

la troisième relation 17.32 est trouvée en explicitant  $(\mathbf{E} \cdot \nabla)$  et en tirant partie de  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

$$\int_S d^2\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} G \cdot \mathbf{e} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = \int_V d^3\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \nabla)_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} G \cdot \mathbf{e} \quad (17.33)$$

En incluant les relations 17.27 et 17.32 dans 17.25

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})(k^2 + \Delta)G - \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G \cdot \mathbf{e}) = \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e})) - G\mathbf{e} \wedge \nabla_{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{E})] \quad (17.34)$$

La fonction  $G(\mathbf{r} - \mathbf{x})$  vérifie  $(k^2 + \Delta)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x})$ , si bien que

$$-\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} = \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge (G\mathbf{e})) - G\mathbf{e} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E})] + \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G \cdot \mathbf{e}) \quad (17.35)$$

$$\nabla \wedge (G\mathbf{e}) = \nabla G \wedge \mathbf{e} \quad (17.36)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B} \quad (17.37)$$

en sommant sur les 3 vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_i$  :

$$-\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S d^2\mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G) + i\omega G(\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G)\mathbf{n} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G) \quad (17.38)$$

les premiers et troisièmes termes du membre de droite peuvent être regroupés pour faire apparaître le double produit vectoriel  $\nabla_{\mathbf{x}} G \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})$ , et on obtient la relation annoncée

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla_{\mathbf{x}} G + i\omega G(\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G) \quad (17.39)$$

L'équation analogue pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'obtient en remplaçant  $\omega$  par  $-\omega$  et en échangeant les rôles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) \wedge \nabla_{\mathbf{x}} G - i\omega G(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}} G) \quad (17.40)$$

Les relations (17.38–17.39) ne s'appliquent que dans un volume  $V$  fermé, homogène, de normale *externe*  $\mathbf{n}$ , dépourvu de charges et de sources de courant. Les sources incluses dans le volume peuvent facilement être prises en compte ([Stratton-Chu1939]). Le champ électromagnétique interne s'exprime ainsi à l'aide des seules *valeurs* de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sur la surface limite, *sans* faire apparaître leurs dérivées. La même formule est évidemment utilisable pour le champ externe, en changeant le signe de la normale. De même que les potentiels  $U$  et  $\partial U/\partial n$  ne peuvent être indépendamment fixés sur une surface fermée  $S$ , les composantes normales sont déterminées lorsque les composantes tangentielles  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}$  sont imposées. Le volume  $V$  considéré peut également être l'*extérieur* du diélectrique en orientant la normale vers l'intérieur, mais il faut alors ajouter les sources qui s'y trouvent, ou le champ 'incident' qu'elles produisent dans la relation (17.34). Lorsque le point d'observation  $\mathbf{r}$  tend vers la surface limite  $S$ , les équations (17.39,17.40) sont singulières. Les équations intégrales qui en résultent seront examinées au chapitre 24 et permettent de calculer le champ diffracté par un obstacle.

# Chapitre 18

## Des ondes aux rayons

### 18.1 De l'onde aux trajectoires

#### 18.1.1 La fonction de phase : iconale

On a vu que les champs électromagnétiques obéissent à l'équation de propagation

$$\left(\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta\right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (18.1)$$

dans un milieu dont l'indice  $n$  peut être spatialement variable. En notant  $\tilde{f}$  les composantes

$$\left(\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta\right) \tilde{f} = 0 \quad (18.2)$$

On cherchera les solutions monochromatiques  $\tilde{f} = e^{-i\omega t} f$ , et la fonction spatiale  $f(\mathbf{r})$  vérifie

$$\left(\frac{n^2 \omega^2}{c^2} + \Delta\right) f(\mathbf{r}) = 0. \quad (18.3)$$

Lorsque  $n = n_0 = \text{cste}$ , la solution est une onde plane de type  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , avec  $|\mathbf{k}| = n\omega/c$ . Quand l'indice  $n(\mathbf{r})$  varie, On recherchera la solution de l'équation précédente sous la forme  $f = ae^{ik_0\psi}$ , où  $k_0 = \omega/c$ . La fonction de phase  $\psi(\mathbf{r})$  est la fonction iconale. Le laplacien de  $f$  est  $\Delta = \nabla \cdot \nabla f$  :

$$\Delta f = e^{ik_0\psi} [\Delta a + 2ik_0 \nabla a \cdot \nabla \psi - k_0^2 a (\nabla \psi)^2 + aik_0 \Delta \psi]. \quad (18.4)$$

En regroupant les termes, l'équation de propagation devient

$$\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_0^2 (\nabla \psi)^2 + \left[ \frac{\Delta a}{a} + ik_0 \Delta \psi + 2ik_0 \frac{\nabla a \cdot \nabla \psi}{a} \right] = 0. \quad (18.5)$$

En divisant l'équation par  $\omega^2/c^2$  :

$$n^2 - (\nabla \psi)^2 + \left[ 4\pi^2 \lambda^2 \frac{\Delta a}{a} + 2i\pi \lambda \Delta \psi + 4i\pi \lambda \frac{\nabla a \cdot \nabla \psi}{a} \right] = 0. \quad (18.6)$$

L'expression entre crochets est négligeable lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  si  $a$  et  $\psi$  varient lentement à l'échelle de la longueur d'onde. La fonction  $\psi$  vérifie alors

$$(\nabla \psi)^2 = n^2 \quad (18.7)$$

C'est l'équation de l'iconale. Les surfaces  $\psi = \text{cste}$  où la phase est constante sont les surfaces d'onde. Leur évolution temporelle vérifie le principe de Huyghens, comme on le voit sur la Fig. 15.1 : la surface d'onde à l'instant  $S(t + \tau)$  est obtenue à partir de  $S(t)$  en prenant l'enveloppe de toutes les surfaces obtenues à partir des points de  $S(t)$ .

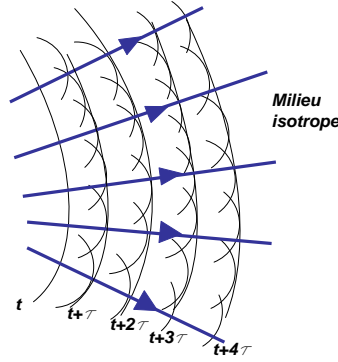


FIG. 18.1 – Front d’ondes, rayons, et principe de Huyghens dans un milieu isotrope homogène.

### 18.1.2 Le vecteur de Poynting

Dans le milieu d’indice lentement variable, les champs sont de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{ik_0\psi(\mathbf{r})} \quad (18.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r})e^{ik_0\psi(\mathbf{r})} \quad (18.9)$$

où la fonction  $\psi$  ainsi que les vecteurs  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{b}$  varient lentement. Les deux vecteurs vérifieront (dans un milieu neutre)

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (18.10)$$

et dans la limite où  $\lambda \rightarrow 0$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \nabla \psi = 0 \quad (18.11)$$

Le vecteur de Poynting moyenné

$$\mathbf{s} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*}{2\mu_0} = \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}^*}{2\mu_0} \quad (18.12)$$

est ainsi dirigé selon  $\nabla \psi$ . C’est la direction du transport de l’énergie lumineuse, donc des rayons dans l’approximation de l’optique géométrique. D’autre part, on a vu que dans le diélectrique d’indice  $n$

$$|\nabla \psi| = n. \quad (18.13)$$

Il en résulte que l’équation de la trajectoire des rayons dans un milieu d’indice variable sera

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla \psi. \quad (18.14)$$

Dans le cas particulier d’un gradient d’indice dirigé selon  $Oy$  et perpendiculaire à la direction de propagation  $Oz$

$$\frac{d}{ds}(n \sin \theta) = 0 \quad (18.15)$$

C’est la loi de la réfraction. L’équation considérée définit la phase  $\psi(\mathbf{r})$  de l’onde, mais n’est pas facilement utilisable pour trouver la trajectoire. On peut en fait éliminer l’iconale  $\psi$ .

En dérivant 15.3 :

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla \psi. \quad (18.16)$$

En utilisant la définition du gradient :

$$\frac{d}{ds} \nabla \psi = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla \psi = \left( \frac{1}{n} \nabla \psi \cdot \nabla \right) \nabla \psi \quad (18.17)$$

$$\frac{d}{ds} \nabla \psi = \frac{1}{2n} \nabla (\nabla \psi \cdot \nabla \psi) = \frac{1}{2n} \nabla (n^2) = \nabla n \quad (18.18)$$

(nous avons utilisé 18.7). On obtient l'équation de la trajectoire :

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (18.19)$$

### 18.1.3 Le principe de Fermat

Le chemin optique  $\int_{\mathbf{x}_1(\gamma)}^{\mathbf{x}_2} n dl$  d'un rayon du point  $\mathbf{x}_1$  au point  $\mathbf{x}_2$  est plus court que tous les chemins voisins du trajet effectivement suivi.

Il s'agit donc d'un minimum du temps de parcours  $\int n dl/c$  entre les deux points considérés. Nous allons montrer que ce principe aboutit également à l'Éq. (18.19). Le principe de Fermat exprime une condition d'extremum pour une action égale à la phase  $\psi$  de l'iconale.

$$S = \int_{\gamma} n dl = \int_{\gamma} n \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} dt \quad (18.20)$$

Le Lagrangien optique est  $L = n \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$ . L'équation d'Euler-Lagrange de l'extremum  $\delta S = 0$  sera

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}} \right) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \nabla n, \quad (18.21)$$

après substitution de  $ds = c dt/n$  dans (18.21), on trouve l'équation de la trajectoire

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (18.22)$$

Compte tenu de la relation générale

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{R} \quad (18.23)$$

où  $\mathbf{N}$  est la normale unitaire et  $R$  le rayon de courbure, celui-ci peut s'exprimer à l'aide du gradient de l'indice :

$$\frac{n}{R} = \mathbf{N} \cdot \nabla n \quad (18.24)$$

L'Éq. (18.14) permet également de démontrer l'invariance de l'intégrale de chemin lorsque plusieurs trajectoires sont possibles, comme dans le cas d'une image. Le long d'une courbe fermée englobant une surface où l'équation de l'iconale 15.3 reste vérifiée (pas de sources qui violeraient les conditions où l'approximation est justifiée) :

$$\int n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \nabla \psi) \cdot \mathbf{h} d\sigma = 0 \quad (18.25)$$

où  $\mathbf{h}$  est la normale unitaire à la surface, puisque  $\nabla \wedge \nabla \psi = 0$ .

## 18.2 Milieux anisotropes

La relation entre l'induction électrique  $\mathbf{D}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  fait alors intervenir le tenseur diélectrique  $\epsilon_{ij}$  :

$$D_i(\omega) = (\mathbf{D})_i = \epsilon(\omega)_{ij} E_j(\omega) \quad (18.26)$$

le vecteur d'onde est alors relié à la fréquence par la relation

$$\mathbf{k} = \omega \frac{\mathbf{n}}{c} \quad (18.27)$$

où  $\mathbf{n}$  est un « vecteur indice » pourvu de trois composantes  $n_x, n_y, n_z$  que nous voulons déterminer en fonction du tenseur  $\epsilon$ . L'équation de Maxwell pour une composante monochromatique 14.25 implique

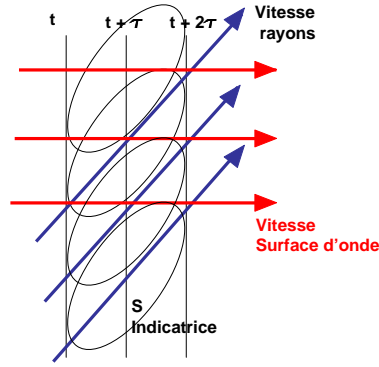


FIG. 18.2 – Front d’ondes, rayons, et principe de Huyghens dans un milieu anisotrope homogène.

pour les composantes monochromatiques d’une onde plane se propageant dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  avec la célérité  $c/n(\omega)$

$$-i\omega\mathbf{D}(\omega) = i\mathbf{k} \wedge \mathbf{H}(\omega) \quad (18.28)$$

L’équation 14.20 s’écrit d’autre part

$$i\mu_0\omega\mathbf{H} = i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \quad (18.29)$$

En combinant 18.28 et 18.29

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0\omega^2}(k^2\mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}) \quad (18.30)$$

La relation 18.26 fournit alors une équation linéaire homogène qui doit être vérifiée par le champ électrique

$$n^2 E_i - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})n_i - \epsilon_{ij} E_j = 0. \quad (18.31)$$

Son déterminant doit être nul

$$\det(n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik}) = 0. \quad (18.32)$$

Dans le système d’axes diagonalisant le tenseur  $\epsilon_{ij}$  :

$$n^2(\epsilon_1 n_1^2 + \epsilon_2 n_2^2 + \epsilon_3 n_3^2) - [n_1^2(\epsilon_2 + \epsilon_3) + n_2^2(\epsilon_1 + \epsilon_3) + n_3^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)] + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 0 \quad (18.33)$$

Cette relation est du deuxième degré en  $n^2$  pour une direction donnée du vecteur propagation. Il y a (en général) deux indices possibles pour chaque direction, ce qui définit deux surfaces « indicatrices ». Pour chacune, le vecteur d’onde est déterminé par  $\mathbf{k} = \omega/c\mathbf{n}$ . Les deux indicatrices vont correspondre à deux tracés de rayon, et sont à l’origine de la biréfringence. Comme on le voit sur la Fig. 18.2, les rayons ne sont plus perpendiculaires aux fronts d’onde quand l’indicatrice n’est pas sphérique. Les calculs détaillés peuvent être trouvés dans [Landau1990]. Le principe de Huyghens est justifié d’un point de vue mathématique dans [Arnold1989].

## Exercices

**Ex. 1:** Réflexion et réfraction.

**Ex. 2:** Voir Arnold, Landau.

**Ex. 3:** Espace de phase et rayons.

# Chapitre 19

## Covariance des équations de Maxwell dans les milieux matériels

### 19.1 Changement de repère galiléen

Nous avons mentionné au Chap. 1, éq. (??) le tenseur du champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$ , qui se transforme tensoriellement dans les changements de repère galiléen :

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (19.1)$$

La matrice de changement de repère  $\Lambda_{\mu}^{\rho}$  ( $4 \times 4$ ) est le produit d'une transformation de Lorentz pure et d'une rotation éventuelle, selon le choix des repères initiaux et finals.

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} x_{\rho} \quad (19.2)$$

La loi de transformation des champs électriques et magnétiques (qui sont ceux qui agissent sur les charges), en résulte. En négligeant les termes en  $(v^2/c^2)$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (19.3)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \quad (19.4)$$

Les effets électriques et magnétiques se combinent dans un changement de repère galiléen. Cette transformation se comprend parfaitement pour une charge en mouvement uniforme dans le laboratoire : le courant qui lui est associé crée un champ magnétique, alors que dans son système au repos elle n'engendre qu'un champ électrique coulombien. Les champs vectoriels  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$  décrivent les effets électromagnétiques produits par les sources dans les milieux matériels. Comme ils obéissent formellement aux mêmes équations en fonction du 4-courant source (14.20–14.25), on devra adopter la même loi de transformation si on veut préserver ces relations.

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \quad (19.5)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \quad (19.6)$$

Les conditions sur les surfaces limites des milieux resteront alors valables pour  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$ . On peut ainsi associer par analogie un tenseur  $\mathcal{H}$  aux champs  $(\mathbf{D}, \mathbf{H})$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD^1 & cD^2 & cD^3 \\ -cD^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -cD^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -cD^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.7)$$

Les relations de constitution :

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (19.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (19.9)$$



ne sont vraies que dans le système au repos du milieu considéré, mais Minkowski ([Minkowski1908], voir aussi le résumé historique de Leo Corry) en a donné une forme covariante à l'aide du 4-vecteur vitesse du milieu  $u^\mu = \gamma(1 - \mathbf{v}/c)$  où  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  :

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}u^\nu = \epsilon F_{\mu\nu}u^\nu \quad (19.10)$$

$$\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu}u_\nu = \mu\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu}\mathcal{H}_{\lambda\mu}u_\nu \quad (19.11)$$

Les Éq. (19.10) se traduisent en notation tridimensionnelle par

$$\mathbf{D} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (19.12)$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{v}/c^2 = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}/c^2) \quad (19.13)$$

Ces équations sont étendues à des repères en rotation en introduisant le tenseur métrique pour substituer  $g_{\nu\alpha}u^\alpha$  à  $u_\nu$ . On peut alors montrer que les relations (19.12) sont inchangées. Pour un repère en rotation, comme indiqué par [Ridgely1998], et que les formules de la relativité restreinte s'appliquent. Les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  vérifient alors les relations générales de transformation relativiste. Les vecteurs de polarisation et de magnétisation  $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$ , se déduisent des deux tenseurs précédents. Pour conserver les relations  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  et  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  doivent constituer les éléments d'un tenseur  $\mathcal{M}$  et vérifier

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu}u^\mu = (\epsilon - 1)\mathcal{F}_{\mu\lambda}u^\mu$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cP^1 & cP^2 & cP^3 \\ -cP^1 & 0 & M^3 & -M^2 \\ -cP^2 & -M^3 & 0 & M^1 \\ -cP^3 & M^2 & -M^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

En notation tridimensionnelle (rappelons que  $\epsilon\mu c'^2 = 1$ ) :

$$\mathbf{P}' = (\epsilon - 1)\mathbf{E}' \quad (19.15)$$

$$\mathbf{M}' = (1 - 1/\mu)\mathbf{B}' + \frac{1}{1 - v^2/c^2}(1/\mu - \epsilon)\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}' \quad (19.16)$$

Au premier ordre en  $v/c$  :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \frac{\epsilon}{c'^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{M} \quad (19.17)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{P} \quad (19.18)$$

Le moment magnétique en mouvement uniforme va engendrer une variation du potentiel vecteur qui créera un champ électrique. De même, un dipôle électrique en mouvement correspond à une paire de courants opposés qui engendre des effets magnétiques. L'apparition d'un moment électrique dipolaire pour une boucle de courant en mouvement uniforme est une conséquence de la modification de la densité de charges et du courant dans un repère en mouvement. Pour comprendre cet effet, on peut négliger la vitesse des ions positifs (le résultat n'est pas affecté). Le courant  $(\rho, \mathbf{j}/c)$  étant un quadri-vecteur

$$j'_z = \gamma(j_z - V\rho) \quad (19.19)$$

$$\rho' = \gamma(\rho - Vj_z/c^2) \quad (19.20)$$

La densité dans les branches haute et basse de la boucle sera (compte tenu de la « contraction » des longueurs mesurées au même instant dans le repère mobile)

$$Q_H = \rho'_H a/\gamma = (\rho - V\rho v/c^2)a \quad (19.21)$$

$$Q_B = \rho'_B a/\gamma = (\rho + V\rho v/c^2)a \quad (19.22)$$

Il en résulte un moment dipolaire électrique  $P = b\delta Q = abJ/c^2 = SJ/c^2 = |\mathbf{V} \wedge \mathbf{M}|/c^2$ , en accord avec (19.17). On peut apprécier la simplification apportée par la description relativiste.

Les relations de constitution :

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (19.23)$$

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (19.24)$$

ne sont évidemment vraies que dans le système au repos du milieu considéré, mais Minkowski ([Minkowski1908], voir aussi le résumé historique de Leo Corry) en a donné une forme covariante à l'aide du 4-vecteur vitesse du milieu  $u^\mu = \gamma(1 - \mathbf{v}/c)$  où  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ .

## 19.2 Changement général de coordonnées

Nous avons évoqué l'invariance de l'électromagnétisme dans les changements de repère galiléens. La relativité générale impose l'invariance, L'invariance des équations de Maxwell dans le cadre de la relativité générale (changement arbitraire de coordonnées), se traduit dans l'espace à trois dimensions par une invariance similaire dans les milieux matériels : Les équations de Maxwell conservent leur forme, mais la constante diélectrique et la perméabilité du milieu sont transformées et deviennent (en général) fonctions des coordonnées. Les équations initiales ont été établies au Chap. 14, Éq. (14.20–14.25), et nous les reproduisons

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (19.25)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (19.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (19.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{j}_e \quad (19.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (19.30)$$

Dans un milieu neutre et isolant (en allégeant la notation de la permittivité et de la perméabilité) :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (19.31)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (19.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (19.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (19.35)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (19.36)$$

Une transformation orthogonale des coordonnées  $x = f_1(u, v, w)$ ,  $y = f_2(u, v, w)$ ,  $z = f_3(u, v, w)$  engendre une nouvelle configuration du champ, qui vérifie des équations de Maxwell transformées. Nous nous restreindrons à une transformation orthogonale qui autorise des relations plus simples. Pour une métrique

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_1^2 du^2 + g_2^2 dv^2 + g_3^2 dw^2 \quad (19.37)$$

$$g_1^2 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)^2 \quad (19.38)$$

avec des relations analogues pour  $g_2$  et  $g_3$ . Le rotationnel du vecteur  $\mathbf{A}(x, y, z)$  s'exprime dans les variables  $u, v, w$ , selon

$$(\nabla \wedge \mathbf{A})_1 = \frac{1}{g_2 g_3} \left[ \frac{\partial g_3 A_3}{\partial v} - \frac{\partial g_2 A_2}{\partial w} \right]. \quad (19.39)$$

Les autres composantes étant obtenues par permutation circulaire. L'Éq. (19.35) devient

$$\epsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{g_2 g_3} \left[ \frac{\partial g_3 H_3}{\partial v} - \frac{\partial g_2 H_2}{\partial w} \right]. \quad (19.40)$$

En définissant

$$\mathbf{H}'_i = g_i \mathbf{H}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (19.41)$$

$$\mathbf{E}'_i = g_i \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (19.42)$$

on obtient

$$\frac{\partial \epsilon E'_i}{\partial t} = \frac{g_i^2}{g_1 g_2 g_3} \nabla_u \wedge \mathbf{H}'_i. \quad (19.43)$$

L'expression suggère l'introduction de

$$\epsilon'_i = \frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^2} \epsilon \quad (19.44)$$

Pour retrouver

$$\frac{\partial \epsilon'_i E'_i}{\partial t} = [\nabla_u \wedge H']_i \quad (19.45)$$

L'équation de Maxwell a la même forme dans les nouvelles coordonnées (orthogonales)  $u, v, w$ , mais le tenseur diélectrique  $\epsilon'$  est maintenant fonction des coordonnées et induit une anisotropie.

L'autre équation de Maxwell conserve également la même forme :

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}'_i}{\partial t} = \frac{g_i^2}{g_1 g_2 g_3} [\nabla \wedge \mathbf{E}']_i \quad (19.46)$$

$$\mu'_i \frac{\partial \mathbf{H}'_i}{\partial t} = [\nabla \wedge \mathbf{E}']_i \quad (19.47)$$

à condition de définir

$$\mu_i = \frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^2} \mu \quad (19.48)$$

Les perméabilités électriques et magnétiques sont modifiées par le même facteur. L'indice du nouveau milieu sera lui aussi multiplié par  $g_1 g_2 g_3 / g_i^2$ .

### 19.3 Interprétation géométrique de la transformation : cape d'invisibilité

À partir d'une solution des équations de Maxwell dans l'espace  $(x, y, z)$ , la transformation précédente permet d'en trouver une autre dans les coordonnées  $(u, v, w)$ , mais dans un milieu anisotrope. Si le milieu initial n'est pas magnétique ( $\mu = 1$ ), le milieu transformé le sera en général. Comme l'a montré J. B. Pendry [Pendry2006], on peut utiliser la transformation pour masquer une région de l'espace à l'aide d'une transformation singulière. En posant pour  $r < R_2$

$$r' = R_1 + \frac{r(R_2 - R_1)}{R_2} \quad (19.49)$$

$$(\theta', \phi') = (\theta, \phi), \quad (19.50)$$

on trouve

$$\epsilon'_r = \mu'_r = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \frac{(r' - R_1)^2}{r'} \quad (19.51)$$

$$\epsilon'_\theta = \mu'_\theta = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad (19.52)$$

$$\epsilon'_\phi = \mu'_\phi = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad (19.53)$$

Pour  $r > R_2$ , les positions (et les perméabilités) restent inchangées.

Dans les coordonnées  $(r', \theta', \phi')$ , une onde plane initiale est transformée en une onde qui évite la région  $r' < R_2$  comme on le voit sur la Fig. 19.1 Bien entendu, la réalisation concrète d'un milieu jouissant des perméabilités égales à  $\epsilon'_r, \epsilon'_\theta, \epsilon'_\phi$  dans une bande de fréquence large présente des difficultés techniques. Une solution, même approchée, engendrera une « invisibilité » partielle.

Des réalisations approchées de la distribution de perméabilité ont pu être obtenues dans la plage des fréquences radio.

## Exercices

**Ex. 1:** Est-ce que les lois usuelles  $\mathbf{P} = \epsilon^0 \mathbf{E}$ , et  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$  restent vraies dans le système où le milieu est en mouvement ?

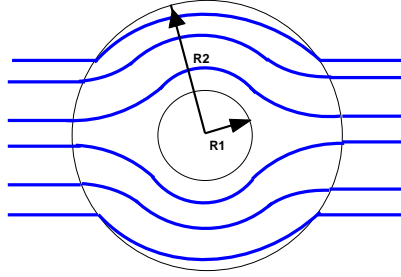


FIG. 19.1 – Une transformation d’invisibilité (d’après Pendry).

- Ex. 2:** Une charge  $q$  a une vitesse  $\mathbf{v}$  parallèle à un plan conducteur immobile de charge surfacique  $\sigma$ . Quelle est la force exercée? Si maintenant la charge est immobile et que le plan se meut à la vitesse  $-\mathbf{v}$ , obtenir les champs électriques et magnétiques dans le laboratoire et la force exercée :  
 -par transformation de Lorentz des champs  
 -en utilisant le théorème d’Ampère et la symétrie du problème pour évaluer  $\mathbf{B}$
- Ex. 3:** On reprend le problème précédent en remplaçant le plan conducteur chargé par un plan uniformément magnétisé (ou une plaque d’aimantation uniforme) perpendiculairement à la surface. Quelle est la valeur de  $\mathbf{B}$  quand la plaque de perméabilité  $\mu$  est immobile? Obtenir les champs dans le laboratoire, au premier ordre en  $v/c$  quand la plaque est en mouvement avec la vitesse  $-\mathbf{v}$ . La force est elle la même?
- Ex. 4:** Calculer le moment  $\mathbf{C}$  des forces exercées sur un dipôle électrique  $\mathbf{p} = q\delta\mathbf{l}$  pourvu d’une vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .
- Ex. 5:** Une charge magnétique pseudo-scalaire (fictive)  $q^*$  au repos dans un champ  $\mathbf{B}_0$  est soumise à la force  $\mathbf{F}^* = q^* \mathbf{B}_0$ . Quelle est la force exercée dans le laboratoire où cette charge a la vitesse  $\mathbf{v}$ ?
- Ex. 6:** En considérant un dipôle magnétique de vitesse  $\mathbf{v}$ , constitué de deux charges magnétiques proches,  $\mathbf{m} = q^*\delta\mathbf{l}$ , montrer que le moment des forces exercées est

$$\mathbf{C} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}_0 - \frac{1}{c^2} \mathbf{m} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{E})$$

- Ex. 7:** Faire le même calcul par transformation de Lorentz dans le cas où le dipôle magnétique est immobile et où le plan conducteur chargé se déplace parallèlement à lui-même avec la vitesse  $-\mathbf{v}$ .
- Ex. 8:** L’induction uni-polaire : Cas d’une sphère conductrice tournante uniformément magnétisée. Ce problème relève en toute rigueur de la relativité générale, mais on appliquera la transformation de Lorentz tangente amenant à un instant donné le système  $S$  où la sphère est au repos sur le système  $L$  du laboratoire en un point donné. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ainsi obtenus dans le système du laboratoire sont corrects. Les calculer. Calculer les vecteurs  $\mathbf{P}$  dans le laboratoire, en déduire les charges liées de volume ( $\rho_l$ ) et de surface ( $\sigma_l$ ).
- Ex. 9:** Montrer que dans le cas d’une sphère conductrice à l’équilibre (les courants sont nuls), une densité de charges surfaciques libres apparaît. En déduire le champ électrique et le potentiel entre pôles et équateur pour une sphère conductrice.
- Ex. 10:** Même question pour une sphère isolante uniformément magnétisée.
- Ex. 11:** Calculer l’indice d’un milieu homogène constitué de boucles selfiques formant un réseau périodique.
- Ex. 12:** Montrer à partir des équations 19.17 que l’on obtient les équations de Minkowski :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu v^2/c^2} (\epsilon\mathbf{E}(1 - v^2/c^2) + (\epsilon\mu - 1) [\mathbf{v} \wedge \mathbf{H} - \epsilon(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}]) \quad (19.54)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu v^2/c^2} (\mu\mathbf{H}(1 - v^2/c^2) - (\epsilon\mu - 1) [\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} - \mu(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})\mathbf{v}]). \quad (19.55)$$

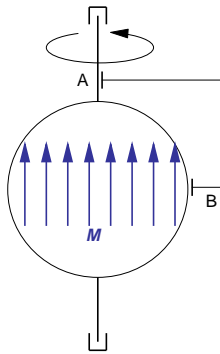


FIG. 19.2 – Conducteur en rotation : la sphère uni-polaire.

## Chapitre 20

# Diffusion par un diélectrique homogène ou par des charges

### 20.1 Sources du champ diffusé

Nous avons établi les équations de propagation du champ dans la matière, et leur solution (Chap. 14, Éq. (14.20–14.25)). Nous avons ainsi observé qu'il n'y avait *pas* de lumière diffusée dans ce cas. Pour préparer l'analyse de la diffusion par un milieu hétérogène, nous adopterons un autre point de vue, la densité de charge  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  et le courant  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  peuvent être laissés dans le membre de droite des équations de Maxwell (??–??) du Chap. 12, en les considérant comme les sources du champ électromagnétique dans le milieu diélectrique. La fonction de Green permettant de retrouver les potentiels vecteurs est alors celle du vide :  $e^{ikr}/r$ , où  $k = \omega/c$  est le vecteur d'onde dans le vide.

La solution générale est la somme d'une onde plane « incidente » de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  et d'une onde diffusée engendrée par le vecteur polarisation du diélectrique. On sait cependant d'après le chapitre précédent qu'hormis au voisinage de l'interface, c'est une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \omega/c'$ , avec  $c' = c/n$  qui se propage dans le diélectrique. On va vérifier la cohérence des deux points de vue, le formalisme se prêtant naturellement à l'étude de la diffusion par un milieu hétérogène ou par des molécules. Les résultats obtenus clarifient la formation du champ diffusé, et ils se prêtent directement à l'extension aux milieux hétérogènes. Les potentiels du champ diffusé s'expriment comme somme de termes de volume et de surface (??–12.7), à l'aide de la fonction de Green (??)

$$U(t, \mathbf{r}) = U_V(t, \mathbf{r}) + U_S(t, \mathbf{r}) \quad (20.1)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_V(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}_S(t, \mathbf{r}) \quad (20.2)$$

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{-\nabla \cdot \mathbf{P}(t - R/c, \mathbf{x})}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d^2\mathbf{x} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(t - R/c'), \mathbf{x})}{R} \quad (20.3)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{P}(t - R/c, \mathbf{x}) / \partial t}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_S d^2\mathbf{x} \frac{\mathbf{j}_S(t - R/c, \mathbf{x})}{R} \quad (20.4)$$

Bien que la vitesse de propagation  $c'$  dans le milieu diffère de  $c$ , l'équation des potentiels retardés en présence de source s'exprime à l'aide de la fonction de Green dans le vide, et c'est donc  $c$  qu'il convient d'utiliser. Les termes de surface sont nuls pour une onde plane en incidence normale, et un diélectrique parfaitement isolant. Conformément aux résultats du Chap. 13, le vecteur de polarisation diélectrique sera (pour une composante monochromatique se propageant dans le diélectrique à la vitesse  $c'$ )

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t + \mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}}. \quad (20.5)$$

$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}'_i c' / c$  est le vecteur d'onde initial dans le vide.

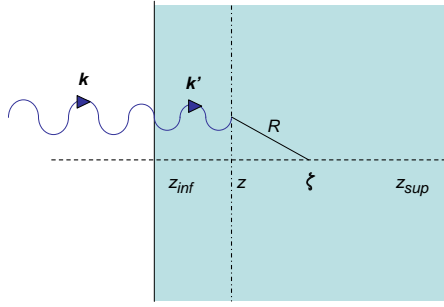


FIG. 20.1 – Point d’observation interne au diélectrique (réfraction).

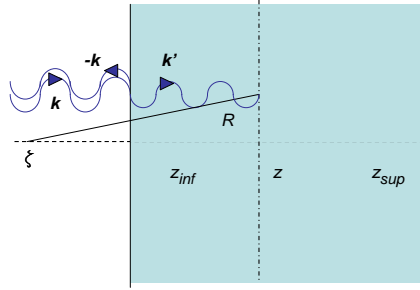


FIG. 20.2 – Point d’observation externe au diélectrique (réflexion).

## 20.2 Le champ électrique « diffusé » dans le milieu (*incidence normale*)

Les approximations permises à grande distance de la section 12.3 du Chap. 12 ne sont plus légitimes pour la propagation d’un champ dans le diélectrique.

$$\nabla_r U(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{e^{ikR}}{R} (i\mathbf{k}_f)(-i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0) e^{i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}} \quad (20.6)$$

Les termes « coulombiens » décroissant en  $1/R^2$  ont été négligés.

De même

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3\mathbf{x} (-ik) \frac{e^{ikR}}{R} (-i\omega) \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t + \mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}} \quad (20.7)$$

Le champ électrique  $\mathbf{E}_V$  créé par les sources volumiques est

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{e^{ikR}}{R} [-i\mathbf{k}_f(-i(\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0) - (-ik)^2 \mathbf{P}_0)] e^{i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}} \quad (20.8)$$

Dans cette expression  $\mathbf{k}_f = k\mathbf{n}_f = k(\mathbf{r} - \mathbf{x})/R$ , le premier terme  $\mathbf{k}_f(\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0)$  provient du gradient de  $U$ , le deuxième  $(-ik)^2 \mathbf{P}_0$  du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}} \frac{e^{ikR}}{R} [k^2 \mathbf{P}_0 - \mathbf{k}_f(\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0)] \quad (20.9)$$

En intégrant sur un volume cylindrique autour de l'axe de propagation  $Oz$ .

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dz \rho d\rho d\phi e^{ik'z} \frac{e^{ikR}}{R} [k^2 \mathbf{P}_0 - \mathbf{k}_f(\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0)] \quad (20.10)$$

Lorsque le vecteur de polarisation est perpendiculaire à la direction  $Oz$  pour une onde plane,  $\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{P}_0 = 0$ , seul le premier terme contribue. Soit  $R_S$  le rayon de la surface externe du diélectrique à la position  $z$ , et  $\zeta$  la coordonnée du point d'observation  $\mathbf{r}$  selon l'axe  $Oz$  :

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} k^2 \mathbf{P}_0 \left[ \int_{z_{\text{inf}}}^{\zeta} e^{ik'z} dz \int_{\zeta-z}^{R_S} R dR \frac{e^{ikR}}{R} + \int_{\zeta}^{z_{\text{sup}}} e^{ik'z} dz \int_{z-\zeta}^{R_S} R dR \frac{e^{ikR}}{R} \right] \quad (20.11)$$

$$\int_{z_{\text{inf}}}^{\zeta} e^{ik'z} dz \int_{\zeta-z}^{R_S} R dR \frac{e^{ikR}}{R} = \int_{z_{\text{inf}}}^{\zeta} e^{ik'z} dz \frac{1}{ik} \left( e^{ikR_S} - e^{ik(\zeta-z)} \right) \quad (20.12)$$

$$\int_{\zeta}^{z_{\text{sup}}} e^{ik'z} dz \int_{z-\zeta}^{R_S} R dR \frac{e^{ikR}}{R} = \int_{\zeta}^{z_{\text{sup}}} e^{ik'z} dz \frac{1}{ik} \left( e^{ikR_S} - e^{ik(z-\zeta)} \right) \quad (20.13)$$

La première intégrale donne une contribution dominante lorsque  $k'/k$  est voisin de l'unité :

$$\mathbf{E}_V^{\text{inf}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \left[ \frac{k}{k' - k} \left( e^{i(k'-k)\zeta} - e^{i(k'-k)z_{\text{inf}}} \right) e^{ik\zeta} - \frac{k}{k'} \left( e^{ik'\zeta} - e^{ik'z_{\text{inf}}} \right) e^{ikR_S} \right] \quad (20.14)$$

La deuxième, qui décrit la contribution du milieu située en aval du point d'observation est toujours plus petite, et négligeable lorsque les vecteurs d'onde  $k$  et  $k'$  sont voisins (indice voisin de l'unité) :

$$\mathbf{E}_V^{\text{sup}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \left[ \frac{k}{k' + k} \left( -e^{i(k'+k)\zeta} - e^{i(k'+k)z_{\text{sup}}} \right) e^{-ik\zeta} - \frac{k}{k'} \left( -e^{ik'\zeta} + e^{ik'z_{\text{sup}}} \right) e^{ikR_S} \right] \quad (20.15)$$

En ajoutant les deux contributions précédentes :

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \left[ \left( e^{ik'\zeta} \frac{2k^2}{k'^2 - k^2} \right) - e^{ikR_S} \frac{k}{k'} \left( e^{ik'z_{\text{sup}}} - e^{ik'z_{\text{inf}}} \right) + k \left( -\frac{e^{ik'z_{\text{inf}}}}{k' - k} e^{ik(\zeta - z_{\text{inf}})} - \frac{e^{ik'z_{\text{sup}}}}{k' + k} e^{-ik(\zeta - z_{\text{sup}})} \right) \right] \quad (20.16)$$

En substituant  $\mathbf{P}(z_{\text{inf}}) = \mathbf{P}_0 e^{ik'z_{\text{inf}}}$  et  $\mathbf{P}(z_{\text{sup}}) = \mathbf{P}_0 e^{ik'z_{\text{sup}}}$

$$\mathbf{E}_V(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \left[ e^{ik'\zeta} \frac{2k^2}{k'^2 - k^2} - e^{ikR_S} \frac{k}{k'} \left( e^{ik'z_{\text{sup}}} - e^{ik'z_{\text{inf}}} \right) + \frac{1}{2\epsilon_0} k \left( -\frac{\mathbf{P}(z_{\text{inf}})}{k' - k} e^{ik(\zeta - z_{\text{inf}})} - \frac{\mathbf{P}(z_{\text{sup}})}{k' + k} e^{-ik(\zeta - z_{\text{sup}})} \right) \right] \quad (20.17)$$

Les termes de surface ( $e^{ikR_S}$ ) correspondent à des contributions diffractives que nous ignorerons. Pour l'onde se propageant dans le diélectrique avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  le rapport entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  est égal à la susceptibilité diélectrique  $\chi$  :

$$\mathbf{E}_V(\omega, \zeta) = \frac{k^2}{\epsilon_0(k'^2 - k^2)} \mathbf{P}(\zeta) \quad (20.18)$$

$$\mathbf{P}(\zeta) = \epsilon_0 \frac{k'^2 - k^2}{k^2} \mathbf{E}_V(\zeta) = \epsilon_0(n^2 - 1) \mathbf{E}_V(\zeta) = \epsilon_0(\epsilon - 1) \mathbf{E}_V(\zeta) \quad (20.19)$$

Le champ dans le diélectrique est créé par l'ensemble de la distribution des dipôles, et il n'y a *pas* d'onde diffusée dans un milieu homogène. On voit apparaître dans (18.31) une composante de vecteur d'onde  $k$  à l'intérieur du diélectrique. C'est une solution des équations de propagation dans le vide (??-??) qui respecte l'équation de propagation des potentiels dans le milieu, mais elle n'est pas acceptable vis à vis des conditions spécifiques de la Fig. 20.1 avec une onde incidente de vecteur  $\mathbf{k}_i$  dirigé dans le sens positif, et une onde transmise  $\mathbf{k}'_i$  de même direction. Cette composante est au contraire attendue lorsque  $\zeta < z_{\text{inf}}$ , c'est l'onde réfléchie : les conditions aux limites, qui seront réexaminées dans le paragraphe 20.4, n'ont pas été complètement spécifiées, et il n'y a pas unicité.



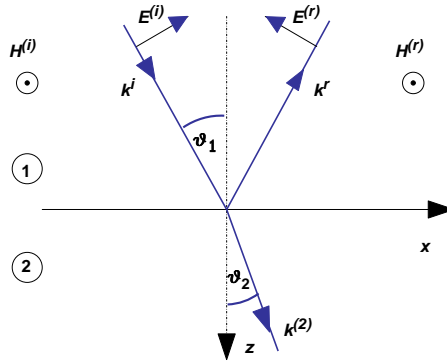


FIG. 20.3 – Réflexion et réfraction à une interface diélectrique

### 20.3 Le champ réfléchi (*incidence normale*)

La relation (20.17) comporte une onde plane se propageant dans le milieu diélectrique qui n'a pas de sens physique. On peut justifier ce terme en considérant le champ engendré par l'onde se propageant dans le diélectrique en amont de la face d'entrée située à la position  $\zeta = z_{\text{inf}}$  (Fig. ??). Il suffit d'utiliser l'expression (20.15) en substituant  $z_{\text{inf}}$  à  $z_{\text{sup}}$ . Pour  $\zeta < z_{\text{inf}}$

$$\mathbf{E}_V^{\text{sup}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \left[ \frac{k}{k' + k} \left( -e^{i(k'+k)\zeta} - e^{i(k'+k)z_{\text{sup}}} \right) e^{-ik\zeta} - \frac{k}{k'} \left( -e^{ik'\zeta} + e^{ik'z_{\text{sup}}} \right) e^{ikR_S} \right] \quad (20.20)$$

On voit alors que le rapport entre l'onde réfléchie et l'onde transmise est

$$E_r/E_V = -\frac{k' - k}{2k} = -\frac{n - 1}{2} \quad (20.21)$$

Les conditions de continuité des composantes tangentielles qui déterminent ce rapport sont directement incorporées dans les expressions (20.3–20.4). On va les retrouver au paragraphe suivant, en utilisant de manière explicite les conditions aux limites.

### 20.4 Réfraction

On peut utiliser la méthode précédente pour déterminer les lois de la réfraction, comme proposé à l'exercice 1 pour un angle d'incidence arbitraire. On va ici suivre l'approche usuelle utilisant les conditions aux limites pour deux milieux de constante diélectrique différente. Les notations sont celles de la Fig. 20.3. On décompose les champs  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  en composantes incidentes et réfléchies, de vecteurs d'onde incidents et réfléchis  $\mathbf{k}^i$  et  $\mathbf{k}^r$  ( $k_z^r = -k_z^i$ ,  $k_x^r = k_x^i$ ).

$$\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^i + \mathbf{D}^r \quad (20.22)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r \quad (20.23)$$

et on pose  $H_y^r = \alpha_n H_y^i$ , les vecteurs d'onde incidents et réfléchis sont  $\mathbf{k}^i$  et  $\mathbf{k}^r$ . L'équation du mouvement 14.24 du Chap. 14 implique

$$D_z^r = -\frac{1}{\omega} k_x^r H_y^r \quad (20.24)$$

$$D_z^i = -\frac{1}{\omega} k_x^i H_y^i \quad (20.25)$$

on en déduit

$$D_z^r = \alpha_h D_z^i \quad (20.26)$$

$$D_x^r = -\alpha_h D_x^i \quad (20.27)$$

La continuité des composantes normales ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , 14.3–14.4) et tangentielles ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , 14.5–14.6) entre les milieux (1) et (2) implique

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)} \quad (20.28)$$

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)} \quad (20.29)$$

La continuité normale de  $\mathbf{D}$  entraîne

$$k_x^i (1 + \alpha_h) H_y^i = k_x^{(2)} H_y^{(2)} \quad (20.30)$$

et la continuité tangentielle de  $\mathbf{H}$

$$H_y^{(1)} (1 + \alpha_h) = H_y^{(2)} \quad (20.31)$$

La relation (20.30) implique ainsi

$$k_x^{(2)} = k_x^{(1)} \quad (20.32)$$

C'est la loi de la réfraction, dont la forme usuelle est

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (20.33)$$

(On peut aussi établir directement (20.32) à partir de la dépendance spatiale en  $x$  des champs dans les régions (1) et (2)). La continuité tangentielle de  $\mathbf{E}$

$$(1 - \alpha_h) \frac{D_x^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{D_x^{(2)}}{\epsilon_2} \quad (20.34)$$

En substituant (20.24) à  $\mathbf{D}$  dans (20.34), ainsi que les expressions de  $k_z^{(1)}$  et  $k_z^{(2)}$

$$k_z^{(1)} = kn_1 \cos \theta_1 \quad (20.35)$$

$$k_z^{(2)} = kn_2 \cos \theta_2 \quad (20.36)$$

On évalue le coefficient  $\alpha_h$  de réflectivité magnétique :

$$\alpha_h = \frac{H_y^{(2)}}{H_y^{(1)}} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_2} \quad (20.37)$$

L'examen du cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan de diffusion est proposé à l'exercice 2. On définira le coefficient de réflectivité électrique  $\alpha_e$  par  $E_y^{(r)} = \alpha_e E_y^{(i)}$ . On trouve dans cet exercice

$$\alpha_e = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2} \quad (20.38)$$

## 20.5 Diffusion par une charge libre : diffusion Thomson

Nous partons de la formule de Larmor qui détermine de l'énergie rayonnée dans le mouvement accéléré d'une charge. lorsque cette accélération est provoquée par une onde électromagnétique incidente, elle vérifie (dans le cas non relativiste)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (20.39)$$

mais

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (20.40)$$

L'accélération due à la contribution magnétique d'une onde plane est négligeable dans notre approximation. L'énergie rayonnée peut alors être exprimée en fonction du champ électromagnétique incident

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^4}{4\pi m^2 \epsilon_0 c^3} (\mathbf{E}_0)^2 \quad (20.41)$$

Le rapport entre la puissance rayonnée  $dW/dt$  et le flux d'énergie incident  $\Phi = \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{n}$  a les dimensions d'une surface  $\sigma$

$$\sigma = c\mu_0 \frac{2}{3} \frac{q^4}{4\pi m^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{q^4}{4\pi m^2 \epsilon_0 c^4} \quad (20.42)$$

On définit par convention le rayon « classique » de la charge (ponctuelle)  $q$  par

$$r_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \quad (20.43)$$

$r_q$  serait le rayon d'une sphère conductrice dont l'énergie électrostatique serait  $mc^2$ . Dans le cas d'un électron  $r_e = 2.817910^{-13} \text{ cm}$ .

$$\sigma = \frac{dW_{scat}/dt}{dW_0/dt} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (20.44)$$

Cette section efficace est la section efficace de Thomson. Elle caractérise la dimension effective de l'électron vu par l'onde plane. Elle n'est pas directement observable. La diffusion sur une charge liée dans un potentiel harmonique est proposée en exercice.

## 20.6 Diffusion par une molécule neutre : diffusion Rayleigh

Lorsque une onde plane interagit avec le cortège électronique d'une molécule, le déplacement périodique des charges sous l'effet de l'onde incidente engendre un rayonnement calculable par les relations précédentes : c'est la diffusion Rayleigh, observable dans les gaz, et en particulier dans l'atmosphère où elle est responsable de la coloration bleue du ciel. On verra cependant ultérieurement que dans un milieu continu, il n'y aurait pas de diffusion en l'absence de fluctuations de densité.

Le champ rayonné par un dipôle moléculaire est obtenu à partir des relations (12.46-12.49) du Chap. 12, avec le courant  $\mathbf{j}(\omega) = -i\omega\mathbf{p}$ , ou de l'Éq. (??) du Chap. 13, en substituant  $q\dot{\beta} = -\omega^2\mathbf{p}/c$  (les termes en  $\beta = \mathbf{v}/c$  sont négligés dans l'approximation non-relativiste) du Chap. 12. Dans le mouvement périodique des électrons liés soumis à un champ incident de pulsation  $\omega$  :

$$\mathbf{E} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\omega t - kR)}{R} [\mathbf{p} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})\mathbf{n}] \quad (20.45)$$

$$\mathbf{B} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos(\omega t - kR)}{R} \mathbf{n} \wedge \mathbf{p} \quad (20.46)$$

L'intensité (flux d'énergie) est donnée dans l'approximation non-relativiste par

$$I(\theta, \phi) d\Omega = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{c\mu_0} |\mathbf{E}_{scat}|^2 R^2 d\Omega \quad (20.47)$$

$$= \frac{q^2}{\mu_0 (4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \omega^2 \beta_{\perp}^2 \quad (20.48)$$

Dans un gaz de densité  $\rho$  et de susceptibilité  $\chi$ , le vecteur de polarisation induit sera

$$\rho\mathbf{p}(t) = \rho q \delta\mathbf{x}(t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (20.49)$$

La vitesse  $\beta$  de la charge vérifie

$$\rho q \beta(t) = \frac{-i\omega}{c} \chi \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (20.50)$$

$$q \beta_{\perp}(t) = \frac{-i\omega}{c} \chi \mathbf{E}_{0,\perp} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (20.51)$$

Bien que la somme incohérente des contributions des différentes molécules soit illégitime, on verra dans le chapitre suivant que les expressions trouvées pour l'intensité diffusée et la section efficace sont accidentellement correcte pour la diffusion sur un milieu gazeux. Elles ne le sont pas pour un liquide. Lorsque l'onde incidente n'est pas polarisée, l'intensité diffusée sera

$$I = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \quad (20.52)$$

où  $I_x$  et  $I_y$  sont les intensités associées aux polarisations linéaires selon  $x$  et  $y$ , transverses à la direction de propagation  $z$ . Si  $\theta$  est l'angle entre la direction de propagation et la direction d'observation :

$$I(\theta, \phi) = \frac{q^2}{\mu_0(4\pi\epsilon_0c)^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{(\epsilon - 1)^2}{\rho^2 q^2} \mathbf{E}_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos \theta^2) \quad (20.53)$$

$$= \frac{1}{\mu_0(4\pi\epsilon_0c)^2} k^4 \frac{(\epsilon - 1)^2}{\rho^2} \mathbf{E}_0^2 \quad (20.54)$$

On définit la section efficace  $\sigma$  par le rapport entre le flux d'énergie dans la direction  $\Omega$  et le flux incident par unité de surface. la section efficace a la dimension d'une surface : c'est la surface effective des molécules, et elle ne dépend plus explicitement du champ incident ( $\epsilon$  pourrait varier avec  $|\mathbf{E}_0|$ ) :

$$\sigma(\Omega) = \frac{I(\Omega)}{\frac{1}{c\mu_0} |\mathbf{E}_0|^2} \quad (20.55)$$

$$= \frac{c}{(4\pi\epsilon_0c)^2} k^4 \frac{(\epsilon - 1)^2}{\rho^2} \quad (20.56)$$

La constante diélectrique  $\chi = \epsilon - 1$  étant (dans l'approximation linéaire) proportionnelle à la densité pour un gaz, la section efficace ne dépend pas fortement de celle-ci.

## Exercices

**Ex. 1:** Calculer le rapport entre le champ transmis et le champ incident à l'aide de la formule (20.3) lorsque l'angle d'incidence est arbitraire.

**Ex. 2:** Reprendre le calcul du paragraphe 20.4 lorsque le vecteur champ électrique est perpendiculaire au plan de diffusion. Une démarche possible est la suivante :

(a) Exprimer  $H_x^{(i)}$  et  $H_x^{(r)}$  à l'aide de l'Éq. (14.24)

$$\mathbf{H} = \frac{c}{n_1 k^{(1)}} \mathbf{k} \wedge \mathbf{D}$$

pour les composantes incidentes et réfléchies.

(b) Vérifier que  $H_x^{(1)} = c \cos \theta_1 (D_y^{(r)} - D_y^{(i)})$ .

(c) Exprimer la continuité de  $H_x$

$$c \frac{\epsilon_1}{n_1} \cos \theta_1 (E_y^{(r)} - E_y^{(i)}) = -c \frac{\epsilon_2}{n_2} \cos \theta_2 E_y^{(2)}$$

(d) Définir le coefficient  $\alpha_e : E_y^{(r)} = \alpha_e E_y^{(i)}$ , et déduire de l'équation précédente, en utilisant la continuité tangentielle de  $\mathbf{E}$  l'Éq. (20.38) de ce chapitre.

**Ex. 3:** Matrice d'adaptation : on décompose dans les milieux 1 (indice  $n_1$ ) et 2 (indice  $n_2$ ) l'onde électromagnétique normale en composantes de directions positive et négative selon  $Oz$ .

$$E^{(1)}(z) = E_+ e^{ikz} + E_- e^{-ikz}$$

$$E^{(2)}(z) = E'_+ e^{ikz} + E'_- e^{-ikz}$$

Montrer que les conditions aux limites imposent

$$\begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_+ \\ E'_- \end{bmatrix} \quad \tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad \rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

**Ex. 4:** Quelle est la distribution angulaire de la radiation rayonnée par une charge dans la diffusion Thomson ? Examiner le cas d'une polarisation linéaire selon  $x$ ,  $y$ , et celui d'une onde non polarisée (voir Chap. 12).

**Ex. 5:** Un volume de gaz diffuse la lumière incidente d'une onde plane monochromatique. Quelle est la matrice densité décrivant la polarisation de la lumière dans une direction donnée dans le cadre de la diffusion Rayleigh (sur des molécules), et dans celui de la diffusion Thomson (sur des électrons libres, appartenant par exemple à un plasma) (voir Chap. 12).

**Ex. 6:** Vérifier que (20.30) entraîne

$$\frac{E_x^r(1)}{E_x(2)} = -\frac{n-1}{2}$$

**Ex. 7:** Le coefficient  $\alpha$  de réflectivité magnétique est-il toujours positif ? Peut-il s'annuler ? Mêmes questions pour le coefficient  $\alpha_e$ .

**Ex. 8:** Utiliser la méthode de 20.2 pour analyser la zone de transition entre deux milieux diélectriques.

# Chapitre 21

## Diffusion par un milieu diélectrique hétérogène

### 21.1 Milieux homogènes et hétérogènes

Dans le chapitre établissant la propagation des ondes dans la matière, on a vu qu'une onde plane se propageait sans atténuation à la vitesse  $c/n$  dans un diélectrique homogène, où l'indice  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Cette conclusion semble contredire le calcul de la diffusion Rayleigh sur une molécule neutre dans le Chap. précédent, puisque le diélectrique est constitué de molécules qui diffusent chacune le champ incident selon la loi établie en  $1/\lambda^4$ . La sommation cohérente sur les molécules d'un diélectrique *homogène* a cependant pour seul effet d'attribuer un indice au milieu, et de modifier la vitesse de propagation. On va voir directement comment la présence d'hétérogénéités engendre une diffusion de l'onde incidente à l'extérieur du milieu. On admettra que dans un petit volume,  $d^3x$ , le dipôle moléculaire moyen est proportionnel au champ local moyenné  $\mathbf{E}$ . Les champs électromagnétiques sont fournis par les parties réelles des expressions établies au Chap. 20 avec les Éq. (20.45–20.46).

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \int d^3\mathbf{x} \frac{e^{ikR}}{R} [\mathbf{P}(\mathbf{x}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}))\mathbf{n}] \quad (21.1)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} e^{-i\omega t} \int d^3\mathbf{x} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \wedge \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (21.2)$$

L'intégration sur les directions de  $\mathbf{x}$  engendrera un vecteur parallèle à la polarisation incidente en symétrie cylindrique ou sphérique, et les expressions explicites ont été évaluées au Chap. 20. Il en ira de même en présence d'hétérogénéités à l'intérieur du milieu après moyenne temporelle, si elles conservent la symétrie cylindrique (ou sphérique), mais la diffusion va engendrer une atténuation de l'onde plane.

### 21.2 Diffusion par un gaz : diffusion Rayleigh

Si la distance  $R$  au point d'observation est suffisamment grande pour que la direction finale  $\mathbf{n}_f$  puisse être considérée comme fixe :  $e^{ikR} \sim e^{ik(r - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_f)}$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = K e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}} [\mathbf{P}(\mathbf{x}) - (\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_f] \quad (21.3)$$

où  $K = k^2/4\pi\epsilon_0$ . On admettra que la polarisation moléculaire est proportionnelle au champ incident. Cette hypothèse est naturelle pour les molécules d'un gaz si elles sont à symétrie sphérique, il convient de prendre la moyenne sur leurs orientations dans le cas contraire. D'autre part, pour définir la densité locale  $\rho(\mathbf{x})$ , on doit moyennner sur un petit volume local  $V$  de dimension inférieure à la longueur d'onde pour préserver la cohérence. comme dans le Chap. précédent, on introduira le vecteur d'onde dans le milieu

$$\mathbf{k}'_i = k' \mathbf{n}_i = \frac{n\omega}{c} \mathbf{n}_i \quad (21.4)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{p}_0 = \rho(\mathbf{x})\alpha\mathbf{E}_0 = \chi(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{x}} \quad (21.5)$$

La polarisation moléculaire  $\mathbf{p}_0 = \alpha\mathbf{E}_0$  est proportionnelle au champ local, lui même proportionnel à  $\mathbf{E}_0$ .

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = K e^{-i\omega t} \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \chi(q) [\mathbf{E}_0 - (\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{n}_f] \quad (21.6)$$

On rappelle que  $\mathbf{k}_f = k\mathbf{n}_f$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_f$ . Le champ de l'onde diffusée dans la direction  $\mathbf{n}_f$  est bien perpendiculaire à  $\mathbf{n}_f$ , et si la densité est constante  $\rho(x) = \rho_0$  (ou  $\chi(x) = \chi_0$ ), la transformée de Fourier est proportionnelle à  $\delta_3(\mathbf{q})$ , et il n'y a pas de diffusion. *La diffusion de Rayleigh n'est possible dans les gaz qu'à cause des fluctuations de l'indice.* Dans les directions finales qui diffèrent de la direction initiale, on peut alors soustraire la densité moyenne  $\rho_0$  (ou la susceptibilité  $\chi_0$ ) sans affecter le champ observé et utiliser  $\delta\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) - \rho_0$ . Cette fluctuation  $\delta\rho$  varie de manière aléatoire dans le temps. L'intensité diffusée à grande distance sera proportionnelle à  $(\mathbf{E})^2 / (2c\mu_0)$  (nous supposons pour simplifier le dipôle moyen uniforme). Nous considérerons la moyenne temporelle du flux rayonné

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega} \right\rangle_t = \frac{K^2}{4c\mu_0} (\mathbf{p}_0)^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \langle \delta\rho(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x}') \rangle_{tV} (1 + \cos^2\theta) \quad (21.7)$$

Nous avons fait apparaître la fonction de corrélation

$$\int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \langle \delta\rho(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x}') \rangle_{tV} = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{\Delta} \langle \delta\rho(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta}) \rangle_{tV} \quad (21.8)$$

où la moyenne temporelle est évaluée dans le petit volume  $V$  suffisant pour définir une densité moyenne et la variance temporelle de sa fluctuation. Le facteur  $(1 + \cos^2\theta)$  s'obtient en considérant une onde incidente non polarisée, par exemple la somme incohérente de polarisations  $x$  et  $y$   $I = 0.5(I_x + I_y)$ . En discrétisant le volume d'intégration en petits cubes de taille  $V$  :

$$\sum_{ij} V^2 \langle \delta\rho(\mathbf{x}_i)\delta\rho(\mathbf{x}'_j) \rangle_{tV} = \sum_{ij} \delta N_i \delta N_j = \sum_i N_i = \sum_i V \rho(\mathbf{x}_i) = \quad (21.9)$$

Les fluctuations statistiques dans un petit volume  $V$  d'un gaz vérifient en effet la loi de Poisson. Ce volume de pavage  $V$ , introduit pour définir la densité, disparaît dans l'expression finale, et on peut omettre l'indice  $tV$ . On verra dans l'exercice 2 la conséquence de ce découplage pour la transformée de Fourier des fluctuations.

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{K^2}{4c\mu_0} (\mathbf{p}_0)^2 \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (1 + \cos^2\theta) \quad (21.10)$$

Le résultat est (par hasard) le même que pour la diffusion incohérente sur les différentes molécules, mais d'une part, la diffusion ne peut *pas* être incohérente (les molécules se polarisent en phase!), de l'autre le formalisme adopté pourra être employé dans un liquide. En restituant l'expression de  $K$

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{4c\mu_0} \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} (1 + \cos^2\theta) (\mathbf{p}_0)^2 \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \quad (21.11)$$

La puissance totale rayonnée par le volume  $V$  sera

$$\frac{dW}{dt} = \frac{8\pi}{3} \frac{k^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{2c\mu_0} (\mathbf{p}_0)^2 \rho V \quad (21.12)$$

En comparant au flux incident sur me même volume  $V = S\Delta L$

$$\frac{dW_{in}}{dt} = \frac{1}{2c\mu_0} (\mathbf{E}_0)^2 S \quad (21.13)$$

La polarisation moléculaire  $\mathbf{p}_0$  est reliée au champ  $\mathbf{E}_0$  :  $\mathbf{p}_0 = \alpha\mathbf{E}_0 = \chi/\rho\mathbf{E}_0$ . Le taux de perte d'intensité pour la longueur  $\Delta L$

$$\frac{dW/dt}{dW_{in}/dt} = \frac{8\pi}{3} \frac{k^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} (\alpha)^2 \rho \Delta L \quad (21.14)$$

On en déduit la longueur d'atténuation  $L_0$

$$\frac{1}{L_0} = \frac{8\pi}{3} \frac{k^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} (\alpha)^2 \rho \quad (21.15)$$

La longueur d'atténuation diminue linéairement avec la densité du gaz. En utilisant la susceptibilité  $\chi$  (qui croît linéairement avec  $\rho$ ) :

$$\frac{1}{L_0} = \frac{8\pi}{3} \frac{k^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} (\chi)^2 \frac{1}{\rho} \quad (21.16)$$

et l'intensité diminue exponentiellement  $I = I_0 e^{-L/L_0}$ , on retrouve la formule de Rayleigh. On voit que les fluctuations stochastiques poissonniennes jouent un rôle clef dans l'argumentation. Le calcul supposant une sommation incohérente (comme Rayleigh l'a admis) peut cependant être partiellement justifié en prenant en compte le déphasage induit par les mouvements moléculaires aléatoires entre deux collisions. Le point établi dans ce paragraphe est que cette hypothèse n'est pas nécessaire, et qu'elle rend la discussion complexe, le rôle du temps de collision dans la description classique étant un peu obscur.

## 21.3 Diffusion par un liquide

### 21.3.1 Corrélations spatiales négligées

Comme précédemment, ce sont les fluctuations de densité qui permettent la diffusion, celles-ci étant à l'origine des variations de la constante diélectrique. Ces fluctuations sont cependant (en général) beaucoup plus faibles que dans un gaz, et même nulles si celui-ci est incompressible. On s'attend ainsi à l'apparition du coefficient de compressibilité. On utilisera la formule établie antérieurement en explicitant la fluctuation de susceptibilité :

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega} \right\rangle_t = \frac{K^2}{4c\mu_0} (\mathbf{E}_0)^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \langle \delta\chi(\mathbf{x}) \delta\chi(\mathbf{x}') \rangle_{tV} (1 + \cos^2 \theta^2) \quad (21.17)$$

La fluctuation de la susceptibilité sera reliée à la fluctuation de densité  $\delta\chi = \delta\epsilon = \delta\rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}$

Si on admet l'approximation de décorrélation en des points différents, comme pour les gaz :

$$\int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \langle \delta\chi(\mathbf{x}) \delta\chi(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta}) \rangle_{tV} = \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)^2 \langle \delta\rho(\mathbf{x}_i) \delta\rho(\mathbf{x}'_j) \rangle_{tV} \quad (21.18)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \langle \delta\rho(\mathbf{x})^2 \rangle \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)^2 \quad (21.19)$$

À cause de la faible compressibilité, la fluctuation de densité n'est plus Poissonnienne dans le liquide. Une sur-densité va être amortie très rapidement par les forces répulsives intermoléculaires, qui se superposent aux fluctuations stochastiques du fluide. La loi de probabilité de Gibbs peut être appliquée aux fluctuations de volume d'un petit ensemble de molécules dont le nombre est fixé :

$$\text{Prob}(\Delta P) = e^{-\Delta E/kT} \quad (21.20)$$

$$\Delta E = - \int_{P_0}^{\Delta P} p dV = \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{\Delta P} (\Delta P)^2 \quad (21.21)$$

La fluctuation de pression découle de la loi gaussienne obtenue

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle = \frac{kT}{\Delta V / \Delta P} \quad (21.22)$$

et de manière équivalente

$$\langle \Delta V^2 \rangle = \left( \frac{\Delta V}{\Delta P} \right)^2 \langle (\Delta P)^2 \rangle = kT \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (21.23)$$



(Cette formule est donnée par [Landau1990](114,7) pour un petit ensemble de molécules dans un thermostat). Le coefficient de compressibilité  $\alpha = -\partial V/V\partial P$  ne dépend pas de  $V$ . La fluctuation de densité en découle ( $\delta\rho/\rho = -\delta V/V$ )

$$\langle(\delta\rho)^2\rangle_{tV} = \left\langle\left(\frac{\delta V}{V}\right)^2\right\rangle\rho^2 = \alpha\frac{kT}{V}\rho^2 \quad (21.24)$$

Elle décroît comme attendu en  $1/V$ . La fluctuation du nombre de particules dans le volume  $V$  croît au contraire comme  $V$

$$\langle(\delta N)^2\rangle = \langle(\delta V)^2\rangle\rho^2 = \alpha kTV\rho^2 = \alpha\rho NkT \quad (21.25)$$

On voit que la fluctuation du gaz parfait a été réduite par le facteur

$$\frac{P}{V}\frac{\partial V}{\partial P} \ll 1 \quad (21.26)$$

qui est (loin du point critique) « petit » à cause de la faible compressibilité du liquide.

On doit également tenir compte des fluctuations de température : leur contribution, proportionnelle à

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\delta T\right)^2 \quad (21.27)$$

est cependant beaucoup plus faible.

### 21.3.2 Corrélations spatiales

Les corrélations de densité sont en réalité spatialement corrélées.

$$\langle\delta\rho(r)\delta\rho(0)\rangle = \alpha\frac{kT}{V}\rho^2 e^{-r/r_c} \quad (21.28)$$

En introduisant le rayon de corrélation  $r_c$  et une symétrie sphérique :

$$\left\langle\frac{dW}{td\Omega}\right\rangle_t = \frac{K^2}{4c\mu_0}4\pi(\mathbf{E}_0)^2\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2\int d^3x\rho(\mathbf{x})\int\Delta^2d\Delta e^{-\Delta/r_c} \quad (21.29)$$

Le rayon de corrélation tend vers l'infini au point critique, ce qui donne lieu à des fluctuations de densité plus importantes. La diffusion Rayleigh provoque l'opalescence du milieu. La longueur  $r_c$  peut dépendre des propriétés polaires du liquide. Nous avons négligé dans cette analyse divers effets provenant du changement de fréquence de la lumière diffusée : Changements discrets entre niveaux atomiques, élargissement Doppler dû au mouvement des molécules, et changements de fréquence provenant de la diffusion sur les phonons (diffusion cohérente Brillouin dans le liquide).

# Chapitre 22

## Le rayonnement Cerenkov

### 22.1 Le phénomène observé

Ce rayonnement bleu est produit dans un milieu diélectrique lorsque la vitesse des particules excède celle de la lumière dans le milieu ( $c/n$ ). Il a été découvert par P. A. Tcherenkov [Cerenkov1934] et évalué quantitativement par I. Frank et I. Tamm [?]. On l'observe par exemple dans les piles nucléaires du type « piscine », où les électrons émis dans les désintégrations de l'Uranium donnent naissance à une belle luminosité bleue. Soit  $c' = c/n$  la vitesse de la lumière dans le milieu, on définira dans ce Chap.  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c'$ . Lorsque la direction d'observation  $\mathbf{n}$  vérifie  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 1$  un pôle apparaît dans l'expression des potentiels (13.9–13.10) de Liénard Wiechert (Chap. 13), et du champ coulombien (13.24). C'est lui qui est à l'origine d'une émission radiative, sans qu'il y ait accélération de la charge en mouvement uniforme : ce sont les charges du milieu qui subissent une accélération due au passage de la particule. La jauge utilisée dans ce Chap. n'est pas la jauge de Lorenz usuelle mais la jauge de Lorenz modifiée :

$$\frac{\partial U}{c' \partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (22.1)$$

Pour simplifier les notations, nous noterons également la constante diélectrique par le symbole  $\epsilon$  (au lieu de  $\epsilon\epsilon_0$ ).

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})|_{ret}} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon c} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})|_{ret}} \quad (22.2)$$

L'expression de la composante coulombienne du champ (13.24) est

$$\mathbf{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1 - \beta^2}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3|_{ret}} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})|_{ret} \quad (22.3)$$

Lorsque la vitesse de la particule vérifie  $\beta = v/c' > 1$ , le dénominateur s'annule lorsque la direction du rayon vecteur retardé  $\cos\theta_C = 1/\beta$ , et l'expression précédente du champ électromagnétique est inacceptable : cette singularité donne naissance au rayonnement Cerenkov. On remarque en outre que sur le cône,  $(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{n} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0$ , le champ électrique est perpendiculaire à la surface, et cette propriété annonce celle des ondes électromagnétiques rayonnées.

### 22.2 Le spectre fréquentiel

soit  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{M}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau$  avec  $\tau = t - R/c'$  le rayon vecteur joignant le point d'émission au point d'observation (Fig. 22.1). L'expression du potentiel est transformée en intégrant sur le temps d'émission :

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R(\tau)(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}(\tau))} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int d\tau \frac{\delta(\tau - t + R/c')}{R(\tau)} \quad (22.4)$$

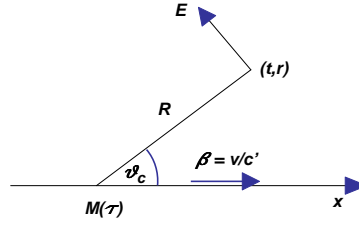


FIG. 22.1 – Rayonnement Cerenkov dans un milieu diélectrique.

Le pôle du dénominateur pour  $\cos \theta = 1/\beta$  est maintenant dissimulé dans la 'fonction'  $\delta$ . La transformée de Fourier permet de faire apparaître les composantes spectrales

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int d\tau \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega(\tau-t+R/c')}}{R(\tau)} \quad (22.5)$$

On admettra que la croissance de  $R$  pour les grandes valeurs de  $\tau$  permet de permuter les deux intégrations

$$U(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int d\tau \frac{e^{i\omega(\tau+R/c')}}{R(\tau)} \quad (22.6)$$

On en déduit les composantes monochromatiques

$$U(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon(\omega)} \int d\tau \frac{e^{i\omega(\tau+R/c')}}{R(\tau)} \quad (22.7)$$

(La transformation directe des équations de Maxwell en composantes monochromatiques légitimerait facilement l'introduction de  $\epsilon(\omega)$ ). Le vecteur  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau$  n'est fonction que de  $\tau$  et  $\mathbf{r}$ . La singularité correspondant au cône Cerenkov n'est plus directement visible, et celle de la « fonction »  $\delta$  s'est dissoute dans la décomposition spectrale. Elle réapparaîtra dans l'intégrale sur les fréquences. La valeur approchée de l'intégrale sur le temps propre peut être trouvée par la méthode de la phase stationnaire. On cherchera la valeur  $\tau_0$  vérifiant

$$\frac{d(\tau + R/c')}{d\tau} = 0 \quad (22.8)$$

$$RdR = -(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})d\tau \quad (22.9)$$

soit

$$\frac{dR}{d\tau} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (22.10)$$

La condition de phase stationnaire devient  $1 - \beta \cdot \mathbf{n} = 0$  : c'est la relation qui définit l'angle Cerenkov. Cette équation définit également les valeurs  $\tau_0$  et  $R_0$  de  $\tau$  et  $R$  au point stationnaire (voir l'exercice 1). On trouve ainsi

$$U(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{i\omega(\tau_0+R_0/c')}}{R_0} \int d\tau \exp \left[ i\omega \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} \frac{d^2(\tau + R/c')|_0}{d\tau^2} \right]. \quad (22.11)$$

Le calcul des dérivés secondes au point  $\tau = \tau_0$  est proposé dans l'exercice 1. L'expression du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  s'obtient à partir de  $\mathbf{A} = \beta U$  Le champ électrique associé à ces potentiels vérifie :

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = -\nabla_r U + i\frac{\omega}{c'} \mathbf{A} \quad (22.12)$$

Le gradient et la dérivée temporelle sont dominés par le terme de phase. Pour calculer les gradients de  $\tau_0$  et  $R_0$ , on choisira l'axe  $\mathbf{x}$  selon la trajectoire de la particule. La relation  $R_0 \sin \theta_C = y$  (coordonnée du point d'observation selon le deuxième axe) implique

$$\nabla_r(R_0) = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{1 - 1/\beta^2}} \quad (22.13)$$

De  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau$  on déduit

$$\tau = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \quad (22.14)$$

puis

$$\nabla_r \tau_0 = \left( \mathbf{v} - \frac{\nabla_r(R)v}{\beta} \right) \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v} \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{\beta \sqrt{1 - 1/\beta^2}} \right) = \frac{1}{v} \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \quad (22.15)$$

On obtient

$$\nabla_r U(\omega, \mathbf{r}) = \frac{qJ}{4\pi\epsilon R_0} i\omega \frac{1}{v} \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + \beta^2 \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (22.16)$$

On définit

$$J = \int d\tau \exp \left[ i\omega \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} \frac{d^2(\tau + R/c')|_0}{d\tau^2} \right] \quad (22.17)$$

On fera l'approximation  $R(\tau) = R(\tau_0) = R_0$  dans cette intégrale.

$$\nabla_r U(\omega, \mathbf{r}) = \frac{qJ}{4\pi\epsilon R_0} i\omega \frac{1}{v} \left( \mathbf{x} + \mathbf{y} \sqrt{\beta^2 - 1} \right) \quad (22.18)$$

De manière similaire, c'est le terme issu de la phase qui domine l'expression de  $\partial \mathbf{A} / \partial t$ , et on obtiendra directement

$$\frac{1}{c'} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c'} \beta \mathbf{U} \quad (22.19)$$

L'expression du champ électrique  $\mathbf{E}$  résulte des potentiels trouvés

$$\mathbf{E} = -\frac{qJ}{4\pi\epsilon R_0} i\omega \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{v} \left( -\mathbf{x} \sqrt{\beta^2 - 1} + \mathbf{y} \right) \quad (22.20)$$

La valeur de l'intégrale  $J$  s'obtient facilement à partir de l'expression de la dérivée seconde (Exercice 2) :

$$\frac{d^2(\tau + R/c')|_0}{d\tau^2} = \frac{c'}{R} (1 - \beta^2) \quad (22.21)$$

$$J = (1 + i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2R_0}}{\sqrt{\omega c' (\beta^2 - 1)}} \quad (22.22)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon c'} (-1 + i) \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{c'}} \frac{1}{\beta} \left( -\mathbf{x} \sqrt{\beta^2 - 1} + \mathbf{y} \right) \frac{1}{\sqrt{R_0}} \quad (22.23)$$

Ce champ électromagnétique est perpendiculaire au rayon vecteur (retardé) du cône Cerenkov. Il décroît en  $1/R^{1/2}$  : il a les caractéristiques d'un champ rayonné sur la surface du cône Cerenkov. Le vecteur de Poynting moyenné est

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*}{\mu_0} = \frac{1}{c' \mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{q^2}{8\pi\epsilon c'^2} \frac{\omega}{R_0} \quad (22.24)$$

(on a utilisé  $\mathbf{B} = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E})/c'$ ). L'élément de surface intégré sur les azimuths pour une longueur de trajectoire  $dz$  est :

$$ds = 2\pi R_0 \sin \theta_C^2 dz \quad (22.25)$$

Le flux rayonné sur la longueur de trajectoire  $dz$  est obtenu par l'intégration sur les fréquences. Si on se restreint aux fréquences positives, l'élément d'intégration est  $d\omega/\pi$ , et l'énergie totale rayonnée sera

$$dW = |\mathbf{S}| ds = \frac{q^2}{4\pi\epsilon c'^2} \int_{\beta n(\omega) > 1, \omega > 0} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) dz \quad (22.26)$$

En tenant compte de  $\epsilon\mu c'^2 = 1$ , on obtient

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\mu_0\mu q^2}{4\pi} \int_{\beta n(\omega) > 1, \omega > 0} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) dz \quad (22.27)$$

C'est la formule de Frank-Tamm (rappelons que dans cette formule,  $\beta = v/c'$ ). La dépendance de  $c'$  en fonction de  $\omega$  implique un (petit) étalement du cône Cerenkov en fonction de la fréquence.

## Exercices

**Ex. 1:** Calculer les dérivées premières et secondes de  $\tau + R/c'$ . On pourra utiliser les relations

$$\frac{d^2}{dt^2}(R) = -\frac{d}{cd\tau} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{R} \quad (22.28)$$

$$= \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R^2 c} (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{Rc} (-v^2) \quad (22.29)$$

$$= \frac{v^2}{Rc} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right). \quad (22.30)$$

**Ex. 2:** Calculer l'intégrale  $J$ .

**Ex. 3:** L'intégration sur les fréquences de l'expression (22.26) diverge et correspond à une énergie rayonnée infinie. Décrire les différents effets physiques qui évitent cette divergence.

**Ex. 4:** On a vu dans le Chap. 20 qu'il n'y avait pas de diffusion dans les milieux homogènes. Y-a-t-il transfert d'énergie au milieu par une particule vérifiant  $\beta > 1$  ?

**Ex. 5:** Calculer la perte d'énergie de la charge ponctuelle.

**Ex. 6:** Calculer le transfert d'énergie aux électrons (liés) du milieu pour une composante monochromatique.

# Chapitre 23

## Rayonnement de transition

### 23.1 Introduction

Le traitement du rayonnement produit à la transition entre deux milieux illustre, comme l'effet Cerenkov, l'apparition de radiation en l'absence de toute accélération du courant source. Ce sont les courants dipolaires induits dans le milieu matériel environnant qui sont à la source de l'effet Cerenkov, c'est la modification de l'environnement à la surface limitant les deux milieux qui est responsable de la radiation de transition. L'effet a été prédit théoriquement par I. F. Frank et V. L. Ginzburg [Frank1945], V. L. Ginzburg et V. N. Tsytovich [Ginzburg1990] en font une revue détaillée, et deux références récentes – Y. Takakura [Takakura2000] et A. Hirose [Hirose2000] – citent les travaux plus récents. Nous adopterons successivement les points de vue temporels et fréquentiels, les calculs seront restreints au cas d'une configuration où la particule est perpendiculaire à l'interface plane séparant les milieux. La radiation de transition est utilisée pour identifier les particules chargées, le rayonnement étant proportionnel à  $\gamma$ . Vers l'arrière, il se situe dans le domaine optique, mais un rayonnement  $X$  est produit vers l'avant.

### 23.2 Le cas d'un plan conducteur

L'effet du plan conducteur sera représenté par deux charges 'miroir' de signe et de vitesse opposées, qui 's'annihilent' à l'instant  $t = 0$ . Le potentiel d'une charge en mouvement uniforme a déjà été évalué au Chap. 13, à l'Éq. (13.24). nous reprenons ce calcul pour l'adapter à la configuration d'une interface conductrice. Le 4-vecteur courant associé à la charge est

$$j^\mu(\tau, \mathbf{x}) = (\rho, \mathbf{j}/c) = q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\tau))(1, \mathbf{v}/c) \quad (23.1)$$

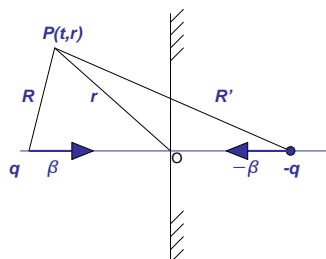


FIG. 23.1 – Rayonnement de transition à la traversée d'un plan conducteur.

Les 4-composantes  $(1, \mathbf{v}/c)$ , avec inclusion de la fonction  $\delta$  forment un 4-vecteur

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{v} \quad (23.2)$$

Le 4-potentiel vecteur est donné par l'expression usuelle :

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d\tau \frac{j^\mu(\tau, \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \delta(\tau - (t - R/c)) \quad (23.3)$$

L'intégration sur la coordonnée  $\mathbf{r}$  est absorbée par la fonction  $\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\tau))$  contenue dans l'expression du courant.

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{traj} \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau \frac{\delta(\tau - t + R/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (23.4)$$

On choisit l'axe  $Oz$  selon la trajectoire de la particule. Les composantes  $A^1$  et  $A^2$  sont alors nulles.

$$\begin{pmatrix} U(t, \mathbf{r}) \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{traj} d\tau \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}/c \end{pmatrix} \frac{\delta(\tau - t + R/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (23.5)$$

Cette expression peut être directement intégrée sur le temps lorsque le mouvement a lieu de  $\tau = -\infty$  à  $\tau = +\infty$  : on trouve les potentiels de Lienard-Wiechert en prenant soin d'inclure la dépendance de  $R$  en fonction de  $\tau$  (ou  $z$ ) dans le calcul. Dans le cas de la radiation de transition, le résultat est nul ou non selon que la solution en  $\tau$  appartient ou non à l'intervalle  $(-\infty, 0)$ . L'expression de la continuité des composantes tangentielles est alors techniquement plus délicate mais il est instructif d'examiner le domaine où le champ est fini (non nul) et d'en déduire directement le champ électromagnétique avant d'adopter la méthode usuelle du passage par les composantes monochromatiques : celle-ci dissimule les discontinuités de la radiation.

### 23.3 La solution directe par les 4-potentiels

L'exercice 1 établit qu'en un point  $(t, \mathbf{r})$ , le temps retardé  $\tau = t - R/c$  vérifie une équation du second degré

$$\tau^2(1 - \beta^2) - 2\tau(t - \mathbf{r}/c \cdot \boldsymbol{\beta}) + t^2 - \frac{r^2}{c^2} = 0$$

On établit dans l'exercice 1 qu'il n'existe une solution retardée  $\tau < 0$  que si  $r < ct$ . Cette solution est alors unique, l'autre racine en  $\tau$  étant positive. Si la charge atteint le plan conducteur à l'instant  $t = 0$ , l'existence d'une solution retardée impose

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0U(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{pour } r > ct \quad (23.6)$$

L'expression du champ électrique

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t} - \nabla U(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_U \quad (23.7)$$

vérifie, en notant  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}^2 = 1$  : pour la partie vectorielle du potentiel :

$$\int_0^{R/c} dt' \mathbf{E}_A(t', \mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int_0^{R/c} \frac{\partial \mathbf{A}(t', \mathbf{r})}{\partial t'} dt' = \frac{1}{c} \mathbf{A}(t = R/c, \mathbf{r}) \quad (23.8)$$

$$\int_0^r \mathbf{E}_U(t, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dr' = - \int_0^r \nabla U(t, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dr' = -U(t, \mathbf{r} = ct\mathbf{n}) \quad (23.9)$$

Le champ électrique est la somme  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_U$ . En tenant compte des arguments de la fonction de Dirac, les intégrales précédentes suggèrent :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \delta(ct - r) \frac{(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})_{ret}} \quad (23.10)$$

Ce calcul sera justifié de manière plus rigoureuse en introduisant les transformées de Fourier des Éq. 23.3 et 23.4

Le champ électrique complet inclue les conditions aux limites imposées par le plan conducteur et s'obtient en ajoutant la charge 'miroir' :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \delta(ct - r) \left[ \frac{(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})_{ret}} + \frac{(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n})}{R(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})_{ret}} \right] \quad (23.11)$$

La direction de  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  est alors celle de  $\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$  et vérifie

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

La fonction  $\delta(ct - r)$  met en évidence la localisation temporelle de la source de rayonnement à l'instant de l'annihilation entre la charge et la charge image.

## 23.4 Le spectre de fréquence

On identifiera les composantes de Fourier du 4-potential  $A^\mu$  en développant dans 23.5 la fonction  $\delta(\tau - t + R/c)$

$$\delta(\tau - t + R/c) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega(\tau - t + R/c)} d\omega \quad (23.12)$$

On en déduit, avec un plan conducteur localisé à  $z = 0$  :

$$\mathbf{A}^-(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{e^{i\omega(\tau + R/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (23.13)$$

où l'on a posé

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} A^\mu(\omega, \mathbf{r}) d\omega$$

On trouve de manière analogue

$$U^-(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{e^{i\omega(\tau + R/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (23.14)$$

A « grande » distance de la charge  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{x}|$ , on définira  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , et le vecteur d'onde

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$$

Dans ce régime

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}(\tau)|$$

$$\mathbf{A}^-(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \int_{-\infty}^0 d\tau \exp(i\omega\tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(\tau) + \epsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}). \quad (23.15)$$

La variable d'intégration  $\tau$  sert ici uniquement à paramétrer la trajectoire  $\mathbf{x}(\tau)$  et n'est pas égale au temps retardé  $t - R/c$  : elle n'est en particulier *pas* fonction de la position  $\mathbf{r}$ , contrairement à  $t - R/c$  : on choisira

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{v}\tau = v\tau\mathbf{z}$$

Le facteur  $\epsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$  a été introduit pour assurer la convergence en dépit de la séparation en deux termes : celui qui contient la dépendance en  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|$  a été extrait de l'intégration sur la trajectoire dans l'approximation à grande distance considérée. La charge miroir (opposée) se déplace à la vitesse  $-\mathbf{v}$ , et le courant est le même.

$$\mathbf{A}^+(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \int_{+\infty}^0 d\tau e^{i\omega\tau + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(\tau) + \epsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}} \quad (23.16)$$

En posant  $\cos\theta = \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}$ , on en déduit l'expression du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = -i\boldsymbol{\beta} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{kr} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} + \frac{1}{1 + \beta \cos\theta} \right). \quad (23.17)$$



On trouve de manière analogue pour la composante temporelle engendrée par la charge :

$$A^0(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{e^{i\omega(\tau+R/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (23.18)$$

et pour  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{x}|$

$$A^0(\omega, \mathbf{r}) = -i \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{r} e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\omega\tau - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(\tau) + \epsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}} \quad (23.19)$$

$$A^0(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\beta} \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(\omega, \mathbf{r}) \quad (23.20)$$

En regroupant les différents termes et en ajoutant la charge image :

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = -i\beta \frac{q}{4\pi\epsilon_0 ck} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \right) \quad (23.21)$$

$$A^0(\omega, \mathbf{r}) = -i \frac{q}{4\pi\epsilon_0 ck} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} - \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \right) \quad (23.22)$$

On restituera la dépendance temporelle et spatiale des composantes monochromatique pour calculer les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A}_\omega(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) \quad (23.23)$$

En négligeant les composantes en  $1/R^2$

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = -i\mathbf{k}A^0(\omega, \mathbf{r}) + i\frac{\omega}{c} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) \quad (23.24)$$

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}}{1 - \beta \cos \theta} + \frac{\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}}{1 + \beta \cos \theta} \right) \quad (23.25)$$

On retrouve à toutes les fréquences la direction  $\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$  (perpendiculaire au rayon vecteur du point d'observation). Le champ magnétique associé sera

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}}{c} = (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}) \left( \frac{q\mu_0}{4\pi} \right) \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} + \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \right) \quad (23.26)$$

Le rayonnement de transition est émis à partir du point d'impact de la particule sur le plan conducteur.

## 23.5 Rayonnement de transition à l'interface d'un milieu diélectrique

On cherchera à vérifier les conditions aux limites en procédant par analogie avec le traitement habituel de la réfraction pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en considérant les ondes réfléchies (comme dans le cas du conducteur) et transmises, et on considèrera l'interface entre deux diélectriques de constantes  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , la particule incidente se trouvant dans le milieu 1. Le champ total dans le milieu 1 sera

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_r + \mathbf{D}(2) \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r + \mathbf{H}(2) \end{aligned} \quad (23.27)$$

Les champ ( $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ) engendrés dans le milieu (1) sont évalués à l'aide de la relation (23.10) ou du terme en  $\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}$  dans l'Éq. (23.25) les composantes ( $\mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ ) sont calculés à partir de la charge image comme dans (23.11) ou (23.25). La portion de trajectoire située dans la région diélectrique (2) apporte également une contribution au champ électromagnétique de la région (1), ce sont les termes  $\mathbf{D}(2)$  et  $\mathbf{H}(2)$ . Le champ électrique étant dans le plan de diffusion d'après l'expression (23.25), La solution sera recherchée d'après l'Éq. (20.24) sous la forme

$$H_y(r) = \alpha_h H_y(i)$$

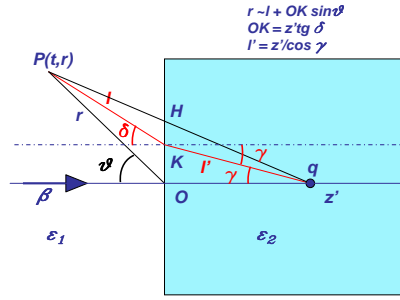


FIG. 23.2 – Rayonnement de transition à une interface diélectrique.

où  $\alpha$  est le coefficient de réflectivité magnétique. La symétrie cylindrique permet de se limiter au cas où seule cette composante  $H_y$  est présente. L'expression de  $\alpha_M$  est donnée par la relation (20.37) du Chap. 20. Conformément à l'Éq. (20.37)

$$\alpha_h = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \cos \theta_1} - \sqrt{\epsilon_1 \cos \theta_2}}{\sqrt{\epsilon_2 \cos \theta_1} + \sqrt{\epsilon_1 \cos \theta_2}} \quad (23.28)$$

Lorsque la région (1) est l'air, et la région (2) est le diélectrique, le coefficient  $\alpha_h$  est positif. Les contributions incidentes et réfléchies s'ajoutent pour le champ magnétique, et se soustraient pour le champ électrique, comme dans le cas limite d'un conducteur. C'est évidemment l'inverse pour une onde se propageant dans un diélectrique et traversant l'interface vers le milieu d'indice inférieur.

### 23.5.1 Le champ rayonné par la portion de trajectoire dans la région (1)

La formule précédente, appliquée à la contribution de la portion de trajectoire située dans la région (1) implique

$$\mathbf{E}_\omega(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}}{1 - \beta \cos \theta} + \alpha \frac{\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}}{1 + \beta \cos \theta} \right) \quad (23.29)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}) \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} + \alpha \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \right). \quad (23.30)$$

### 23.5.2 Le champ rayonné par la portion de trajectoire dans la région (2) diélectrique

Dans la région (2), supposée infinie, la particule émet à une fréquence donnée une onde plane qui doit vérifier les conditions aux limites : elle sera réfractée vers le point d'observation. Soit  $z'$  la coordonnée du point de trajectoire courant. La phase de l'onde au point d'observation est  $e^{ikl + ik'l'}$ . On voit dans la figure 23.1 que  $l = r - z' \tan \gamma \sin \theta$  et  $l' = z' / \cos \gamma$  à partir de la relation de la réfraction :

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sqrt{\epsilon} \sin \gamma \\ \cos \gamma &= \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{\epsilon}} = \frac{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \delta}}{\sqrt{\epsilon}} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= l \cos \delta = l \sqrt{1 - \sin^2 \delta} \\ \tan \gamma &= \frac{\sin \delta}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \delta}} \end{aligned}$$

En adaptant l'Éq. (23.15) à cette portion de la trajectoire

$$A_z(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q\beta}{4\pi\epsilon_0 r} e^{ikr} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \exp\left(i\omega\beta\tau \frac{-\sin\gamma \sin\theta + \sqrt{\epsilon}}{\cos\gamma}\right), \quad (23.31)$$

(avec  $z' = v\tau$ )

$$A_z(\omega) = \frac{q\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \exp\left(i\omega\beta\tau \frac{\epsilon - \sin\theta \sin\delta}{\sqrt{\epsilon - \sin^2\delta}}\right). \quad (23.32)$$

À grande distance, on peut substituer  $\delta = \theta$ , et obtenir

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = i \frac{q\beta}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{1}{1 + \beta\sqrt{\epsilon - \sin^2\theta}} \quad (23.33)$$

Cette contribution est multipliée par le facteur de transmission entre le diélectrique et le vide. Ce facteur est  $1 - \alpha$ . La composante réfléchie à l'interface diélectrique-vide est en effet  $-\alpha$ , et la continuité de la composante tangentielle impose alors le facteur  $(1 - \alpha)$  dans les deux milieux. L'expression finale du champ magnétique vérifie

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} \sim i\mathbf{k} \wedge \mathbf{A} \quad (23.34)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}) \left( \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} + \frac{\alpha}{1 + \beta \cos\theta} - \frac{1 - \alpha}{1 + \beta\sqrt{\epsilon - \sin^2\theta}} \right). \quad (23.35)$$

Lorsque les deux diélectriques sont identiques,  $\epsilon_r = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\sqrt{\epsilon - \sin^2\theta} = -\cos\theta$  et on vérifie que le champ magnétique est nul. Lorsque  $\epsilon \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = 1$ , et on retrouve le cas du plan conducteur (23.25). Le champ électrique s'obtient à partir de (23.29) et (23.33)

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}}{1 - \beta \cos\theta} + \alpha \frac{\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}}{1 + \beta \cos\theta} - (1 - \alpha) \frac{\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}}{1 + \beta\sqrt{\epsilon - \sin^2\theta}} \right] \quad (23.36)$$

Le champ électrique s'annule également pour  $\epsilon_r = 1$ .

## Exercices

- Ex. 1:** Établir l'équation déterminant le temps  $\tau = t - R/c$  en fonction de  $t$  et de la distance  $r$  du point d'observation à l'origine des coordonnées pour un mouvement uniforme  $\mathbf{M} = v\mathbf{t}$ .
- Ex. 2:** Préciser l'intensité du rayonnement dans le plan  $z = 0$  pour un plan conducteur et un diélectrique. Expliquer.
- Ex. 3:** Calculer le champ électrique dans le diélectrique (en tenant compte de la composante réfléchie), et vérifier que (23.36) satisfait aux conditions aux limites.

# Chapitre 24

## La diffraction au delà de l'approximation de Kirchoff

### 24.1 Introduction

La propagation d'une onde monochromatique à travers l'ouverture d'un écran ou au passage du bord d'un demi-plan est affectée par la présence géométrique des bords. Ce sont ces effets que l'on regroupe sous le nom de diffraction. Le traitement exact est complexe, mais il existe diverses méthodes d'approximation qui permettent d'en rendre compte de manière approchée. L'approximation usuelle est celle de Kirchoff, où en tirant partie du « principe » de Huyghens (qui est exact), une solution *approchée* est obtenue en intégrant le front d'onde sur les ouvertures. Cette solution approchée peut être justifiée par le théorème de Green (paragraphe 1.2), mais sa précision n'est contrôlable qu'à l'aide d'une solution exacte : il y en a très peu qui soient analytiques. Le but de ce chapitre est de présenter quelques approches permettant d'aller au delà de l'approximation de Kirchoff, dans un cadre tridimensionnel, où les méthodes numériques sont en générales incontournables, puis dans un cadre bidimensionnel (ouvertures dans un plan), où des solutions exactes existent parfois. La solution « historique » de [Sommerfeld1964] du problème du demi-plan est complexe, nous lui préférons la méthode de [Lamb1907].

### 24.2 L'équation de Helmholtz

L'Éq. 13.6 de propagation du champ électromagnétique dans un milieu homogène a été établie aux Chap. 12 et 14 (Éq. 14.60). Le champ électromagnétique est solution de l'équation de propagation :

$$\left(\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0. \quad (24.1)$$

Pour une composante monochromatique, de pulsation  $\omega$ , on pose  $k = n\omega/c$ . L'Éq. 24.1 devient l'équation de Helmholtz :

$$(k^2 + \Delta) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0, \quad (24.2)$$

et dans le cas scalaire

$$(k^2 + \Delta)u(\mathbf{x}) = 0 \quad (24.3)$$

Cette équation a des propriétés voisines de celle de l'équation de Poisson (2.1) du Chap. 2, et les solutions de l'équation hétérogène peuvent également être construites à l'aide des fonctions de Green, comme dans le Chap. 2. L'Éq. 24.2 se prête également au traitement des effets de diffraction liés à la présence de bords dans les ouvertures placées sur le trajet des surfaces d'ondes. Les fonctions de Green sont solution de :

$$(k^2 + \Delta)G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (24.4)$$

La solution qui s'annule à l'infini se trouve par transformation de Fourier. Elle est de la forme

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \quad (24.5)$$

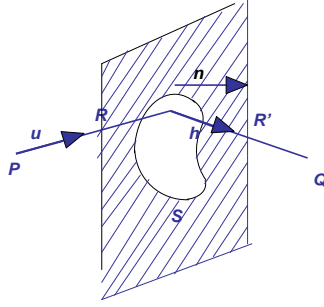


FIG. 24.1 – Géométrie de l'approximation de Kirchoff.

avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Le cas d'un champ scalaire se traite à l'aide du théorème de Green déjà utilisé au Chap. 2.

Soit  $S$  la surface limite du volume  $V$  et  $\mathbf{n}$  la normale externe par rapport à la source. Pour une onde incidente proche d'une onde plane  $u = u_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  : La fonction  $u$  :

$$u_K(\mathbf{r}) = \phi_0 \int_S d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{ikR}}{4\pi R} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}) + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \right] \quad (24.6)$$

$$u_K(\mathbf{r}) = \phi_0 \int_S d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{e^{ikR}}{4\pi R} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}) + \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \right] \quad (24.7)$$

est une solution de l'Éq. 24.3 égale à  $u$  à l'intérieur de  $V$  et nulle à l'extérieur. Le terme dominant à grande distance ( $kR \gg 1$ ) est (en posant  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  et  $\mathbf{R}' = R'\mathbf{h}$ )

$$u_K(\mathbf{r}) \simeq ik\phi_0 \int_S d^2 \mathbf{x} \frac{e^{ikR}}{4\pi R} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \quad (24.8)$$

Comme nous l'avons vu au Chap. 2, les valeurs de  $u$  et  $\partial u / \partial n$  sur la surface limite  $S$  seront (en général) différentes de  $u_S$  et  $\partial u / \partial n_S$ . L'approximation de Kirchoff de l'onde issue de l'ouverture  $S_1$  d'un écran opaque repose sur le principe de Huyghens. Elle suppose que sur la partie opaque de l'écran, le champ  $\phi_S$  et sa dérivée normale  $\partial \phi / \partial h$  sont nuls sauf sur la surface de l'ouverture  $S_1$ , où elles sont égales à l'onde incidente. La valeur de  $\phi$  sur  $S$  est supposée nulle sur  $S$  dans la région II (zone de diffraction), mais pas dans la région I (zone de la source) : l'approximation de Kirchoff ne respecte pas les conditions aux limites imposées par les équations de Maxwell. La suite de ce chapitre va évoquer les méthodes utilisées pour y remédier. On peut montrer d'autre part que si cette approximation est excellente à trois dimensions, elle est moins précise à deux dimensions où la fonction de Green a un comportement logarithmique à proximité de la source. Dans le cas d'une source ponctuelle située au point  $P$ , l'application de la formule de Green devient, avec  $\mathbf{R} = R\mathbf{h}$  et  $\mathbf{R}' = R'\mathbf{h}$  :

$$u_K(\mathbf{r}) \simeq ik\phi_0 \int_S d\mathbf{x} \frac{e^{ikR+R'}}{4\pi RR'} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \quad (24.9)$$

La symétrie de cette expression implique que l'amplitude observée au point  $Q$  pour une source  $P$  est la même que l'amplitude en  $P$  d'une source située en  $Q$ . C'est un aspect du *théorème de réciprocité*.

### 24.3 L'approximation de Kirchoff

En dépit des défauts signalés dans le paragraphe précédent (elle est incompatible avec les conditions aux limites des solutions de l'équation de Maxwell) l'approximation de Kirchoff est excellente dans la plupart des phénomènes de diffraction en optique. C'est beaucoup moins vrai dans le domaine radio

ou acoustique, où le nombre énorme des publications traduit les efforts engagés pour l'améliorer. Nous présenterons ici les deux exemples typiques où elle décrit les effets de bord induits par les ouvertures dans un écran, le cas des ouvertures circulaires et rectangulaires-cylindrique en incidence normale.

### 24.3.1 L'amplitude du champ au point d'observation

D'après la relation 24.8, le champ (ou chacune de ses composantes) est représenté par l'amplitude scalaire

$$E(\mathbf{r}) = ikA_P \int_S \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} d^2\mathbf{x} \quad (24.10)$$

où  $A_P$  est une amplitude caractérisant le champ au point  $P$  (sa dimension est celle d'un potentiel). Les distances initiales et finales joignent la source  $P$  et un point courant  $i$  de l'ouverture d'une part, le point  $i$  et le point d'observation  $Q$  de l'autre. Avec les notations de la Fig. 24.1, deux cas seront examinés : les approximations de Fraunhofer, avec une dépendance linéaire par rapport aux coordonnées de l'élément diffusant, et l'approximation de Fresnel, où la dépendance est quadratique.

### 24.3.2 Approximation de Fraunhofer

La dépendance des rayons initiaux et finals par rapport aux coordonnées d'intégration  $\mathbf{x}$  dans l'Éq. 24.10 peut être explicitée

$$R^2 = (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r})^2 = R_0^2 + 2\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{x} + x^2 \quad (24.11)$$

soit

$$R \simeq R_0(1 + \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{x}/R_0 + x^2/2R_0^2) \quad (24.12)$$

De même

$$R' \simeq R'_0(1 - \mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{x}/R'_0 + x^2/2R'_0{}^2) \quad (24.13)$$

Les termes quadratiques peuvent être négligés si  $kx^2/R_0 = 2\pi x^2/(R_0\lambda) \ll 1$  soit

$$r \ll \min\left(\sqrt{R_0\lambda/2\pi}, \sqrt{R'_0\lambda/2\pi}\right) \quad (24.14)$$

C'est la condition de Fraunhofer, qui peut être réécrite sous la forme

$$\frac{r}{\min(R_0, R'_0)} \ll \frac{\lambda}{2\pi x} \quad (24.15)$$

La condition de Fraunhofer sera toujours vérifiée lorsque  $R_0, R'_0 \rightarrow \infty$ . Elle suppose des observations à grande distance. L'utilisation de lentilles permet d'observer l'interférence de Fraunhofer à courte distance, en plaçant la source ou l'objet dans les plans focaux.

La condition 24.15 ne limite pas les angles, mais leurs variations dans l'ouverture  $S$ . Une ouverture de 1mm imposera dans le domaine optique une gamme angulaire très inférieure au milliradian dans la configuration géométrique de la Fig. ?? (les angles peuvent être grands). La phase de l'expression 24.10 est alors  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{x}) + \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{R}' - \mathbf{x})$  en introduisant les vecteurs d'onde initiaux et finals  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ . et la différence  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , l'Éq. 24.10 devient

$$E(\mathbf{r}) = ikA_0 \int_S e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^2\mathbf{x} \quad (24.16)$$

devient, avec

$$A_0 = A_P \frac{e^{ik(R_0+R'_0)}}{R_0R'_0} \quad (24.17)$$

( $A_0$  a une dimension  $V/L^3$ ).

$$E(\mathbf{r}) = ikA_0 \int_S e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2\mathbf{x} \quad (24.18)$$

Le domaine d'application de cette expression est limité d'une part par la condition 24.15, d'autre part par les géométries où le produit scalaire  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$  n'est pas nul :  $\mathbf{k}'$  n'est pas la réflexion de  $\mathbf{k}$  sur le plan de l'ouverture.

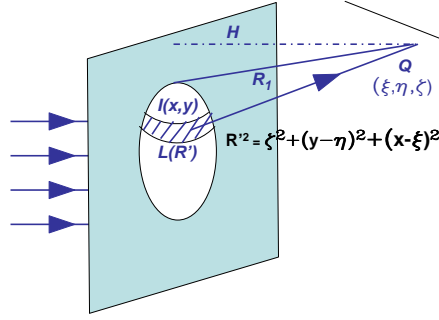


FIG. 24.2 – Intégration sur l'ouverture pour la diffraction de Fresnel.

### 24.3.3 L'ombre et la diffraction de Fresnel

Pour alléger les notations, on supposera un faisceau incident parallèle, normal au plan, une ouverture circulaire de rayon  $a$ , et un point d'observation  $Q$  de coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$  situé sur l'axe de symétrie vertical, comme le représente la Fig. 24.2, c'est-à-dire que  $\xi = 0$ . Le point d'intégration est le point  $I$  de coordonnées  $(x, y)$  et la distance  $R'$  est donnée par  $R'^2 = \zeta^2 + (x - \xi)^2 + (\eta - y)^2$ . L'intégrale de diffraction dans l'ouverture devient

$$E_0(\mathbf{r}) = ikE_0 \int dx dy \frac{e^{ikR'}}{R'} \quad (24.19)$$

( $E_0$  est maintenant un champ).

On introduit la projection  $H$  du point d'observation  $Q$  sur le plan, et on adopte pour l'intégration les coordonnées polaires par rapport à  $H$  :  $R'^2 = \zeta^2 + (x - \xi)^2 + (\eta - y)^2 = \rho^2 + \zeta^2$

$$E_0(\mathbf{r}) = ikE_0 \int_{\rho_1}^{\rho_{max}} \frac{e^{ikR'}}{R'} \rho d\rho d\phi \quad (24.20)$$

**Zone illuminée :** si  $H$  est dans la partie illuminée le rayon minimal  $\rho$  dans le plan est nul.

$$E_0(\mathbf{r}) = ikE_0 2\pi \int_0^{\rho_1} \frac{e^{ikR'}}{R'} \rho d\rho + ikE_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{e^{ikR'}}{R'} L(\rho) d\rho \quad (24.21)$$

$L(\rho)$  est l'angle azimutal (avec  $H$  comme origine) de l'arc de cercle situé dans la zone illuminée :  $L(\rho_1) = 2\pi$ , et  $L(\rho_2) = 0$  en revenant à la variable  $R'$ , et en intégrant par parties

$$E_0(\mathbf{r}) = 2\pi E_0 (e^{ikR_1} - 1) + E_0 (e^{ikR_2} L(R_2) - e^{ikR_1} 2\pi - E_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial L(R')}{\partial R'} e^{ikR'} dR') \quad (24.22)$$

mais  $L(R_2) = 0$

$$E_0(\mathbf{r}) = -2\pi E_0 - E_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial L(R')}{\partial R'} e^{ikR'} dR' \quad (24.23)$$

Le terme constant fournit la contribution géométrique dominante, la contribution de l'intégrale est un terme correctif de diffraction.

**Zone ombrée :** le point  $H$  est situé hors de l'ouverture. Après intégration par parties, les contributions des rayons minimal et maximal sont nuls puisque  $L(R) = 0$  pour ces valeurs.

$$E_0(\mathbf{r}) = E_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial L(R')}{\partial R'} e^{ikR'} dR' \quad (24.24)$$

Il y a une contribution diffractive, mais pas de terme géométrique, comme attendu. Dans la configuration simple adoptée, on peut donner une expression analytique approchée du résultat

$$R' = \zeta \left[ 1 + \frac{x^2 + (\eta - y)^2}{2\zeta^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{x^2 + (\eta - y)^2}{\zeta^2} \right)^2 + \dots \right] \quad (24.25)$$

Le troisième terme est négligeable si

$$\frac{x^2 + (\eta - y)^2}{\zeta^2} \ll \sqrt{\frac{4\lambda}{\pi\zeta}} \quad (24.26)$$

Cette inégalité n'est évidemment pas vérifiée dans toute la plage (infinie) d'intégration, mais la décroissance est assez rapide pour que la limite puisse être le plus souvent étendue à tout le demi-plan éclairé.

En repartant de la formule générale de la diffusion dans l'approximation de Kirchoff (24.9)

$$label_{eq} : 2424 E_0(\mathbf{r}) = ikE_0 \int dx dy \frac{e^{ikR'}}{R'} = ikE_0 \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} \int dx e^{ikx^2/2\zeta} \int dy e^{ik(\eta-y)^2/2\zeta} \quad (24.27)$$

On appellera  $I_x$  l'intégrale sur  $x$ , (coordonnée parallèle au bord), et  $I_y$  l'intégrale sur  $y$ .

$$I_y(\eta) = \int dy e^{ik(\eta-y)^2/2\zeta} \quad (24.28)$$

On définit  $w = (\eta - y)\sqrt{k/2\zeta}$

$$I_y(\eta) = \sqrt{\frac{2\zeta}{k}} \frac{1}{\zeta} \int_{-\eta\sqrt{k}/\sqrt{2\zeta}}^{\infty} e^{iw^2} dw \quad (24.29)$$

$$E_0(\mathbf{r}) = iE_0 e^{ik\zeta} \sqrt{\frac{\pi k}{2\zeta}} I_x F \left( -\eta \sqrt{\frac{k}{2\zeta}} \right) \quad (24.30)$$

$$Fr(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{iw^2} dw \quad (24.31)$$

$Fr$  est la fonction de Fresnel. Le comportement en  $1/\zeta^{1/2}$  à grande distance est assez naturel. Bien que l'ensemble de la surface illuminée contribue, tout se passe comme si le champ diffracté provenait de l'arête. Si le domaine  $x$  est suffisamment étendu,  $I_x = 2\sqrt{2\pi\zeta/k} Fr(0)$ . Il est intéressant, pour comparer avec la solution approchée à deux dimensions issue du traitement exact des conditions aux limites qui sera exposée ultérieurement de choisir comme variable la direction finale d'observation mesurée par rapport à l'arête :  $\theta \simeq \eta/\zeta$

$$E_0(\mathbf{r}) = iE_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2\zeta}} I_x Fr \left( -\theta \sqrt{k\zeta/2} \right). \quad (24.32)$$

## 24.4 Diffraction par un volume diélectrique : résolution par équations intégrales

Nous utiliserons le formalisme du Chap. 17 où les courants équivalents de surface ont été définis par les Éq. 17.7. Pour simplifier les expressions, les courants électriques et magnétiques seront ici nommés  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ , et  $\mathbf{n}$  est orienté vers l'extérieur :

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) = \mathbf{n} \wedge [\mathbf{B}] \quad (24.33)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) = -\mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}] \quad (24.34)$$

$$\sigma_e = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}] \quad (24.35)$$

$$\sigma_M = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}] \quad (24.36)$$

On a également introduit les potentiels :

$$\mathbf{A} = \int d^2\mathbf{x} \mathbf{J} G \quad \mathbf{F} = \int d^2\mathbf{x} \mathbf{M} G \quad (24.37)$$

$$U = \int d^2\mathbf{x} \sigma_E G \quad \Psi = \int d^2\mathbf{x} \sigma_M G \quad (24.38)$$



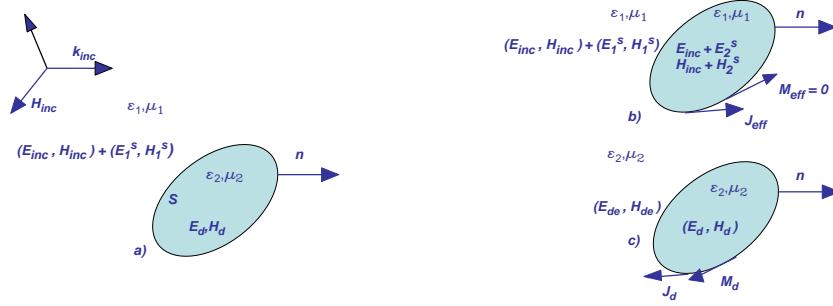


FIG. 24.3 – Courants équivalents à l'interface d'un diélectrique homogène a. problème initial ; b. problème équivalent externe ; c. problème équivalent interne.

les relations précédentes conduisent directement aux expressions des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  (17.39–17.40). Les courants de surface ainsi définis, avec  $\mathbf{n}$  orienté vers l'extérieur de  $S$  annulent le champ électromagnétique à l'intérieur de  $V$  (à l'extérieur pour l'orientation opposée de la normale). Lorsque le volume diélectrique est remplacé par  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ , le champ interne est annulé, le champ externe reste inchangé. Les gradients des potentiels  $U$  et  $\Psi$  sont discontinus au franchissement de la surface  $S$ . Comme en électrostatique, la discontinuité de  $\mathbf{E} = \int d^2\mathbf{x}\sigma_E G$  est égale à la densité surfacique  $\sigma_E$ . Le champ total est la somme du champ incident et du champ diffusé, calculé à partir des courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  à l'aide des Éq. 17.13 du Chap. 17 :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, \mathbf{M}_{\text{eff}}) \quad (24.39)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, \mathbf{M}_{\text{eff}}) \quad (24.40)$$

Selon le *principe d'équivalence*, les courants équivalents ( $\mathbf{J}_{\text{eff}}, \mathbf{M}_{\text{eff}}$ ) engendrent le champ diffusé ( $\mathbf{E}_1^s, \mathbf{H}_1^s$ ) à l'extérieur de  $V$ , avec les constantes  $(\epsilon_1, \mu_1)$  pour l'espace complet. Ils n'engendrent *pas*, comme on le verra, le champ physique  $\mathbf{E}_d$  à l'intérieur. Soit  $\mathbf{n}$  la normale externe. On distinguera plusieurs configurations décrites dans la Fig. 24.3. La Fig. 24.3.a décrit la configuration réelle examinée. Dans la Fig. 24.3.b, le champ auxiliaire ( $\mathbf{E}_2^s, \mathbf{H}_2^s$ ) introduit à l'intérieur du diélectrique diffère du champ physique, le diélectrique est ici remplacé par le milieu (1), avec le champ interne ( $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_2^s$ ). Le champ  $\mathbf{E}_2^s$  peut être choisi arbitrairement,  $\mathbf{H}_2^s$  est alors défini. De même, dans la Fig. 24.3.c, les courants équivalents ( $\mathbf{J}_d, \mathbf{M}_d$ ) engendrent le champ physique ( $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$ ) dans le volume diélectrique, mais le champ externe auxiliaire ( $\mathbf{E}_{de}, \mathbf{H}_{de}$ ), distinct du champ physique peut également être choisi arbitrairement. Il sera défini comme nul :  $(\mathbf{E}_{de}, \mathbf{H}_{de}) = 0$ .

Les relations de discontinuité pour la Fig. 24.3.b impliquent

$$\mathbf{J}_{\text{eff}} = +\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_1^s - \mathbf{H}_2^s)|_{S_{\text{ext}}} \quad (24.41)$$

$$\mathbf{M}_{\text{eff}} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_1^s - \mathbf{E}_2^s)|_{S_{\text{ext}}} \quad (24.42)$$

De même, d'après la Fig. 24.3.c

$$\mathbf{J}_d = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_{de} - \mathbf{H}_d)|_{S_{\text{ext}}} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_d|_{S_{\text{int}}} \quad (24.43)$$

$$\mathbf{M}_d = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_{de} - \mathbf{E}_d)|_{S_{\text{ext}}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d|_{S_{\text{int}}} \quad (24.44)$$

On impose les équations de continuité tangentielle dans la configuration de la Fig. 24.3.b, et il est judicieux, en suivant [Glisson1984] de tirer partie de l'arbitraire dans la définition de  $\mathbf{E}_2^s$ , et de choisir le champ intérieur diffusé  $\mathbf{E}_2$  de manière à assurer la continuité tangentielle du champ électrique.

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^s = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2^s \quad (24.45)$$

Le courant de surface  $\mathbf{M}_{\text{eff}}$  est alors nul (d'après l'Éq. 24.41). Le courant  $\mathbf{J}_{\text{eff}}$  décrit correctement le champ électromagnétique diffusé à l'extérieur de  $S$ , (*pas* à l'intérieur) dans la configuration de la Fig. 24.3.b où le milieu diélectrique interne a les mêmes paramètres matériels que le milieu externe. En imposant la

continuité tangentielle magnétique,  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1^s = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_2^s$ , on aurait pu également décrire le champ externe à l'aide du seul courant  $\mathbf{M}_{\text{eff}}$ . Les champs produit par ces courants sont

$$\mathbf{E} = -\nabla U + i\omega \frac{1}{c} \mathbf{A} - \nabla \wedge \mathbf{F} \quad (24.46)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A} - \frac{1}{c} \nabla U_m + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{F} \quad (24.47)$$

On obtient ainsi, avec  $\alpha = 1^s$  (*externe*), ou  $d$  (*diélectrique*)

$$\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{J}_\alpha, \mathbf{M}_\alpha)|_{S_\alpha} = \int_S d^2\mathbf{x} [\mathbf{M}_\alpha \wedge (\nabla_r G_\alpha) - ikc\mu \mathbf{J}_\alpha G_\alpha + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\alpha) \nabla_r G_\alpha] \quad (24.48)$$

$$\mathbf{H}_\alpha^s(\mathbf{J}, \mathbf{M})|_{S_{\text{ext}}} = \int_S d^2\mathbf{x} \left[ -\mathbf{J}_\alpha \wedge (\nabla_r G_\alpha) + i \frac{k}{c} \epsilon \mathbf{M}_\alpha G_\alpha + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \nabla_r G_\alpha \right] \quad (24.49)$$

Les intégrales sont évaluées sur une surface infiniment proche de  $S$ , externe pour  $\mathbf{E}_1^s$ , interne pour  $\mathbf{E}_d$  (Fig. 24.3.c).

Ces courants « internes » peuvent cependant être exprimés en fonction du courant  $\mathbf{J}_{\text{eff}}$  du modèle externe : en effet, les champs tangents sont continus dans la Fig. 24.3.a

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}))|_{S_{\text{ext}}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{J}_d, \mathbf{M}_d)|_{S_{\text{int}}} \quad (24.50)$$

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}))|_{S_{\text{ext}}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_d(\mathbf{J}_d, \mathbf{M}_d)|_{S_{\text{int}}} \quad (24.51)$$

$$(24.52)$$

On en déduit

$$\mathbf{J}_d = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, \mathbf{M}_{\text{eff}} = 0))|_{S_{\text{ext}}} \quad (24.53)$$

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, \mathbf{M}_{\text{eff}} = 0))|_{S_{\text{ext}}} \quad (24.54)$$

$$(24.55)$$

En reportant les expressions intégrales 24.48 dans 24.53, on obtient deux équations intégrales qui permettent d'exprimer  $\mathbf{J}_d$  et  $\mathbf{M}_d$  en fonction de  $\mathbf{J}_{\text{eff}}$ . On aurait également pu les exprimer de manière similaire en fonction de  $\mathbf{M}_{\text{eff}}$ . Les « opérateurs » intégraux  $\mathbf{E}_{1s}$ , et  $\mathbf{H}_{1s}$ , sont les intégrales de Chu-Stratton (17.23) du Chap. 17 ou celles des Éq. (24.48).

En substituant les relations 24.53 trouvées, et en exprimant  $\mathbf{E}_d$  et  $\mathbf{E}_1^s$  à l'aide des intégrales de Chu-Stratton, dans (24.50), on obtient deux équations intégrales. La première équation est du type EICE (Équation Intégrale du Champ Électrique), la deuxième du type EICM (Équation Intégrale du Champ Magnétique). Le gradient de  $G$  est singulier sur la surface d'intégration, et cette singularité engendrée par le pôle en  $\mathbf{r}_s$  se traite comme dans les Éq. 2.22–2.25 du Chap. 2. En distinguant la contribution singulière de  $\nabla G$  et la partie principale : Les parties singulières de ces intégrales s'obtiennent en regroupant les termes contenant  $\nabla G$ , et en déformant la surface par une demi-sphère comme dans la Fig. 2.3 du Chap. 2. La partie singulière de  $\mathbf{J}_d$  est ainsi

$$\mathbf{J}_d|_{\text{Sing}} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}) \quad (24.56)$$

$$= -\mathbf{n} \wedge \int_S d^2\mathbf{x} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}_{\text{eff}}^s) \wedge \nabla_r G \quad (24.57)$$

Le gradient de  $G$  est

$$\nabla_r G = -\nabla_x G = -\frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \quad (24.58)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale externe. Le double produit vectoriel se développe de la manière usuelle :

$$\mathbf{J}_d|_{\text{Sing}} = (\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}_{\text{eff}})) = -\mathbf{J}_{\text{eff}}/(4\pi R^2) \quad (24.59)$$

La partie singulière de  $\mathbf{J}_d$  est ainsi  $\mathbf{J}_d|_{\text{Sing}} = -\mathbf{J}_{\text{eff}}/2$ . La partie régulière de l'intégration (partie principale) sera notée par le symbole  $\mathbf{PP}_d(\mathbf{J}_\alpha)$ , où  $\mathbf{J}_\alpha$  indique le courant de surface et la fonction de Green impliqués :

$$\mathbf{PP}_\alpha(\mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{PP} \int_S d^2\mathbf{x} \nabla \wedge (\mathbf{J}_\alpha G_\alpha) \quad (24.60)$$

$$G_d = \frac{e^{ik_d|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \quad (24.61)$$

$$k_d = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}/c \quad (24.62)$$

$$k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}/c \quad (24.63)$$

l'Éq. 24.53 devient :

$$\mathbf{J}_d = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_{\text{eff}} - \mathbf{n} \wedge [\mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{J}_{\text{eff}}) + \mathbf{H}_{\text{inc}}] \quad (24.64)$$

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, 0) + \mathbf{E}_{\text{inc}}] \quad (24.65)$$

On obtient alors en explicitant (24.50), et en considérant  $(\mathbf{J}_d, \mathbf{M}_d)$  comme des fonctions de  $\mathbf{J}_{\text{eff}}$  selon (24.53). En explicitant les expressions intégrales des champs à l'aide de (24.46) et en tirant partie de la linéarité :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}_d(\mathbf{J}_d, \mathbf{M}_d) - \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, 0)] \quad (24.66)$$

$$= \mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}_d(\mathbf{J}_d, 0) + \mathbf{E}_d(0, \mathbf{M}_d) - \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}, 0)]$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{M}_d) = \frac{1}{2}\mathbf{M}_d + \mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}) + \mathbf{E}_{\text{inc}})) \quad (24.67)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}) + \frac{1}{2}\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}})) + \mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{\text{inc}})$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{J}_d) = -\frac{1}{2}\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{J}_{\text{eff}}) - \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{J}_{\text{eff}})) - \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}) \quad (24.68)$$

En rassemblant les différentes contributions :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge \left[ \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}) - \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{\text{inc}}) \right] = \\ \mathbf{n} \wedge \left[ -\frac{1}{2}\mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}}) + \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^s(\mathbf{J}_{\text{eff}})) - \mathbf{E}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_{\text{eff}}(\mathbf{J}_{\text{eff}})) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_d(\mathbf{J}_{\text{eff}}) \right] \end{aligned} \quad (24.69)$$

Cette équation EICE pour  $\mathbf{J}_{\text{eff}}$  admet une solution unique lorsque la fréquence  $\omega$  n'est pas une fréquence propre de la cavité radio-fréquence formée par le volume  $V$  dont les parois seraient parfaitement conductrice. Une équation analogue peut être obtenue en cherchant une solution EICM (Équation intégrale du champ magnétique) satisfaisant à  $\mathbf{J}_{\text{eff}} = 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge \left[ \frac{1}{2}\mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{\text{inc}}) - \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{\text{inc}}) \right] = \\ \mathbf{n} \wedge \left[ -\frac{1}{2}\mathbf{H}_1^s(\mathbf{M}_{\text{eff}}) + \mathbf{P}\mathbf{P}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^s(\mathbf{M}_{\text{eff}})) - \mathbf{H}_d(\mathbf{n} \wedge \mathbf{P}\mathbf{P}_{\text{eff}}(\mathbf{M}_{\text{eff}})) - \frac{1}{2}\mathbf{H}_d(\mathbf{M}_{\text{eff}}) \right] \end{aligned} \quad (24.70)$$

La démonstration est laissée en exercice

## 24.5 Diffraction par un demi-plan conducteur (incidence normale) : méthode de Lamb

Ce cas a été traité pour la première fois par Sommerfeld [Sommerfeld1964], et étendu à des configurations plus générales ultérieurement [Lamb1907]. Nous suivrons l'approche de [Lamb1907], qui utilise des coordonnées paraboliques, telle qu'elle a été reprise par [McDonald2008]. Le demi-plan conducteur vérifie  $y = 0, x > 0$ , avec pour coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$  ( $0 < \phi < 2\pi$ ), et les coordonnées paraboliques  $(\xi, \eta, z)$

$$x + iy = re^{i\phi} = \frac{(\xi + i\eta)^2}{2} \quad (24.71)$$

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \quad y = \xi\eta \quad (24.72)$$

$$\xi = \sqrt{2r} \cos \frac{\phi}{2} \quad \eta = \sqrt{2r} \sin \frac{\phi}{2} \quad (24.73)$$

## 24.6 Incidence normale

L'onde incidente se propage dans le sens  $y > 0$ .

### 24.6.1 Champ électrique selon l'axe $z$ (bord du demi-plan)

On définit l'onde diffusée

$$E_z = \psi = E_0 e^{iky} + \psi^s(x, y) \quad (24.74)$$

Suivant Lamb, on admet la forme suivante pour  $\psi^s$

$$\psi^s(x, y) = Au(x, y)e^{iky} + Bv(x, y)e^{-iky} \quad (24.75)$$

$\psi^s$  obéit à l'équation de Helmholtz en coordonnées paraboliques

$$\frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2 + \eta^2) = 0 \quad (24.76)$$

Les fonctions  $u, v$  vérifient alors

$$\frac{\partial^2(u, v)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(u, v)}{\partial \eta^2} \pm 2ik \left( \eta \frac{\partial(u, v)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial(u, v)}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (24.77)$$

On pose  $\zeta_{\pm} = \sqrt{k(\xi \pm \eta)}/2$ , avec le signe  $+$  pour  $u$  et  $-$  pour  $v$ .

$$u(\xi, \eta) = f(\sqrt{k}(\xi + \eta)/2) \quad v(\xi, \eta) = g(\sqrt{k}(\xi - \eta)/2) \quad (24.78)$$

$f$  et  $g$  vérifient

$$(f, g)'' + 4i\zeta(f, g)' = 0 \quad (24.79)$$

La solution est

$$u(\xi, \eta) = a_u + b_u \int_0^{\zeta^+} e^{-2i\zeta^2} d\zeta \quad v(\xi, \eta) = a_v + b_v \int_0^{\zeta^-} e^{-2i\zeta^2} d\zeta \quad (24.80)$$

Les constantes  $a_u, b_u, a_v, b_v$  sont déterminées par les conditions aux limites. Lorsque  $x \rightarrow -\infty$ , et pour  $y \simeq 0$ , c'est à dire pour  $\xi = 0$  et  $\eta \rightarrow \infty$ , l'onde diffusée doit être négligeable

$$\begin{aligned} a_u + b_u \int_0^{+\sqrt{k}\eta/2} e^{-2i\zeta^2} d\zeta &\rightarrow 0 \\ a_v + b_v \int_0^{-\sqrt{k}\eta/2} e^{-2i\zeta^2} d\zeta &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (24.81)$$

En utilisant

$$\int_0^{\infty} e^{-2i\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-i\pi/4}}{e} \quad (24.82)$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_u + \frac{\sqrt{\pi} 2^{-i\pi/4}}{e} b_u &= 0 \\ a_v - \frac{\sqrt{\pi} 2^{-i\pi/4}}{e} b_v &= 0 \end{aligned} \quad (24.83)$$

Le champ tangentiel  $E_z = E_0 e^{iky} + \psi^s$  doit également s'annuler sur le demi-plan conducteur

$$-E_0 = \psi^s(x > 0, 0) = \psi^s(\xi, 0) = a_u + a_v + (b_u + b_v) \int_0^{\sqrt{k}\xi/2} e^{-2i\zeta^2} d\zeta \quad (24.84)$$

$$-E_0 = a_u + a_v \quad b_u = -b_v = E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} \quad (24.85)$$

L'expression de  $\psi^s$  en découle. En définissant

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-iw^2} dw \quad (24.86)$$

$\Phi(u)$  est directement reliée à la fonction de Fresnel (24.31)

$$\Phi(u)^* + Fr(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{iw^2} dw = e^{-i\pi/4} \quad (24.87)$$

$$E_z^s = \psi^s = \frac{E_0}{2} \left[ e^{+i(ky+\pi/4)} \Phi(\sqrt{k}(\xi+\eta)/\sqrt{2}) - e^{-i(ky-\pi/4)} \Phi(\sqrt{k}(\xi-\eta)/\sqrt{2}) - (e^{+iky} + e^{-iky}) \right] \quad (24.88)$$

On peut réexprimer (24.88) à l'aide des fonctions de Fresnel  $F(u)$  :

$$E_z^s = \frac{E_0}{2} \left[ -e^{+i(ky+\pi/4)} Fr(\sqrt{k}(\xi+\eta)/\sqrt{2}) + e^{-i(ky-\pi/4)} Fr(\sqrt{k}(\xi-\eta)/\sqrt{2}) - \sqrt{2}(e^{i(ky+\pi/4)} - e^{-i(ky-\pi/4)}) \right] \quad (24.89)$$

### 24.6.2 Champ électrique selon $Ox$ : perpendiculaire au bord du demi-plan

Le champ magnétique  $B$  est alors orienté selon l'axe  $Oz$ , le bord du demi-plan. On utilisera la fonction scalaire  $\psi^s = B_z$ . Les conditions aux limites imposent  $E_x(x > 0, 0) = 0$ , c'est-à-dire  $\partial B_z(x > 0, 0)/\partial y = 0$ . La contrainte implique  $\partial B_z^s(x > 0, 0)/\partial y = \partial B_z^s(\xi, 0)/\partial y = -ikE_0$ . Cette condition aux limites se traduit par

$$\frac{\partial \psi^s(x > 0, 0)}{\partial y} = 0 = ikE_0 + ik(a_u - a_v) + (b_u - b_v)ik \int_0^{\sqrt{k}\xi/2} e^{-i\zeta^2} d\zeta \quad (24.90)$$

soit

$$a_u = -a_v = -\frac{E_0}{2} \quad b_u = b_v = \frac{E_0}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} \quad (24.91)$$

$$\begin{aligned} \psi^s &= B_z^s & (24.92) \\ &= \frac{E_0}{2} \left[ e^{i(ky+\pi/4)} \Phi(\sqrt{k}(\xi+\eta)/\sqrt{2}) - e^{-i(ky-\pi/4)} \Phi(\sqrt{k}(\xi-\eta)/\sqrt{2}) - \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2} - \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2} \right] \end{aligned}$$

et à l'aide des fonctions de Fresnel :

$$B_z^s = \frac{E_0}{2} \left[ -e^{+i(ky+\pi/4)} Fr(\sqrt{k}(\xi+\eta)/\sqrt{2}) + e^{-i(ky-\pi/4)} Fr(\sqrt{k}(\xi-\eta)/\sqrt{2}) - \sqrt{2}(e^{+i(ky-\pi/4)} + e^{-i(ky-\pi/4)}) \right] \quad (24.93)$$

Le champ électromagnétique diffracté est symétrique par rapport au demi-plan conducteur  $y = 0$

### 24.6.3 Comportement à grande distance au voisinage de l'ombre

On examine la région  $y = \xi\eta \simeq \xi^2 \simeq \eta^2$  grand et  $x = (\xi^2 - \eta^2)/2 \simeq (\xi - \eta)/\sqrt{y}$  petit.

La fonction d'onde complète  $\psi = E_0 e^{iky} + \psi^s$  prend la forme

$$\psi \simeq \pm \frac{e^{-i(ky-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{kx^2/y}}^\infty e^{-i\zeta^2} d\zeta + e^{iky} - \pm e^{-iky} \quad (24.94)$$

$$\simeq \pm \frac{e^{-i(ky-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{kx^2/y}}^\infty e^{-i\zeta^2} d\zeta \quad (24.95)$$

La dernière simplification étant justifiée par une moyenne (implicite) sur plusieurs longueurs d'onde en  $y$ , ce qui laisse la contribution dominante de l'intégrale (à grande distance). Les parties réelles et imaginaires sont les intégrales de Fresnel  $C(u)$  et  $S(u)$

$$C(u) = \int_0^t \cos \frac{\pi s^2}{2} ds \quad S(u) = \int_0^t \sin \frac{\pi s^2}{2} ds \quad (24.96)$$

Le cas d'un angle d'incidence arbitraire été également traité à la Sec. 24.5, et sa vérification est laissée en exercice.

## 24.7 La solution scalaire pour une source linéaire : fonctions de Green dans la géométrie à deux dimensions

En présence d'une source de courant orientée selon l'axe  $Oz$  au point  $Q$  de la Fig. 24.1, Il s'agit de déterminer la fonction  $E_z = u(x, y)$ , qui vérifie l'Éq. 24.3 et la conditions aux limites  $u = 0$  pour  $x > 0$ .

$$(\Delta + k^2)G_0(\mathbf{x}) = \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (24.97)$$

se distinguent par leur comportement à l'origine et à l'infini. Pour une source linéaire parallèle à l'arête du demi-plan : les fonction de Green associée qui ont un comportement oscillatoire à l'infini  $e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$ , et une singularité logarithmique au voisinage de la source sont les fonctions de Hankel

$$G_0 = \frac{i}{4}H_0^{1,2}(kr) \quad (24.98)$$

La fonction du premier type correspondant à une onde sortante, c'est elle qui sera utilisée pour décrire une source linéaire.

La fonction de Green de Dirichlet  $G_D$  recherchée devra vérifier trois conditions :

1. l'Éq. 24.5,
2.  $G_D = 0$  pour  $y = 0$ ,
3.  $G_D - H_0(kR)$  doit être régulière sauf pour le demi-plan limite  $y = 0, x > 0$ , ( $R = |\mathbf{PQ}|$ ).

Cette fonction peut donc s'exprimer comme une intégrale de contour le long du demi-plan  $y = 0, x > 0$ , la convergence étant assurée par la partie imaginaire positive de  $k$ .

## 24.8 Le champ et les courants pour une source linéaire

Ce sont les courants (de surface) engendrés dans le conducteur qui constituent la source des champs réfléchi et diffracté. Dans la configuration considérée d'une source de courant linéaire située au point  $Q$  de la Fig. 24.1, on supposera le conducteur parfait, la densité de charge est alors nulle, et son potentiel vérifie  $U = 0$ . La solution pour une source linéaire, conformément à (24.97) est de la forme est de la forme  $E_z = E_0H_0(kR)$ . En intégrant le long d'un contour circulaire autour de la source :

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_z}{\partial t} d^2 \mathbf{x} \quad (24.99)$$

$$= \frac{1}{i\omega} \int \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (24.100)$$

$$= -\frac{1}{i\omega} \int \Delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} \quad (24.101)$$

$$I = \frac{-1}{i\mu_0 \omega} \int_S (\Delta + k^2) E_0 H_0(kR) d^2 \mathbf{x} \quad (24.102)$$

$$= \frac{1}{i\mu_0 \omega} E_0 \quad (24.103)$$

$$E_z = \frac{\mu_0 \omega}{4} I H_0(kR) \quad (24.104)$$

## 24.9 Équation intégrale de la diffraction pour un demi-plan et une source linéaire

L'équation résulte directement des considérations précédentes : le champ rayonné est la somme du champ incident et du champ rayonné par les deux faces du demi-plan.

$$E = E_{\text{inc}} + E_s \quad (24.105)$$

soit d'après le théorème de Green, en posant  $u = E_z$  ou  $u = H_z$ ,  $u_y = \partial u / \partial y$ , et le rayon  $\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

$$u(x, y) = u_{\text{inc}} + \frac{i}{4} \int_0^\infty H_0^1(k\rho) [u_{y'}(x', y' = 0^-) - u_{y'}(x', y' = 0^+)] - \frac{i}{4} \int_0^\infty \frac{\partial H_0^1(k\rho)}{\partial y'} [u(x', y' = 0^+) - u(x', y' = 0^-)] \quad (24.106)$$

L'onde incidente peut également être une onde plane  $\exp(ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0))$ , comme dans le paragraphe qui suit. Pour une onde de polarisation électrique  $E_z$ , la condition limite sur le demi-plan est  $u(x, y = 0^+) = u(x, y = 0^-) = 0$  : c'est la fonction  $G_D$ . Pour une onde  $H_z$ ,  $\partial u(x, 0^+) / \partial y = \partial u(x, 0^-) / \partial y = 0$  sur le demi-plan  $y = 0, x > 0$ . La solution est alors  $G_N$ . Le problème posé est réduit à une équation intégrale. Sa résolution requiert quelques efforts. La méthode de Wiener-Hopf [Heins1980, Oberhettinger1958] permet de la résoudre explicitement dans un cadre général. C'est une approche plus simple due à [Copson1946, Clemmow1951] qui est présentée ci-dessous.

### 24.9.1 Les courants induits sur le demi-plan

On applique le théorème de Green au couple de fonctions  $G_0$  et  $G_D - G_0$ , dans le domaine limité par le contour ( $C$ ) du demi-plan de la Fig. 24.4,  $G_D$  désignant la solution de Dirichlet qui vérifie  $G_D = 0$  sur ( $C$ ). On notera  $R = |\mathbf{PQ}|$ ,  $\mathbf{OP} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{OQ} = \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ .

$$\int d^2\mathbf{x} G_0(\Delta + k^2)(G_D - G_0) - (G_D - G_0)(\Delta + k^2)G_0 = \int_C G_0 \frac{\partial G_D - G_0}{\partial n} - (G_D - G_0) \frac{\partial G_0}{\partial n} d^2\mathbf{x} \quad (24.107)$$

$$G_D = G_0 - \int_C G_0 \frac{\partial G_D}{\partial n} \quad (24.108)$$

on pose  $R' = |\mathbf{P} - \boldsymbol{\xi}|$

$$G_D(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{i}{4} H_0^1(kR) - \frac{i}{4} \int_C d\xi H_0^1(kR') \frac{\partial G_D}{\partial n} \quad (24.109)$$

Le contour ( $C$ ) fait intervenir les deux faces  $y^+$  et  $y^-$  du demi-plan dans la Fig. 24.4. En multipliant par le courant source  $I(\xi)$  en  $\xi$  sur le demi-plan :

$$E_z(\mathbf{P}) = E_z^i(\mathbf{R}) + E_z^s \quad (24.110)$$

$$E_z^s = \frac{\mu_0 \omega}{4} \int_C H_0^1(kR') I(\xi) d\xi \quad (24.111)$$

$$I(\xi) = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left[ \left. \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|_- - \left. \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|_+ \right] \quad (24.112)$$

La dernière étape résulte de l'identification avec (24.105). Ces expressions suggèrent une représentation du champ électrique comme la somme d'un champ incident (onde plane ou cylindrique) et d'un champ créé par les courants de surface du conducteur. Dans une représentation de ce type, l'onde réfléchiée doit être engendrée par les courants de surface, et ne peut être incluse dans le champ incident. Il faudra s'assurer que la solution décrit cette composante.

## 24.10 Diffraction par un demi-plan : méthode de la transformée de Fourier

Le champ diffracté dans cette géométrie a été calculé par [Sommerfeld1964] à l'aide des fonctions de variables complexes. La méthode de Sommerfeld a été ultérieurement simplifiée par [Clemmow1951], et elle est exposée en détail dans l'ouvrage de Born et Wolf ([Born-Wolf1999]). Nous n'en présenterons qu'un schéma illustratif, en dépit de son importance historique : elle est plus complexe que la méthode de [Lamb1907] présentée dans la section 24.5. On considère une onde plane incidente sur le demi-plan

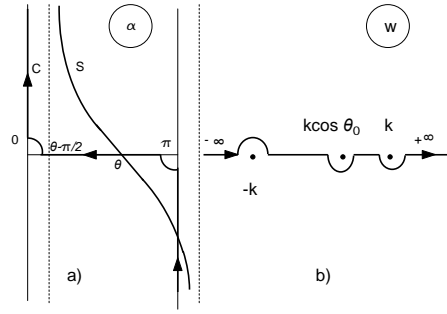


FIG. 24.4 – Le contour d'intégration dans le plan angulaire  $\alpha$  (a), et le contour d'intégration sur l'axe réel du plan  $w$  (b).

opaque  $y = 0, x > 0$ . L'onde est supposée se propager dans le plan  $(x, y)$ ,  $E_z^i = u_0 = e^{ik(y \sin \theta_0 + x \cos \theta_0)}$ , avec  $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$ .

Le champ total est

$$E_z(x, y) = u_0 + \phi(x, y) \quad (24.113)$$

$\phi(x, y)$  est une solution de l'équation  $(k^2 + \Delta)\phi(x) = 0$ , et comme  $E_z$  s'annule sur l'écran pour  $x > 0$ ,  $\phi(x, 0) = -u_0$  pour  $y = 0, x > 0$ .

Soit  $f(y)$  la discontinuité de la dérivée du champ électromagnétique entre les deux faces du demi-plan

$$f(x) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_- - \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_+ \quad (24.114)$$

la fonction  $f$  vérifie pour  $x > 0$ , avec  $\rho = |\xi|$

$$E_z = u_0 + \phi = u_0 - \frac{i}{2} \int H_0^1(k\xi) f(\xi) d\xi = 0 \quad (24.115)$$

soit la contrainte

$$\frac{i}{2} \int H_0^1(k|x - \xi|) f(\xi) d\xi = 2ie^{ikx \cos \theta_0} \quad x > 0 \quad (24.116)$$

La fonction  $H_0^1(k|x - \xi|)$  de l'Éq. (24.116) décroît exponentiellement à l'infini si  $k$  a une partie imaginaire positive :  $k = p + iq$   $q > 0$  La transformée de Fourier

$$h(w, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(k\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-iw x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - w^2}} e^{+i|y|\sqrt{k^2 - w^2}} \quad (24.117)$$

est alors régulière dans la bande  $-q < \Im(w) < q$ .

Soit  $F(w)$  la transformée de Fourier de  $f(\xi)$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-iw\xi} d\xi \quad (24.118)$$

$F(w)$  est régulière dans le demi-plan  $\Im(w) < 0$  compte tenu du signe de  $\xi$  dans l'intégrale (24.120).

Pour évaluer la transformée de Fourier de l'Éq. 24.116, il faut définir le membre de droite pour  $(x < 0, y = 0)$ , c'est précisément le champ  $E_z(x, 0)$ , dont on sait seulement qu'il est continu. Soit  $e(w)$  sa transformée tronquée, obtenue en l'annulant pour  $x > 0$  :

$$e(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 E_z(\xi, 0) e^{-iw\xi} d\xi \quad (24.119)$$



Le comportement à l'infini de la fonction de Hankel dans (24.116) est  $\exp(\Im(k)|x|)/\sqrt{|x|}$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Il en résulte que  $e(w)$  est (sous des hypothèses complémentaires plausibles) régulière dans le demi-plan  $\Im(w) > -q$ . Le terme d'onde plane (membre de droite) de l'Éq. (24.116) engendre un pôle par transformée de Fourier, permise dans le domaine  $q > \Im(w) > q \cos \theta_0$ . On obtient ainsi dans le domaine  $-q < \Im(w) < \min(q \cos \theta_0, 0)$  la relation :

$$h(w, y = 0)F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w - k \cos \theta_0} + e(w) \quad (24.120)$$

La Fig. 24.4 montre la limite de la bande permise lorsque  $\Im(k) \rightarrow 0$ .

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 - w^2}} F(w) = \frac{\sqrt{k+w}}{k \cos \theta_0 + w} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e(w) \sqrt{k+w} \quad (24.121)$$

En isolant le résidu du pôle  $w = -k \cos \theta_0$

$$\frac{1}{\sqrt{k-w}} F(w) - \frac{(k+k \cos \theta_0)^{1/2}}{w - k \cos \theta_0} = e(w) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{k+w} + \frac{(k+w)^{1/2} - (k+k \cos \theta_0)^{1/2}}{w - k \cos \theta_0} \quad (24.122)$$

Comme le font remarquer [Copson1946] et [Oberhettinger1958], le terme de gauche de (24.122) est régulier pour  $\Im(w) < \min(q \cos \theta_0, 0)$ , tandis que le terme de droite est régulier pour  $\Im(w) > -q$ . Les deux domaines se recouvrent, et les membres de gauche et de droite sont les prolongements d'une même fonction analytique entière. Ce polynôme ne peut croître plus vite que  $w^{1/2}$ , c'est donc une constante. Comme le membre de gauche de (24.122) tend vers zéro quand  $|w| \rightarrow \infty$ , cette constante est nulle. Il en résulte que

$$F(w) = \frac{(k+w)^{1/2}(k+k \cos \theta_0)^{1/2}}{w - k \cos \theta_0} \quad (24.123)$$

et

$$e(w) = -\frac{1}{(k+w)^{1/2}} \frac{(k+w)^{1/2} - (k+k \cos \theta_0)^{1/2}}{w - k \cos \theta_0} \quad (24.124)$$

En éliminant le pôle

$$e(w) = -\frac{1}{(k+w)^{1/2}} \frac{1}{(k+w)^{1/2} + (k+k \cos \theta_0)^{1/2}} \quad (24.125)$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) e^{-iw\xi} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{(k+k \cos \theta_0)(k-w)}}{w - k \cos \theta_0} \quad (24.126)$$

$f(x)$  est obtenu par inversion :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} F(w) e^{ixw} dw \quad (24.127)$$

La constante  $a$  vérifie  $-q < a < \min(q \cos \theta_0, 0)$ , de manière que le chemin d'intégration soit dans le domaine de validité de (24.122) En déformant le chemin vers l'axe réel, et en séparant la partie principale du pôle  $w = k \cos \theta_0$

$$f(x) = ik \sin \theta_0 e^{ikx \cos \theta_0} - \frac{1}{2\pi} PP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k-w)^{1/2}(k+k \cos \theta_0)}{w - k \cos \theta_0} e^{ixw} dw \quad (24.128)$$

Lorsque  $q \rightarrow 0$ , le chemin d'intégration, représenté sur la Fig. 24.4 passe au dessous du point de branchement  $w = k$ , au dessous du pôle  $w = k \cos \theta_0$ , et au dessus du point de branchement  $w = -k$ . Lorsque le contour est fermé dans le demi-plan inférieur,  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$  (comme requis pour ce demi plan). L'expression du champ diffusé est obtenu par convolution :

$$\phi(x, y) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} F(w) h(w, y) e^{ixw} dw \quad (24.129)$$

On trouve après quelques transformations pour  $y < 0$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= e^{ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)} + e^{ik(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)} \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{e^{i(xw-y\sqrt{k^2-w^2})} \sqrt{k+k \cos \theta_0}}{(w-k \cos \theta_0) \sqrt{k+w}} dw \end{aligned} \quad (24.130)$$

et en fermant le contour dans le demi-plan supérieur pour  $y > 0$

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{e^{i(xw+y\sqrt{k^2-w^2})} \sqrt{k+k \cos \theta_0}}{(w-k \cos \theta_0) \sqrt{k+w}} dw \quad (24.131)$$

Le résultat final (le calcul est indiqué dans l'Appendice) peut être mis sous une forme proche du résultat de Fresnel.

$$E_z = \frac{1}{2} \left[ e^{ik\rho \cos(\theta_0+\theta)} F(\gamma_+ \sqrt{-ik\rho}) + e^{ik\rho \cos(\theta-\theta_0)} F(\gamma_- \sqrt{-ik\rho}) \right] \quad (24.132)$$

## 24.11 Formalisme tridimensionnel : diffraction par une fente

La surface  $S$  est alors divisée en deux zones  $S_1$  et  $S_2$  par un contour fermé  $C$ . Les champs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$  ne sont plus continus sur  $S$ , et les relations établies précédemment cessent d'être applicables. De même qu'une distribution surfacique de courants rendait précédemment compte des discontinuités du champ, une densité linéaire doit être introduite. L'intégration limitée à une portion de surface, comme dans l'approximation de Kirchoff (24.3), induit nécessairement des erreurs. Une discontinuité des composantes tangentielles de  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  au passage de la zone  $S_1$  à  $S_2$  implique une discontinuité des courants de surface introduits dans la Sec. 24.4.

Soit  $\mathbf{n}_1$  la normale au contour  $C$  sur la surface, (également perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ ), et dirigée vers la zone  $S_1$  (Fig. ??). Par passage à la limite, les Éq. 17.7–17.9 du Chap. 17 impliquent une discontinuité des courants sur le contour de la Fig. ??

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= i\omega\sigma_E \\ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= i\omega\sigma_M \end{aligned} \quad (24.133)$$

En utilisant les relations 24.32 exprimant les courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}) &= i\omega\sigma_E \\ (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}) &= i\omega\sigma_M. \end{aligned} \quad (24.134)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}$  est orienté selon la tangente au contour  $C$ . Le champ du côté non illuminé d'un plan conducteur  $S$  avec une ouverture  $S_1$  délimitée par le contour  $C$  limitant la zone opaque  $S_2$  sera

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i \frac{1}{\omega\epsilon} \int_C \nabla G \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{x} \\ &+ \int_S d^2\mathbf{x} [(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1) \wedge \nabla G + ikc(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1)G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \nabla G] \end{aligned} \quad (24.135)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= i \frac{1}{\omega\mu} \int_C \nabla G \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{x} \\ &+ \int_S d^2\mathbf{x} [(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1) \wedge \nabla G - ikc(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1)G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) \nabla G] \end{aligned} \quad (24.136)$$

Ces expressions satisfont les équations de Maxwell (Exercice).

## 24.12 Annexe : Incidence arbitraire

Soit  $\alpha$  l'angle de l'onde plane incidente avec l'axe  $Oy$ ,  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ . Elle est de la forme  $e^{ik(x \sin \alpha + y \cos \alpha)}$  et l'onde réfléchie par le plan conducteur sera  $e^{-ik(x \sin \alpha - y \cos \alpha)}$ . On notera  $\lambda_+ =$

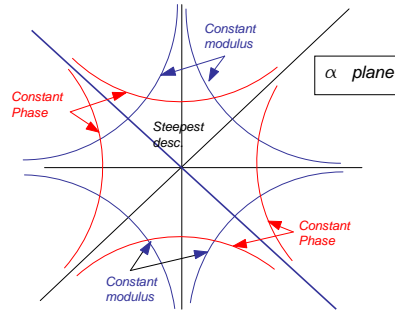


FIG. 24.5 – La courbe de phase stationnaire dans le plan  $\alpha$  au voisinage du col  $\theta$ .

$ik(x \sin \alpha + y \cos \alpha)$  et  $\lambda_- = ik(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$ , et on définit les coordonnées paraboliques

$$\xi_1 = \sqrt{2r} \cos \frac{\phi + \alpha}{2} \quad \eta_1 = \sqrt{2r} \sin \frac{\phi + \alpha}{2} \quad (24.137)$$

$$\xi_2 = \sqrt{2r} \cos \frac{\phi - \alpha}{2} \quad \eta_2 = \sqrt{2r} \sin \frac{\phi - \alpha}{2} \quad (24.138)$$

Suivant [Lamb1907], on postule les solutions

$$\begin{aligned} E_z^s &= E_0 \frac{e^{i(\lambda_+ + \pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{k}(\xi_1 + \eta_1)/2} e^{-i\zeta^2} d\zeta \\ &\quad - E_0 \frac{e^{i(-\lambda_- - \pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{k}(\xi_2 - \eta_2)/2} e^{-i\zeta^2} d\zeta \\ &\quad - E_0 \frac{e^{i\lambda_+} + e^{i\lambda_-}}{2} \end{aligned} \quad (24.139)$$

Pour un champ électrique incident parallèle à  $Oz$ , et pour un champ électrique perpendiculaire :

$$\begin{aligned} B_z^s &= E_0 \frac{e^{i(\lambda_+ + \pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{k}(\xi_1 + \eta_1)/2} e^{-i\zeta^2} d\zeta \\ &\quad + E_0 \frac{e^{i(-\lambda_- - \pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{k}(\xi_2 - \eta_2)/2} e^{-i\zeta^2} d\zeta \\ &\quad - E_0 \frac{e^{i\lambda_+} - e^{i\lambda_-}}{2} \end{aligned} \quad (24.140)$$

On vérifiera en exercice que cette solution est compatible avec les conditions aux limites.

## 24.13 Annexe : Diffraction à deux dimensions, méthode de la transformée de Fourier

Le chemin d'intégration est l'axe réel, indenté de manière appropriée comme dans la section 24.10 : vers le bas pour  $w = -k \cos \theta_0$ , et vers le haut pour  $w = k$ . On va relier l'intégrale exprimant  $\phi$  dans l'Éq. 24.131 dans le cas de la zone d'ombre ( $y < 0$ ), aux formules 24.30 et 24.31 trouvées dans la diffraction de Fresnel.

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty + ia}^{+\infty + ia} \frac{e^{i(xw + |y|\sqrt{k^2 - w^2})} \sqrt{k + k \cos \theta_0}}{(w - k \cos \theta_0) \sqrt{k + w}} dw \quad (24.141)$$

Les coordonnées polaires sont  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , et on définit la variable angulaire complexe  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$  :

$$w = k \cos \alpha \quad (0 < \alpha_R < \pi) \quad (24.142)$$

Pour  $y < 0$ ,  $xw + |y|\sqrt{k^2 - w^2} = k\rho \cos(\alpha + \theta)$ , l'Éq. 24.141 devient

$$\phi = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos(\alpha+\theta)} \frac{\sqrt{1 + \cos \theta_0}}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} \frac{1}{\cos \alpha - \cos \theta_0} d \cos \alpha \quad (24.143)$$

On posera  $\beta = \alpha + \theta$

$$\phi = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{\cos(\theta_0/2) \sin(\alpha/2)}{\cos \alpha - \cos \theta_0} d\alpha \quad (24.144)$$

On introduit la variable  $\tau$  définie par

$$\cos \beta = 1 + i\tau^2 \quad (24.145)$$

La variable  $\tau$  sera choisie réelle de manière que la phase de  $\cos \beta$  soit stationnaire. La trajectoire de de l'angle  $\alpha$  au voisinage de  $\alpha = \theta$  est représentée sur la Fig. ??, et dans son ensemble sur la Fig. 24.4. Dans le passage de l'intégration sur la droite  $\Im(w) = a$  des Éq. (24.129–24.130) à l'intégration sur la ligne de phase stationnaire ( $\tau$  réel), la contribution des pôles correspondants aux rayons incidents et réfléchis doit être prise en compte dans l'amplitude totale, mais n'est pas comptabilisée dans la diffraction.

$$d\alpha = d\beta = \frac{2i\tau d\tau}{\sin \beta} \quad (24.146)$$

$$\tau = \sqrt{2i} \sin \beta/2 \quad (24.147)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2i}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{\cos(\theta_0/2) \sin((\beta - \theta)/2)}{\cos(\beta/2)(\cos \alpha - \cos \theta_0)} d\tau \quad (24.148)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{\sin((\beta - \theta + \theta_0)/2) + \sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)}{\cos(\beta/2) \sin((\beta - \theta + \theta_0)/2) \sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)} d\tau \quad (24.149)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{1}{\cos \beta/2} \left[ \frac{1}{\sin((\beta - \theta + \theta_0)/2)} + \frac{1}{\sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)} \right] d\tau \quad (24.150)$$

L'intégrale qui fournit l'amplitude  $\phi$  diffractée est de la forme  $\phi = I_1 + I_2$ , où l'intégrand de  $I_1$  est  $e^{ik\rho \cos \beta}/(\cos(\beta/2) \sin((\beta - \theta - \theta_0)/2))$ .

L'intégrale  $I_1$  peut être transformée et ramenée à une intégrale de Fresnel. La première étape tire partie de la symétrie des fonctions intégrées :

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{1}{\cos(\beta/2)} \left[ \frac{1}{\sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)} - \frac{1}{\sin((\beta + \theta + \theta_0)/2)} \right] d\tau \quad (24.151)$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{\sin((\beta + \theta + \theta_0)/2) - \sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)}{\cos(\beta/2) \sin((\beta + \theta + \theta_0)/2) \sin((\beta - \theta - \theta_0)/2)} d\tau \quad (24.152)$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\rho \cos \beta} \frac{\sin((\theta_0 + \theta)/2)}{\cos(\theta_0 + \theta) - \cos \beta} d\tau \quad (24.153)$$

et en réintroduisant la variable  $\tau$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{2} \sin((\theta + \theta_0)/2)}{2\pi} e^{i\pi/4} e^{ik\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\rho\tau^2}}{\cos(\theta + \theta_0) - 1 - i\tau^2} d\tau \quad (24.154)$$

$$I_1 = i \frac{\sqrt{2} \sin((\theta_0 + \theta)/2)}{2\pi} e^{i\pi/4} e^{ik\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\rho\tau^2}}{\tau^2 - i\gamma^2} d\tau \quad (24.155)$$

$$\gamma_+^2 = 2 \sin^2((\theta + \theta_0)/2). \quad (24.156)$$

L'intégrale  $I_2$  se calcule de même, en remarquant que selon l'Éq. 24.150,  $I_2 = I_1(-\theta_0)$ .

Ces intégrales peuvent être transformées [?, [Gradstein-Ryzhik](#)] et rapprochées des intégrales de Fresnel rencontrées dans l'approximation de Kirchoff :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ C(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt \\ S(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt\end{aligned}\tag{24.157}$$

et les extensions complexes

$$\begin{aligned}C(z) + iS(z) &= \sqrt{\frac{i}{2}} \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{it^2} dt \\ C(z) - iS(z) &= \sqrt{\frac{1}{2i}} \Phi(z\sqrt{i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-it^2} dt\end{aligned}\tag{24.158}$$

$$F(x) = 1 - \Phi(x) = \int_x^\infty e^{-\tau^2} d\tau = \frac{2x}{\pi} e^{-x^2} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2 + x^2} dt.\tag{24.159}$$

De manière plus générale ([[Gradstein-Ryzhik](#)]) :

$$F(xy) = \frac{2x}{\pi} e^{-x^2 y^2} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2 y^2}}{t^2 + x^2} dt\tag{24.160}$$

avec  $y^2 = k\rho$  et  $x^2 = -i\gamma^2$ , la fonction  $F$  définit une extension complexe de la fonction de Fresnel (section [24.3.3](#)) :

$$Fr(a) = \int_a^{+\infty} e^{i\tau^2} d\tau\tag{24.161}$$

$$\gamma \int_0^\infty \frac{e^{-t^2 k\rho}}{t^2 - i\gamma^2} dt = \pm 2\sqrt{\pi} e^{-ik\rho\gamma^2} Fr\left(\pm\gamma\sqrt{k\rho}\right)\tag{24.162}$$

le signe positif (ligne supérieure) est choisi si  $\gamma > 0$ , le signe négatif si  $\gamma < 0$ .

$$I_1 = \pm i \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} e^{ik\rho} e^{-ik\rho\gamma^2} Fr\left(\pm\gamma\sqrt{k\rho}\right)\tag{24.163}$$

Le deuxième terme  $I_2$  de ([24.150](#)) se calcule de manière identique, à la substitution près de  $-\theta_0$  à  $+\theta_0$ . En utilisant les Éq. [24.150](#) et [24.164](#) :

$$E_z = \frac{i}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} \left[ e^{+ik\rho \cos(\theta-\theta_0)} Fr\left(\gamma_- \sqrt{k\rho}\right) \pm e^{ik\rho \cos(\theta+\theta_0)} Fr\left(\pm\gamma_+ \sqrt{k\rho}\right) \right]\tag{24.164}$$

Le signe  $\pm$  est choisi selon le signe de  $\sin(\theta + \theta_0)/2$ .

## 24.14 Symétries du champ électromagnétique dans la diffraction par les ouvertures d'un plan conducteur

Ce résultat correspond à la diffraction dans la zone illuminée.

### Exercices

**Ex. 1:** Donner la relation entre  $Fr(x)$  (Éq. [24.30](#)) et  $F(x)$  (Éq. ??). En déduire la limite de l'Éq. (??) aux petits angles de diffraction et en incidence normale, et la comparer à l'Éq. ([24.31](#)).

**Ex. 2:** Établir l'Éq. EICM ([24.70](#)).

**Ex. 3:** Montrer que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  définis par les Éq. ([24.135](#)) vérifient les équations de Maxwell.

# Bibliographie

- [Abraham1909] M. Abraham, *Rend. Circ.Palermo* 28,1(1909)
- [Arnold1989] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag New-York (1989)
- [Barron2009] L. D. Barron, *Molecular light scattering and Optical Activity*, Cambridge University Press (2009)
- [Born-Wolf1999] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press (1999)
- [Cerenkov1934] P. A. Cerenkov, Visible emission of clean liquids by action of radiation *Doklady Akademii Nauk SSSR* 2, 451 (1934)
- [Clemmow1951] P. C. Clemmow, *Proc. Roy. Soc. A*205, 1081 (1951)
- [Copson1946] E. T. Copson, *Proc. Roy. Soc. A*186, 100 (1946)
- [Crenshaw2014] M. Crenshaw, Electromagnetic momentum and the energy-momentum tensor in a linear medium with magnetic and electric properties, *J. Math. Phys.* 55, 042901 (2014)
- [Dirac1948] P. A. M. Dirac, The Theory of Magnetic poles *Phys. Rev.* 74,817(1948)
- [Frank1945] I.F. Frank and V. L. Ginzburg, *J. Phys (Moscow)* 9, 353 (1945)
- [Fredholm1900] E. I. Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, *Kon. Vetenskaps-Akademiens Fbrh.* 57, 39-46 (1900)
- [Fredholm1903] E. I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Mathematica* 27, 365-390 (1903)
- [Ginzburg1990] V. L. Ginzburg and V. N. Tsytovitch, *Transition Radiation and Transition scattering*, Adam Higien, Bristol (1990)
- [Glisson1984] A. W. Glisson, An Integral Equation for Electromagnetic Scattering from homogeneous dielectrics, *IEEE Transactions on Antennas and propagation* Vol. AP-32, 173-175 (1984)
- [Gradstein-Ryzhik] I. S. Gradstein et I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, 7th edition A. Jeffrey and D. Zwillinger editors (2007)
- [Heins1980] A. E. Heins, The Sommerfeld Half-Plane Problem Revisited : Solution of a pair of coupled Wiener-Hopf equations, *Conference on Diffraction and Scattering Darmstad* (1980)
- [Hirose2000] A. Hirose et J. Wishart, On Transition Radiation, *Revue Canadienne de Physique* 78, 997-1003 (2000)
- [Hobson1931] E. W. Hobson, *The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge University Press (1931)
- [Jackson1998] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley and Sons Inc. (1998)
- [Lamb1907] H. Lamb, On Sommerfeld's Diffraction Problem ; and on reflection by a Parabolic Mirror, *Proc. London Math Soc.*, S2-4,190-203(1907)
- [Landau1982] L. D. Landau and E. Lifshitz, *Théorie du champ*, Éditions Mir, Moscou (1982)
- [Landau1990] L. Landau, E. Lifshitz, L. Pitaevski, *Électrodynamique des milieux continus*, Éditions Mir, Moscou (1990)

- [McDonald2008] K. T. McDonald, The Sommerfeld Diffraction problem Princeton lecture notes <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/sommerfeld.pdf>
- [Minkowski1908] H. Minkowski, Les équations fondamentales de l'électromagnétisme dans les corps en mouvement (en allemand) Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 5" (1908)
- [Oberhettinger1958] F. Oberhettinger, On the diffraction and reflections of waves by edges and corners, Journal of Research by the Nat. Bureau of Standards 61,343-365 (1958)
- [Pendry2006] J. B. Pendry, D.Schurig, D.R.Smith, Science 312, 1780 (2006)
- [Ridgely1998] C. T. Ridgely, Am. J. Phys. 66 (2) (1998)
- [Ramos2011] T. Ramos, G. F. Rubihar, Y. N. Obukhov, Relativistic Analysis of the dielectric Einstein box : Abraham, Minkowski, and the total energy-momentum tensor, Physics Letters A 375, 1703-1709 (2011)
- [Schelkunoff1936] S. A. Schelkunoff, Some Equivalence Theorems of Electromagnetics and their Application to Radiation Problems, Bell System Technical Journal 15 (1936)
- [Sommerfeld1964] A. Sommerfeld, Electrodynamics, Academic Press New York (1964)
- [Stratton-Chu1939] J. A. Stratton and L. J. Chu Phys. Rev. 56, 99 (1939)
- [Takakura2000] Y. Takakura, O.Haerberle, Integral Method to study transition radiation from surfaces with arbitrary profiles, Phys. Rev. E 61, 441 (2000)
- [Tamm-Frank1937] I. Frank and I. Tamm Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. URSS 14,109-114 (1937)
- [Yeung1999] M.S. Yeung, Integral Equation for Electromagnetic Scattering by three dimensional homogeneous dielectric objects, IEEE transactions on Antennas and Propagation Vol 47, 1615-1622 (1999)