

Chapitre 8

LES SYMETRIES C, P, T

1- LA CONJUGAISON DE CHARGE

1-1 Conjugaison de charge et champs complexes

On observe dans la nature l'existence de paires particule-antiparticule, les antiparticules ayant les mêmes propriétés spatiales (à l'exception des neutrinos), et des nombres quantiques internes (charge, saveur...) opposés. La présence de telles paires d'états correspond à une symétrie discrète, très semblable à la parité, qui s'exerce dans l'espace des nombres quantiques internes : c'est la conjugaison de charge. L'opération \mathcal{C} va associer à l'état à une particule $|\beta\rangle$, un état à une antiparticule $|\bar{\beta}\rangle$ ayant même impulsion, et même spin :

$$\mathcal{C}|\beta\rangle = \eta_C|\bar{\beta}\rangle$$

où η_C est un facteur de phase. On exigera les deux propriétés complémentaires :

$$\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^\dagger \text{ et } \mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$$

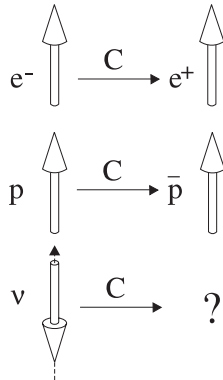


Figure 8.1 : L'effet de la conjugaison de charge.

A l'origine, Dirac a tiré partie d'une analogie avec les milieux denses pour pressentir l'existence des antiparticules : il fallait postuler une "mer" d'états

d'énergie négative remplie d'électrons pour éviter l'instabilité des atomes. Une lacune dans cette mer apparaît comme un positron, de même que dans les semi-conducteurs, les électrons manquants (trous) se manifestent comme des porteurs positifs. Cette interprétation n'est pas naturelle pour les particules, puisqu'elle brise la symétrie des interactions électromagnétiques vis-à-vis des électrons et des positrons, mais l'image du vide qu'elle donne, comme un milieu peuplé de paires (virtuelles) électron-positron peut être retenue. Une particule ayant les nombres quantiques internes du vide sera décrite par un champ réel. On a vu au chapitre 5 qu'une particule chargée, ou plus généralement différente de son antiparticule, est décrite par une paire de champs complexes ϕ et ϕ^\dagger . La conjugaison de charge échange ϕ et ϕ^\dagger . Si l'on définit $\phi_1 = (\phi + \phi^\dagger)/\sqrt{2}$ et $\phi_2 = i(\phi - \phi^\dagger)/\sqrt{2}$, on voit que \mathcal{C} est une opération linéaire qui laisse ϕ_1 invariant et change ϕ_2 de signe. Il y a une analogie avec la conjugaison complexe, opération linéaire dans le plan $Re(z)$, $Im(z)$, qui change de signe $Im(z)$.

Il peut arriver que des particules neutres, comme le π^0 ou le photon soient invariantes par conjugaison de charge et identiques à leur antiparticule, mais le K^0 et le neutron ont des charges *de saveur, faibles, baryonique (cas du neutron), etc...* qui les différencient de la particule conjuguée.

1-2 Conjugaison de charge du photon

La conjugaison de charge a été définie comme une symétrie des interactions électromagnétiques. Si l'on veut assurer l'invariance du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique par l'opération de conjugaison, il faut changer les signes des champs électriques et magnétiques, donc celui du quadrivecteur potentiel, comme sur la figure 8.2.

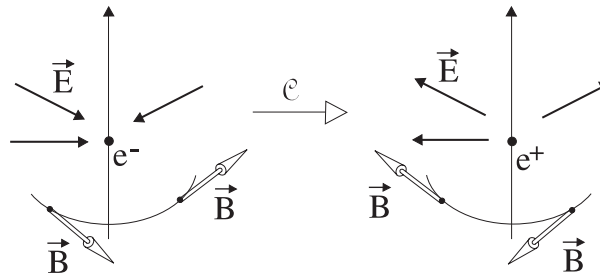


Figure 8.2 : L'action de la conjugaison de charge en électromagnétisme

Le champ du photon étant précisément la quantification de ce potentiel quadrivectoriel, on postulera par analogie que le photon est un état propre de \mathcal{C} avec la valeur -1 :

$$\mathcal{C}|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$$

et pour le champ 4-vectorel :

$$\mathcal{C} A_\mu \mathcal{C}^{-1} = -A_\mu \quad (8.1.1)$$

Cette loi de transformation assurera l'invariance du lagrangien d'interaction $j^\mu A_\mu$ entre un courant (classique ou quantique) et le quadripotentiel, si l'on impose $\mathcal{C} j_\mu \mathcal{C}^{-1} = -j_\mu$, ce qui est naturel pour un changement de signe des charges électriques classiques.

1-3 Action sur les états

La conjugaison de charge échange particules et antiparticules. C'est une symétrie des interactions fortes et électromagnétiques qui change de signe la charge et l'ensemble des nombres quantiques internes des états sans modifier les coordonnées spatiales.

$$\mathcal{C} | e^- \rangle = \eta_c(e) | e^+ \rangle \quad \mathcal{C} | u \rangle = \eta_c(u) | \bar{u} \rangle$$

Les antiparticules ont une phase de conjugaison de charge différente.

$$\mathcal{C} | e^+ \rangle = \bar{\eta}_c(e) | e^- \rangle \quad \mathcal{C} | \bar{u} \rangle = \bar{\eta}_c(u) | u \rangle$$

Il n'y a pas a priori de relation entre η_c et $\bar{\eta}_c$, car il n'y a aucune raison d'imposer $\mathcal{C}^2 = \mathbf{1}$. Nous allons voir que l'hypothèse d'une loi de transformation simple des champs sous l'action de \mathcal{C} va relier les phases η_C et $\bar{\eta}_C$.

1-4 Action sur les champs de fermions

a- Champ de Dirac

Comme on l'a vu précédemment, un champ décrit simultanément particules et antiparticules. En omettant les facteurs cinématiques, le champ (libre) d'un fermion est de la forme :

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{k, \sigma} \{ b_\sigma(\mathbf{k}) u(k, \sigma) e^{-ik \cdot x} + d_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) v(k, \sigma) e^{ik \cdot x} \}$$

$b_\sigma(\mathbf{k})$ annihile l'état de spin σ du fermion

$d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})$ crée l'antifermion de spin σ .

Pour retrouver la loi de transformation des états à une particule du paragraphe précédent, on souhaite imposer pour le champ conjugué de charge une expression où le rôle des opérateurs de création et d'annihilation pour les particules et antiparticules est interchangé :

$$\mathcal{C} \Psi(t, \mathbf{x}) \mathcal{C}^{-1} = \Psi_c(t, \mathbf{x}) = \eta_C^* \sum_{k, \sigma} \{ d_\sigma(\mathbf{k}) u(k, \sigma) e^{-ik \cdot x} + b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) v(k, \sigma) e^{ik \cdot x} \} \quad (8.1.2)$$

L'action de \mathcal{C} sur les opérateurs de création et d'annihilation en découle.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}b_\sigma(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} &= \eta_C^* d_\sigma(\mathbf{k}) \\ \mathcal{C}d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} &= \eta_C^* b_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{C}b_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} &= \eta_C d_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) \\ \mathcal{C}d_\sigma(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} &= \eta_C b_\sigma(\mathbf{k})\end{aligned}$$

En considérant l'action des opérations précédentes sur le vide, Les phases de conjugaison de charge des particules et antiparticules sont alors reliées à η_C

$$\bar{\eta}_c = \eta_c^* = \eta_C^*$$

En redéfinissant les phases absolues de b et d , ce qui n'affecte pas les relations d'anticommutation, on pourra toujours, lorsque la particule et l'antiparticule différent, se ramener au cas $\eta_C = 1$, comme le montre l'exercice 1. En utilisant la matrice $C = i\gamma^2\gamma^0$ introduite au chapitre 3 dans la définition du spineur conjugué de charge (équation 3.9.1) : $v = C\gamma^0 u^* = C\bar{u}^T$, on voit que la transformation \mathcal{C} , qui échange particules et antiparticules, vérifie :

$$\mathcal{C}\Psi(t, \mathbf{x})\mathcal{C}^{-1} = \Psi_c(t, \mathbf{x}) = \eta_c^* C \bar{\Psi}(t, \mathbf{x})^T \quad (8.1.3)$$

b- Le cas des fermions de Majorana

Un fermion de Majorana est son propre conjugué de charge. Il n'y a pas d'exemple prouvé de ce type de particules, mais il se pourrait que les neutrinos usuels soient de Majorana. En effet, si leur masse est suffisamment petite, les résultats expérimentaux actuels ne permettent pas de trancher entre des particules de Dirac et de Majorana. Le photino, associé au photon dans les modèles supersymétriques, serait aussi un fermion de Majorana puisque le photon est son propre conjugué. Le formalisme utilisé au chapitre 3 pour décrire les spineurs s'applique intégralement. La seule différence intervient dans les propriétés du champ. La liberté d'ajustement de la phase relative entre particules et antiparticules n'existe plus puisqu'il s'agit des mêmes états, et il subsiste une phase arbitraire globale, la phase de création. On verra que cette phase est observable dans des interactions violant CP si les différents neutrinos de Majorana se mélangent. Le champ de Majorana

$$\Psi^M = \sum_{\mathbf{k}\sigma} b_\sigma(\mathbf{k})u(k, \sigma)e^{-ik \cdot x} + \eta_M b_\sigma^\dagger v(k, \sigma)e^{ik \cdot x}$$

vérifie identiquement

$$\Psi^M = \eta_M C (\bar{\Psi}^M)^T$$

La relation $\mathcal{C}\Psi\mathcal{C}^{-1} = \eta_C^*(\bar{\Psi})^T$ implique alors $\eta^* = \eta_M$, et il en résulte les relations de conjugaison : $\mathcal{C}b_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} = d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})$ et $\mathcal{C}d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} = b_\sigma^\dagger(\mathbf{k})$. Il en résulte

$$\Psi^M = \mathcal{C}\Psi^M\mathcal{C}^{-1} = \eta_M C(\bar{\Psi}^M)^T = \eta_C^* C(\bar{\Psi})^T$$

La phase de conjugaison de charge ne peut plus être éliminée.

1-5 Le système fermion-antifermion

Le système fermion-antifermion considéré sera supposé dans un état propre du moment angulaire. On adoptera la base des états :

$$\begin{aligned} |f\bar{f}L, S, M, \Sigma_3 \rangle &= \sum_{\sigma_3} \int d\Omega Y_L^M(\Omega) \langle 1/2, \sigma_3; 1/2, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle \dots \\ &|f(\Omega)\bar{f}(-\Omega)\sigma_3, \sigma'_3 \rangle \end{aligned}$$

avec $\sigma'_3 = M - \sigma_3$. L'angle $-\Omega$ désigne ici la direction $(\pi - \theta, \pi + \phi)$. La transformation par conjugaison donne :

$$\begin{aligned} |\bar{f}fL, S, M, \Sigma_3 \rangle &= \int d\Omega Y_L^M(\Omega) \langle 1/2, \sigma_3; 1/2, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle \dots \\ &|\bar{f}(\Omega)f(-\Omega)\sigma_3, \sigma'_3 \rangle \end{aligned}$$

La deuxième intégrale se ramène à la première par la succession de changements suivants :

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow -\Omega \\ Y_L^M(-\Omega) &= (-)^L Y_L^M(\Omega) \\ \langle 1/2, \sigma_3; 1/2, \sigma'_3 | S, \Sigma_3 \rangle &= (-)^{S+1} \langle 1/2, \sigma'_3; 1/2, \sigma_3 | S, \Sigma_3 \rangle \end{aligned}$$

et à cause de l'anticommution des champs fermioniques

$$|\bar{f}f\sigma_3\sigma'_3 \rangle = - |f\bar{f}\sigma_3\sigma'_3 \rangle$$

Il en résulte que

$$\mathcal{C} |f\bar{f}L, S, M, \Sigma_3 \rangle = (-)^{L+S} |f\bar{f}L, S, M, \Sigma_3 \rangle \quad (8.1.4)$$

Un état fermion-antifermion de spin et moment orbital totaux déterminés est état propre de \mathcal{C} pour la valeur $(-)^{L+S}$.

1-6 La conservation de C dans les amplitudes

Lorsque \mathcal{C} est conservée, comme dans les interactions fortes ou électromagnétiques, cette opération commute avec la matrice de diffusion T : l'état final provenant du transformé par \mathcal{C} de $|i \rangle$ est le transformé par \mathcal{C} de l'état final issu de $|i \rangle$.

$$|Ti\rangle \leftarrow |i\rangle$$

$$|T\bar{i}\rangle \leftarrow |\bar{i}\rangle$$

La conservation de \mathcal{C} impose alors

$$\mathcal{C}T|i\rangle = T\mathcal{C}|i\rangle$$

$$\mathcal{C}T\mathcal{C}^{-1} = T$$

Les amplitudes de transitions correspondantes seront égales à une phase près.

$$\langle f|T|i\rangle = \eta_i \eta_f^* \langle f_C|T|i_C\rangle \quad (8.1.5)$$

Si f et i ne sont pas des états propres de \mathcal{C} , l'équation (8.1.5) relie en général les amplitudes de deux transitions différentes. C'est ainsi que $\bar{p}n \rightarrow X$ et $p\bar{n} \rightarrow \bar{X}$ ont les mêmes sections efficaces. Un cas intéressant concerne les transitions entre états propres de \mathcal{C} : il y aura une règle de sélection. Un état multiphotonique est ainsi état propre de \mathcal{C} avec la valeur $(-)^n$. Dans les transitions électromagnétiques ou hadroniques (qui conservent \mathcal{C}), un état initial propre de \mathcal{C} se désintègrera en conservant cette valeur propre initiale. Nous citerons comme exemples :

$$(e^+e^-)_{L=S=0} \rightarrow \gamma\gamma \text{ (permis)}$$

$$(e^+e^-)_{L=0,S=1} \rightarrow \gamma\gamma\gamma \text{ (2 } \gamma \text{ interdit)}$$

La loi de désintégration temporelle de ce système appelé positronium se présentera sous la forme d'une somme de deux exponentielles.

Le Ψ et le Υ , qui sont des états liés $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ avec $J^{PC} = 1^{--}$, peuvent s'interpréter comme des états liés avec les nombres quantiques $L = 0$, $S = 1$. Ils ont une masse plus élevée que les états pseudoscalaires $L = S = 0$, mais sont directement produits dans l'annihilation e^+e^- par le photon intermédiaire.

Pour une paire de bosons conjugués comme $\pi^+\pi^-$ ou $\rho^+\rho^-$, on montre de même que la valeur propre de \mathcal{C} est $(-)^{L+S}$ (exercice 4).

1-7 C et les symétries internes: la représentation conjuguée

Lorsque "la" particule examinée a des degrés de liberté internes, comme le quark léger sous ses différents aspects (u, d, s) ou le nucléon (p, n), les opérateurs

de symétrie agissent sur le sous-espace formé par les différents états possibles. L'action de l'opération conjugaison de charge sera une extension de la relation précédente : si l'opération de symétrie interne est représentée par la matrice V

$$|\beta_i \rangle' = V_{ji} |\beta_j \rangle'$$

la même opération de symétrie est représentée par V^* dans la base des antiparticules. On dit que c'est la représentation conjuguée :

$$|\bar{\beta}_i \rangle' = V_{ji}^* |\bar{\beta}_j \rangle'$$

La relation entre les propriétés de transformations des particules et des antiparticules est imposée par l'hypothèse d'une loi de transformation simple du champ :

$$U(u) \Psi_i^\dagger U^{-1}(u) = V_{ji} \Psi_j^\dagger$$

Rappelons que conformément au chapitre 7, $U = e^{-i\alpha_i T_i}$, et que dans la représentation constituée par le multiplet considéré, la matrice V_{ij} est obtenue par exponentiation des générateurs infinitésimaux de cette représentation, par exemple λ_i (les λ_i ne sont égaux aux matrices de Gell-Mann que dans la représentation [3]) :

$$V = \exp\left(-i \sum_k \lambda_k \alpha^k / 2\right)$$

où les α^k sont des coefficients numériques réels. Le champ Ψ_i , qui crée les antiparticules, vérifiera (par conjugaison hermitienne)

$$U(u) \Psi_i U^{-1}(u) = V_{ji}^* \Psi_j$$

$$V^* = \exp\left(i \sum_k \lambda_k^* \alpha^k / 2\right)$$

L'unitarité de V impose en effet $\lambda_k = \lambda_k^\dagger$. La conjugaison de charge entraîne le renversement de signe des nombres quantiques internes. En particulier, les particules et antiparticules, qui sont des états propres de T_3 et Y , images de λ_3 et λ_8 auront des valeurs propres opposées pour ces opérateurs. Pour les valeurs 3 et 8 de l'indice k

$$U_k |h_l \rangle = e^{-i\lambda_k \phi / 2} |h_l \rangle = e^{-ia_k \phi / 2} |h_l \rangle$$

$$U_k |\bar{h}_l \rangle = e^{i\lambda_k^* \phi / 2} |\bar{h}_l \rangle = e^{ia_k \phi / 2} |\bar{h}_l \rangle$$

Si l'état $|h_l \rangle$ est propre de I_k image de λ_k pour la valeur a_l , $|\bar{h}_l \rangle$ l'est pour la valeur $-a_l$.

Les opérateurs \mathcal{C} et U ne commutent pas. Dans une représentation du groupe $SU(3)$ où U_k est représenté par la matrice V_k , la combinaison de l'action de \mathcal{C}

et d'une opération de symétrie interne U est représentée par la figure 8.3. Nous allons examiner la relation entre multiplet et antimultiplet dans trois cas, selon qu'ils diffèrent ou non.

$$\begin{array}{ccc}
 |\alpha\rangle & \xrightarrow{\mathcal{C}} & |\bar{\alpha}\rangle = \mathcal{C}|\alpha\rangle \\
 \downarrow \mathcal{U} & & \downarrow \mathcal{U} \\
 V_{\beta\alpha}|\beta\rangle & \xrightarrow{\quad} & V_{\beta\alpha}^*|\bar{\beta}\rangle
 \end{array}$$

Figure 8.3 : La conjugaison \mathcal{C} et une symétrie interne.

a- Le multiplet et son antimultiplet forment deux bases non-équivalentes

L'antiparticule appartient à une représentation *différente, non équivalente* du groupe. C'est le cas des quarks et des antiquarks dans $SU(3)$. On rappelle que deux représentations sont équivalentes si les bases sont reliées par une transformation unitaire, ou s'il existe S fixe telle que

$$M_1(u) = SM_2(u)S^{-1}$$

Les quarks appartiennent à la représentation $[3]$ et, d'après ce qui précède, les antiquarks, qui se transforment par la matrice conjuguée V^* , à la représentation $[\bar{3}]$ du groupe $SU(3)$. Comme on l'a vu, les composantes q sur les états de quarks vont se transformer par la matrice V (3×3) : $q'_i = V_{ij}q_j$ et pour les antiquarks $\bar{q}'_i = V_{ij}^*\bar{q}_j$.

$$\begin{aligned}
 q &= (\mathbf{1} - i\epsilon_i\lambda^i/2)q' \\
 \bar{q} &= (\mathbf{1} + i\epsilon_i\lambda^{iT}/2)\bar{q}'
 \end{aligned}$$

Si $|q\rangle$ est état propre de T_3 pour la valeur ω_3 (réelle), $|\bar{q}\rangle$ sera propre pour la valeur $-\omega_3$ et les isospins sont bien opposés (ou nuls). On peut choisir comme états de base les états propres de saveur, et une redéfinition éventuelle des phases permet de définir l'opérateur \mathcal{C} de manière à vérifier

$$\mathcal{C}|q\rangle = |\bar{q}\rangle$$

b- Multiplet et antimultiplet différent, les représentations sont équivalentes

L'exemple le plus courant est celui du nucléon, ou de la restriction à l'espace (u, d) du champ de quarks. On définira ainsi de nouveau :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}N(x)\mathcal{C}^{-1} &= \bar{N}(x) \\
 \mathcal{C}q(x)\mathcal{C}^{-1} &= \bar{q}(x)
 \end{aligned}$$

sans facteur de phase supplémentaire. Le nucléon et le quark ont ici deux composantes, et par exemple :

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}$$

Par convention, p et n désigneront les amplitudes sur les états $|p\rangle$ et $|n\rangle$. Les représentations V et V^* de $SU(2)$ sont équivalentes. Dans la représentation fondamentale :

$$u = \epsilon u^* \epsilon^{-1}$$

Dans une représentation de dimension $(2I + 1)$, il existe une matrice telle que $V = CV^*C^{-1}$. C'est la matrice de Fierz $C = \mathcal{D}^I(-\epsilon)$ qui est donnée par la matrice de rotation de π autour du deuxième axe :

$$C_{MN} = \delta_{M-N}(-)^{I+M} \tag{8.1.6}$$

où δ_{M-N} est le tenseur de Kronecker. Soit un hadron décrit par ses composantes (h) dans une représentation. Les composantes (\bar{h}) de $\mathcal{C} |h\rangle$ dans la base conjuguée se transforment par V^* . Si, dans une transformation de symétrie $(h)' = V(h)$, la transformée de l'image par \mathcal{C} sera $(\bar{h})' = V^*(\bar{h})$. Il en résulte que $(\bar{h})' = C^{-1}VC(\bar{h})$ ou :

$$(C\bar{h})' = V(C\bar{h})$$

L'utilisation des composantes $C\bar{h}$, au lieu de \bar{h} , pour les antihadrons, permet de se ramener aux techniques usuelles de $SU(2)$ pour les produits de représentations et les expressions tensorielles. Dans le cas d'un doublet

$$C = -\epsilon = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{le doublet } -\epsilon \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$$

se transforme par V comme un doublet d'isospin usuel de $SU(2)$. Un exemple est fourni par la description des mésons η et π^0 à l'aide de quarks. Pour deux spineurs ξ et η , transformés par $SU(2)$, le scalaire de spin nul est

$$\zeta^T \epsilon \xi = \xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2$$

C'est une expression antisymétrique. Au contraire, le triplet formé par les 3 matrices σ_i (dans l'espace défini par le produit tensoriel des composantes) se transforme comme un vecteur de l'espace ordinaire pour la même matrice de $SU(2)$. Il a une troisième composante symétrique

$$\zeta^T \epsilon \sigma_3 \xi = \xi_1 \zeta_2 + \xi_2 \zeta_1$$

C'est exactement l'inverse qu'il va falloir faire pour construire les états η ($I = 0$) et π^0 ($I = 1$) à partir des quarks et des antiquarks, compte tenu de la remarque précédente. Les scalaires et tenseurs s'obtiennent *comme précédemment*, mais en substituant $\epsilon\bar{q}_2$ à ζ .

L'état η d'isospin $I = 0$ normalisé sera obtenu par produit scalaire des composantes d'isospin

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_2 q_1 | \eta, I = 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_2^T \epsilon \epsilon q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_2^T q_1 \\ \langle \bar{q}_2 q_1 | \pi^0, I = 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_2^T \epsilon \epsilon \sigma_3 q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_2^T \sigma_3 q_1 \end{aligned}$$

c- Multiplets auto-conjugués

Ceci ne peut se produire que pour une représentation équivalente à sa conjuguée, comme pour $SU(2)$ ou pour la représentation octet de $SU(3)$, et c'est le cas le plus intéressant. La relation de conjugaison de charge implique alors :

$$\mathcal{C} | \beta_i \rangle = | \bar{\beta}_i \rangle = C'_{ji} | \beta_j \rangle \quad (8.1.7)$$

La matrice C' doit être choisie de manière que $\mathcal{C} | \beta_i \rangle$ se transforme par V^* . Ce n'est possible que si

$$C' V^* C^{-1'} = V \quad (8.1.8)$$

C' est (à une phase ω près) la matrice de Fierz déjà rencontrée, mais celle-ci est maintenant *nécessaire* pour assurer la cohérence entre symétrie de saveur et conjugaison de charge. Le triplet des mésons π , qui se transforment les uns dans les autres par \mathcal{C} illustre ce cas.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} | \pi^0 \rangle &= -\omega_\pi | \pi^0 \rangle \\ \mathcal{C} | \pi^+ \rangle &= +\omega_\pi | \pi^- \rangle \\ \mathcal{C} | \eta \rangle &= +\omega_\eta | \eta \rangle \end{aligned}$$

Selon la loi de transformation des représentations V et V^* :

$$\begin{aligned} (h)' &= V(h) \\ (\bar{h})' &= V^*(\bar{h}) = C^{-1} V C(\bar{h}) \\ C(\bar{h})' &= V C(\bar{h}) \end{aligned}$$

$C(\bar{h})$ se transforme comme (h) . Les composantes de l'état conjugué de charge sont données dans la base initiale par

$$(\bar{h}) = \omega C(h) \quad (8.1.9)$$

A l'aide de la matrice $C_{NM} = (-)^{I+N} \delta_{N-M}$. La phase ω dépend des propriétés physiques de la particule. Pour le π^0 ou le η l'existence des désintégrations électromagnétiques

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \text{ et } \eta \rightarrow \gamma\gamma$$

impliquent une conjugaison de charge positive puisque le γ est un état propre de C pour la valeur -1. Le π^0 ayant un isospin 1, la phase $\omega_\pi = -1$. Au contraire, $\omega_\eta = +1$. On aura ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \quad | \pi^+ \rangle &= - | \pi^- \rangle \\ \mathcal{C} \quad | \pi^0 \rangle &= + | \pi^0 \rangle \\ \mathcal{C} \quad | \pi^- \rangle &= - | \pi^+ \rangle \\ \mathcal{C} \quad | \eta \rangle &= + | \eta \rangle \end{aligned} \quad 8.1.10)$$

On rappelle que les trois composantes du champ du pion vérifient

$$\begin{aligned} \pi_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \\ \pi_- &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2) \\ \pi_0 &= \pi_3 \end{aligned}$$

et que la transformation par conjugaison équivaut à une rotation de π pour ce multiplet

$$\mathcal{C}\vec{\pi}\mathcal{C}^{-1} = \omega_\pi e^{-iT_2\pi} \vec{\pi} = -e^{-iT_2\pi} \vec{\pi}$$

1-8 La G -Parité

La G -Parité permet d'étendre les règles de sélection résultant de l'invariance par C au cas de bosons ou de paires de fermions non conjugués de charge mais appartenant à deux multiplets conjugués. Il s'agira par exemple de $u\bar{d}$ ou $n\bar{p}$.

a- Les multiplets auto-conjugués

Soit l'état $|I, M\rangle$ d'un multiplet d'isospin I . Nous avons vu à l'équation (8.1.8) que :

$$\mathcal{C}|IM\rangle = \omega(-)^{I-M}|I-M\rangle = \omega e^{-i\pi T_2} |IM\rangle$$

Le cas particulier $M=0$ permet de relier le facteur de phase ω et la phase de conjugaison de charge η_C :

$$\eta_C = \omega(-)^I$$

La relation de conjugaison de charge dans un multiplet peut alors s'écrire :

$$\mathcal{C}e^{i\pi T_2} |I, M\rangle = G |I, M\rangle = (-)^I \eta_C |I, M\rangle$$

Cette relation définit l'opérateur G -Parité : $G = \mathcal{C}e^{i\pi T_2}$ telle que les états propres de l'isospin T et de T_3 soient invariants à une phase près. Pour le pion, le produit $\eta_C(-)^I = -1$: Il en résulte que $G(\pi) = -1$. Au contraire, pour le ρ ,

qui a également un isospin $I = 1$, $\eta_c(\rho)^0 = -1$ et $G(\rho) = +1$. Plus généralement, la G -Parité d'un système de n pions est $(-)^n$, et il ne peut y avoir de transition hadronique entre des systèmes de pions en nombre pairs et impairs.

b- Les systèmes ($f\bar{f}$)

On supposera le système dans un état propre de L, S, I . Compte tenu de la relation $G = \mathcal{C}e^{i\pi T_2}$, on devra factoriser l'effet de la permutation des composantes d'isospin, et les phases indiquées lors de la démonstration de l'équation(8.1.4). Dans la conjugaison $f \rightarrow \bar{f}$, la permutation des composantes d'isospin se traduit par un facteur $(-)^I$. Il y aura donc symétrie pour $I = 0$ et antisymétrie pour $I = 1$, à l'opposé de ce qui se passe pour le spin.

$$G | f\bar{f}L, S, I \rangle = (-)^{L+S+I} | f\bar{f} \rangle \quad (8.1.11)$$

Une application simple du résultat se manifeste dans les désintégrations des mésons vecteurs : le ω et le J/Ψ , qui sont des pseudo-vecteurs isoscalaires se désintègrent fortement en un nombre impair de pions, comme le représente la figure 8.4.

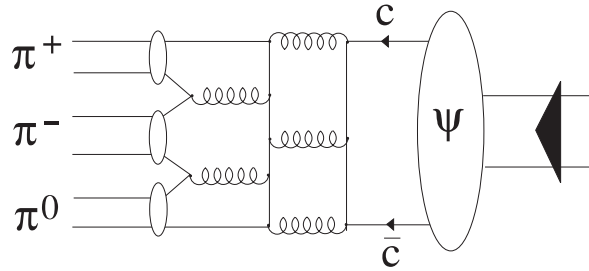


Figure 8.4: La désintégration du ψ en un nombre impair de pions.

1-9 Le cas des gluons

a- La conjugaison de l'octet

Les 8 gluons $| G_a^\mu \rangle$ appartiennent à une représentation autoconjuguée [8], de même que les 8 champs. Comme pour l'octet de saveur des mésons au chapitre 7, ceux-ci peuvent être représentés sous une forme matricielle à l'aide des composantes de Gell-Mann G_a :

$$\mathcal{G}(x) = \sum_a G_a(x) \lambda^a$$

Le lagrangien d'interaction de QCD, $G_a \bar{q}^T \lambda_a q$ étant un scalaire de couleur, \mathcal{G} se transforme comme le dual de $(\bar{q}^T \lambda_a q)$ dans l'espace des trois couleurs.

$$\mathcal{G}' = V^\dagger \mathcal{G} V$$

Cette loi est conforme (formellement) à la transformation de l'octet de saveur (7.3.2). L'octet conjugué de charge est obtenu à l'aide d'une matrice C' comme dans (8.1.7), mais celle-ci doit vérifier la relation (8.1.8) pour $SU(3)$. On peut la trouver par analogie avec la construction de l'octet des mésons en (7.2.1). La forme de cette relation montre que si M se transforme par V , avec $M' = V M V^\dagger$, M^T se transforme par V^* . Il en résulte que l'octet des gluons conjugués s'obtient par une transposition à une phase près.

$$\mathcal{C} \mathcal{G} \mathcal{C}^{-1} = \eta_G \mathcal{G}^T$$

Cette correspondance est bien une opération linéaire qui définit implicitement la matrice C' . On montrera dans le paragraphe 4 que la conservation de \mathcal{C} dans les interactions fortes n'est possible que si le champ de gluons vérifie

$$\mathcal{C} \mathcal{G} \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{G}^T$$

Cette transformation par conjugaison de charge, au contraire du cas de $SU(2)$, n'est PAS une opération de $SU(3)_C$, et il n'y a pas d'équivalent de la G parité dans $SU(3)_C$. Nous allons montrer qu'il y a cependant des règles de sélection qui, par hasard, ressemblent à celles de la G -parité.

b- Le conjugué de charge de 2 et 3 gluons formant un singlet

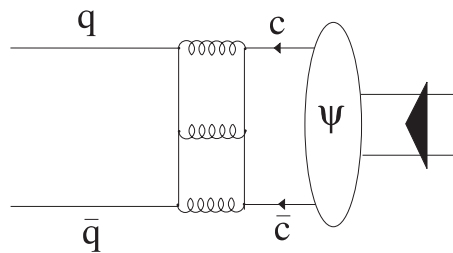


Figure 8.5: La désintégration du Ψ en quarks légers.

Cette configuration décrit la désintégration forte du quarkonium, ou du méson ϕ . Elle présente un intérêt pratique manifeste, dans la mesure où la description de l'état intermédiaire par un nombre fini de gluons est légitime. On a vu au chapitre 1 que seuls les états hadroniques singlets de couleur sont observables macroscopiquement. Cette contrainte limite les valeurs possibles de

η_C pour un système de 2 ou 3 gluons. Le seul singlet formé de 2 gluons est $Tr\{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\}$ (c'est manifestement un scalaire de $SU(3)_C$ et il n'y a qu'un singlet dans le produit $[8] \times [8]$). Le transformé de charge est

$$Tr\{\mathcal{G}_1^T\mathcal{G}_2^T\} = Tr\{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\}$$

Deux gluons dans un état singlet de couleur ont forcément $C = +1$: un hadron ayant $C = -1$ ne peut pas se désintégrer en deux gluons. On montre dans l'exercice 5 que la désintégration en 3 gluons est permise, et celle-ci est représentée dans la figure 8.5.

1-10 Quelques illustrations expérimentales

a- La conservation de C dans les transitions électromagnétiques et hadroniques

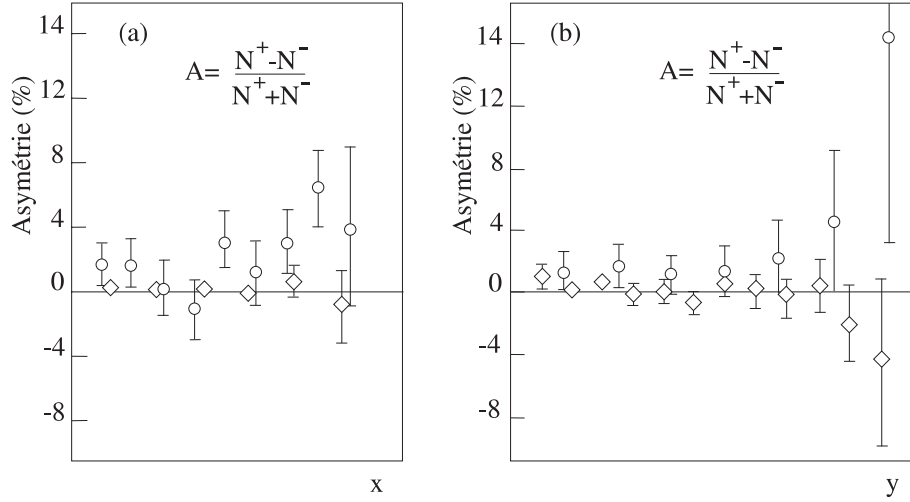


Figure 8.6 : La désintégration $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. a) en fonction de $x = \sqrt{3}(T^+ - T^-)/Q$ et b) en fonction de $y = 3(T^0)/Q - 1$. Les données proviennent de deux expériences différentes.

Il existe d'innombrables tests de la symétrie C dans ces interactions, et certains sont évoqués dans les exercices. Nous citerons cependant, à cause de la controverse expérimentale qu'elle a suscité, la désintégration du η en $\pi^+\pi^-\pi^0$. La symétrie C implique une distribution d'énergie identique du π^+ et du π^- , bien vérifiée sur la figure 8.6 dans cette transition électromagnétique. T^+, T^-, T^0 sont les 3 énergies cinétiques, et $Q = T^+ + T^- + T^0$. De même dans le canal

$$e^+e^- \rightarrow \Psi \rightarrow e^+e^-, c\bar{c}$$

On peut factoriser les amplitudes de production et désintégration du Ψ . Ce méson étant un état propre de C avec $C|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$, les deux fermions finals ont une distribution qui est symétrique avant-arrière.

Au contraire, les amplitudes de désintégration faibles : $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ et $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{p}\pi^+$ ne sont pas égales dans une direction donnée, mais si on ne spécifie pas les polarisations, cette différence est expérimentalement masquée par la quasi-conservation de CP .

b- La G-Parité

Cette invariance, conséquence des autres (C et Isospin), fournit des règles de sélection très simples dans les désintégrations pioniques. Un hadron ne peut se désintégrer simultanément dans des canaux à nombre pair et impair de pions par interaction forte :

- Le ω ($J^{PC} = 1^{--}$) se désintègre en 3 pions.
- Le ρ ($J^{PC} = 1^{--}$) se désintègre en 2 pions.
- Le A_2 ($J^{PC} = 2^{++}$) se désintègre en $\rho\pi$.
- Le méson η a une G -Parité positive (état $q\bar{q}$ avec $I = 0, J^P = 0^-$). Dans sa désintégration, l'état final à deux pions est cependant interdit par la parité dans les transitions fortes ou électromagnétiques. Le η se désintègre électromagnétiquement en trois pions, sans conserver la G -Parité, et son temps de vie est "long" ($5,5 \cdot 10^{-19}$ s).

L'intérêt de la notion de G -Parité n'est pas limité aux interactions fortes : la création de quarks par les bosons chargés W dans les interactions faibles se fait par l'intermédiaire de couplages vectoriels $\bar{q}\gamma^\mu q$ ou axiaux. On montre dans les exercices 19 et 20 que les systèmes hadroniques produits par des courants vecteurs chargés ont $G = +1$, et ceux qui sont produits par des courants axiaux $G = -1$. Un système avec un nombre pair de pions est forcément produit par un courant vecteur. La désintégration du τ en $\eta\pi\nu$ est alors impossible : cet état aurait $G = -1$ mais sa parité négative est celle d'un courant vecteur. Au contraire, l'état final $\eta\pi^-\pi^0\nu$ est autorisé.

c- Le quarkonium

Les états finals du quarkonium, par exemple $\Psi(c\bar{c})$ ou $\Upsilon(b\bar{b})$ ne contiennent pas de saveurs lourdes c ou b respectivement puisque ces mésons sont des états liés. La transition vers les quarks légers passe par un état gluonique, et les arguments du paragraphe 1-9 ont montré que celui-ci contient nécessairement un nombre impair de gluons. Les désintégrations de Ψ sont donc particulièrement propices à la mise en évidence de la production directe des gluons. On a pu dire en caricaturant un peu les résultats expérimentaux, qu'un événement comme celui de la figure 8.7, observé auprès du collisionneur DESY de Hambourg, révélait pour la première fois l'existence de 8 gluons. La conséquence la plus directe, est

la faiblesse de la largeur totale : $\Gamma_{\Psi} = 86$ keV, $\Gamma_{\Upsilon} = 52$ keV. La G -Parité du Ψ est négative (pourquoi ?), et les taux de transitions vers un nombre impair de pions sont 10 fois plus importants que la transition électromagnétique vers l'état final homologue sans π^0 .

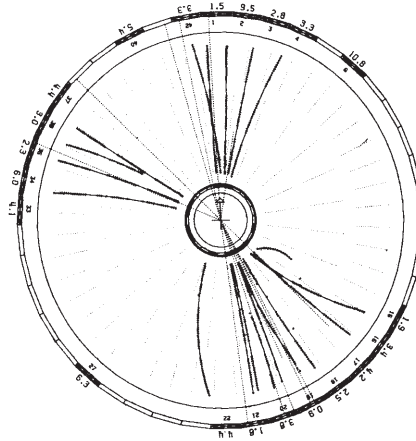


Figure 8.7 : Un événement à trois jets dans la désintégration du Ψ .

2- LA PARITE

2-1 La Parité classique

La transformation par parité consiste à changer de signe toutes les coordonnées (point de vue actif) ou le sens des axes de coordonnées (passif). Cette transformation ne diffère d'une symétrie plan que par une rotation de π et lui est donc équivalente. Son effet sur une interaction est représenté dans la figure 8.8. On distinguera dans l'opération parité les *vrais* vecteurs, comme \mathbf{x} , \mathbf{p} , qui changent de signe comme nous l'avons indiqué et les *pseudo*-vecteurs, qui restent invariants. Un pseudo-vecteur peut être construit par produit vectoriel de deux vecteurs : moment cinétique, champ magnétique, moment magnétique, vecteur rotation instantanée.

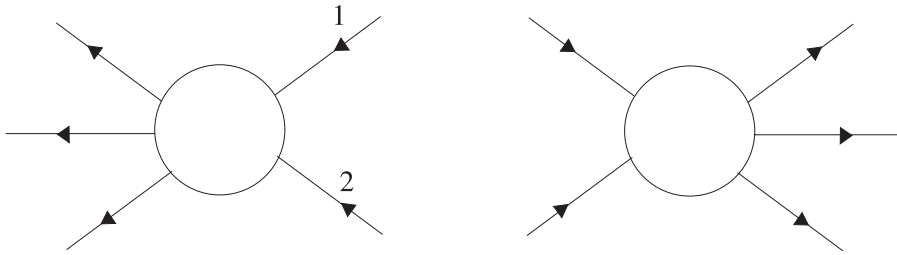


Figure 8.8 : $W(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = W(-\mathbf{p}_f, -\mathbf{p}_i)$.

L'image miroir d'une rotation dans un plan perpendiculaire à son axe est une rotation de même sens. On attribuera à l'opérateur de spin les propriétés d'un pseudo-vecteur par analogie avec le moment orbital.

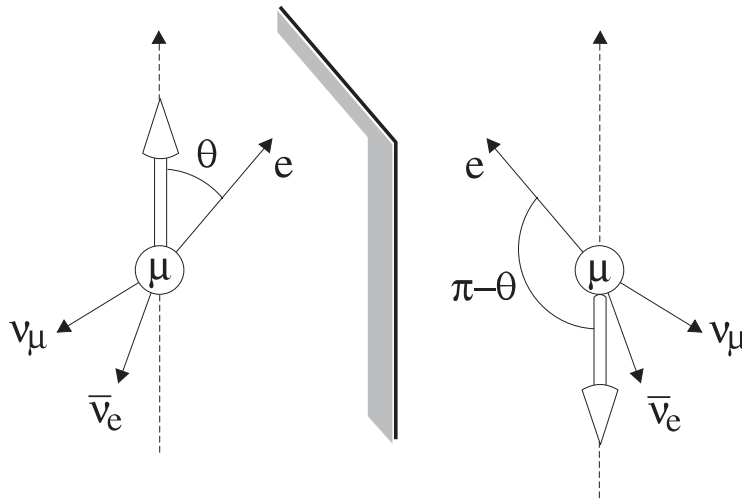


Figure 8.9 : L'effet de la symétrie miroir sur l'impulsion et l'état de spin d'un muon ($J^P = (1/2)^+$).

Toutes les interactions sont invariantes dans les transformations du groupe de Poincaré. Au contraire, alors que la mécanique classique, l'électromagnétisme, et les interactions fortes sont invariants par parité, cette opération n'est pas une symétrie des interactions faibles. Un effet de ce type est illustré sur la figure 8.9 qui montre la désintégration d'un muon dont le spin est orienté le long de oz . Les amplitudes de désintégration des deux transitions miroirs ne sont pas égales. Le spin, qui se transforme comme un moment angulaire, change de signe dans une symétrie miroir parallèle à l'axe de quantification (la valeur moyenne d'un spin $1/2$ est décrite par le pseudovecteur polarisation, comme on l'a vu au chapitre 3). Le spin du neutrino n'a pas été représenté : l'état miroir n'existerait que

pour un neutrino de masse finie, ce qui contredit les idées reçues, mais aucune donnée si la masse est assez faible.

2-2 La Parité, les translations, et les rotations

On attribue au moment angulaire propre des particules (leur spin) les mêmes propriétés de parité qu'au moment angulaire classique. Comme la parité commute avec les rotations, l'opérateur parité, noté Π dans ce paragraphe, est unitaire et vérifie :

$$\begin{aligned} \Pi R = R \Pi &\rightarrow \Pi^\dagger \mathbf{J} \Pi = \mathbf{J} \\ \Pi |0\rangle &= |0\rangle \quad \Pi^\dagger = \Pi^{-1} \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

Pour une particule au repos de spin j donné, propre de $(\mathbf{J})^2$ et J_3

$$\Pi |jm\rangle = \eta_P |jm\rangle \quad (8.2.2)$$

Le facteur de phase η_P est la parité intrinsèque de la particule. La parité, par analogie classique, doit anticommute avec les générateurs des translations :

$$\Pi \mathbf{P} = -\mathbf{P} \Pi$$

L'impulsion sera bien changée de signe.

a- La parité intrinsèque du photon

L'analogie avec la physique classique impose le choix de la transformation par parité des états quantiques du photon. Le potentiel scalaire A^0 est créé par des charges statiques (loi de Coulomb) et doit être invariant par parité. Au contraire, le potentiel vecteur \mathbf{A} est créé par les courants $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{j}(t', \mathbf{x})}{R} \Big|_{ret} d^3(\mathbf{x})$$

avec $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$, et $t' = t - R/c$. \mathbf{A} est un vecteur, et se transforme avec changement de signe sous l'effet de la parité : $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$. Lorsqu'il est décrit par un 4-vecteur (ou un champ) A^μ , on transformera par analogie le photon selon

$$|A^\mu\rangle' = P |A^\mu\rangle = |(A^0, -\mathbf{A})\rangle = |A_\mu\rangle$$

Le champ électrique $\mathbf{E} = -\nabla U$ est alors un vrai vecteur et $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$

$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ est un pseudo-vecteur et $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$

On définira alors pour une polarisation transverse \mathbf{e}

$$\Pi |\gamma, \mathbf{e}, \mathbf{p}\rangle = |\gamma, -\mathbf{e}, -\mathbf{p}\rangle = -|\gamma, \mathbf{e}, -\mathbf{p}\rangle$$

La dernière relation résultant de la linéarité vis à vis des composantes de spin. Pour les états propres de polarisation circulaire (d'hélicité), on partira de la relation (8.2.1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle &= \lambda |\mathbf{p}\rangle |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle \\ \Pi \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle &= \Pi \mathbf{S} \Pi^{-1} \cdot \Pi \mathbf{P} \Pi^{-1} \Pi |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} \Pi |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle \\ &= -\lambda |\mathbf{p}\rangle \Pi |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle \end{aligned}$$

Le transformé par parité de l'état propre d'hélicité λ a l'hélicité opposée $-\lambda$. La phase intrinsèque négative se traduit alors par :

$$\Pi |\gamma, \lambda, \mathbf{p}\rangle = -|\gamma, -\lambda, -\mathbf{p}\rangle$$

b- Parités intrinsèques des autres particules

Les parités des diverses particules sont établies de proche en proche.

- Les parités du π^0 et du η , qui se désintègrent électromagnétiquement en $\gamma\gamma$ sont établies par les corrélations de polarisation dans ces désintégrations (voir l'exercice 12). Cette corrélation, positive, implique une parité intrinsèque négative du π .
- On assigne au proton une parité $\eta_P = 1$ par convention. Ce choix de phase est cependant le seul qui soit compatible avec le modèle des quarks.
- Le neutron et le proton doivent avoir la même parité, par compatibilité avec la symétrie d'isospin du nucléon et des niveaux nucléaires. Les hyperons aussi, en vertu de $SU(3)$.
- Le triplet d'isospin (π^+ , π^- , π^0) a la parité du π^0 . Ce résultat est confirmé par l'analyse de la réaction $p+d \rightarrow \pi+{}^3He$ à basse énergie (voir exercice).
- La réaction $\pi^-p \rightarrow \Lambda K$ fixe (par une analyse angulaire indiquée en exercice), la parité du K^0 : $J^P = 0^-$, comme le pion, qui appartient au même multiplet de $SU(3)$.

Les autres parités intrinsèques s'en déduisent par l'examen des désintégrations électromagnétiques ou fortes. On peut les comprendre dans un modèle où les hadrons sont naïvement constitués de quarks. La prise en compte des symétries de saveur pour les quarks usuels impose le choix d'un facteur commun inobservable pour tous. On leur attribue par convention la parité intrinsèque $+1$. Dans le secteur des leptons chargés, les règles de sélection sont telles que seules les parités relatives entre lepton et antilepton ont un sens, et nous reviendrons sur ce point. La parité relative quark-lepton peut être choisie arbitrairement en l'absence de transitions d'un quark vers un lepton. Même si celles-ci existaient (à un niveau plus faible), elles n'auraient aucune raison de conserver la parité.

Bien que toutes les parités intrinsèques établies jusqu'à présent aient pu être choisies réelles, et égales à ± 1 , nous montrerons que la parité intrinsèque d'une particule de Majorana est purement imaginaire.

c- La parité orbitale

Les états propres de moment orbital de deux particules sont définis par leur projection sur les états $|W, \mathbf{P}, \mathbf{q}\rangle$ où W est l'énergie et q l'impulsion dans le centre de masse

$$|W, \mathbf{P}, l, m\rangle = \int d\Omega Y_l^m(\Omega) |W, \mathbf{P}, \mathbf{q}(\Omega)\rangle$$

$$\langle W', \mathbf{P}', \mathbf{q} | W, \mathbf{P}, l, m\rangle = \frac{4W}{q} Y_l^m(\Omega) \delta_4(P' - P)$$

On déduira des relations précédentes :

$$\Pi |\pi^0, \pi^+, \mathbf{P}, l, m\rangle = (-)^l \eta_\pi^2 |\pi^0, \pi^+, -\mathbf{P}, l, m\rangle$$

De même pour un système pion-proton d'impulsion \mathbf{P} :

$$\Pi |\pi^0, p, \mathbf{P}, l, m\rangle = \eta_\pi \eta_p (-)^l |\pi^0, p, -\mathbf{P}, l, m\rangle \quad (8.2.3)$$

La transformation par parité du système (π, p) montre que dans la diffusion πN non seulement le moment angulaire, mais le moment orbital se conserve. C'est la relation obtenue pour le système de deux pions qui est à l'origine de la découverte (par T.D. Lee et C. N. Yang 1956) de la violation de la parité dans les désintégrations faibles : un méson K^0 ayant $J^P = 0^-$ ne pouvait pas se désintégrer en deux pions, et s'il avait $J^P = 0^+$ il ne pouvait pas se désintégrer en trois pions. Les deux états finals étaient observés. La violation de parité dans les interactions faibles est aujourd'hui évidente par l'existence même du neutrino, mais on lui attribuait à l'époque les deux hélicités $\lambda = \pm 1/2$. La restriction aux neutrinos gauches a été comprise plus tard.

2-3 La parité en relativité

On va étendre au domaine relativiste les propriétés de l'opérateur parité en définissant son action sur des transformations de Lorentz quelconques. Il suffit de préciser son effet sur les transformations de Lorentz pures et sur les rotations :

$$\begin{aligned} \Pi R(\omega) \Pi^{-1} &= R(\omega) \\ \Pi L(\mathbf{v}) \Pi^{-1} &= L(-\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Dans les représentations à deux dimensions :

$$\begin{aligned} \Lambda_L &= e^{-i\frac{\sigma}{2} \cdot (\mathbf{n}_1 \phi - i \mathbf{n}_2 \psi)} \\ \Pi \Lambda_L \Pi^{-1} &= e^{-i\frac{\sigma}{2} \cdot (\mathbf{n}_1 \phi + i \mathbf{n}_2 \psi)} = \Lambda_R \end{aligned}$$

2-4 Action de la parité sur les spineurs de Dirac

Soit η_P la parité intrinsèque de la particule. L'action de la parité Π sur un spineur χ au repos est définie par (8.2.3). La transformation d'un spineur en mouvement s'en déduit de manière naturelle

$$\begin{aligned}\Pi\chi_L &= \Pi\Lambda_L\Pi^{-1}\Pi\chi = \eta_P\Lambda_R\chi = \eta_P\Psi_R \\ \Pi\psi_R &= \Pi\Lambda_R\Pi^{-1}\Pi\chi = \eta_P\Lambda_L\chi = \eta_P\chi_L\end{aligned}$$

et pour les spineurs de Dirac, en conservant le même symbole pour la parité :

$$\begin{aligned}\Pi u &= \Pi \begin{pmatrix} \psi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} = \eta_P \begin{pmatrix} \psi_L \\ \chi_L \end{pmatrix} = \eta_P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \\ \Pi u &= \eta_P \gamma_0 u\end{aligned}\tag{8.2.4}$$

On comprend le résultat de manière directe lorsque u est défini par une transformation de Lorentz pure :

$$\Lambda_R = \frac{m + E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m + E)}}$$

qui transforme $(m, \mathbf{0})$ en (E, \mathbf{p}) . On impose de manière naturelle :

$$\Pi\Lambda_R\Pi^{-1} = \frac{m + E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m + E)}} = \Lambda_L$$

puisque la parité remplace \mathbf{p} par $-\mathbf{p}$. Le spineur $u(p)$

$$u(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \Lambda_R\chi \\ \Lambda_L\chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(m + E)}} \begin{pmatrix} (m + E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi \\ (m + E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi \end{pmatrix}$$

vérifie bien

$$\Pi u(p^0, \mathbf{p}) = \eta_P u(p^0, -\mathbf{p}) = \eta_P \gamma^0 u(p)$$

Pour préserver les symétries internes de saveur avec lesquelles la parité commute, on attribuera la même parité intrinsèque +1 à tous les quarks. La loi de transformation des champs, que nous allons postuler, va imposer une parité opposée aux antiquarks. Les hadrons auront alors des parités intrinsèques réelles. Au contraire, on montrera qu'un fermion autoconjugué (de Majorana) a nécessairement une parité imaginaire.

2-5 Transformation par parité d'un champ

a- Les particules scalaires

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \{a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{+ik \cdot x}\} \\ \Pi\phi(t, \mathbf{x})\Pi^{-1} &= \sum_{\mathbf{k}} \{\Pi a(\mathbf{k})\Pi^{-1}e^{-ik \cdot x} + \Pi b^\dagger(\mathbf{k})\Pi^{-1}e^{+ik \cdot x}\} \\ \Pi\phi(t, \mathbf{x})\Pi^{-1} &= \eta_P^* \sum_{\mathbf{k}} \{a(-\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + b^\dagger(-\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\}\end{aligned}$$

η_P est la parité intrinsèque de la particule, et on a *postulé* la relation

$$\Pi\phi(t, x)\Pi^{-1} = \eta_P^* \phi(t, -\mathbf{x})$$

qui implique pour les opérateurs a et b

$$\begin{aligned}\Pi a(\mathbf{k})\Pi^{-1} &= \eta_P^* a(-\mathbf{k}) \\ \Pi b^\dagger(\mathbf{k})\Pi^{-1} &= \eta_P^* b^\dagger(-\mathbf{k})\end{aligned}$$

Particules et antiparticules ont alors des parités conjuguées. Si elles sont réunies dans un même multiplet de symétrie interne, leurs propriétés spatiales, dont la parité doivent être les mêmes. Ceci impose en pratique aux mésons des parités intrinsèques réelles.

b- La parité des fermions de Dirac

Nous allons définir une loi de transformation pour le champ compatible avec celle des états à une particule. Une relation importante en découle, qui relie les parités intrinsèques des particules et antiparticules.

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \{b_\sigma(\mathbf{k})u(k, \sigma)e^{-ik \cdot x} + d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})v(k, \sigma)e^{ik \cdot x}\}$$

On a vu que

$$\Pi|k, \sigma\rangle = \eta_P |\tilde{k}, \sigma\rangle$$

avec $\tilde{k} = (k^0, -\mathbf{k})$. Il en résulte :

$$\langle 0|\Psi(t, \mathbf{x})\Pi^{-1}|k, \sigma\rangle = \eta_P^* \gamma^0 u(k, \sigma)e^{-i\tilde{k} \cdot x}$$

avec $k \cdot x = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ et $\tilde{k} \cdot x = k^0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Mais $\langle 0| = \langle 0|\Pi$, si bien que

$$\langle 0|\Pi\Psi(t, \mathbf{x})\Pi^{-1}|k\rangle = \eta_P^* \gamma^0 \langle 0|\Psi(t, -\mathbf{x})|k\rangle$$

On étendra cette relation au champ lui-même :

$$\Pi\Psi(t, \mathbf{x})\Pi^{-1} = \eta_P^* \gamma^0 \Psi(t, -\mathbf{x}) \quad (8.2.5)$$

C'est ce postulat d'une loi de transformation simple pour le champ qui va imposer des parités intrinsèques opposées pour les particules et les antiparticules. Le champ conjugué est :

$$\Psi_c(t, \mathbf{x}) = C\Psi(t, \mathbf{x})C^{-1} = \eta_c^* C\bar{\Psi}(t, \mathbf{x})^T$$

Une démarche analogue à la précédente, appliquée à l'antifermion de parité $\bar{\eta}_P$, aboutit à une expression analogue à (8.2.5) pour Ψ_c .

$$\Pi\Psi_c(t, \mathbf{x})\Pi^{-1} = \bar{\eta}_P^* \gamma^0 \Psi_c(t, -\mathbf{x}) = \bar{\eta}_P^* \gamma_0 C \gamma^0 \Psi^* = -\bar{\eta}_P^* C \Psi^* \quad (8.2.6)$$

La notation Ψ^* , un peu abusive, désigne le champ

$$\Psi^* = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \{b_\sigma^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} u^*(k, \sigma) + d_\sigma(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} v(k, \sigma)^* e^{ik \cdot x}\}$$

La transformation par parité de Ψ_c découle cependant de celle du champ Ψ :

$$\Pi\Psi_c(t, \mathbf{x})\Pi^{-1} = C\Pi\bar{\Psi}(t, \mathbf{x})^T\Pi^{-1} = C\gamma^0\Pi\Psi(t, \mathbf{x})^*\Pi^{-1} = \eta_P C\Psi^*(t, -\mathbf{x}) \quad (8.2.7)$$

Les équations (8.2.6, 8.2.7) relient $\bar{\eta}$ et η .

$$\bar{\eta}_P^* = -\eta_P \quad (8.2.7)$$

Nous avons montré dans la section 2.2 que les parités des fermions pouvaient en général être choisies réelles. la transformation du champ, impose alors aux fermions et antifermions des parités opposées lorsque la phase η_P est choisie réelle. L'accord avec l'expérience confirme ainsi la façon dont les symétries C et P agissent sur les champs. La parité des systèmes fermion-antifermion peut être vérifiée dans des expériences d'annihilation (e^+e^- ou $p\bar{p}$). Comme dans la désintégration d'un π^0 , les polarisations des deux photons d'annihilation sont orthogonales (exercice 11).

c- La parité des fermions de Majorana

Le raisonnement précédent s'applique à un fermion de Majorana, mais comme particules et antiparticules sont identiques: $\eta_P = \bar{\eta}_P$. Il en résulte

$$(\eta_P)^2 = -1$$

$$\eta_P = \pm i$$

La parité d'un spineur de Majorana est imaginaire pure. Ce résultat est applicable aux particules supersymétriques qui interviennent dans des transitions conservant la parité, telles le photino, qui doivent être produites par paire. Un neutrino de Majorana, qui n'intervient que dans des transitions faibles, n'a

évidemment pas de parité définie, mais s'il est état propre de CP , cette valeur propre sera également purement imaginaire (voir exercice 2).

2-6 Conservation de la parité dans l'amplitude

La loi de conservation doit tenir compte des parités intrinsèques, dont les produits initiaux et finals sont η_i, η_f .

$$\langle f|T|i \rangle = \eta_f^* \eta_i \langle f_P|T|i_P \rangle$$

Là encore, les contraintes sont plus simples pour des états propres de la parité. Ce n'est possible qu'à basse énergie, en utilisant des états propres du moment orbital :

$$\langle JL_f M|T|JL_i M \rangle = \eta_f^* \eta_i (-)^{(L_f+L_i)} \langle JL_f M|T|JL_i M \rangle$$

Selon la parité du produit $\eta_f \eta_i$, cette relation impose un choix de combinaisons $L_f + L_i$ pair ou impair. Dès que le nombre de moments orbitaux est trop grand, il vaut mieux utiliser des amplitudes d'hélicité

$$\langle \lambda_f|T(\theta)|\lambda_i \rangle = \eta_f^* \eta_i \langle -\lambda_f|T(\theta)|-\lambda_i \rangle$$

où θ est l'angle de diffusion dans le centre de masse pour interaction à deux particules initiales et finales. Pour un cas plus général, l'extension est proposée dans l'exercice 12.

2-7 La violation de la parité

Jusqu'en 1956, on pensait que la parité était conservée dans toutes les interactions. L'existence de deux désintégrations du K^0 ($J^P = 0^-$) en $\pi^+ \pi^-$ et en $\pi^+ \pi^- \pi^0$ montrait cependant que *si* la parité était conservée, elle ne pouvait être que +1 pour $(\pi^+ \pi^-)$ et (-1) pour $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$. La parité du système est en effet le produit des parités intrinsèques et orbitales, et on savait que le moment angulaire propre du K^0 était nul. Pour $\pi^+ \pi^-$, $P = (-)^L \eta_\pi^2 = +1$ puisque $L = 0$. Au contraire, on doit introduire pour la désintégration en trois pions deux moments orbitaux l et L , comme sur la figure 7.6, où l est le moment relatif des deux pions chargés et L le moment angulaire du π^0 par rapport aux deux précédents. Comme $J = 0$, les deux moments orbitaux sont égaux. La parité du système de trois pions est alors $P = \eta_\pi^3 (-)^{L+l} = -1$. L'observation des deux voies de désintégration impliquait l'existence de deux particules de même masse et de parité différente, ce qui était incompréhensible. La même anomalie était observée avec les K chargés, et cette situation incita T. D. Lee et C. N. Yang à remettre en cause la conservation de la parité dans les désintégrations faibles.

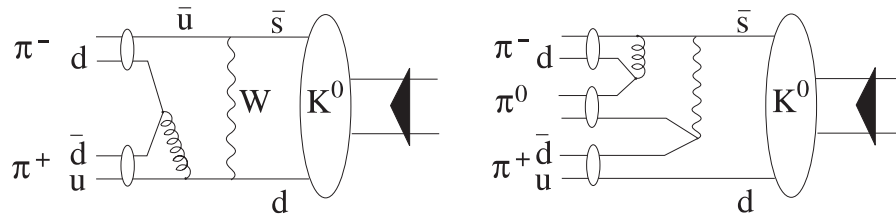


Figure 8.10 : La désintégration du K^0 en deux et trois pions.

Une expérience réalisée par Mme Wu selon le schéma de la figure 8.11 illustre rapidement cette violation de manière convaincante dans la désintégration du Cobalt : $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}^* e^- \bar{\nu}$. Un champ magnétique polarise à basse température les noyaux d'un échantillon de cobalt selon la verticale. Celui-ci se désintègre faiblement en émettant un électron. La simple asymétrie d'émission haut bas implique une violation de parité : on voit qu'une symétrie miroir par rapport à un plan horizontal laisse la polarisation (pseudovecteur) invariante, mais inverse la composante verticale de l'impulsion de l'électron. Autant d'électrons d'impulsion \mathbf{k} seraient émis en haut et en bas si la parité était conservée.

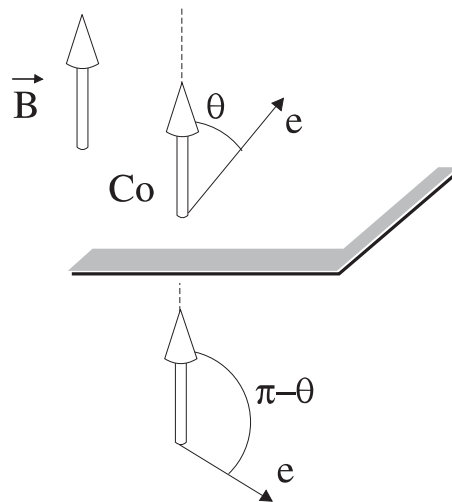


Figure 8.11 : La violation de la parité dans la désintégration du Cobalt

La violation n'est observable que par l'intermédiaire d'un pseudoscalaire tel $\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{k} \rangle$, où $\langle \mathbf{S} \rangle$ est la valeur moyenne des trois générateurs de spin pour le noyau initial de cobalt ($j = 5/2$), et \mathbf{k} l'impulsion de l'électron. L'existence d'un neutrino gauche, qui viole la parité par sa seule existence, n'a été acquise qu'*après* cette expérience concluante. Comme pour la figure 8.9, nous serions embarrassés s'il fallait représenter son état d'hélicité. La mise en évidence de

la violation de la parité a joué un rôle fondamental dans l'élaboration de la théorie de l'interaction faible par Feynman et Gell-Mann, comme on le verra au chapitre 11.

3 LA SYMETRIE DE RENVERSEMENT DU TEMPS T

3-1 T en mécanique classique

L'action du renversement de temps en mécanique classique est décrite sur la figure 8.12. Le mouvement initial se déroule de t_1 à t_2 . Dans le mouvement renversé de temps, la vitesse initiale au point $x(t_2)$ est opposée à $\mathbf{v}(t_2)$ et la symétrie T sera dite vérifiée si $\mathbf{x}(-t_1) = \mathbf{x}(t_1)$ et $\mathbf{v}(-t_1) = -\mathbf{v}(t_1)$.

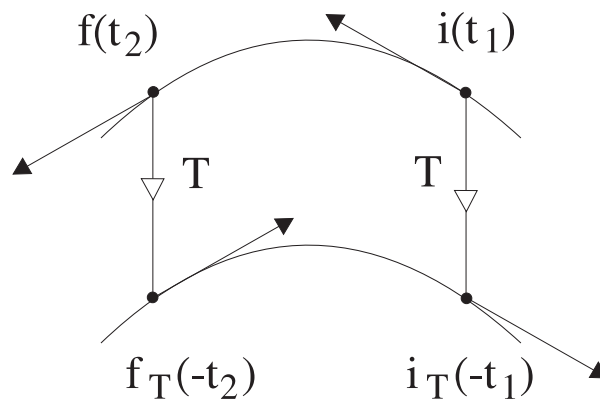


Figure 8.12 : La relation entre le mouvement renversé de temps. Le diagramme schématise cette relation à l'aide des états de l'espace des phases.

Les vitesses étant renversées dans la symétrie T , un enchaînement de collisions se déroule à l'envers. Cette symétrie peut sembler en contradiction avec l'irréversibilité temporelle des phénomènes statistiques : un morceau de sucre qui se dissout se reconstituerait si on parvenait à renverser toutes les vitesses à un instant donné, mais ce renversement est impossible à réaliser à l'échelle macroscopique, et la diffusion va continuer à évoluer vers les états les plus probables. Au delà de la mécanique, la symétrie T s'applique aux interactions électromagnétiques et aux interactions fortes : on est incapable de dire si une expérience d'électromagnétisme (non statistique) visualisée dans un film se déroule à l'endroit ou à l'envers. Les courants, créés par le mouvement des charges changent de signe ainsi que l'induction \mathbf{B} . Au contraire, le champ électrique \mathbf{E}

n'est pas affecté.

Tableau 8.1 : La transformation par T des grandeurs usuelles.

t	$-t$
\mathbf{x}	\mathbf{x}
\mathbf{p}	$-\mathbf{p}$
\mathbf{E}	\mathbf{E}
\mathbf{B}	$-\mathbf{B}$
A^0	A^0
\mathbf{A}	$-\mathbf{A}$
$\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$	$\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$

On résume dans le tableau 8.1 Les propriétés classiques et quantiques (par analogie) souhaitées pour l'opération T .

2- T en mécanique quantique

On définira en mécanique l'état transformé de temps

$$\mathcal{T}|a\rangle = \eta_T|a_T\rangle$$

La notation \mathcal{T} est destinée à éviter toute ambiguïté ultérieure avec la *matrice* T qui représente l'action de \mathcal{T} sur les fermions. Le diagramme de la figure 8.12 reste applicable à ceci près que les états initiaux et finals appartiennent maintenant à l'espace de Hilbert, comme on le représente sur la figure 8.13. L'opérateur d'évolution $U(t_2 - t_1, 0) = U(t_2, t_1)$ vérifie :

$$U(t_2 - t_1, 0) = e^{-iH(t_2 - t_1)}$$

Nous allons montrer que la conservation de l'énergie n'est possible en mécanique quantique que si la symétrie T est anti-unitaire :

$$|f(t_2)\rangle = e^{-iH(t_2 - t_1)}|i(t_1)\rangle$$

Il en résulte

$$\mathcal{T}|i(t_1)\rangle = |i_T(-t_1)\rangle = e^{-iH(-t_1 + t_2)}|f_T(-t_2)\rangle$$

ou

$$|f_T(-t_2)\rangle = e^{iH(t_2 - t_1)}|i_T(-t_1)\rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
 |f(t_2)\rangle & \xleftarrow{U(t_2-t_1)} & |i(t_1)\rangle \\
 \downarrow \mathbf{T} & & \downarrow \mathbf{T} \\
 \triangledown & & \triangledown \\
 |f_{\mathbf{T}}(-t_2)\rangle & \xrightarrow{U(t_2-t_1)} & |i_{\mathbf{T}}(-t_1)\rangle
 \end{array}$$

Figure 8.13 : La symétrie T en mécanique quantique.

D'autre part :

$$\mathcal{T}|f(t_2)\rangle = |f_{\mathbf{T}}(-t_2)\rangle = \mathcal{T}e^{-iH(t_2-t_1)}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|i(t_1)\rangle$$

soit

$$|f_{\mathbf{T}}(-t_2)\rangle = \mathcal{T}e^{-iH(t_2-t_1)}\mathcal{T}^{-1}|i_{\mathbf{T}}(-t_1)\rangle$$

la comparaison des deux relations implique, avec $\tau = t_2 - t_1$

$$\mathcal{T}e^{-iH\tau}\mathcal{T}^{-1} = e^{iH\tau} \quad (8.3.1)$$

Comme d'autre part l'énergie ne doit pas être affectée

$$\mathcal{T}H = H\mathcal{T} \quad (8.3.2)$$

\mathcal{T} doit changer i en $-i$, c'est une opération antiunitaire.

3-3 Action de T sur un spineur

a- Relations de commutation

Comme la symétrie de renversement de temps \mathcal{T} n'agit pas sur les coordonnées spatiales, elle commute nécessairement avec les rotations R :

$$\mathcal{T}U(R) = U(R)\mathcal{T} \quad (8.3.3)$$

Les opérateurs représentant des transformations infinitésimales dans l'espace des états doivent avoir la même propriété.

$$\mathcal{T}\left(\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\delta\phi\right) = \left(\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\delta\phi\right)\mathcal{T}$$

En tenant compte de l'antilinearité :

$$\mathcal{T} \frac{-i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta \phi = \frac{i}{\hbar} \mathcal{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta \phi = \frac{-i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta \phi \mathcal{T}$$

$$\mathcal{T} \mathbf{J} = -\mathbf{J} \mathcal{T}$$

et on montrerait de même en examinant la commutation avec les translations que

$$\mathcal{T} \mathbf{P} = -\mathbf{P} \mathcal{T}$$

On retrouve de manière formelle la propriété classique de \mathcal{T} , qui doit changer de signe les impulsions et les moments angulaires.

b- Action de T sur un spineur au repos

D'après la relation (8.3.3)

$$U(R) \mathcal{T} |[\check{p}], s_3 \rangle = \mathcal{T} U(R) |[\check{p}], s_3 \rangle = (D_{\sigma_3 s_3}^s)^* \mathcal{T} |[\check{p}], \sigma_3 \rangle \quad (8.3.4)$$

où \check{p} désigne le 4-vecteur $(m, \mathbf{0})$.

$$\mathcal{D}_{mn}^* = \mathcal{D}(\epsilon)_{m\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\sigma} \mathcal{D}(\epsilon)_{\sigma n}^{-1}$$

où $\epsilon = i\sigma_2 = e^{i\pi/2\sigma_2}$ est la matrice de $SU(2)$ correspondant à une rotation de $-\pi$ autour de oy . En multipliant les deux membres de (8.3.4) par $\mathcal{D}(\epsilon)$, qui est réel :

$$U(R) \mathcal{T} \mathcal{D}_{s_3 \lambda}^s(\epsilon) |[\check{p}], s_3 \rangle = \mathcal{D}_{\sigma_3 \lambda}^s(R) \mathcal{T} \mathcal{D}_{\mu_3 \sigma_3}^s(\epsilon) |[\check{p}], \mu_3 \rangle$$

L'état $\mathcal{T} \mathcal{D}_{\mu \sigma_3}^s(\epsilon) |[\check{p}], \mu \rangle$ se transforme par $\mathcal{D}_{\sigma_3 \lambda_3}^s(R)$. Il doit être proportionnel à une phase près à $|[\check{p}], \sigma_3 \rangle$:

$$\mathcal{T} |[\check{p}], s_3 \rangle = \eta_T \mathcal{D}_{\lambda s_3}^s(\epsilon) |[\check{p}], \lambda \rangle \quad (8.3.5a)$$

et pour les composantes χ' de l'état transformé

$$\chi'_\lambda = \eta_T \mathcal{D}_{\lambda s_3}^s(\epsilon) \chi_{s_3}^* \quad (8.3.5b)$$

ce qui correspond bien à une extension des propriétés classiques de \mathcal{T} , avec renversement du moment angulaire. Comme pour la parité, la phase η_T doit être la même pour tous les états reliés par une symétrie interne. On verra plus loin qu'elle peut être choisie égale à l'unité.

c- Action de T sur les spineurs de Dirac

La transformation par \mathcal{T} doit changer le signe de l'impulsion et du spin au repos. On trouve facilement l'opération correspondante en examinant des spineurs obtenus par transformation de Lorentz pure, bien que le raisonnement

puisse être facilement généralisé. Le spineur $u(\lambda, p)$ est défini à partir du spineur au repos χ_λ par la relation usuelle :

$$u(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{2(m+E)}} \begin{pmatrix} (m+E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_\lambda \\ (m+E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_\lambda \end{pmatrix}$$

A partir de (8.3.5) et en utilisant $\mathcal{T}\Lambda(\mathbf{p})\mathcal{T}^{-1} = \Lambda(-\mathbf{p})$ et les notations du chapitre 3 :

$$\begin{pmatrix} \langle A_L | \mathcal{T} | \lambda, p \rangle \\ \langle A_R | \mathcal{T} | \lambda, p \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(m+E)}} \begin{pmatrix} (m+E - \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\epsilon\chi_\lambda^* \\ (m+E + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\epsilon\chi_\lambda^* \end{pmatrix}$$

En utilisant de nouveau la relation $\vec{\sigma}\epsilon = -\epsilon\vec{\sigma}^*$

$$\mathcal{T}u(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2(m+E)}} T \begin{pmatrix} (m+E + \vec{\sigma}^* \cdot \mathbf{p})\chi_\lambda^* \\ (m+E - \vec{\sigma}^* \cdot \mathbf{p})\chi_\lambda^* \end{pmatrix}$$

La matrice introduite est :

$$T = \gamma^5 C = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. L'opération de renversement du temps conserve son caractère antilinéaire dans l'action sur les spineurs de Dirac.

$$\mathcal{T}u(p^0, \mathbf{p}, \lambda) = Tu^*(p^0, \mathbf{p}, \lambda) \quad (8.3.6)$$

Dans le cas particulier d'un état propre d'hélicité χ_λ , qui vérifie

$$\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_\lambda = 2 |\mathbf{p}| \lambda \chi_\lambda$$

Il en résulte que

$$\vec{\sigma} \cdot (-\mathbf{p}) \epsilon\chi_\lambda^* = 2 |\mathbf{p}| \lambda \epsilon\chi_\lambda^*$$

L'hélicité d'une particule est inchangée par \mathcal{T} , ce qui est normal puisque l'impulsion et le spin changent de signe.

3-4 Action de T sur les champs

Comme pour les opérations \mathcal{C} et \mathcal{P} , on postulera une loi de transformation simple qui possède la propriété souhaitée d'associer t et $-t$:

a- Champs scalaires

$$\mathcal{T}\phi(t, \mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^* \phi(-t, \mathbf{x}) \quad (8.3.7)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\mathcal{T}a(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} &= \eta_T^* a(-\mathbf{k}) \\ \mathcal{T}b^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} &= \eta_T^* b(-\mathbf{k})^\dagger\end{aligned}$$

Les phases intrinsèques de renversement de temps des particules et antiparticules (qui a priori auraient pu différer) sont égales à cause du postulat (8.3.7)

L'égalité des parités des différents quarks (ou leptons) justifiait l'attribution de parités réelles aux hadrons usuels. C'est au contraire une symétrie physique, CPT , qui impose le choix de la phase η_T : on verra dans la section 4 de ce chapitre que la phase intrinsèque de renversement du temps doit vérifier $\eta_C \eta_P \eta_T = 1$. A la limite où CP est vérifiée, la phase η_{CP} est réelle, et on peut choisir $\eta_T = 1$.

b- Champs de Dirac

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{k, \lambda} \{ b_\lambda(\mathbf{k}) u(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + d_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) v(k, \lambda) e^{ik \cdot x} \}$$

On étendra l'action de \mathcal{T} au champ de manière à retrouver la transformation des états à une particule.

$$\mathcal{T}\Psi(t, \mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^* T \Psi(-t, \mathbf{x}) \quad (8.3.8)$$

La discussion précédente montre que l'on peut supposer η_T réelle. L'effet de \mathcal{T} sur les opérateurs de création et d'annihilation découle de la relation (8.3.8) et de l'antiunitarité :

$$\mathcal{T}\Psi(t, \mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \{ \mathcal{T}b_\lambda(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} u(k, \lambda)^* e^{ik \cdot x} + \mathcal{T}d_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} v(k, \lambda)^* e^{-ik \cdot x} \}$$

$$\mathcal{T}b_\sigma(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^* \mathcal{D}_{\sigma\mu}^s(\epsilon) b_\mu(-\mathbf{k}) \quad (8.3.9a)$$

$$\mathcal{T}d_\sigma^\dagger(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} = \eta_T^* \mathcal{D}_{\sigma\mu}^s(\epsilon) d_\mu^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (8.3.9b)$$

avec

$$\mathcal{D}_{\sigma\mu}^s(\epsilon) = \frac{1}{2k^0} \bar{u}(k, \sigma) T u(k, \mu) = -(-)^{1/2+\sigma} \delta_{\sigma-\mu} \quad (8.3.10)$$

Le transformé par T du champ $\bar{\Psi}$ s'obtient à partir des relations précédentes.

$$\mathcal{T}\bar{\Psi}(t, \mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = \eta_T \bar{\Psi}(-t, \mathbf{x}) T^\dagger \quad (8.3.11)$$

3-5 Action de T sur les amplitudes

C'est l'anti-unitarité de \mathcal{T} qui permet d'échanger le rôle des états initiaux et finals. En notant les états renversés de temps f_T, i_T , on supposera pour les matrices S et T :

$$S_{fi} = \langle f|Si \rangle = \langle \mathcal{T}i|STf \rangle = \langle f_T|S^\dagger i_T \rangle^*$$

Pour tout opérateur antiunitaire, d'autre part

$$S_{fi} = \langle f|Si \rangle = \langle \mathcal{T}f|\mathcal{T}Si \rangle^* = \langle \mathcal{T}f|\mathcal{T}S\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}i \rangle^*$$

la conservation de \mathcal{T} s'écrit ainsi

$$\mathcal{T}S = S^\dagger \mathcal{T} \quad (8.3.12)$$

Il est utile (pour la suite) de revenir aux définitions initiales des matrices S et T données dans le chapitre 6. T transforme les solutions entrantes et sortantes les unes dans les autres. $T\Psi_a^+ = \eta_a \Psi_a^-$ et $T\Psi_a^- = \eta_a^* \Psi_a^+$ ce qui est compatible avec

$$S_{fi} = \langle \Psi_f^- | \Psi_i^+ \rangle = \langle \mathcal{T}\Psi_i^+ | \mathcal{T}\Psi_f^- \rangle \quad (8.3.13)$$

Les relations trouvées pour S s'étendent à la matrice T , notée M dans le reste de ce paragraphe pour éviter toute confusion

$$S = \mathbf{1} - (2\pi)^4 i \delta(P_f - P_i) M$$

$$\langle f | Mi \rangle = \langle i_T | M f_T \rangle = \langle f_T | M^\dagger i_T \rangle \quad (8.3.14)$$

lorsque $i_T = i$ et $f_T = f$, comme dans une diffusion élastique entre états d'hélicité, la matrice de transition va être symétrique au produit près des facteurs $(-)^{s_i - \lambda_i}$ de chaque particule de spin s_i . La symétrie T relie en général une réaction et son inverse, sans apporter de contrainte directe à une amplitude de transition inélastique. Il y a deux exceptions :

- Le cas où l'approximation de Born est valable $M = M^\dagger = H$. L'opérateur H étant hermitien, les relations précédentes impliquent d'après (8.3.14)

$$M_{fi} = M_{f_T i_T} \quad (8.3.15)$$

Cette équation est utile dans les désintégrations faibles, où la transition inverse est évidemment inobservable.

- L'interaction provoquant la transition est faible par rapport à celle qui détermine les états asymptotiques Ψ^\pm : c'est le cas d'une transition faible accompagnée d'interactions dans l'état final fortes ou électromagnétiques, que nous allons examiner.

3-6 Les interactions dans l'état final et T

Dans le cadre des approximations faites dans le chapitre 6, en présence d'interactions dans l'état final après une transition faible engendrée par la perturbation V , les contraintes apportées par la symétrie T peuvent être précisées.

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \Phi_f | V | \Psi_i^+ \rangle = \langle \Psi_f^- | V | \Phi_i \rangle \\ M_{fi} &= \langle \Phi_{i_T} | V | \Psi_{f_T}^+ \rangle = \langle \Psi_{f_T}^+ | V | \Phi_{i_T} \rangle^* \end{aligned}$$

Par définition de la matrice S , on a

$$|\Psi_f^+\rangle = S |\Psi_f^-\rangle$$

On peut se limiter pour S à l'interaction dominante, forte ou électromagnétique. Dans une base appropriée, S sera diagonale et égale à $e^{2i\delta}$ (si plusieurs canaux ont les mêmes nombres quantiques conservés, l'adaptation de la méthode est évidente). Dans ces conditions, et avec une notation simplifiée :

$$\begin{aligned} |\Psi_f^+\rangle &= e^{2i\delta} |\Psi_f^-\rangle \\ \langle \Psi_f^- | V | \Phi_i \rangle &= e^{2i\delta} \langle \Psi_{f_T}^- | V | \Phi_{i_T} \rangle^* \end{aligned}$$

Rappelons que nous désignons dans ce paragraphe la matrice de transition, notée usuellement T , par M .

$$M_{fi} = \langle \Psi_f^- | V | \Phi_i \rangle = e^{2i\delta} \langle \Psi_{f_T}^- | V | \Phi_{i_T} \rangle^*$$

$$M_{fi} = e^{2i\delta} M_{f_T i_T}^* \quad (8.3.16)$$

L'existence d'une interaction initiale ou finale (forte par rapport à V) induit une violation apparente de T due à la phase δ . Dans une désintégration faible comme $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ ou $K^0 \rightarrow \pi\pi$, cette phase sera donnée par les interactions fortes. Dans une désintégration β , elle provient de l'interaction électromagnétique entre l'électron et le proton.

Dans le cas particulier où $i_T = i$ et $f_T = f$, qui s'applique aux exemples précédents, la relation (8.3.16) devient $M_{fi} = e^{2i\delta} M_{fi}^*$. La phase de M_{fi} est donnée par l'interaction dans l'état final, comme dans le chapitre 6.

3-7 Le moment dipolaire électrique

Le moment dipolaire électrique d'un système classique est invariant par T puisqu'il résulte d'une distribution géométrique des charges à un instant donné. L'énergie d'interaction d'un moment électrique \mathbf{d} avec le champ électrique \mathbf{E} est $W = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ et le moment \mathbf{d} peut (en principe) être mesuré par déflexion dans un gradient de champ électrique. La figure 8.14 montre la trajectoire d'une

particule neutre dans un gradient de champ électrique, ainsi que la trajectoire renversée de temps, avec le même moment dipolaire. Nous allons montrer que Pour un système quantique dans un état $|j, m\rangle$ donné $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ si T est conservée, et que le phénomène décrit par cette figure ne peut avoir lieu. Le dipôle électrique quantique sera la moyenne d'un opérateur vectoriel \mathbf{D} :

$$\mathbf{d} = \langle \psi | \mathbf{D} | \psi \rangle$$

et par analogie avec le cas classique

$$\mathcal{T} \mathbf{D} \mathcal{T}^{-1} = \mathbf{D}$$

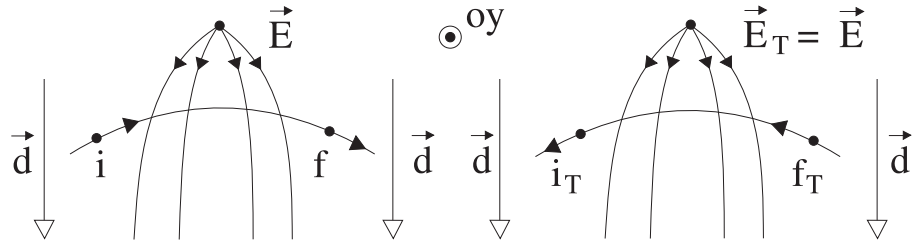


Figure 8.14 : La trajectoire d'un dipôle électrique dans un gradient électrique et la trajectoire renversée de temps.

Il en résulte

$$\langle \Psi | \mathbf{D} | \Psi \rangle = \langle \mathcal{T} \psi | \mathcal{T} \mathbf{D} | \psi \rangle^* = \langle \mathcal{T} \psi | \mathcal{T} \mathbf{D} \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T} | \psi \rangle^* = \langle \mathcal{T} \psi | \mathbf{D} | \mathcal{T} \psi \rangle$$

La dernière égalité résulte de l'invariance de \mathbf{D} par T et de la réalité de la valeur moyenne. Pour un état $|\psi\rangle = |jm\rangle$

$$\mathcal{T} |jm\rangle = \eta_T (-)^{(j-m)} |j-m\rangle$$

si bien qu'en notant $\mathbf{D}_{jm} = \langle jm | \mathbf{D} | jm \rangle$:

$$\mathbf{D}_{jm} = (-)^{2(j-m)} \langle j-m | \mathbf{D} | j-m \rangle = \mathbf{D}_{j-m} \quad (8.3.17)$$

Le dernier élément de matrice est égal à $\langle U(Y)jm | \mathbf{D} | U(Y)jm \rangle = \langle jm | U^{-1}(Y) \mathbf{D} U(Y) | jm \rangle$, où Y désigne une rotation de π autour de oy . L'opérateur \mathbf{D} étant vectoriel doit changer de signe dans cette rotation

$$U^{-1}(Y) \mathbf{D} U(Y) = -\mathbf{D}$$

$$(\mathbf{D})_{j-m} = -(\mathbf{D})_{j-m} \quad (8.3.18)$$

Les équations (8.3.17) et (8.3.18) entraînent

$$\mathbf{D}_{jm} = 0$$

Un système quantique de moment angulaire (j, m) donné dont les interactions sont invariantes par \mathcal{T} a un moment dipolaire nul. En particulier, sous les mêmes conditions, toutes les particules élémentaires ont un moment dipolaire nul. L'exercice III.1 traite le cas de la molécule d'eau, dont le moment dipolaire n'est pas nul.

4- ACTION DE C, P, T SUR LES EXPRESSIONS COVARIANTES

Tout opérateur de l'espace des spineurs de Dirac peut se décomposer sur la base des 16 matrices S, V, T, A, P rappelées dans le tableau 8.II et les suivants. En particulier, toute expression bilinéaire en fonction des champs $\bar{\Psi}_1$ et Ψ_2 sera une combinaison des 16 expressions formées avec ces matrices. Leur intérêt et la simplicité de leurs propriétés de covariance. Nous n'indiquerons le calcul que pour les termes scalaires et vectoriels, en omettant toutefois les phases intrinsèques.

4-1 La parité

La transformation des expressions bilinéaires va résulter des formules précédemment établies pour les champs.

$$\begin{aligned} \Pi \bar{\Psi}_2(t, \mathbf{x}) \Psi_1(t, \mathbf{x}) \Pi^{-1} &= \bar{\Psi}_2(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^0 \Psi_1(t, -\mathbf{x}) = \bar{\Psi}_2(t, -\mathbf{x}) \Psi_1(t, -\mathbf{x}) \\ \Pi \bar{\Psi}_2(t, \mathbf{x}) \gamma^\mu \Psi_1(t, \mathbf{x}) \Pi^{-1} &= \bar{\Psi}_2(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Psi_1(t, -\mathbf{x}) \\ &= \bar{\Psi}_2(t, -\mathbf{x}) \gamma_\mu \Psi_1(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

en utilisant $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma_\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$. Les autres transformations s'établissent de manière analogue et sont résumées dans le tableau 8.II. Le tenseur $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ a déjà été défini : son intérêt est d'avoir une loi de transformation simple pour les symétries C et T . Cette table limite déjà les termes qui peuvent apparaître dans des transitions fortes ou électromagnétiques. Les couplages à un champ quadrivecteuriel $\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi A_\mu$ ou $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$ ont des parités opposées et ne peuvent pas figurer simultanément dans des interactions fortes ou électromagnétiques, alors qu'ils sont présents dans les transitions faibles. Relevons une particularité des couplages scalaires et pseudoscalaires. Un terme de masse $m \bar{\Psi} \Psi$ dans le lagrangien équivaut à un couplage (m) faisant passer d'un champ $\Psi_L = (1 - \gamma^5) \Psi$ à un champ $\Psi_R = (1 + \gamma^5) \Psi$. Ce changement de chiralité s'interprète géométriquement comme un changement d'hélicité (avec un petit abus de langage).

Tableau 8.II : Transformation par parité des expressions covariantes

	O	$\Pi O \Pi^{-1}$
S	$\bar{\Psi}_2(x^\mu) \Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(x_\mu) \Psi_1(x_\mu)$
V	$\bar{\Psi}_2(x^\mu) \gamma^\mu \Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(x_\mu) \gamma_\mu \Psi_1(x_\mu)$
T	$\bar{\Psi}_2(x^\mu) \sigma^{\mu\nu} \Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(x_\mu) \sigma_{\mu\nu} \Psi_1(x_\mu)$
A	$\bar{\Psi}_2(x^\mu) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_2(x_\mu) \gamma_\mu \gamma^5 \Psi_1(x_\mu)$
P	$\bar{\Psi}_2(x^\mu) \gamma^5 \Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_2(x_\mu) \gamma^5 \Psi_1(x_\mu)$

Cette amplitude de transition s'annule avec m , comme on s'y attend pour des masses nulles, puisque la particule libre a alors une hélicité indépendante du repère. Un terme $\phi \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi$, qui modifie la chiralité, va également s'annuler lorsque la masse scalaire $m \rightarrow 0$. Au contraire, un couplage $\phi \bar{\Psi} \gamma^5 \not{d} \Psi$ préserve la chiralité, et se comporte comme le feraient des couplages axiaux et vectoriels. C'est ainsi que le couplage du pion au nucléon pourra être obtenu à partir d'un couplage au courant axial mesuré dans les interactions faibles.

4-2 La conjugaison de charge

La loi de transformation des champs qui a été postulée est

$$C \Psi(t, \vec{x}) C^{-1} = C \bar{\Psi}(t, \vec{x})^T$$

avec

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

et $C^2 = -\mathbf{1}$ et $C\gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^T C$. Il en résulte que $C \bar{\Psi} C^{-1} = \Psi^T C$. Nous donnerons le calcul pour les deux exemples précédemment utilisés : l'expression finale est obtenue par une transposition supplémentaire qui laisse évidemment invariante les 16 expressions scalaires fondamentales. L'anticommutation des champs $\bar{\Psi}_1$ et Ψ_2 fait alors apparaître un signe $-$:

$$\begin{aligned} C \bar{\Psi}_2 \Psi_1 C^{-1} &= \Psi_2^T C C \bar{\Psi}_1^T = -\Psi_2^T \bar{\Psi}_1^T = \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \\ C \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \Psi_1 C^{-1} &= \Psi_2^T C \gamma^\mu C \bar{\Psi}_1^T = -\bar{\Psi}_1 C^T (\gamma^\mu)^T C^T \Psi_2 \\ &= \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu C^T C^T \Psi_2 = -\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2 \end{aligned}$$

La table suivante en résulte

Tableau 8.III : Transformation par conjugaison de charge des expressions covariantes

	O	$CO C^{-1}$
S	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_1(x^\mu)\Psi_2(x^\mu)$
V	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_1(x^\mu)\gamma^\mu\Psi_2(x^\mu)$
T	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\sigma^{\mu\nu}\Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_1(x^\mu)\sigma^{\mu\nu}\Psi_2(x^\mu)$
A	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_1(x^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\Psi_2(x^\mu)$
P	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_1(x^\mu)\gamma^5\Psi_2(x^\mu)$

L'extension du principe de Pauli aux champs (l'anticommution de Ψ et Ψ^+) a des conséquences directement lisibles sur le lagrangien d'interaction électromagnétique. C'est le courant vecteur qui a une conjugaison de charge $C = -1$ et peut être couplé au photon ($C = -1$) dans un lagrangien invariant de charge. Le choix de règles de commutations aurait contraint à l'utilisation du courant axial, ce qui aurait violé la parité. On observe l'enchevêtrement des contraintes imposées par les symétries internes (C) et spatiales (P).

4-3 Le renversement du temps T

La transformation du champ a été établie :

$$\mathcal{T}\Psi(t, \vec{x})\mathcal{T}^{-1} = T\Psi(-t, \vec{x})$$

$$T = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Deux exemples montreront comment veiller à l'antilinearité :

$$\mathcal{T}\bar{\Psi}_2(t, \vec{x})\Psi_1(t, \vec{x})\mathcal{T}^{-1} = \bar{\Psi}_2(-t, \vec{x})T^T T\Psi_1(-t, \vec{x}) = \bar{\Psi}_2(-t, \vec{x})\Psi_1(-t, \vec{x})$$

$$\mathcal{T}\bar{\Psi}_2(t, \vec{x})\gamma^\mu\Psi_1(t, \vec{x})\mathcal{T}^{-1} = \bar{\Psi}_2(-t, \vec{x})T^T\gamma^{\mu*}T\Psi_1(-t, \vec{x})$$

mais $T^T\gamma^{\mu*}T = \gamma_\mu$, si bien que

$$\mathcal{T}\bar{\Psi}_2(t, \vec{x})\gamma^\mu\Psi_1(t, \vec{x})\mathcal{T}^{-1} = \bar{\Psi}_2(-t, \vec{x})\gamma_\mu\Psi_1(-t, \vec{x})$$

On résume l'ensemble de ces transformations dans la table 8.IV:

Tableau 8.IV : Transformation des expressions covariantes par renversement de temps.

	O	$\mathcal{T}O\mathcal{T}^{-1}$
S	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(-x_\mu)\Psi_1(-x_\mu)$
V	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(-x_\mu)\gamma_\mu\Psi_1(-x_\mu)$
T	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\sigma^{\mu\nu}\Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_2(-x_\mu)\sigma_{\mu\nu}\Psi_1(-x_\mu)$
A	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_2(-x_\mu)\gamma_\mu\gamma^5\Psi_1(-x_\mu)$
P	$i\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$-i\bar{\Psi}_2(-x_\mu)\gamma^5\Psi_1(-x_\mu)$

Le facteur i devant le terme pseudoscalaire provient du souci de garantir l'invariance par CPT que nous examinerons prochainement.

4-4 Le champ électromagnétique

La transformation du champ électromagnétique $A^\mu(x)$, que nous ne construirons pas explicitement, dans les différentes symétries discrètes, s'inspire du comportement du quadripotiel $A^\mu(x)$ de l'électromagnétisme classique. Il ne faudrait évidemment pas en déduire que \mathbf{E} et \mathbf{B} sont reliés au champ quantifié par les relations classiques, ni qu'ils sont définis pour un photon.

$$\begin{aligned}\Pi A^\mu(x^\mu)\Pi^{-1} &= A_\mu(x_\mu) \\ \mathcal{C} A^\mu(x^\mu)\mathcal{C}^{-1} &= -A^\mu(x^\mu) \\ \mathcal{T} A^\mu\mathcal{T}^{-1} &= A_\mu(-x_\mu)\end{aligned}$$

Le principe de jauge nous a directement donné le couplage $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$, qui vérifie les 3 invariances C , P , T . Les particules pourvues d'une structure (hadrons, ou leptons si l'on tient compte des ordres supérieurs) ont un moment magnétique anormal $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\Psi A_\mu$. Les propriétés de transformation des bosons W et Z sont les mêmes.

4-5 La symétrie CPT

a- La transformation CPT

La symétrie CPT , obtenue par le produit des opérations précédemment définies est caractérisée par le tableau 8.V :

Tableau 8.V : La transformation des expressions covariantes par CPT.

	O	$(CPT)O(CPT)^{-1}$
S	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_1(-x^\mu)\Psi_2(-x^\mu)$
V	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_1(-x^\mu)\gamma^\mu\Psi_2(-x^\mu)$
T	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\sigma^{\mu\nu}\Psi_1(x^\mu)$	$\bar{\Psi}_1(-x^\mu)\sigma^{\mu\nu}\Psi_2(-x^\mu)$
A	$\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$-\bar{\Psi}_1(-x^\mu)\gamma^\mu\gamma^5\Psi_2(-x^\mu)$
P	$i\bar{\Psi}_2(x^\mu)\gamma^5\Psi_1(x^\mu)$	$i\bar{\Psi}_1(-x^\mu)\gamma^5\Psi_2(-x^\mu)$

Un lagrangien scalaire de Lorentz ne pourra être formé que par 3 types de contributions en partant des expressions bilinéaires qui précèdent :

- scalaires, pseudoscalaires, ou leur produit,
- $V.V, V.A, A.A$
- $T \cdot (VV), T \cdot (VA), T \cdot (AA)$.

Pour tous les termes rencontrés, les transformés par CPT sont égaux aux conjugués hermitiens (après intégration sur les x^μ). L'hermiticité du lagrangien, nécessaire pour la conservation de la norme au cours des interactions, assurera ainsi l'invariance par CPT de chacune des contributions, sous réserve, comme on va le voir, d'un choix correct des phases.

b- L'invariance du lagrangien par CPT

Nous considérerons à titre d'exemple le lagrangien de l'interaction électrofaible, qui sera justifié au chapitre 11, et nous supposons que comme pour le champ du photon

$$(CPT)W^\mu(x)(CPT)^{-1} = -W^\mu(-x)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_\nu\gamma^\lambda(g_V - g_A\gamma^5)\Psi_l W_\lambda^+ + \bar{\Psi}_l\gamma^\lambda(g_V^* - g_A^*\gamma^5)\Psi_\nu W_\lambda^-$$

$$CPT\mathcal{L}(CPT)^{-1} = \eta_{CPT}\bar{\Psi}_l\gamma^\lambda(g_V - g_A\gamma^5)\Psi_\nu W_\lambda^- + \eta_{CPT}^*\bar{\Psi}_\nu\gamma^\lambda(g_V^* - g_A^*\gamma^5)\Psi_l W_\lambda^+$$

Les phases η_C , η_P , et η_T peuvent être choisies de manière que $\eta_{CPT} = 1$: on postule par exemple $\eta_P = 1$, et on choisit η_T de manière appropriée. Le résultat est alors invariant par CPT . Dans le cadre de la symétrie $SU(2)_W$, la conjugaison de charge des bosons W introduit des phases supplémentaires, mais

on voit facilement qu'elles s'éliminent. Comme les constituants fondamentaux se résument pour l'instant (hors gravitation) à des spineurs et des bosons de jauge, la symétrie CPT est vérifiée par toutes les interactions. Elle a trois conséquences fondamentales (ou elle n'est possible que parce que trois conditions sont réalisées).

- L'action de CPT donc de CP est définie pour toute particule. On lui associe ainsi une antiparticule, même quand les symétries C et P ne sont pas définies séparément. C'est ainsi que :

$$\begin{aligned} CP|e_L^- \rangle &= |e_R^+ \rangle \\ CP|\nu_L \rangle &= |\bar{\nu}_R \rangle \end{aligned}$$

- Les masses des particules et antiparticules sont égales. La masse d'un état stable est la valeur propre du hamiltonien quand il est au repos :

$$\begin{aligned} H|\alpha \rangle &= m|\alpha \rangle \\ CPTH|\alpha \rangle &= (CPT)H(CPT)^{-1}(CPT)|\alpha \rangle = H(CPT)|\alpha \rangle \\ \text{mais } (CPT)|\alpha \rangle &= \eta|\bar{\alpha}_T \rangle \\ CPTm|\alpha \rangle &= \eta m|\bar{\alpha}_T \rangle = \bar{m}\eta|\bar{\alpha}_T \rangle \end{aligned}$$

C.Q.F.D

- Les temps de vie des particules et antiparticules sont égaux

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= \sum_f \langle f|T\alpha \rangle \langle f|T\alpha \rangle^* = \sum_f \langle \alpha|T^\dagger f \rangle \langle f|T\alpha \rangle \\ \Gamma_{\bar{\alpha}} &= \sum_{\bar{f}} \langle \bar{f}|T\bar{\alpha} \rangle \langle \bar{f}|T\bar{\alpha} \rangle^* = \sum_{f_{PT}} \langle \alpha_{PT}|T f_{PT} \rangle \langle f_{PT}|T^\dagger \alpha_{PT} \rangle \end{aligned}$$

On utilisera alors la relation d'unitarité qui implique $TT^\dagger = T^\dagger T$ lorsque l'on effectue une somme complète sur tous les états intermédiaires, c'est-à-dire tous les états finaux. On obtient ainsi :

$$\Gamma_\alpha = \langle \alpha|T^\dagger T|\alpha \rangle = \langle \bar{\alpha}|T^\dagger T|\bar{\alpha} \rangle = \Gamma_{\bar{\alpha}}$$

Dans la dernière relation, nous avons substitué α à α_{PT} , les opérations spatiales P et T n'affectant évidemment pas le temps de vie. Il est cependant nécessaire de sommer sur *tous* les états finaux accessibles à partir d'un état initial donné pour bénéficier de la relation $TT^\dagger = T^\dagger T$, si bien que les largeurs *partielles* ne sont pas deux à deux égales pour les particules et antiparticules (voir exercice 10). On devra en outre prendre garde à l'antiunitarité de CPT :

$$\langle f | H | i \rangle = \langle i_{CPT} | H | f_{CPT} \rangle$$

Lorsque l'on exprime le lagrangien en termes de champs, comme dans le paragraphe suivant, cette relation n'est vérifiée qu'en choisissant les phases de manière que $\eta_c \eta_P \eta_T = 1$.

4-6 La symétrie CP

La symétrie *CPT*, qui est vérifiée par toutes les interactions, est très importante : une observation impliquant sa violation bouleverserait la théorie des champs. Les tests de *CPT* sont cependant peu nombreux hors les trois exemples mentionnés, puisqu'on relie une transition à la transition renversée de temps, en général peu accessible (voir toutefois les exercices du chapitre 12). Au contraire, la symétrie *CP* relie des états conjugués de charge et se prête à de nombreux tests. On va voir qu'elle équivaut à la réalité des constantes de couplage qui apparaissent dans le lagrangien. Les expressions du type $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$ sont hermitiques lorsque le champ A_μ est associé à une particule neutre, donc réel. La constante de couplage g qui multiplie ce terme doit alors être réelle pour préserver l'hermiticité de l'hamiltonien. Cette contrainte disparaît dans le couplage à un boson chargé W_μ^\pm . On imposera par analogie que $CP W^\mu (CP)^{-1} = -W_\mu^*$. Le lagrangien d'interaction considéré précédemment n'est *PAS* invariant par *CP* si les constantes de couplage sont complexes :

$$CP \mathcal{L} (CP)^{-1} = \bar{\Psi}_l \gamma^\lambda (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_\nu W_\lambda^- + \bar{\Psi}_\nu \gamma^\lambda (g_V^* - g_A^* \gamma^5) \Psi_l W_\lambda^+$$

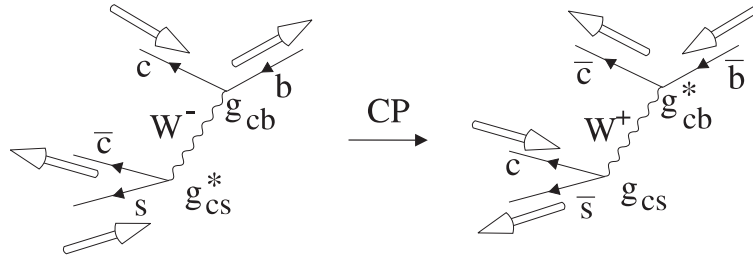


Figure 8.15 : constantes de couplage de deux transitions reliées par CP

Si $\mathcal{L} = (CP) \mathcal{L} (CP)^{-1}$ l'invariance de \mathcal{L} implique une égalité des termes deux à deux.

$$\frac{g_V}{g_A} = \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^*$$

avec l'égalité des phases relatives. Pour un choix de phases globales (inobservables) réelles : $g_A = g_A^*$ et $g_V = g_V^*$. Les phases provenant des parités intrinsèques des fermions ont été omises : On peut (presque) toujours choisir $\eta_C = 1$. La quasi-conservation de *CP* dans l'interaction faible impose alors

l'égalité de toutes les phases η_P des champs fondamentaux couplés. Les constantes de couplage seront réelles si on adopte la convention $\eta_P = 1$.

Inversement, la violation de la symétrie CP correspond à la présence de phases "intrinsèques" dans le lagrangien, intrinsèques s'entendant comme non éliminables par une redéfinition des champs. On verra dans le chapitre 11 que cette situation est liée dans la théorie électrofaible à la présence de trois familles de quarks. Les contraintes de la théorie des champs sont telles que la brisure d'une symétrie discrète (CP) implique l'existence d'une troisième famille de quarks (t, b). Cette théorie n'étant prédictive que s'il y a autant de familles dans les quarks et les leptons, la découverte de la violation de CP dans la désintégration des K en 1964 annonçait la découverte du charme, de la beauté, du top, et du lepton τ . La figure 8.15 représente deux transitions faibles qui se correspondent par une transformation CP . Si la symétrie CP était vérifiée, les constantes g_{cs} et g_{cb} seraient réelles. Elles ne le sont pas, comme on le verra au chapitre 11.

EXERCICES

I- La Conjugaison de charge

- [1] Montrer que les transformations de phase des opérateurs b et d permettent de se ramener au cas $\eta_C = 1$ sans affecter les relations de commutation ou d'anticommutation.
- [2] La symétrie C implique-t-elle que les interactions des e^+ et des e^- ou des π^+ et des π^- dans un appareillage soient les mêmes?
- [3] C est conservée dans les interactions fortes, et électromagnétiques, mais pas dans les interactions faibles. On examine la désintégration de neutrons et antineutrons ayant la même polarisation selon Oz . Les taux de protons et d'antiprotons sont-ils égaux dans une direction donnée?
- [4] On produit des ρ^0 polarisés selon Oz . Ils se désintègrent en e^+e^- . Que peut-on dire du taux de e^+ et e^- dans une direction quelconque ?
- [5] On veut accélérer des protons et des antiprotons à la même énergie. Faut-il construire deux anneaux et deux systèmes d'accélération ?

- [6] Montrer que, pour un champ de Majorana, le courant vecteur $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = 0$. En déduire que le nombre fermionique est nul. Montrer que lorsque l'énergie tend vers zéro, les amplitudes de diffusion d'un neutrino de Majorana tendent vers celles d'un neutrino de Dirac.
- [7] Montrer que seul le courant axial va contribuer dans la diffusion neutrino et dans la désintégration du Z^0 pour un champ de Majorana.
- [8] Quels vont être les leptons finals produits par un neutrino de Majorana ? Quel va être le taux total de courants neutres dans la désintégration du Z^0 ?
- [9] Un vecteur $C = -1$, $J^P = -1$ peut-il se désintégrer en deux fermions de Majorana identiques ayant une conjugaison de charge η_c réelle en conservant C ?
- [10] Quelle est la symétrie interne associée à la charge des particules ?
- [11] Montrer que pour un système boson-antiboson de L donné $C = (-)^{L+S}$. Retrouver la conjugaison de charge de π^0 , η^0 , ρ^0 , ω^0 , Υ , Ψ , χ en les considérant comme formés d'une paire quark-antiquark.
- On admettra pour la compréhension des nombres quantiques que les parités intrinsèques de f et \bar{f} sont opposées.*
- [12] Faut-il modifier le résultat concernant la conjugaison du système $f\bar{f}$ si le fermion est identique à l'antifermion (c'est le cas pour les fermions de Majorana comme le photino, ou peut-être, le neutrino) ?
- [13] Examiner l'annihilation de e^+e^- au repos ($L = 0$) en deux ou trois gammas selon le spin total.
- [14] On considère un Z^0 polarisé le long de oz qui se désintègre en $\mu^+\mu^-$. Si le Z est dans un état propre de C et que la conjugaison de charge est conservée, peut-il y avoir une asymétrie haut-bas des μ^+ ?
- [15] Une interaction e^+e^- (oz selon le faisceau) non polarisés peut elle produire un Z^0 polarisé selon oz si C est conservé ?
- [16] L'annihilation $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ par l'intermédiaire d'un photon peut-elle produire une asymétrie $\mu^+\mu^-$?
- [17] La même réaction avec 2 photons intermédiaires produit-elle une asymétrie ? Que se passe-t-il si les amplitudes à 1 et 2 photons interfèrent ?
- [18] Trouver la G parité du ω avec $J^{PC} = 1^{--}$, $I = 1$ et celle du η avec $J^{PC} = 0^{-+}$ et $I = 0$.

- [19] Donner le transformé par G de la combinaison de champs de l'espace $(u, d) u^\dagger \tau^+ d$ (où $u^\dagger = (u^\dagger \quad 0)$, etc...). Sous l'action de $e^{i\pi\tau/2}$

$$u^\dagger \rightarrow u^\dagger \epsilon^T$$

$$d \rightarrow \epsilon d$$

$$\epsilon^T \tau^+ \epsilon \rightarrow -\tau^-$$

Les composantes d'isospin sont transformées selon $\psi_2^\dagger \phi_1 \rightarrow (-)\phi_1^\dagger \psi_2$. Le signe $(-)$ provient de l'anticommuation des fermions, qui ne doit pas être prise en compte dans la partie spatiale.

- [20] En déduire la G parité des états hadroniques produits par des courants vecteurs et axiaux en tenant compte de la partie spatiale.
- [21] Former avec trois gluons les 2 singlets de couleur symétrique et antisymétrique par rapport aux deux premiers. Montrer que l'on a respectivement $C = +1$ (*symétrique*) et $C = -1$ (*antisymétrique*).
- [22] Par analogie avec le traitement des gluons, définir la conjugaison de charge pour les pions à l'aide des matrices de Pauli $\vec{\sigma}$. Prendre soin d'introduire le bon facteur de phase.
- [23] Un système de trois bosons vectoriels W^+, W^0, W^- forment un triplet de $SU(2)$. Comment se transforment-ils dans une transformation finie de $SU(2)$? Quelle est la relation entre W^- et le conjugué de W^+ ?

II- La parité

- [1] Quel serait l'hamiltonien non relativiste décrivant le couplage d'un boson pseudo-vecteuriel? S'il se couple à une charge magnétique (monopôle), cette particule a-t-elle une parité positive ou négative?
- [2] Etablir les valeurs permises de la phase η_{CP} pour un neutrino de Majorana si c'est un état propre de CP .
- [3] On illumine une cible non polarisée avec un faisceau à polarisation circulaire $(+)$, en observant l'intensité $I(\theta, +)$ diffusée à l'angle θ . Que peut-on dire si $I(\theta, +) \neq I(\theta, (-))$ (La polarisation est inversée en conservant le taux de polarisation) ? Quels sont les problèmes expérimentaux ?
- [4] On illumine une cible linéairement polarisée selon Oz avec une lumière non polarisée et on suppose la parité conservée. Peut-il y avoir des asymétries haut-bas ou droite-gauche ?

- [5] On considère une fonction d'onde $\phi(\mathbf{x})$. Quelle est sa transformée par parité ? Construire une représentation du groupe associé à la parité. Est-elle irréductible ? Construire à partir de $\phi(\mathbf{x})$ une représentation réductible.
- [6] Quel est le transformé par parité du spineur de Dirac associé à un neutrino ?
- [7] Est-ce qu'un neutrino peut avoir un moment magnétique normal (comme le neutron), c'est-à-dire un couplage au photon du type $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$? Peut-il avoir un couplage électromagnétique anormal $\mu\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$?
- [8] Un état de parité donnée peut-il avoir un moment dipolaire électrique ? Qu'en conclure en ce qui concerne la molécule d'eau, créée par des forces coulombiennes ?
- [9] L'existence de molécules organiques n'ayant pas la symétrie miroir implique-t-elle une violation de la parité ? Quelle est la prédiction de P à ce sujet ?
- [10] Comment pourrait-on, en principe, mettre en évidence la violation de parité du système (e, ν) en observant l'électron et sans polarisation du noyau initial (on traitera le cas de noyaux initial et finals $j = 1/2$) ? Peut-il y avoir une asymétrie haut-bas si le système hadronique n'est pas polarisé? (non). Y aurait-il une asymétrie pour un hadron initial polarisé avec l'amplitude de désintégration

$$T = G_V V_\mu \bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_\nu$$

où V_μ est un vrai quadrivecteur.

- [11] Examiner les conséquences de la conservation de C et P dans l'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. On peut traiter successivement les cas $S = 0, 1, 2$.
- [12] Dans la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, les deux gammas peuvent être dans un état de spin total $S = 0, 1, 2$. Soit \mathbf{q} la différence de leurs impulsions dans le centre de masse. L'invariance de jauge impose que les vecteurs décrivant la polarisation des photons libres vérifient $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q} = 0$. Les deux éléments de matrice possibles sont alors

$$\langle \gamma\gamma | T_{0,2} | \pi^0 \rangle = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$$

et

$$\langle \gamma\gamma | T_1 | \pi^0 \rangle = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{q}$$

Vérifier que ces deux éléments de matrice sont compatibles avec la symétrie de Bose et que un seul des deux éléments est permis pour une parité intrinsèque donnée du π .

- [13] Etendre l'expression de l'invariance par parité des amplitudes d'hélicité à un nombre quelconque de particules. La configuration géométrique est décrite par des scalaires et des pseudoscalaires associés donnant le signe des trièdes.

III- Le renversement du temps

- [1] Pourquoi la molécule d'eau a-t-elle un moment dipolaire électrique ? Dans un état stationnaire de H_2O , la valeur du moment dipolaire n'est définie que si l'axe de rotation est l'axe de symétrie de la molécule. L'état ainsi obtenu n'est *PAS* un état propre de \mathbf{J}^2 , mais seulement de J_z , et la démonstration du paragraphe 7 est invalidée. Les états propres de \mathbf{J}^2 doivent se construire à l'aide des matrices D :

$$|J, M, N\rangle = \int dR D_{MN}^J(R) |R(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, \tilde{\mathbf{p}}_3)\rangle$$

- [2] Le hamiltonien d'interaction avec un champ électromagnétique peut-il contenir des termes $\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$?
L'énergie d'un champ électromagnétique peut-elle contenir un terme scalaire $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$? En conclure que si $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, une contribution $\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ au lagrangien viole \mathcal{T} .
- [3] Que peut-on dire des constantes g_i si les amplitudes non relativistes suivantes conservent \mathcal{T} ?

$$A_1 = g_1 q \xi_p^\dagger \chi_n \xi_e^\dagger \epsilon \chi_\nu^*$$

$$A_2 = g_2 \xi_p^\dagger \vec{\sigma} \chi_n \cdot \xi_e^\dagger \epsilon \vec{\sigma} \chi_\nu^*$$

$$A_3 = g_3 q \xi_p^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{q}_N \chi_n \xi_e^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{q}_l) \epsilon \chi_\nu^*$$

$$A_4 = g_4 q \xi_p^\dagger (\vec{\sigma} \wedge \mathbf{q}_N) \chi_n \cdot \xi_e^\dagger \epsilon \vec{\sigma} \chi_\nu^*$$

$$A_5 = g_5 \xi_p^\dagger (\vec{\sigma} \chi_n \cdot \xi_e^\dagger (\mathbf{q}_N \wedge \mathbf{q}_l)) \epsilon \chi_\nu^*$$

$$(\mathbf{q}_N = \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_n) \text{ et } \mathbf{q}_l = (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu)$$

- [4] Quelle est la relation entre les deux sections efficaces $\pi^- p \rightarrow n \gamma$ et $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ en l'absence d'interactions dans les états initiaux et finals ? Comment cette relation est-elle modifiée par les interactions entre le π et le nucléon ? Cette modification est-elle observable ?
- [5] On compare les amplitudes de désintégration β du neutron pour deux polarisations opposées du neutron initial et de l'électron final. Que prédit la symétrie P si elle était vérifiée ? Que prédit la symétrie T ? Cette prédiction est-elle préservée en présence des interactions électromagnétiques dans l'état final ?
- [6] Une paire d'antennes est composée d'un émetteur et d'un récepteur. Peut-on appliquer la symétrie \mathcal{T} aux amplitudes du champ électrique $\mathbf{E}(t_1, \mathbf{x}_1)$ et $\mathbf{E}(t_2, \mathbf{x}_2)$? Comment doit être formulée la relation qui découle de T ?

IV- Les expressions covariantes

- [1] Peut-on observer la violation de CP dans la désintégration semileptonique d'un quark b par échange de W ? Examiner les taux et les polarisations du lepton final.
- [2] Peut-on observer la violation de CP dans la désintégration hadronique du quark b en ccu (On supposera que les constantes de couplage aux vertex faibles sont complexes).
- [3] On compare les taux de $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ et $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{p}\pi^+$ en supposant que les états $p\pi^-$ et son conjugué interagissent fortement avec une phase Φ . Montrer que deux diagrammes contribuent avec l'échange de 1 W . Comment sont reliées les phases des diagrammes (Λ) et de leur conjugué ?
- [4] Une interaction électromagnétique $F_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\psi$ est-elle permise? Quelles sont les symétries discrètes violées ? Montrer que la limite non relativiste est de la forme $\vec{E} \cdot \vec{D}$ et calculez \vec{D} . Quelles seraient les propriétés d'un photon pseudo-vectorel couplé de cette manière ?
- [5] Une interaction faible $\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\psi_1 W_\mu W_\nu$ avec production de deux bosons W conserve-t-elle CP ?
- [6] Quelle est la conséquence de CPT dans la désintégration du K^0 ?
- [7] Montrer qu'une polarisation longitudinale de l'électron dans la désintégration du neutron viole CP
- [8] Pour des champs fermioniques ψ ou scalaires ϕ , de parité intrinsèque positive, examiner la conservation des trois symétries discrètes pour les lagrangiens d'interaction suivants :

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ & \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi \\ & \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi \\ & \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\partial_\mu\phi \end{aligned}$$

- [9] A partir de $CP|e_L^- \rangle = |e_R^+ \rangle$, montrer que $(CP)^2 \neq \mathbf{1}$. Quel est l'effet de $(CP)^2$ sur $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ et $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$.
- [10] Quelle est la relation de phase entre les amplitudes faibles $A(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$ et $\bar{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$ si on néglige les interactions finales ? On se placera dans l'approximation où seul l'ordre le plus bas de la constante de couplage faible contribue, et on remarquera que comme dans le paragraphe 6 de la section IV, l'opération CP peut être utilisée, même si CP n'est pas une

symétrie de l'interaction. L'état final $\pi^+\pi^-$ est décrit par ses nombres quantiques L, T, T_3 . Quelles sont leurs valeurs possibles ? On décrira l'interaction dans l'état final par les deux déphasages δ_0 et δ_2 . Quelle est la relation entre ces deux déphasages pour deux états image l'un de l'autre par CP ? En déduire que les deux amplitudes A et \bar{A} ont des modules différents.