

Chapitre 7

LES SYMETRIES DE SAVEUR $SU(2)$ ET $SU(3)$ DES HADRONS

1- LA SYMETRIE de SAVEUR $SU(2)_F$

1-1 Introduction

On a montré dans les chapitres 4 et 5 que le lagrangien de QCD était invariant de saveur à l'approximation des masses de quarks égales, et que cette symétrie se conservait approximativement pour de petites différences de masse. Les états liés de quarks (mésons et baryons) vont pouvoir être classés dans des représentations irréductibles ou multiplets de $SU(2)$ à une très bonne approximation ($m_u \sim m_d = 5 - 10 MeV$) ou de manière plus qualitative dans des représentations de $SU(3)$ ($m_s \sim 150 MeV$). L'assignation des hadrons à ces multiplets est largement empirique et se fait en fonction des propriétés observées, en particulier leurs propriétés spatiales : le moment angulaire et la parité sont communs à un multiplet et les masses doivent être voisines. Chaque hadron pourra être identifié à un état formé d'un certain nombre de quarks du point de vue de ses nombres quantiques, et nous avons déjà utilisé cette notation auparavant. Celle-ci est uniquement classificatoire et ne représente pas la structure réelle du hadron, qui est plus proche de l'image fournie par la figure 7.1.

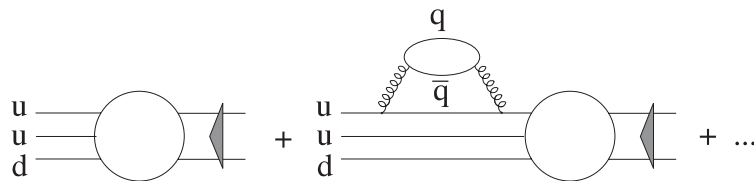


Figure 7.1 : Quelques contributions à la structure d'un proton.

Les “quarks de valence” qui correspondent à la configuration la plus simple ayant les mêmes nombres quantiques jouent cependant un rôle plus important que la complexité de la figure 7.1 ne le laisserait soupçonner : il est possible

de décrire de manière approchée un hadron par des quarks “habillés” par les interactions fortes, les quarks “constituants”. Ceux-ci conservent les nombres quantiques usuels des quarks, mais ils ont une masse plus élevée ($m'_u = 300$ MeV), et subissent une interaction “effective” moins forte que QCD, leur structure prenant en compte une partie importante de cette interaction.

1-2 La symétrie $U(2)_F$

a- La base des états u et d

Le lagrangien de QCD (avec $m_u = m_d$) est invariant pour des transformations unitaires à deux dimensions $U(2)$ de l'espace des saveurs (u, d). Dans la théorie des champs, les opérateurs de ce groupe sont engendrés par les charges T_i (également notées I_i) comme on l'a vu au chapitre 5 :

$$T_i(t) = T_i(0) = \int d\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t)^\dagger \frac{\tau_i}{2} \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$U = \exp\{-i\alpha_i T_i\}$$

Les opérateurs U agissent sur les champs de quarks et les états obtenus par l'action de ces champs sur le vide. Les états de base sont $|e^1\rangle$ et $|e^2\rangle$ avec $|e^1\rangle = |u\rangle$ et $|e^2\rangle = |d\rangle$. Un état à un quark (non observable, il est confiné et sa charge n'est pas définie !) s'écrira $|q\rangle = q^1|e^1\rangle + q^2|e^2\rangle$. On caractérisera une opération de symétrie $u = e^{-i\alpha_k \tau_k/2}$ du groupe $SU(2)$ par sa matrice représentative V . Dans une représentation à deux dimensions $V = u$. On rappelle que les trois opérateurs τ_i sont identiques aux matrices de Pauli σ_i , mais agissent dans l'espace des saveurs ($|u\rangle, |d\rangle$). Les états de base se transforment alors comme

$$U(u)|e^i\rangle = V_{ji}|e^j\rangle \quad (7.1.1)$$

On écrira souvent par souci de brièveté $|u\rangle = |e^1\rangle$ et $|d\rangle = |e^2\rangle$ si bien que u désignera tantôt un état, tantôt une composante sur cet état (et même, parfois, une matrice de $SU(2)$). Les composantes q^1 et q^2 d'un état sur la base $|u\rangle, |d\rangle$ vont se transformer par la matrice $V = u$.

$$U \sum_i q^i |e^i\rangle = \sum_i q^i |e^i\rangle' = \sum_i q^i V_{ji} |e^j\rangle = q'^j |e^j\rangle$$

$$\begin{aligned} q'^i &= V_{ij} q^j \\ q' &= Vq \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Remarque : nous n'utilisons pas la convention de sommation des indices d'Einstein, la raison en apparaîtra plus loin.

Sous l'action d'une opération de symétrie, les champs ψ_u et ψ_d vont être transformés par l'opérateur $U(u) = e^{-i \sum_i \alpha_i T_i}$. En notant $V = e^{-i \alpha_i \lambda_i / 2}$

$$U(u) \psi^{\dagger i} U(u)^{\dagger} = V_{ji} \psi^{\dagger j}$$

On retrouve la transformation des états en agissant sur le vide.

b- La base des états \bar{u} et \bar{d}

Les champs libres définis au chapitre 4 sont associés à une paire particule-antiparticule, et l'action de l'opération $U(u)$ sur ψ_u et ψ_d impose la transformation simultanée des quarks et antiquarks. Les états antiquarks de base sont $|\bar{u}\rangle = |\bar{e}_1\rangle$ et $|\bar{d}\rangle = |\bar{e}_2\rangle$, et un état d'antiquark générique sera noté

$$|\bar{q}\rangle = \bar{q}_1 |\bar{e}_1\rangle + \bar{q}_2 |\bar{e}_2\rangle$$

Les indices des états d'antiquarks seront en position inférieure, ceux des quarks en position haute, pour indiquer la différence des lois de transformation.

$$U \psi^{\dagger i} U^{-1} = V_{ji} \psi^{\dagger j}$$

$$U \psi^i U^{-1} = V_{ji}^* \psi^j$$

Par action sur le vide, on obtient :

$$\begin{aligned} U(u) |\bar{e}_i\rangle &= V_{ji}^* |\bar{e}_j\rangle \\ \bar{q}'_i &= V_{ij}^* \bar{q}_j \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de $U(2)$, il se trouve que les représentations conjuguées $[2]$ et $[\bar{2}]$ sont équivalentes. En effet

$$V^* = \epsilon V \epsilon^{-1} \det(V) \quad (7.1.3)$$

où la matrice ϵ est

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a vu au chapitre 5 comment on pouvait alors utiliser la même transformation unitaire pour les quarks et les antiquarks en choisissant de nouveaux états de base $|\bar{a}^i\rangle = |\bar{e}_j\rangle \epsilon^{ji}$ avec $U |\bar{a}^i\rangle = V_{ji} |\bar{a}^j\rangle$.

1-3 De $U(2)$ à $SU(2)$

a- Systèmes de quarks et hadrons

Un système de quarks va se transformer comme le produit tensoriel des états à un quark. Dans la base $|e_1^i\rangle \otimes |e_2^i\rangle \otimes \dots |e_n^i\rangle$ des états, i_k peut prendre

deux valeurs (1 pour u , 2 pour d). La composante $T^{i_1 i_2 \dots i_n}$ devient dans une opération de $SU(2)$

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_n} = V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} \dots V_{i_n j_n} T^{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Comme on l'a vu précédemment, on utilise les indices inférieurs pour la transformation des composantes sur des états d'antiquarks. C'est ainsi que

$$T_j'^i = V_{ik} (V_{jl})^* T_l^k$$

La trace $\sum_i T_i^i$ est alors un invariant à cause de l'unitarité des matrices V . La distinction entre les indices hauts et bas est en réalité inessentielle pour $U(2)$, les matrices V et V^* étant équivalentes (relation (7.1.3)), et la combinaison $\sum_i T^{ii}$ est également invariante. Au contraire, la différence entre deux représentations conjuguées s'imposera pour $U(3)$.

b- La conservation du nombre baryonique

On va montrer dans le cadre de la matrice S que l'invariance $U(2)$ entraîne la conservation du nombre baryonique. Dans la transition entre un système hadronique initial $|h_i\rangle$ et un système final $|h_f\rangle$, les hadrons vont se transformer comme des produits tensoriels d'états de quarks et d'antiquarks. La matrice unitaire V est le produit d'une matrice de $SU(2)$ (dont le déterminant est égal à 1) par un facteur de phase arbitraire $e^{i\phi}$, comme le montre l'examen du nombre de paramètres :

- $U(2)$: 4 paramètres
- $SU(2)$: 3 paramètres (comme le groupe des rotations $O(3)$ auquel il est isomorphe).

On va se restreindre, dans une première étape, à l'examen des transformations de phase $V = e^{i\phi}$, et supposer que l'opération de symétrie U commute avec la matrice S d'une diffusion de hadrons. A tout hadron, on peut associer un nombre baryonique qui est celui du système de quarks ayant les mêmes nombres quantiques :

$$B = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}})$$

où n_q est le nombre de quarks et $n_{\bar{q}}$ celui d'antiquarks. L'opérateur U agit sur les états initiaux et finals, et commute avec la matrice S :

$$\langle h_f | S | h_i \rangle = \langle U h_f | U S h_i \rangle = \langle U h_f | S U | h_i \rangle$$

$$\langle h_f | S | h_i \rangle = e^{i(n_f - n_i)\phi} \langle h_f | S | h_i \rangle \quad \forall \phi$$

Les nombres n_f et n_i sont les différences entre les nombres de quarks et d'anti-quarks dans les états initiaux et finals. Il en résulte la conservation de cette différence :

$$n_f = (n_q - n_{\bar{q}})_f = n_i = (n_q - n_{\bar{q}})_i = \frac{B}{3} \quad (7.1.4)$$

Cette invariance $U(1)$ entraîne ainsi la conservation du nombre baryonique. Nous contraindrons cette phase en imposant aux éléments du groupe un déterminant unité. La symétrie de saveur proprement dite sera associée au groupe $SU(2)$, et le groupe $U(1)$ supplémentaire contenu dans $U(2)$ n'a pas d'autre conséquence physique que la conservation de B . On le résume en notant :

$$U(2) = U(1) \otimes SU(2)_F \quad (7.1.5)$$

l'indice F évoquant le mot de saveur (*flavour*).

c- La symétrie $SU(2)_F$ de saveur

Tableau 7.I : Exemples de multiplets d'isospin.

Le Nucleon composition masse	P uud 938,27	N ddu 939,56	
L'Hypéron Σ	Σ^+ uus 1189,4	Σ^0 uds 1192,5	Σ^- dds 1197,5
Le Pion	π^+ $u\bar{d}$ 139,6	π^0 $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ 135,0	π^- $d\bar{u}$ 139,6
Le Méson D	D^+ $c\bar{d}$ 1869,3	D^0 $c\bar{u}$ 1864,5	
Le Méson de beauté B	B^+ $u\bar{d}$ 5278,6	B^0 $d\bar{u}$ 5278,7	
Un triplet nucléaire $A = 12$	${}^{12}_7N$	${}^{12}_6C$	${}^{12}_5B$

Nous nous limitons maintenant aux transformations $SU(2)$. C'est la symétrie d'isospin. Le tableau 7.I décrit le contenu en quarks (ou nucléons) de quelques multiplets simples. Il y a également des scalaires d'isospin, comme le méson η , l'hypéron Λ , qui trouveront naturellement leur place dans la symétrie $SU(3)$.

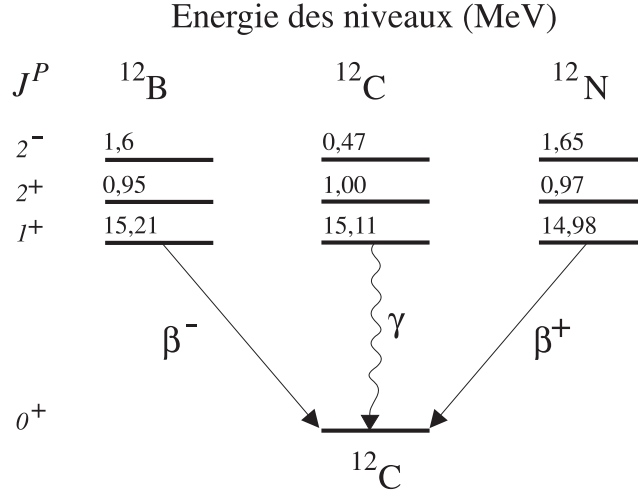


Figure 7.2 : Les niveaux du triplet nucléaire $A=12$.

Comme le groupe d'invariance est le même que celui qui est apparu dans l'étude de l'invariance par rotation : $SU(2)$, les représentations (multiplets) sont les mêmes, et les coefficients de Clebsch-Gordan permettant de décomposer un produit de représentations seront également identiques. Les conséquences expérimentales se manifestent de deux manières :

- existence de multiplets de dimension $(2I + 1)$, I entier ou demi entier, d'états ayant (presque) la même énergie, c'est-à-dire la même masse, comme sur le tableau 7.I et sur la figure 7.2. La dégénérescence prédite par la symétrie est "presque" exacte, les écarts n'excédant pas quelques MeV .
- Relations entre les amplitudes obtenues à l'aide de coefficients de Clebsch-Gordan, comme pour le moment angulaire.

On donnera un exemple concernant la diffusion πN .

$$|\pi_m N_n\rangle = |\pi, N : 1, m, 1/2, n\rangle = \sum_{I, K} |\pi N : I, K\rangle \langle I, K | 1, m, 1/2, n\rangle$$

$$\langle \pi_\mu N_\nu | T | \pi_m N_n \rangle = \sum_I \langle 1, \mu, 1/2, \nu | I, K \rangle T^I \langle I, K | 1, m, 1/2, n \rangle$$

C'est précisément la similarité des propriétés de certains isomères nucléaires et de leurs niveaux qui a conduit Heisenberg à deviner que les forces nucléaires étaient invariantes pour des transformations unitaires dans l'espace (P, N) . Cette invariance reflète l'invariance de QCD pour des transformations unitaires dans l'espace (u, d) .

2- LA SYMETRIE DE SAVEUR $SU(3)_F$

2-1 Le groupe abstrait $SU(3)_F$

La masse du quark s , avec $m_s = 150 \sim 200$ MeV est élevée par rapport à celle des quarks (u, d) . La symétrie de saveur du lagrangien de QCD est brisée par les termes de masse, ce qui entraîne une dispersion de celles-ci de l'ordre de m_s dans les multiplets de $SU(3)$, soit d'environ 20% (les masses des multiplets d'isospin ne diffèrent que de quelques pour cent). La symétrie $SU(3)_F$ conserve cependant un excellent pouvoir prédictif pour :

- la *classification* des particules en multiplets,
- les relations entre diverses *amplitudes de transition*.

Quelques propriétés générales du groupe de matrices $SU(3)_F$ sont résumées dans l'appendice B. Nous ne rappellerons ici que celles qui nous seront utiles.

-Les générateurs : on choisit par convention les 8 matrices de Gell-Mann $\lambda_i/2$ données dans l'appendice B. Elles ont une trace nulle, de manière que l'exponentiation fournisse des matrices de déterminant unité.

-L'exponentiation : toutes les matrices du groupe s'obtiennent par exponentiation des 8 matrices de Gell-Mann λ_i : $V = \exp(-i \sum_i \alpha_i \lambda_i/2)$ avec $\text{Log}(\det(V)) = \text{Tr}(\text{Log } V) = 0$.

-Les relations de commutation : $[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c$ où les *constantes de structure* f_{abc} (voir l'appendice B) sont antisymétriques pour toute permutation d'indices et invariantes par permutation cyclique.

-Orthonormalité de la base : Les matrices λ_i de Gell-Mann vérifient une condition d'orthonormalité définie à partir de la trace de leur produit : $\text{Tr}\{\lambda_a \lambda_b\} = 2\delta_{ab}$.

Les matrices λ_i engendrent le groupe de symétrie abstrait $SU(3)$, mais n'agissent pas sur les champs. Les opérateurs correspondants sont les charges définies dans le chapitre 4 :

$$F_i(t) = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\lambda_i}{2} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (7.1.6)$$

avec $F_i(t) = F_i(0)$ dans le cas d'une symétrie exacte.

2-2 Les représentations irréductibles de $SU(3)$

a- Les deux représentations fondamentales

Les représentations irréductibles de $SU(3)$ sont construites par produit tensoriel des deux représentations fondamentales à trois dimensions $[3]$ et $[\bar{3}]$, qui ne sont pas équivalentes. Dans le cas de la symétrie de saveur $SU(3)_F$, les états de base sont pour la représentation $[3]$ les états de quarks

$$|e^1\rangle = |u\rangle \quad |e^2\rangle = |d\rangle \quad |e^3\rangle = |s\rangle$$

et pour la représentation $[\bar{3}]$

$$|\bar{e}_1\rangle = |\bar{u}\rangle \quad |\bar{e}_2\rangle = |\bar{d}\rangle \quad |\bar{e}_3\rangle = |\bar{s}\rangle$$

En utilisant des notations analogues à celles de $SU(2)$, les composantes d'un état de quark

$$|q\rangle = q^i |e^i\rangle$$

se transforment sous l'action de l'opérateur $U = \exp(-i\alpha_k F_k)$ par la matrice $V = \exp(-i\alpha_k \lambda_k / 2)$

$$\begin{aligned} q' &= V q \\ q'^i &= V_{ij} q^j \end{aligned}$$

Les états de base eux mêmes se transforment selon

$$U|e^i\rangle = V_{ji}|e^j\rangle$$

Un état d'antiquark $|\bar{q}\rangle = \sum_k \bar{q}_k |\bar{e}_k\rangle$ sera transformé par la matrice conjuguée $(V_{ij})^*$

$$\begin{aligned} \bar{q}' &= V^* \bar{q} \\ \bar{q}'_i &= (V_{ij})^* \bar{q}_j \\ U|\bar{e}_i\rangle &= (V_{ji})^* |\bar{e}_j\rangle \end{aligned}$$

Le tenseur $T_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ se transformera comme le produit de n composantes de quarks et m composantes d'antiquarks :

$$(T')_{j_1 l_2 \dots l_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} = V_{i_1 k_1} V_{i_2 k_2} \dots V_{i_n k_n} (V_{j_1 l_1})^* (V_{j_2 l_2})^* \dots (V_{j_m l_m})^* T_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_n}$$

L'ensemble des 3^{m+n} composantes du tenseur obtenu par simple produit des composantes quarks et antiquarks ne forme pas une représentation irréductible. On forme un sous-espace invariant plus petit par contraction avec les tenseurs

invariants $\delta_{i_1}^{j_1}$ et $\epsilon_{i_1 i_2 \alpha}$ ou $\epsilon^{j_1 j_2 \beta}$. On montre (comme pour $SU(2)$), que les conditions de symétrie et de trace nulle sont également suffisantes pour que le tenseur soit irréductible. La représentation irréductible obtenue est de dimension

$$d(n, m) = \frac{1}{2}(n+1)(m+1)(n+m+2)$$

Cette méthode aboutit à l'utilisation des tableaux d'Young, présentés dans la plupart des ouvrages de théorie des groupes. Ceux-ci ont l'avantage de fournir une approche systématique pour trouver les représentations contenues dans un produit.

b- Isospin et hypercharge

Nous présenterons ici les multiplets les plus fréquemment rencontrés. Compte tenu du caractère approché de cette symétrie, les masses ne sont pas toutes égales à l'intérieur d'un multiplet. Ceci rappelle un peu la brisure de dégénérescence des niveaux par effet Zeeman dans un champ magnétique : l'égalité des énergies n'est vérifiée qu'à champ nul, mais les niveaux magnétiques restent voisins. Dans le cas de l'interaction forte, la brisure provient de la différence de masse des quarks, et non d'un champ externe. Le groupe $SU(3)$ est de rang 2, c'est-à-dire qu'il y a deux générateurs qui peuvent être diagonalisés simultanément, et on choisit l'isospin (T, T_3) et l'hypercharge (Y) pour décrire les états liés hadroniques. Dans l'espace des états, ces générateurs s'expriment en fonction des champs de quarks et des générateurs du groupe λ_i , comme on l'a vu à l'occasion du théorème de Noether.

$$T_3 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger \lambda_3 \psi$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger \lambda_8 \psi \qquad Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$$

Au lieu de l'hypercharge, on utilise aussi la notion d'étrangeté S : $Y = B + S$ avec $S = -1$ pour le quark s , et $S = 0$ pour les quarks u et d . Les éléments de matrice de T_3 et Y pour un état hadronique donné sont déterminés par les nombres quantiques du hadron et ne dépendent pas de sa structure interne. La figure 7.3 montre les valeurs de T_3 et Y assignées aux quarks et aux antiquarks.

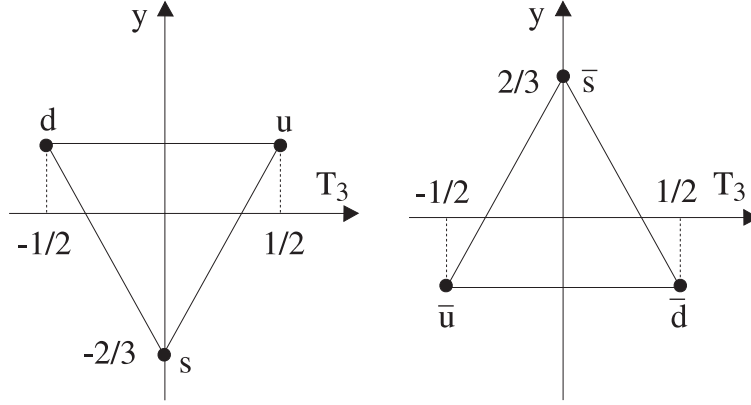


Figure 7.3 : Les triplets fondamentaux des quarks [3] et des antiquarks [3].

c- La brisure de $SU(3)$

La symétrie de saveur ne peut relier que des états de même 4-impulsion, donc de même masse. Pour un courant conservé $F_i(t) = F_i(0)$. L'invariance par translation implique alors $E_f = E_i$, puis $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i$. En effet :

$$\langle h_f | F_i(0) | h_i \rangle = \langle h_f | F_i(t) | h_i \rangle = e^{i(E_f - E_i)t} \langle h_f | F_i(0) | h_i \rangle$$

$$\langle h_f(p_f) | F_i(0) | h_i(p_i) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \langle h_f | \psi^\dagger(0) \frac{\lambda_i}{2} \psi(0) | h_i \rangle$$

Les multiplets physiques sont en réalité constitués de particules de masses différentes. On dit alors que $SU(3)$ est brisée. A la limite de la symétrie exacte, toute autre paire de générateurs commutant entre eux aurait convenu pour la classification : nous n'aurions pas les moyens de distinguer les états propres correspondants (par interaction forte), de même qu'en l'absence de champ magnétique, tous les états quantiques de même nombre magnétique sont indiscernables. C'est à cause de la manière dont $SU(3)$ est brisée que le choix de T_3 et Y s'impose :

- La charge Q est conservée par toutes les interactions. Les états liés seront forcément propres de la charge, donc de $T_3 + Y/2$.
- La brisure de $SU(3)$ provient essentiellement de la masse du quark s , et les états ayant la même étrangeté dans un multiplet ont des masses très voisines, la symétrie $SU(2)$ étant presque exacte. Les multiplets d'isospin apparaissent alors de manière évidente dans le plan (S, T_3) équivalent à (Y, T_3) , qui est ainsi bien adapté à la représentation des hadrons. Gell-Mann a poussé plus loin cette remarque en proposant que la brisure de $SU(3)$ dans les masses est due à une interaction qui se transforme comme un octet de $SU(3)$, tel $\bar{\psi} \lambda_8 \psi$, et c'est bien le cas dans QCD .

2-3 Les multiplets usuels de $SU(3)_f$

a- Les mésons

les mésons sont constitués d'une paire $q_1 \bar{q}_2$ (il vaudrait mieux parler de pseudo quarks, on dit aussi quarks-constituants). Le produit tensoriel de $[3]$ et $[\bar{3}]$, qui a 9 dimensions contient un singlet et un octet :

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [1] + [8]$$

Les mésons pseudoscalaire ($J^P = 0^-$) et vectoriels ($J^P = 1^-$) se classent effectivement dans deux octets représentés sur la figure 7.4, complétés par deux particules isolées dans deux singlets. $\sum q^k \bar{q}_k$ est un singlet, et le tenseur $M_j^i = q^i \bar{q}_j - \frac{1}{3} \sum_k (q^k \bar{q}_k)$ a bien 8 composantes indépendantes dans la base cartésienne $|e^i > \otimes |\bar{e}_j >$. L'état de composantes M_j^i pourra être noté $|M >$. Il peut se réexprimer dans la base des mésons pseudoscalaires ou vectoriels par identification des nombres quantiques (voir exercices 6 et 7). En toute rigueur, les états propres d'isospin π^+ et \bar{K}^0 sont construits (conformément à (7.1.3)) avec $-\bar{d}$ et non pas \bar{d} , et c'est $-\pi^+$ et $-\bar{K}^0$ qui devraient figurer dans la matrice M_j^i . Nous suivons ici la coutume.

$$M_j^i = \begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\frac{\eta}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Par convention, l'indice i des quarks est celui des lignes. On a ainsi une représentation matricielle de l'octet. Comme les 8 matrices λ_a forment une base complète des matrices hermitiennes de trace nulle, les 8 composantes indépendantes m_a sont trouvées par projection en prenant la trace du produit par λ (rappelons que $Tr\{\lambda_a \lambda_b\} = 2\delta_{ab}$) :

$$M = \sum_{a=1}^8 m_a \lambda_a = (q)(\bar{q})^T - \frac{1}{3} \mathbf{1} \bar{q}^T(q) \quad (7.2.1)$$

$$m_a = \frac{1}{2} Tr\{M \lambda_a\} = \frac{1}{2} \bar{q} \lambda_a q \quad (7.2.2)$$

q est le vecteur des composantes q^i sur $|u >, |d >, |s >$, et \bar{q} les composantes \bar{q}_j . Les composantes m_a d'un état de l'octet sont les projections sur la base cartésienne

$$|M_a > = (|u >, |d >, |s >) \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\bar{u} > \\ |\bar{d} > \\ |\bar{s} > \end{pmatrix}$$

On a tenu compte dans ces expressions de la normalisation des matrices λ_a . Les composantes m_a se transforment conformément à l'expression (7.2.1) par $SU(3)$:

$$M' = VMV^\dagger \quad (7.2.3)$$

La loi de transformation des composantes m_a s'en déduit

$$m'_a = \frac{1}{2} \text{Tr}\{V\lambda_b V^\dagger \lambda_a\} m_b \quad (7.2.4)$$

Le produit scalaire de deux états de matrices M_1 et M_2 est

$$\langle M_1 | M_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}\{M_1^\dagger M_2\} = \sum_a (m_a^1)^* m_a^2$$

et l'unitarité de V assure son invariance.

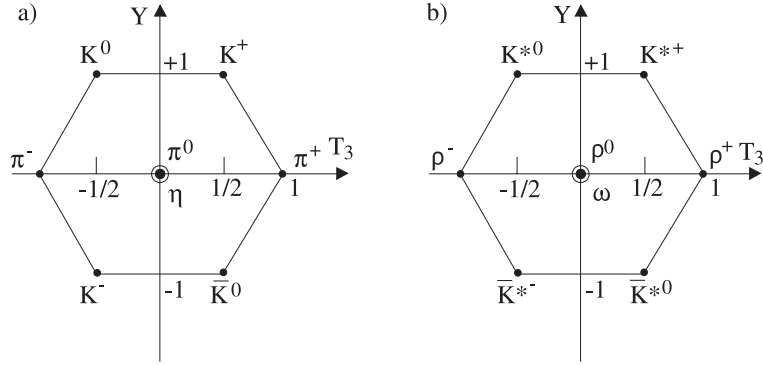


Figure 7.4 : a) L'octet des mésons pseudoscalaires. b) L'octet des mésons vectoriels.

b- Les baryons

Les baryons peuvent être considérés comme formés de 3 quarks quant à leur classification dans $SU(3)$. Dans ce cas simple, les représentations irréductibles contenues dans le produit $[3] \otimes [3]$ des deux premiers quarks se trouvent simplement : la combinaison $D_k = \epsilon_{ijk} q_1^i q_2^j$ appartient manifestement à $[\bar{3}]$, alors que le tenseur symétrique est un $[6]$, si bien que $[3] \otimes [3] = [\bar{3}] + [6]$ (le seul tenseur qui fournisse un scalaire par contraction avec un $[3]$ est un $[\bar{3}]$). Il reste à multiplier par le troisième quark. On a déjà vu que $[\bar{3}] \otimes [3] = [1] + [8]$. L'octet de la figure 7.5a s'obtient par exemple dans la décomposition $[6] \otimes [3] = [10] + [8]$ par la combinaison de composantes $B_l^i = \epsilon_{jkl} (q_1^i q_2^j + q_1^j q_2^i) q_3^k$. Le décuplet se décrit par un tenseur complètement symétrique à trois indices :

$$T^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sum_P q_1^i q_2^j q_3^k \right)$$

où la somme sur les permutations P implique une symétrisation par rapport au numéro d'ordre des trois quarks, donc par rapport aux indices i, j, k .

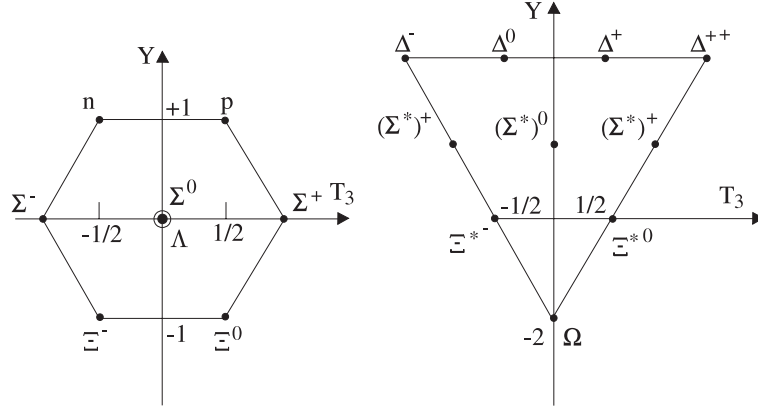


Figure 7.5 : a) L'octet des baryons $J^P = (1/2)^+$. b) le décuplet $J^P = (3/2)^+$.

Le nombre de composantes indépendantes est alors $C_2^{n+2} = 10$ pour un nombre de quarks $n = 3$ (le nombre de partitions en trois parties d'une collection de n points). La symétrisation des composantes de saveur pour un décuplet $J^P = (3/2)^+$ est compatible avec le principe de Pauli. La fonction d'onde de spin des trois quarks est complètement symétrique dans l'état $(3/2)^+$, et les composantes de couleur sont antisymétrisées pour obtenir un singlet $\epsilon_{ABC} q_1^A q_2^B q_3^C$. On note en particulier l'existence du $\Delta^{++} = |uuu\rangle$, et du $\Omega = |sss\rangle$ composés de trois quarks identiques. La figure 7.5b décrit le décuplet ($J^P = 3/2^+$) des baryons. L'étalement régulier de la masse des multiplets d'isospin reflète directement le nombre de quarks s contenus, comme le montre l'exercice 17. Comme précédemment, l'octet des baryons peut se représenter sous une forme matricielle :

$$B_j^i = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

La loi de transformation de B_j^i est la même que celle de M_j^i . Les composantes de saveur doivent être combinées aux composantes de spin pour obtenir des fonctions d'ondes *symétriques*. L'octet peut en effet être symétrique ($[8]_S$) ou antisymétrique ($[8]_A$) par rapport aux deux premiers quarks, et il en va de même des composantes de spin lorsque $J^P = (1/2)^+$. La construction de la fonction d'onde complète des baryons dans ce cadre est proposée à l'exercice 18. Ce sont ces indications manifestes en faveur d'une fonction d'onde spin-saveur symétrique pour des fermions identiques qui ont donné naissance aux premiers soupçons concernant le nouveau nombre quantique de couleur, ou "charge hadronique"

spécifique des interactions fortes. L'antisymétrisation propre aux fermions est assurée par les coordonnées de couleur qui doivent être combinées en un singlet complètement antisymétrique. Le modèle des quarks, associé à l'antisymétrie de couleur, rend compte de l'existence d'un octet $(1/2)^+$ et d'un décuplet $(3/2)^+$ pour les baryons. Bien entendu, l'amplitude relative des composantes $[8]_S$ et $[8]_A$ est arbitraire en l'absence d'informations dynamiques supplémentaires.

c- Quelques baryons de saveurs lourdes

La structure en multiplets de $SU(3)$ subsiste pour les baryons de saveur lourde, mais la symétrie $SU(4)$ n'a aucun intérêt compte tenu de la masse du quark charmé (1.5 GeV).

- Le singlet $\Lambda_c(udc)$: $M_{\Lambda_c} = 2284.9$ MeV
- Le triplet Σ_c : $\Sigma_c^0(ddc)$ $\Sigma_c^+(udc)$ $\Sigma_c^{++}(uuc)$; $M_{\Sigma_c} = 2452.6$ MeV
- Le doublet Ξ_c : $\Xi_c^+(usc)$ $\Xi_c^0(dsc)$; $M_{\Xi_c} = 2473$ MeV
- Le singlet Ω_c : Le baryon $\Omega_c^0(ssc)$ n'a pas encore été trouvé.

3- LES OPERATEURS TENSORIELS DE $SU(3)$

3-1 L'octet des courants de $SU(3)$

Les deux derniers paragraphes de ce chapitre, un peu techniques, ont pour but de préparer le formalisme nécessaire pour les formules de masse, les moments magnétiques, et les facteurs de forme des baryons.

a- La transformation des courants

Les courants $J_k^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu(\lambda_k/2)\psi$ interviennent dans les transitions électro-faibles qui seront discutées au chapitre 11. L'indice μ est un indice de Lorentz, l'indice k est associé à l'une des 8 matrices de Gell-Mann, et les champs ψ ont 3 composantes de saveur et 4 composantes de Dirac. Les composantes de Dirac ne jouant aucun rôle dans ce qui suit, nous substituerons à ψ la notation ψ^\dagger : $(\psi)^\dagger = (\psi_u^\dagger, \psi_d^\dagger, \psi_s^\dagger)$. Les 3 champs ψ_i se transforment selon les lois données au chapitre 5 :

$$U\psi_i^\dagger U^{-1} = V_{ji}\psi_j^\dagger$$

$$U\psi_i U^{-1} = V_{ji}^*\psi_j$$

et sous une forme matricielle

$$U\psi^\dagger U^{-1} = \psi^\dagger V \quad U\psi U^{-1} = V^\dagger \psi$$

On formera une matrice de courants

$$J = \sum_k J_k \lambda_k = \psi\psi^\dagger - \frac{1}{3}(\psi^\dagger\psi)\mathbf{1}$$

dont la loi de transformation par $SU(3)$ est, compte tenu de l'unitarité de V

$$J' = V^\dagger \psi\psi^\dagger V - \frac{1}{3}(\psi^\dagger V^\dagger V \psi) = V^\dagger J V \quad (7.3.2)$$

La composante J'_k s'obtient en projetant sur λ_k :

$$J'_k = \frac{1}{2} \text{Tr}\{V^\dagger \psi\psi^\dagger V \lambda_k\}$$

et en substituant à la matrice $\psi\psi^\dagger$ son expression à l'aide des courants $\psi^\dagger \lambda_l \psi$:

$$J'_k = \frac{1}{2} \sum_l \text{tr}\{V^\dagger \lambda_l V \lambda_k\} \psi^\dagger \frac{\lambda_l}{2} \psi$$

$$J'_k = \frac{1}{2} \sum_l \text{Tr}\{V^\dagger \lambda_l V \lambda_k\} J_l \quad (7.3.3)$$

(J'_k est également égal au transformé $\psi^\dagger V \lambda_k V^\dagger \psi$ de J_k). La matrice des courants se transforme par la matrice *inverse* de celle des composantes de l'octet (7.2.3) définies par l'équation (7.2.2). On dit que les 8 opérateurs J_k , qui se transforment comme 8 vecteurs de base $|e_k\rangle$ de l'octet, forment un octet d'opérateurs tensoriels irréductibles. Le produit scalaire $\langle e_k | J_l | 0 \rangle$ est invariant, et nous l'utiliserons dans les exercices de ce chapitre et au chapitre 11.

3-2 Définition des opérateurs tensoriels irréductibles

Dans une représentation irréductible quelconque (q) de dimension N de $SU(3)$ soient $|q, k\rangle$ les états de base, avec $k = 1, 2, \dots, N$. Ces états se transforment selon

$$U |q, k\rangle = \sum_l |q, l\rangle \langle q, l | e^{-i\alpha F_i} | q, k\rangle = \sum_l |q, l\rangle D_{l,k}^q(u) \quad (7.3.4)$$

et pour les composantes d'un état $|h\rangle$

$$h'_k = \langle q, k | U | h \rangle = D_{kl}^q(u) h_l \quad (7.3.5)$$

La matrice $u = \exp(-i\alpha_i \lambda_i/2)$ est ici l'élément de $SU(3)$ qui définit la transformation choisie. Les générateurs F^i sont dans cette base les matrices

$$\langle q, l | F_i | q, k \rangle = (F_i)_{lk}$$

On dira que les opérateurs O_k^q forment une famille d'opérateurs tensoriels irréductibles s'ils se transforment (compte tenu de la loi de transformation des champs) selon

$$U O_l^q U^{-1} = D_{kl}^q(u) O_k^q \quad (7.3.6)$$

c'est-à-dire comme les états. Cette loi est choisie de manière à garantir l'invariance du produit $\sum_k h_k^* O_k^q$. Pour une transformation infinitésimale

$$U = \mathbf{1} - i\alpha_i \cdot F^i, \text{ on a}$$

$$[F^i, O_l^q] = \sum_k O_k^q F_{kl}^i \quad (7.3.7)$$

3-3 Le cas particulier de l'octet

Les lois de transformations établies pour l'octet au paragraphe 3 permettent de trouver simplement l'expression des matrices D pour l'opérateur $U = e^{-i\alpha \cdot F}$. Soient $|8, k\rangle$ les états de la base cartésienne et m_a la projection sur l'état $|8, a\rangle$ de l'état associé à la matrice M .

$$m'_a = \langle 8, a | U | M \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ V \lambda_b V^\dagger \lambda_a \} \langle 8, b | M \rangle$$

En identifiant à l'équation (7.3.5) :

$$D_{ab}^8(e^{-i\alpha \cdot \lambda/2}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ V \lambda_b V^\dagger \lambda_a \}$$

Il est intéressant d'appliquer cette relation à une transformation infinitésimale $U = \mathbf{1} - i\alpha_l \cdot F_l$

$$\langle 8, b | F_l | 8, a \rangle = -\frac{1}{4} \text{Tr} \{ \lambda_i [\lambda_b, \lambda_a] \} = -if_{iba}$$

Les éléments de matrice des générateurs de la représentation [8] de $SU(3)$ sont les constantes de structure du groupe multipliées par un facteur $-i$.

La relation générale (7.3.6), appliquée à l'octet des courants prend alors la forme

$$[F_i, J_k] = if_{ikl} J_l$$

On donnera quelques exemples souvent rencontrés :

- Les 8 matrices λ_k forment un octet d'opérateurs dans la base à 3 dimensions des saveurs $|q_i\rangle$. Les générateurs F_i y sont représentés par les $\lambda_i/2$.
- Les 8 générateurs du groupe forment un octet. Soit M la matrice représentant l'état $|M\rangle$ de l'octet :

$$F^i|M\rangle = |[\lambda_i/2, M]\rangle \quad (7.3.8)$$

(la démonstration est laissée en exercice)

- On peut construire un autre octet d'opérateurs à partir des matrices D_i , que nous définirons tout d'abord dans l'octet.

L'anticommutateur de deux matrices λ_i , étant hermitien, peut se décomposer sur la base $(\mathbf{1}, \lambda_i)$.

$$\left\{\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right\} = d_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (7.3.9)$$

L'action de l'opérateur D_i sur un état de l'octet sera par définition :

$$D_i|M\rangle = \left|\left\{\frac{\lambda_i}{2}, M\right\} - \mathbf{1} \frac{Tr\{M\lambda_i\}}{3}\right\rangle$$

Le terme proportionnel à la matrice unité élimine la trace provenant de l'anticommutateur. On vérifie que

$$D_i = \frac{2}{3} d_{ijk} F_j F_k$$

ce qui permet d'étendre la définition à toutes les représentations. Il est montré dans l'exercice 14 que

$$[F_i, D_j] = i f_{ijk} D_k \quad (7.3.10)$$

c'est-à-dire que les 8 matrices D_k forment un octet d'opérateurs.

3-4 Le théorème de Wigner-Eckart

a- L'énoncé du théorème

C'est principalement l'existence du théorème de Wigner-Eckart, et la possibilité de former des invariants qui donne son intérêt à la notion d'opérateur tensoriel irréductible. Ce théorème utilise la loi de groupe pour relier entre eux les éléments de matrice d'une famille d'opérateurs $\langle q_2 k_2 | O_l^q | q_1 k_1 \rangle$. Si on applique une transformation U aux champs (ou aux états)

$$\langle q_2 k_2 | O_l^q | q_1 k_1 \rangle = \langle q_2 k_2 | U^{-1} O_l^q U^{-1} U | q_1 k_1 \rangle$$

En utilisant les lois de transformation des états et des opérateurs tensoriels

$$\begin{aligned} \langle q_2 k_2 | O_l^q | q_1 k_1 \rangle &= \sum_{l_2 m_2 m} (D_{l_2 k_2}^{q_2}(u))^* D_{l_1 k_1}^{q_1}(u) D_{ml}^q(u) \\ &\langle q_2 l_2 | O_m^q | q_1 l_1 \rangle \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Le membre de droite contient le produit des représentations $[q]$ et $[q_1]$. Le résultat n'est indépendant de u que si ce produit contient la représentation $[q_2]$ de manière à former un scalaire. En intégrant sur la mesure invariante du groupe, et en tirant partie de l'orthonormalité des matrices D pour cette mesure :

$$\begin{aligned} \sum_{l_1 l_2} \langle q_2 l_2 | O_l^q | q_1 l_1 \rangle &= [\int du (D_{l_2 k_2}^{q_2}(u))^* (D_{nl}^q(u))^* D_{l_1 k_1}^{q_1}(u)] \\ &= \langle q_2 k_2 | O_n^q | q_1 k_1 \rangle \end{aligned}$$

qui est de la forme

$$\langle q_2 k_2 | O_n^q | q_1 k_1 \rangle = \sum_{\alpha} C(q_2, k_2, \alpha | q, l; q_1, k_1) \langle q_2 || O_{\alpha}^q || q_1 \rangle \quad (7.3.12)$$

où l'indice α identifie les différentes représentations de dimension (q) . L'équation (7.3.12) résume le théorème de Wigner-Eckart

- Les éléments de matrice d'une famille d'opérateurs tensoriels vérifient des règles de sélection assurant que les coefficients de Clebsch-Gordan ne sont pas tous nuls dans (7.3.12). Ces coefficients ne dépendent que du groupe, et pas de l'octet d'opérateurs considéré.
- Il y aura autant de constantes arbitraires $\langle q_2 || O_{\alpha}^q || q_1 \rangle$ que de façons de former la représentation $[q]$ à partir du produit tensoriel de $[q_1]$ par $[\bar{q}_2]$. Ces éléments de matrice réduits contiennent l'information physique, et dépendent de l'opérateur et de la structure physique des états impliqués.

b- Application à l'octet des baryons

On décrit les éléments de l'octet par leur 8 composantes $b_k = \langle 8k | B \rangle$, et on leur associe la matrice $B = \sum b_k \lambda_k$. Dans cette notation, comme on l'a vu $B = \sum_k b_k \lambda_k$ et

$$\langle B_2 | B_1 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ B_2^{\dagger} B_1 \}$$

D'après le théorème de Wigner-Eckart, les éléments de matrice $\langle B_2 | O_k^8 | B_1 \rangle$ vont faire intervenir 2 constantes arbitraires, puisque $8 \otimes 8$ contient deux représentations octet, les représentations symétrique et antisymétrique. Comme on connaît les éléments de matrice de deux opérateurs octets particuliers (F_i et D_i), on va pouvoir éliminer les coefficients de Clebsch-Gordan au profit de ceux-ci

$$\langle B_2 | F_k | B_1 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} (B_2^{\dagger} [\lambda_k, B_1])$$

$$\langle B_2 | D_k | B_1 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(B_2^\dagger \{\lambda_k, B_1\})$$

Les expressions $\{\lambda_k, B\}$ désignent les anticommutateurs.

(Le terme proportionnel à la matrice unité ne contribue pas, B_2 ayant une trace nulle).

$$\begin{aligned} \langle B_2 | O_k^8 | B_1 \rangle &= F \langle B_2 | F_k | B_1 \rangle + D \langle B_2 | D_k | B_1 \rangle \\ &= -F \frac{1}{2} \text{Tr}([B_2^\dagger, B_1] \lambda_k) + D \frac{1}{2} \text{Tr}(\{B_2^\dagger, B_1\} \lambda_k) \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

On peut obtenir (7.3.13) de manière plus directe : les expressions $\langle B_2 | O_i^8 | B_1 \rangle$ sont invariantes dans les transformations $SU(3)$. La seule manière d'avoir un scalaire est de contracter O_i^8 avec les composantes d'un octet, et les deux seuls octets pouvant être formés avec les composantes de B_2 et B_1 sont $B_2^\dagger B_1$ et $B_1 B_2^\dagger$. On trouve les composantes cartésiennes par projection sur λ_k .

Les résultats des paragraphes 3.1 à 3.4 trouvent des applications dans les interactions fortes (couplage de l'octet des mésons scalaires ou vecteurs aux baryons), dans les interactions électromagnétiques (moments magnétiques des hypérons), et dans la désintégration faible des hypérons, traitée au chapitre 11. Le couplage du champ électromagnétique A^μ à un baryon représenté par la matrice B est donné par $\langle B | \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi | B \rangle = A_\mu$, où Q est la matrice diagonale

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des charges et des moments magnétiques de l'octet, dans le cadre de la symétrie $SU(3)$ sont obtenus par une expression analogue à (7.3.13), en identifiant la valeur de F_Q et D_Q à l'aide de la charge des nucléons, et F_m et D_m à l'aide de leur moment magnétique comme dans l'exercice 16. Les résultats ne sont que qualitativement corrects, la masse du quark s , qui intervient directement, étant sensiblement différente de celle des quarks u et d .

4- L'INVARIANCE DES AMPLITUDES de TRANSITION

L'expression générale des lois d'invariance énoncée au chapitre 5 s'applique. Une amplitude de transition invariante par $SU(3)$ vérifiera :

$$\langle h_3 h_4 | T | h_1 h_2 \rangle = \langle U(u) h_3, U(u) h_4 | T | U(u) h_1, U(u) h_2 \rangle \quad \forall U(u)$$

Si nous savons à quelle représentation irréductible appartient chacun des états hadroniques, la matrice de transformation $U(u)$ appropriée est connue. Comme dans le cas des rotations, cette contrainte s'exprime à l'aide des représentations

irréductibles contenues dans les produits tensoriels $|h_1 > \otimes |h_2 >$ d'une part, et $|h_3 > \otimes |h_4 >$ de l'autre. Outre les décompositions déjà vues, il suffira en général d'utiliser :

$$[8] \otimes [8] = [1] + [8] + [\bar{8}] + [10] + [\bar{10}] + [27]$$

C'est ainsi que la désintégration du décuplet en baryon et méson ne dépend que d'une seule constante ; la représentation $[10]$ n'est contenue qu'une fois dans $[8] \otimes [8]$. Cette seule constante arbitraire décrit ainsi 30 désintégrations. L'amplitude de chaque canal s'obtient à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan de $SU(3)$, ou par la méthode tensorielle de l'exercice 9. L'accord constaté entre les relations prédites par $SU(3)$ et les données est excellent, et les relations attendues entre les amplitudes sont bien vérifiées malgré la brisure de la symétrie $SU(3)$: Un théorème d'Ademollo et Gatto montre que la violation dans les amplitudes est du deuxième ordre par rapport aux paramètres de brisure.

EXERCICES

- [1] Ecrire la condition d'invariance par $SU(2)$ et $SU(3)$ des amplitudes suivantes :
 $s + c \rightarrow s + c$
 $\pi^- + D \rightarrow \pi^- + D$ (D = deutérium)
 $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$
 $\pi^- p \rightarrow K^* \Lambda$
 $K^- p \rightarrow K^0 n$
- [2] Le D^{*+} est un état ($c\bar{d}$) avec $J^P = 1^-$. Quel est l'isospin du D^* ?
- [3] Le D^* peut se désintégrer en $D^0 \pi^+$ ou $D^+ \pi^-$. Donner le rapport des deux taux de désintégration à l'aide des coefficients de Clebsch.
- [4] Exprimer l'amplitude $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ en fonction des amplitudes $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ et $\pi^+ n \rightarrow \pi^+ n$.
- [5] Ecrire les fonctions d'onde de saveur de Λ et Σ^0 à l'aide des expressions tensorielles de $SU(3)$. On devra annuler la trace des deux expressions : $S_l^k = \epsilon_{ijl}(q_1^i q_2^k + q_1^k q_2^i) q_3^j$ et $A_l^k = \epsilon_{ijl} q_1^i q_2^j q_3^k$. Pour le Λ , on choisira la partie antisymétrique en ud , et on trouvera pour $[8]_A$ $usd + sdu - sud - dsu - 2dus + 2uds$, et pour $[8]_S$ $(sud + usd - sdu - dsu)$. Pour le Σ^+ ,

on choisit la partie symétrique en ud et on obtient les deux contributions $\Sigma_S^0 = sdu + sud + usd + dsu - 2uds - 2dus$, $\Sigma_A^0 = sud + sdu - usd - dsu$.

- [6] On forme le tenseur T_j^i tel que $Tr(T_j^i) = 0$

$$T_j^i = q^i \bar{q}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \sum_k (q^k \bar{q}_k)$$

Démontrer la relation (utilisée dans le chapitre 8)

$$T_j^i = \frac{1}{2} \sum_a (\bar{q}^T \lambda_a q) (\lambda_a)^{ji}$$

avec $Tr\{\lambda_a, \lambda_b\} = 2\delta_{ab}$.

- [7] Comment se transforme T dans une transformation infinitésimale $U = 1 + i\epsilon_a \lambda^a$.
- [8] Montrer en utilisant l'unitarité et l'invariance cyclique de la trace que $Tr\{T_1 T_2\}$ est un invariant de $SU(3)$. En déduire, à l'aide de transformations infinitésimales, l'antisymétrie des constantes de structure par rapport à deux des indices.
- [9] Le décuplet est décrit par un tenseur T^{ijk} symétrique. Il y a une seule manière de construire un décuplet à partir des matrices B_j^i et M_j^i représentant l'octet des baryons et des mésons. Donner la formule et calculer toutes les amplitudes (il faut utiliser le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk}).
- [10] A quel multiplet de $SU(3)$ appartiennent les baryons charmés ? S'il existe des baryons avec deux quarks charmés, à quelle représentation de $SU(3)$ appartiendront-ils ?
- [11] Construire l'octet des baryons $(1/2)^+$ à partir de 3 quarks. Il y a deux tenseurs possibles : les combiner à la fonction de spin appropriée.
- [12] Montrer que les matrices F_i définies par $(F_i)_{jk} = f_{ijk}$, où les f_{ijk} sont les constantes de structure du groupe vérifient la relation de commutation $[F_i, F_j] = if_{ijk} F_k$ en utilisant l'identité de Jacobi.
- [13] Démontrer la relation (7.3.8) qui exprime l'action du générateur F_i sur l'état M .
- [14] Montrer que les opérateurs $D_i = 2/3 d_{ijk} F_j F_k$ forment un octet. On pourra utiliser l'équations (7.3.6), en prenant la trace du commutateur avec λ_l du membre de gauche pour obtenir une relation utile entre les coefficients f_{ijk} et d_{ijk} . Cette relation permet d'établir (7.3.7) à l'aide des relations de commutation des opérateurs F_i .

- [15] Trouver les relations entre les masses d'un octet en supposant que l'opérateur octet qui est à l'origine de la brisure est $O_8^8 = \bar{\psi}\lambda_8\psi$.
- [16] Trouver les relations entre les moments magnétiques de l'octet des hyperons à l'aide de la matrice de charge Q des trois quarks :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

On supposera que les moments magnétiques sont proportionnels aux éléments de matrice de l'opérateur $\bar{\psi}Q\psi$ et que les constantes F et D doivent être choisies de manière à reproduire μ_p et μ_n . Montrer que l'on trouve les valeurs suivantes : $\mu_p = -F + D/3$, $\mu_n = -2D/3$, $\mu_\Lambda = -D/6$, $\mu_{\Sigma^+} = -F + D/3$, $\mu_{\Sigma^-} = F + D/3$, $\mu_{\Xi^-} = F + D/3$, $\mu_{\Xi^0} = -2D/3$.

- [17] Comparez les valeurs de moment magnétique trouvées à l'exercice précédent avec les valeurs réelles exprimées en magnétons nucléaires: 2,79 (p), -1,91 (n), 0,61 (Λ), 2,42 (Σ^+), -1,16 (Σ^-), -1,23 (Ξ^0), -0,65 (Ξ^-), -2,02 (Ω), -1,61 ($\Sigma\Lambda$). L'accord est meilleur dans le cadre du modèle des quarks où le moment magnétique μ_s est laissé libre : on complètera les fonctions de saveur trouvées à l'exercice 5 par des fonctions de spin agencées de manière à avoir une fonction d'onde spin-saveur symétrique. Montrer qu'en partant de A_t^k (exercice 5), on obtient pour le nucléon :

$$\begin{aligned} |p+\rangle = & 2u_+d_-u_+ + 2u_+u_+d_- + 2d_-u_+u_+ - u_-(d_+u_+ + u_+d_+) \\ & -d_+(u_+u_- + u_-u_+) - u_+(d_+u_- + u_-d_+) \end{aligned}$$

On prendra l'élément de matrice de l'opérateur moment magnétique en supposant $\vec{m} = g\vec{s}$ et en ajoutant de manière cohérente les contributions d'une composante, et de manière incohérente les différentes composantes. Montrer que $\mu_p = 1/3(4\mu_u - \mu_d)$ et $\mu_n = 1/3(4\mu_d - \mu_u)$.

- [18] Etablir les autres relations : $\mu_\Lambda = \mu_s$, $\mu_{\Sigma^+} = 1/3(4\mu_u - \mu_s)$, $\mu_{\Sigma^-} = 1/3(4\mu_d - \mu_s)$, $\mu_{\Xi^0} = 1/3(4\mu_s - \mu_u)$, $\mu_{\Xi^-} = 1/3(4\mu_s - \mu_d)$