

## Chapitre 6

### DIFFUSION ET TEMPS DE VIE

#### 1- LES DIFFERENTS TYPES DE DIFFUSION

##### 1-1 Notion de section efficace

Soit un faisceau de particules interagissant avec une cible de longueur  $L$  comme on l'a représenté sur la figure 6.1. On supposera pour simplifier que le faisceau initial est monochromatique, et que la cible est constituée de petits disques "noirs" de surface  $\sigma$  et de densité volumique  $\rho$ . Un disque est dit "noir" s'il est totalement absorbant. La probabilité d'interaction vaut 1 si la particule de faisceau intercepte sa surface.

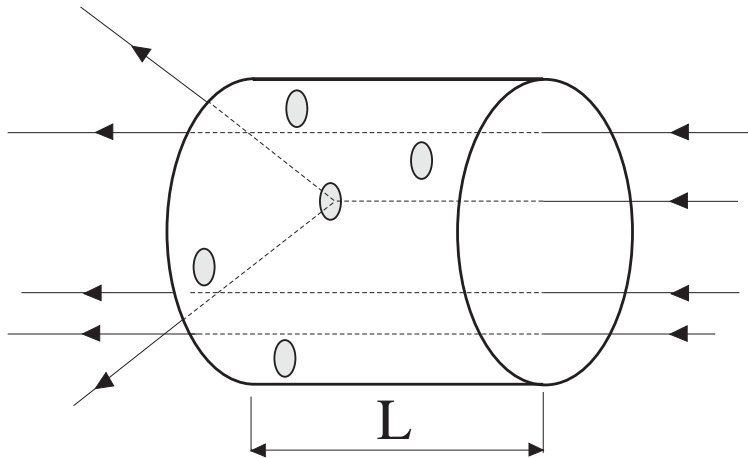


Figure 6.1 : Diffusion et section efficace.

La probabilité d'interaction d'une particule de faisceau avec la cible sera :

$$P = \frac{\text{flux interagissant}}{\text{flux incident}} = \rho L \sigma$$

La surface  $\sigma$  appelée section efficace caractérise ainsi la probabilité d'interaction d'une particule incidente avec une particule cible, et elle sera directement dé-

terminée par l'expérience. On définit une section efficace partielle  $\Delta\sigma$  en se restreignant à un sous ensemble des états finals permis :

$$\Delta N_{interactions} = N_{incident} \rho L \Delta\sigma$$

### 1-2 Les différentes interactions

On a vu que les sections efficaces dépendent de la portée des forces. Cette dernière, qui est déterminée par la masse des champs virtuels échangés est très différente selon l'interaction considérée.

#### a- Les sections efficaces fortes

Les sections efficaces fortes, comme  $\sigma(\pi^+p)$  sur la figure 6.2, ont un comportement très irrégulier à basse énergie qui sera expliqué plus loin, et elles varient peu au delà de 2 GeV. Aux énergies plus élevées apparaît une croissance logarithmique. On définit pour des raisons de commodité le barn :

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad 1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2 = 10^{-31} \text{ m}^2.$$

La portée de l'interaction étant de l'ordre de 1 fm =  $10^{-15}$  m, les sections efficaces trouvées sont de l'ordre de grandeur attendu, soit de 3 à 4 (fm)<sup>2</sup>.

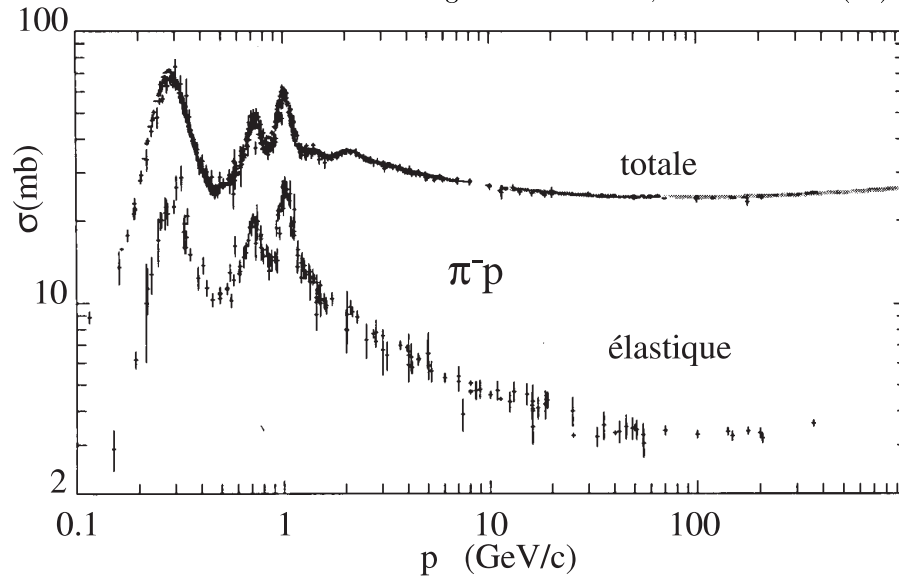


Figure 6.2 : La section efficace totale  $\pi^-p$ .

*b- Les sections efficaces électromagnétiques*

A cause de la portée infinie des interactions électromagnétiques, les sections efficaces de diffusion, comme la diffusion élastique  $ep \rightarrow ep$  sont infinies. Ceci correspond bien à la déflexion classique par une charge, quelque soit la distance d'approche, et c'est la probabilité différentielle de déflexion à un angle donné (non nul) qui reste finie. On prendra plutôt l'exemple de l'annihilation  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  de la figure 2.5. La portée de l'interaction est alors caractérisée par la masse du photon virtuel  $\sqrt{s}$ , et on s'attend à une décroissance du rayon en  $1/s$  qui est effectivement observée. On établira au chapitre 9 que :

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{\pi\alpha^2}{s} = \frac{86.8 \cdot 10^{-33} \text{ cm}^2}{s(\text{GeV}^2)} = \frac{86.8 \text{ nb}}{s(\text{GeV}^2)}$$

*c- Les sections efficaces faibles*

Un exemple typique est donné par la diffusion de neutrinos et d'antineutrinos sur des nucléons. La portée est reliée à  $\hbar/M_Wc$ , et ces sections efficaces, très faibles, varient *linéairement* avec l'énergie du neutrino lorsqu'elle est comprise entre 1 GeV et 1 TeV :  $\sigma^\nu/E = 0,69 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2/\text{GeV}$ ,  $\sigma^{\bar{\nu}}/E = 0,33 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2/\text{GeV}$ . Le rapport de ces deux sections efficaces, ainsi que la dépendance linéaire dans cette gamme d'énergie sont liés à des propriétés élémentaires de l'interaction faible qui seront exposées au chapitre 11.

**1-3 Les temps de vie caractéristiques des 3 interactions**

Une autre catégorie de mesures concerne le "temps de vie" des particules instables. On détermine ainsi leur probabilité de désintégration par unité de temps :

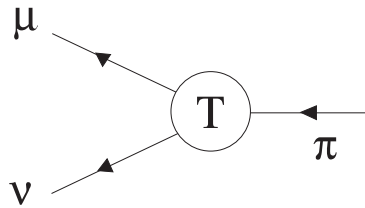


Figure 6.3 : Désintégration d'un pion chargé.

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{\tau} = -\frac{dN}{N(t)}$$

si bien que  $N(t) = N_0e^{-t/\tau}$  où  $N(t)$  est le nombre de particules qui survivent au temps  $t$ .

La largeur totale  $\Gamma = \hbar/\tau$  a la dimension d'une énergie : les relations d'incertitude associent en effet un temps caractéristique  $\Delta t = \hbar/\Gamma$  à une incertitude sur l'énergie (largeur)  $\Gamma$ . La largeur partielle vers un canal final donné sera définie par :

$$\Gamma_i = \frac{\Delta N_i}{N_{tot}} \Gamma_{tot}$$

$\Delta N_i$  : nombre de désintégrations vers les états finals choisis,

$N_{tot}$  : nombre de désintégrations considérées.

Une particule instable ne correspond pas à un état stationnaire de l'hamiltonien, et si on se restreint au seul canal initial, la norme de l'état ne se conserve pas dans le temps. On peut représenter son évolution par une énergie complexe  $\psi(t) = e^{-i(\bar{E}-i\Gamma)t/2}\psi(0)$ . Lorsque l'on ne considère pas l'ensemble des canaux accessibles, l'Hamiltonien n'est plus hermitien, et ses valeurs propres ne sont plus réelles. La partie non hermitienne  $H - H^*$  reflète la probabilité de désintégration vers les autres canaux. Le temps de vie dépend de

- La nature de l'interaction responsable de la désintégration. Celle-ci sera bien sur d'autant plus rapide que l'interaction est forte.
- La masse des particules finales vis à vis de la particule mère. Plus "l'espace de phase" disponible est important, plus la désintégration est rapide.

Les temps de vie observés font apparaître trois plages clairement séparées, mais la dispersion à l'intérieur de la zone correspondante est considérable pour l'interaction faible.

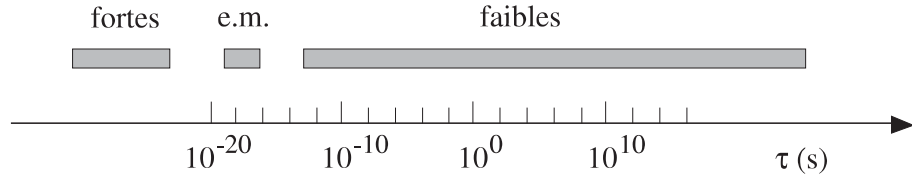


Figure 6.4 : Temps de vie des particules élémentaires selon les interactions.

La hiérarchie des amplitudes relatives aux diverses interactions possibles est très marquée, et c'est toujours la plus grande des amplitudes permises qui dominera, les autres donnant des corrections inobservables. On appelle résonances les particules instables sous l'interaction forte ; elles ont d'ordinaire des temps de vie de l'ordre de  $10^{-23}$  s, et se manifestent par des maxima des sections efficaces totales ou différentielles à la masse de la résonance, comme sur la figure 6.2, avec des largeurs de l'ordre de 100 MeV. Il y a quelques exemples de particules se désintégrant électromagnétiquement comme le  $\pi^0$  ( $\tau = 8.4 \cdot 10^{-17}$  s) ou le

$\eta(\tau = .55 \cdot 10^{-18} \text{ s})$ . Ces désintégrations conservent la saveur, mais la masse de la particule ( $\pi^0$ ), ou des lois de conservation ( $\eta$ ) interdisent une transition forte. Les mêmes temps caractéristiques sont observées dans les désintégrations électromagnétiques des noyaux.

### 1-4 Exemples de désintégrations faibles

La désintégration faible conduit à des temps de vie variant de  $10^{-13} \text{ s}$  à des milliers d'années. Elle survient lorsque pour une raison quelconque (lois de conservation) la désintégration ne peut être ni électromagnétique ni forte. C'est le volume d'espace de phase cinématiquement accessible qui est à l'origine de la dispersion considérable des temps de vie.

**Le Muon ( $\mu$ ).** La conservation de la charge électrique impose la présence d'électrons (ou de positrons) dans l'état final, avec le neutrino nécessaire pour assurer la conservation des nombres leptoniques :

$$\begin{array}{ll} \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu & \tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ (\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e) & \text{est interdit} \end{array}$$

**Le Pion chargé ( $u\bar{d}, d\bar{u}$ ).** Les pions, de masse 138 MeV sont de très loin les plus légers des hadrons. Les pions chargés  $\pi^+, \pi^-$  se désintègrent en muons ou en électrons, et comme précédemment, la conservation des nombres leptoniques impose la présence d'un neutrino. La désintégration des pions chargés est une transition faible du type

$$\begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{array}$$

avec un temps de vie de  $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ . L'espace de phase est plus grand dans la voie électronique ( $\pi \rightarrow e \nu_e$ ), mais l'amplitude est proportionnelle à la masse du lepton (à cause des propriétés du couplage faible), ce qui interdirait  $e^- \bar{\nu}$  si la masse de l'électron était nulle.

Le diagramme associé à cette désintégration est représenté sur la figure 6.5 .

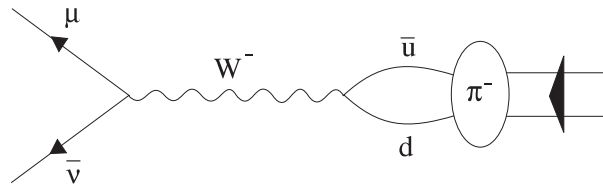


Figure 6.5 : La désintégration  $\pi \rightarrow \mu\nu$ .

**Le Kaon ( $u\bar{s}, d\bar{s}$  et les antiparticules).** C'est le plus léger des hadrons étranges, et il se désintègre en particules non étranges par interaction faible, comme sur

la figure 6.6. Les principales voies de désintégration des kaons chargés sont :

$$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \text{ (63.5\%)} \quad \pi^+ \pi^0 \text{ (21\%)} \quad 3\pi \text{ (7\%)} \quad \tau = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Bien que le kaon soit beaucoup plus lourd que le pion, son temps de vie est du même ordre de grandeur. La différence provient en partie de la constante de couplage de la transition, plus petite pour  $s \rightarrow W u$  que pour  $u \rightarrow W d$ .

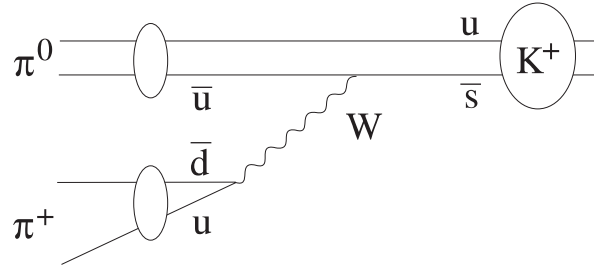


Figure 6.6 : La désintégration  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$

**Le Neutron ( $udd$ ).** La conservation du nombre baryonique impose la présence d'un proton dans l'état final. La transformation d'un quark  $d$  en un quark  $u$  n'est possible que par interaction faible, et la conservation du nombre leptonique n'est vérifiée que si l'état final comprend la paire ( $e^-$ ,  $\bar{\nu}_e$ ).

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

L'énergie disponible, très faible, explique le temps de vie long  $\tau_n = 887$  s.

**Les hypérons.** Les hypérons sont des baryons étranges tels que  $\Lambda(S = -1)$ ,  $\Sigma(S = -1)$ ,  $\Xi(S = -2)$ , qui se désintègrent par interaction faible avec des temps de vie de l'ordre de  $10^{-10}$  s. A titre d'exemple, on observe :

$\Lambda \rightarrow p\pi^-$  (64%)  $n\pi^0$  (36%). Le  $\Omega(S = -3)$  a une particularité : il appartient à une famille de résonances qui se désintègrent fortement en  $10^{-23}$  s, mais ses nombres quantiques interdisent, compte tenu de sa masse (1672 MeV) et de celle des autres hadrons toutes les transitions fortes. Il se désintègre faiblement avec un temps de vie de  $0.82 \cdot 10^{-10}$  s.

**Les saveurs lourdes (Charme et Beauté).** On distinguera les états excités  $D^*(c\bar{d}, c\bar{u}, c\bar{s})$ ,  $B^*(b\bar{d}, b\bar{u}, b\bar{s})$  qui sont dans un état  $J^P = 1^-$ , et se désintègrent fortement ou électromagnétiquement, des états fondamentaux pseudoscalaires de même composition en quarks :  $D$ , et  $B$ . Les seconds, de masse inférieure, ne peuvent s'hadroniser que par transformation des quarks  $b$  ou  $c$  en saveurs légères. Ces transitions faibles privilégient les amplitudes  $b \rightarrow c$  et  $c \rightarrow s$ , et les canaux dominants sont  $D \rightarrow KX$ , avec  $\tau_{D^0} = 0,4 \cdot 10^{-12}$  s,  $\tau_{D^\pm} = 1,06 \cdot 10^{-12}$  s

et  $B \rightarrow DX$  avec  $\tau_B = 1,5 \cdot 10^{-12}$  s.

## 2- LES AMPLITUDES DE DIFFUSION NON RELATIVISTES

### 2-1 La description d'une diffusion en mécanique quantique

L'équation de Schrödinger permet de prédire l'évolution d'un système quantique, et en particulier le résultat d'une expérience de diffusion. Celle-ci se présente cependant de manière un peu particulière car les états initiaux et finals observés sont très proches d'ondes planes. Les états propres d'impulsion ne conviennent cependant pas directement au calcul des probabilités de transition : ils entraînent des problèmes de normalisation (infinie) et de localisation (volume d'interaction infini). On peut éviter ces difficultés à l'aide de paquets d'onde, mais il n'y a pas de prescription universelle et les expressions sont lourdes. On substitue en fait à l'expérience réelle une diffusion idéalisée où le faisceau initial est décrit par des ondes planes  $|\Phi_a\rangle$ , solutions de l'hamiltonien libre, et étiquetées par les nombres quantiques  $a$ , et on va chercher les solutions exactes qui tendent vers  $|\Phi_a\rangle$  quand  $t \rightarrow -\infty$ , mais avec un potentiel un peu modifié. Les solutions exactes tendant vers des états libres  $|\Phi_a\rangle$  sont aussi appelés états "in".

### 2-2 Les solutions à états quantiques définis initiaux et finals

#### a- L'équation de Lippman-Schwinger pour les fonctions d'onde

Pour éviter les divergences liées à l'utilisation des ondes planes, on fait décroître exponentiellement le potentiel d'interaction aux grandes valeurs de  $t$  à l'aide d'un facteur de convergence  $\exp[-\epsilon|t|]$ . On retrouvera l'amplitude de transition exacte en prenant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Soit  $H$  l'hamiltonien,  $H_0$  l'hamiltonien libre et  $V(\mathbf{r})$  l'interaction. On utilisera la représentation d'interaction où

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi_S(t)\rangle$$

La solution de l'équation de Schrödinger en représentation d'interaction s'exprime en fonction des opérateurs  $U^+(t)$  et  $U^-(t)$  :

$$|\Psi(t)\rangle = U^+(t) |\Psi(-\infty)\rangle = U^-(t) |\Psi(+\infty)\rangle$$

L'opérateur d'évolution  $U^+(t)$  est la solution de

$$i\hbar \frac{\partial U^+(t)}{\partial t} = V_1(t)U^+(t)$$

qui tend vers l'identité quand  $t \rightarrow -\infty$ .

$$\text{avec } V_1(t, \mathbf{r}) = \exp(iH_0t/\hbar)V(\mathbf{r})\exp(-iH_0t/\hbar)e^{-\epsilon|t|/\hbar} \quad (6.2.1)$$

$V_1(t, \mathbf{r})$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ , ce qui représente le branchement progressif de l'interaction. Le paramètre  $\epsilon$ , qui assure la convergence des intégrales, sera annulé en fin de calcul.

$$U^+(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_1(t')U^+(t')dt' \quad (6.2.2)$$

On définirait de manière semblable  $U^-(t)$  avec  $U^-(+\infty) = 1$ .

La matrice  $S$  de diffusion (*scattering*) est l'opérateur unitaire qui relie les états asymptotiques :

$$|\Psi(+\infty)\rangle = S |\Psi(-\infty)\rangle$$

Il en résulte que  $S = U^+(+\infty)$  et  $S^{-1} = U^-(-\infty)$ . Soient  $|\Phi_a\rangle$  et  $|\Phi_b\rangle$  des états libres d'énergie  $E_a$  et  $E_b$  :  $H_0|\Phi_{a,b}\rangle = E_{a,b}|\Phi_{a,b}\rangle$ . L'amplitude de transition de  $|\Phi_a\rangle$  vers  $|\Phi_b\rangle$  est  $S_{ba} = \langle \Phi_b|U_+(+\infty)|\Phi_a\rangle$ . A partir de l'équation intégrale précédente pour  $U^\pm(t)$ , et en notant  $\tau = t'/\hbar$  :

$$S_{ba} = \langle \Phi_b|\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iH_0\tau}V(\mathbf{r})e^{-iH_0\tau}e^{-\epsilon|\tau|}U^+(\tau)d\tau|\Phi_a\rangle$$

Nous avons utilisé le potentiel modifié qui annule l'interaction à  $t \rightarrow \pm\infty$ , omis le facteur  $(\hbar)^{-1}$ . L'opérateur  $\mathcal{T} = i(S - \mathbf{1})\hbar$  ne contient pas la contribution de l'identité :

$$\mathcal{T}_{ba} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \Phi_b | \exp[iH_0t/\hbar]V(\mathbf{r}) \exp[-iH_0t/\hbar]e^{-\epsilon|t|/\hbar}U^+(t) | \Phi_a \rangle$$

On introduit les composantes de Fourier  $|\Psi^+(E)\rangle$ ,  $|\Psi^-(E)\rangle$  des solutions "entrantes" et "sortantes" régularisées dans la représentation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} |\Psi_a^+(E)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[i(E - H_0)t/\hbar] \exp(-\epsilon|t|/\hbar)U^+(t) | \Phi_a \rangle \\ |\Psi_b^-(E)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[i(E - H_0)t/\hbar] \exp(-\epsilon|t|/\hbar)U^-(t) | \Phi_b \rangle \end{aligned}$$

L'état  $|\Psi^+(E)\rangle$  est ainsi la composante de Fourier d'énergie  $E$  de la solution exacte de l'équation du mouvement dans la représentation de Schrödinger (et non plus dans la représentation d'interaction) qui tend vers  $|\Phi_a\rangle$  quand le temps  $t \rightarrow -\infty$ , avec un potentiel régularisé par le facteur  $e^{-\epsilon|t|/\hbar}$ . L'état  $|\Psi^-(E)\rangle$  tend de même vers  $|\Phi_b\rangle$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Comme les états  $|\Phi_a\rangle$  et  $|\Phi_b\rangle$  sont propres de  $H_0$ , l'amplitude de transition s'exprime sous la forme

$$\mathcal{T}_{ba}(E) = \langle \Phi_b | V\Psi_a^+(E = E_b) \rangle = \langle \Psi_b^-(E = E_a) | V\Phi_a \rangle \quad (6.2.3)$$



En utilisant de nouveau les équations intégrales vérifiées par  $U^+$  et  $U^-$ , on obtient pour  $\Psi^\pm$  deux équations intégrales (indépendantes du temps) dites de Lippman-Schwinger. Pour  $|\Psi^+(E)\rangle$ , par exemple, en omettant les facteurs  $\hbar$  :

$$|\Psi_a^+(E)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E-H_0)t} e^{-\epsilon|t|} |\Phi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{(i(E-H_0)-\epsilon)|t|} \int_{-\infty}^t dt' e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} e^{-\epsilon|t'|} U^+(t') |\Phi_a\rangle$$

En passant aux variables  $\tau = t - t'$  et  $t'$ , on fera apparaître  $\Psi^+(E)$  dans la deuxième intégrale, qui devient

$$-i \int_0^{+\infty} d\tau e^{(i(E-H_0)-\epsilon)\tau} V \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{iEt'} e^{-iH_0 t'} e^{-\epsilon|t'|} U^+(t') |\Phi_a\rangle = \frac{1}{(E-H_0+i\epsilon)} V |\Psi_a^+(E)\rangle$$

On voit ainsi que

$$|\Psi_a^+(E)\rangle = 2\pi\delta(E-E_a) |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E+i\epsilon-H_0} V |\Psi_a^+(E)\rangle \quad (6.2.4a)$$

et de même

$$|\Psi_b^-(E)\rangle = 2\pi\delta(E-E_b) |\Phi_b\rangle + \frac{1}{E-i\epsilon-H_0} V |\Psi_b^-(E)\rangle \quad (6.2.4b)$$

Les fonctions  $\delta(E-E_{a,b})$  qui apparaissent dans les équations (6.2.4) montrent que les états de Schrödinger provenant de l'onde plane  $|\Phi_a\rangle$  à  $t = -\infty$  ou évoluant vers l'onde plane  $|\Phi_b\rangle$  à  $t = +\infty$  sont des états stationnaires d'énergie  $E_a$  et  $E_b$ . Il est avantageux d'éliminer ces fonctions  $\delta(E-E_{a,b})$  en définissant

$$|\Psi_a^+(E)\rangle = 2\pi\delta(E-E_a) |\psi_a^+(E_a)\rangle$$

$$|\Psi_b^-(E)\rangle = 2\pi\delta(E-E_b) |\psi_b^-(E_b)\rangle$$

Les états  $|\psi^\pm\rangle$  vérifient

$$|\psi_a^+\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E_a+i\epsilon-H_0} V |\psi_a^+\rangle \quad (6.2.5a)$$

$$|\psi_b^-\rangle = |\Phi_b\rangle + \frac{1}{E_b-i\epsilon-H_0} V |\psi_b^-\rangle \quad (6.2.5b)$$

Les équations (6.2.5) sont les équations de Lippmann-Schwinger. Le comportement spatial des solutions  $\psi_a^+(E)$  et  $\psi_b^-(E)$  est schématisé sur la figure 6.7. En utilisant la limite d'un paquet d'onde temporel, un problème de diffusion, par nature non stationnaire, a pu être traité par une équation où l'énergie  $E$  est (presque) définie.

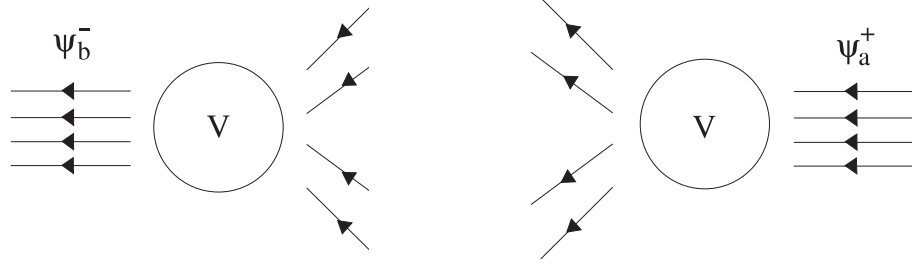


Figure 6.7 : Comportement spatial des solutions entrantes ( $\psi_a^-$ ) et sortantes ( $\psi_b^+$ ).

### 2-3 La matrice $T$

#### a- L'équation de Lippman-Schwinger pour $T$

De même que les équations 6.2.4, les relations 6.2.3 vérifiées par  $\mathcal{T}_{ba}(E)$  contiennent des fonctions  $\delta(E_b - E_a)$ . On peut obtenir en les éliminant des amplitudes  $T_{ba}$  ayant des propriétés d'analyticité en fonction de l'énergie qui sont utiles.

$$\mathcal{T}_{ba}(E) = 2\pi\delta(E_b - E_a)T_{ba}(E = E_a = E_b)$$

$$T_{ba}(E) = \langle \Phi_b | V \psi_a^+(E = E_a) \rangle = \langle \psi_b^-(E = E_b) | V \Phi_a \rangle$$

L'égalité des deux formes de l'amplitude est vérifiée lorsque  $E_a = E_b$ , c'est-à-dire sur "la couche d'énergie". On aura cependant besoin d'étendre la définition de l'amplitude à  $E_a \neq E_b$ , et on va conserver les relations précédentes pour définir deux extensions :

$$T_{ba}^+ = \langle \Phi_b | V \psi_a^+(E_a) \rangle \quad T_{ba}^- = \langle \psi_b^-(E_b) | V \Phi_a \rangle$$

En sommant sur une base complète  $|\Phi_c\rangle$ , l'équation (6.2.5) devient l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$T_{ba}^+(E_a) = V_{ba} + \sum_c V_{bc} \frac{1}{E_a - E_c + i\epsilon} T_{ca}^+(E_a) \quad (6.2.6)$$

Nous avons noté  $V_{bc} = \langle \Phi_b | V | \Phi_c \rangle$ . Les états  $|\Phi_c\rangle$  ne sont pas astreints à avoir l'énergie  $E_a$ . L'équation (6.2.6) fournit une extension naturelle de l'amplitude  $T_{ba}^+$  aux valeurs complexes du paramètre  $E$ . Elle permet de définir un opérateur  $T(E)$  pour toute valeur de  $E$  complexe par :

$$T(E) = V + V \frac{1}{E - H_0} T(E) \quad (6.2.7)$$

On retrouvera l'amplitude physique en prenant la limite

$$T_{ba} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \Phi_b | T(E = E_a + i\epsilon = E_b + i\epsilon) | \Phi_a \rangle$$

L'équation intégrale (6.2.7) se prête à un développement perturbatif qui sera utilisé au chapitre 12. Pour  $E$  réel

$$T_{ba}(E + i\epsilon) \sim V_{ba} + \sum_c V_{bc} \frac{1}{E + i\epsilon - E_c} V_{ca} + \dots$$

Les opérateurs  $T$  et  $T^\dagger$  sont reliés par la relation

$$T(E) = V + T(E) \frac{1}{E - H_0} V = V + V \frac{1}{E - H_0} T(E)$$

$$T^\dagger(E) = V + V \frac{1}{E^* - H_0} T^\dagger(E)$$

La propriété *d'analyticité hermitienne* en découle

$$[T(E)]^\dagger = T(E^*) \quad (6.2.8)$$

Nous allons examiner les singularités les plus significatives de l'amplitude, ainsi étendue aux valeurs complexes de l'énergie.

#### *b- Pôles et résonances*

L'équation (6.2.7) est formellement soluble :

$$T(E) = V + V \frac{1}{E - H_0 - V} V \quad (6.2.9)$$

et pour des éléments de matrice pris entre des ondes planes :

$$T_{ba}(E) = V_{ba} + \sum_{n,m} V_{bn} \langle n | \frac{1}{E - H_0 - V} | m \rangle V_{ma}$$

C'est volontairement que nous n'avons pas précisé le choix des états  $|n\rangle$  : il est beaucoup plus intéressant d'adopter une base complète d'états propres de l'hamiltonien total  $H_0 + V$ , formée par les états de diffusion  $\Psi^\pm$  et les états liés.

$$T_{ba}(E) = V_{ba} + V_{bn} \frac{1}{E - E_n} V_{nb} + \int_0^{+\infty} dE_n \rho(E_n) V_{bn} \frac{1}{E - E_n} V_{na} \quad (6.2.10)$$

*L'amplitude, comme fonction complexe de l'énergie, a des pôles pour les valeurs de l'énergie égales aux énergies (négatives) des états liés.* Le continuum associé aux états de diffusion correspond à une coupure de la fonction  $T(E)$  pour les énergies positives. Outre les pôles réels provenant des états liés, il existe des pôles complexes associés à des états métastables. L'hamiltonien  $H$ , bien qu'hermitien, a alors nécessairement des valeurs propres complexes d'après l'équation (6.2.9), ce qui est permis pour des états non normalisables comme les

solutions de diffusion. Ces pôles ne sont pas explicités dans le développement (6.2.10). Dans le domaine de la physique des particules, ils sont produits par la même dynamique que celle qui est à l'origine des états stables, et leur ressemblent beaucoup. On verra que les multiplets associés aux symétries internes contiennent indifféremment des états stables et instables. Ces "résonances" proviennent d'une perturbation de l'état lié créée par le potentiel. L'évolution temporelle des états instables est, dans la représentation de Schrödinger, de la forme

$$|\psi(t)\rangle \sim e^{-i(E_r - i\Gamma/2)t} |\psi(0)\rangle$$

La décroissance exponentielle reflète l'effet des désintégrations. Le comportement de l'amplitude va être donné par la transformée de Fourier, qui est une fonction de Breit-Wigner en fonction de l'énergie  $E$  :

$$T_b(E) \propto \int dt e^{iEt} \langle b | T | \psi(t) \rangle \propto \frac{1}{E - E_r + i\Gamma/2} \quad (6.2.11)$$

La présence d'un pôle complexe à  $E_r - i\gamma/2$  y est manifeste. Les variations rapides de la section efficace au voisinage d'un pôle de faible largeur (proche de l'axe réel) sont bien observables dans les interactions fortes.

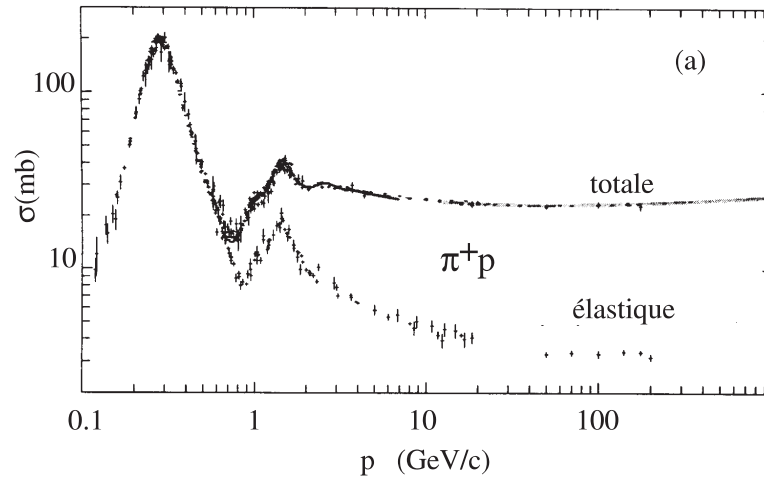


Figure 6.8 : Section efficace élastique  $\pi^+p$  dans la région des résonances. On voit la résonance  $\Delta(1236 \text{ MeV})$  et le groupe de résonances à  $1900 \text{ MeV}/c^2$ .

Les figures 6.8 et 6.9 montrent le comportement des sections efficaces de diffusion élastique  $\pi N$  et  $KN$  dans la région des résonances. Celles-ci se manifestent par des variations rapides de la section efficace. La largeur des pics

est directement reliée au paramètre  $\Gamma$  de la relation (6.2.11), et le temps de vie, conformément aux relations d'incertitude, sera  $1/\Gamma$ . La conservation de la probabilité impose une relation que nous allons expliciter entre le numérateur et le dénominateur de l'amplitude au voisinage d'un pôle.

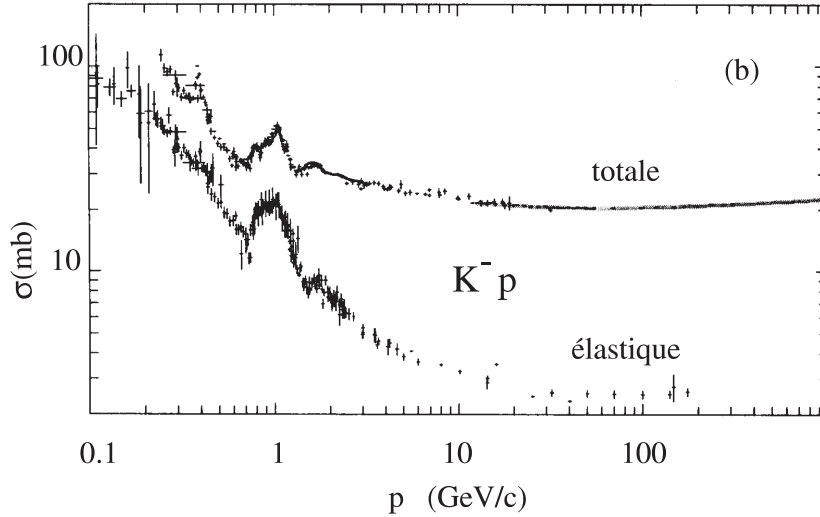


Figure 6.9 : Sections efficaces élastiques  $K^-p$  dans la région des résonances. Un groupe de résonances forme le maximum proche de  $p = 1 \text{ GeV}/c$ .

### 3- LES AMPLITUDES DE DIFFUSION RELATIVISTES

#### 3-1 Unitarité de la matrice $S$

Nous pourrions utiliser les expressions non relativistes du paragraphe précédent pour montrer l'unitarité de la matrice  $S$ . Comme celle-ci a un fondement beaucoup plus général, nous adopterons un point de vue plus physique. L'opérateur  $S$ , qui détermine l'état quantique final à partir de l'état initial (à  $t = -\infty$ ) peut être défini en l'absence d'équation de Schrödinger, et ses propriétés d'invariance et d'analyticité fournissent un cadre aux résultats expérimentaux. On postulera que, comme précédemment, les particules stables correspondent à des pôles réels de l'amplitude, et les résonances à des pôles complexes.

##### a- Les états initiaux et finals

Nous avons vu que les amplitudes de transitions  $S_{ba}$  seront en général calculées pour des ondes planes, très proches des conditions expérimentales concrètes

à l'échelle des interactions. L'état initial à deux particules est ainsi, pour un choix de normalisation correspondant à  $(2\pi)^3 2E$  particules par unité de volume

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \sqrt{2E_1 2E_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 / \hbar} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2 / \hbar}$$

où  $(E_1, \mathbf{p}_1)$  et  $(E_2, \mathbf{p}_2)$  sont les 4-impulsions. L'état final, qui peut contenir un nombre arbitraire de particules, est défini de manière analogue. Par définition, les éléments de matrice de la matrice  $S$ , pris entre deux ondes planes  $\langle f |$  et  $| i \rangle$  sont égaux au produit scalaire

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$$

$S$  agissant, comme d'ordinaire, à droite sur le ket  $| i \rangle$ .

#### b- La probabilité de transition

L'interaction est caractérisée par une amplitude de transition :

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | S \Psi_i \rangle$$

où  $S$  est la matrice de diffusion. La probabilité de transition est :

$$W(\Psi_f, \Psi_i) = \frac{|\langle \Psi_f | S \Psi_i \rangle|^2}{\langle \Psi_f | \Psi_f \rangle \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle}$$

et si l'on impose la normalisation des probabilités :

$$\sum_f W(\Psi_f, \Psi_i) = 1$$

Comme la base  $\Psi_f$  est complète  $\langle S \Psi_i | S \Psi_i \rangle = \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle \forall \Psi_i$  ce qui implique

$$S S^\dagger = \mathbf{1}$$

La matrice  $S$  est donc unitaire. Il se trouve que les interactions fortes saturent la relation d'unitarité à basse énergie, et que cette seule contrainte permet de prédire, comme on le verra, l'ordre de grandeur des sections efficaces lorsque peu de moments angulaires contribuent.

#### c- De la matrice $S$ à la matrice $T$

Les amplitudes de transition  $A_{fi}$  entre les états initiaux et finals doivent être décrites par des fonctions aussi régulières que possible des 4-impulsions présentes. On a montré que l'invariance de Lorentz implique la conservation de la 4-impulsion :

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | S | \Psi_i \rangle = \langle p_{f1}, p_{f2}, \dots, p_{fn} | S | p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in} \rangle$$

L'amplitude  $S_{fi}$  contient une distribution  $\delta^4(P_f - P_i)$  avec  $P_f = \sum p_{fk}$  et  $P_i = \sum p_{ik}$ . On est tenté de définir  $T'$  :

$$S_{fi} = T'(p_{fn}, p_{im})(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$$

mais il reste alors la "fonction"  $\delta$  associée à l'absence d'interaction, représentée par une matrice unité. Comme le représente la figure 6.10, on introduit la matrice  $T$  par la relation :

$$S_{fi} = \mathbf{1}_{fi} - (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) T_{fi}$$

La matrice  $T$  ainsi définie est adaptée au traitement d'une interaction relativiste et diffère de la convention adoptée dans la diffusion par un potentiel. Dans cette dernière, l'impulsion n'est pas conservée (à cause du rôle privilégié de l'origine), alors que l'énergie l'est. On choisira pour les états une normalisation relativiste.

$$\langle p' | p \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

Et pour plusieurs particules, par exemple :

$$\langle p'_3 p'_4 | \mathbf{1} | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^6 2E_1 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) 2E_2 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)$$



Figure 6.10 : De la matrice  $S$  à la matrice  $T$  pour  $2 \rightarrow 2$ .

Une procédure analogue peut être étendue à la diffusion de 3 particules. Bien entendu, les éléments de matrice de  $T'$  et  $T$  sont identiques dès que l'état final diffère de l'état initial, mais on évite la singularité pour des angles de diffusion nuls.  $T$  ne contient pas de fonctions  $\delta$  et a de meilleures propriétés d'analyticité que  $S$ . On peut supposer l'amplitude lentement variable quand il n'y a pas de raisons d'attendre l'inverse. Dans le cas d'une diffusion à trois particules, il faudrait répéter la procédure précédente pour éliminer les cas où seules deux des trois particules interagissent.

La matrice  $T_{fi}$  ainsi définie est identique à la matrice invariante  $\mathcal{M}_{fi}$  introduite au chapitre 9 en théorie des perturbations, et dans l'appendice C. Les deux notations se rencontrent dans la littérature, et nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre.

*d- De la matrice  $T$  à la section efficace*

Les sections efficaces et les temps de vie s'expriment en fonction des éléments de matrice de  $T$  (ou  $S$ ) à partir de la définition de la matrice  $S$  donnée au

paragraphe précédent. Le calcul nécessite cependant l'introduction de paquets d'onde, ou (ce qui en est un cas particulier) d'un volume de confinement. Pour une diffusion sur cible fixe, on démontre dans l'appendice C (voir aussi la section **3** des exercices) que :

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4p_1 m_2} \int |\langle f|T|i \rangle|^2 \delta^4(P_f - P_i) \prod_k \frac{d\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad (6.3.1)$$

le "facteur de flux"  $4p_1 m_2$  a pour extension relativiste  $4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$ . De même pour les temps de vie :

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} \int |\langle f|T|i \rangle|^2 \delta^4(P_f - P_i) \prod_k \frac{d\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad (6.3.2)$$

- L'élément d'intégration  $d\mathbf{p}/2E = d^4p \delta(p^2 - m^2)$  est un invariant relativiste.
- Le produit

$$\prod_k \frac{d\mathbf{p}_k}{2E_k (2\pi)^3} \delta^4(P_f - P_i)$$

est l'espace de phase invariant relativiste pour des états normalisés comme précédemment. La démonstration de ces formules ne fait intervenir que la définition de la matrice  $S$  (Exercices 7-10 et appendice C).

- Lorsque les particules initiales et finales ont un spin, on doit moyenner sur les spins initiaux et sommer sur les spins finals. La formule (6.3.1) est ainsi multipliée par le facteur :

$$\frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\text{spins finals}}$$

#### e- Unitarité et théorème optique

L'unitarité de la matrice  $S$  implique une relation équivalente pour la matrice  $T$ . Cette relation est particulièrement intéressante dans le cas d'une diffusion élastique. La relation

$$SS^\dagger = \mathbf{1}$$

entraîne, avec la définition  $S = \mathbf{1} - (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) T$  une relation entre les éléments de matrice  $T$  :

$$T_{fi} - T_{if}^* = -i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn} T_{in}^* \delta^4(P_n - P_i)$$



dans le cas particulier d'une diffusion élastique à l'avant,  $i = f$ .

$$2i\text{Im}(T_{ii}) = -i(2\pi)^4 \sum_n |T_{ni}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \quad (6.3.3)$$

En comparant (6.3.3) à l'expression de la section efficace totale (6.3.1), il en résulte :

$$\sigma_{Tot} = -\frac{1}{2p_1 m_2} \text{Im}(T_{ii}) \quad (6.3.4)$$

où  $m_2$  est la masse de la particule cible, et  $p_1$  l'impulsion incidente. Cette formule appelée "théorème optique", a plusieurs conséquences simples.

- Il ne peut y avoir de diffusion inélastique sans qu'il y ait simultanément une contribution élastique. Pour le disque noir, (c'est-à-dire complètement absorbant) de la figure 6.11, il y a égalité des deux termes compte tenu du principe de complémentarité de Babinet : la section efficace d'absorption est  $\pi a^2$  (par définition du disque noir), de même que la section efficace élastique, égale à celle de l'ouverture dans l'écran complémentaire.
- La partie imaginaire de l'amplitude de diffusion élastique à l'avant reçoit une contribution positive de tous les canaux présents. Au contraire, la partie réelle est en général beaucoup plus faible. L'amplitude de diffusion est une fonction de l'énergie dans le centre de masse qui peut être étendue aux valeurs complexes de cette variable, comme dans le cas non relativiste.

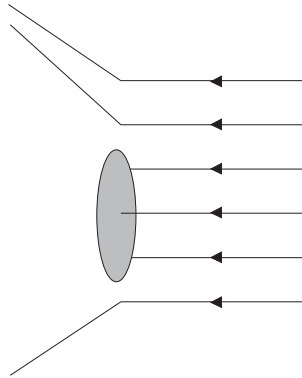


Figure 6.11 : Diffusion par un disque noir.

L'analyticité de l'amplitude entraîne une relation entre ses parties réelles et imaginaires (relation de dispersion). Les sections efficaces totales étant approximativement constantes aux grandes énergies, la partie imaginaire de l'amplitude vers l'avant croît comme l'impulsion d'après le théorème optique (6.3.4). La partie réelle reste au contraire bornée et la phase de l'amplitude devient  $\pi/2$ .

*f- Unitarité et résonances*

Nous avons vu apparaître les résonances comme des pôles complexes de l'amplitude de diffusion. Elles ne se manifestent en pratique que dans les interactions fortes, et on les observe de deux façons : dans les sections efficaces élastiques et totales, la présence d'un pôle proche et l'effet de l'unitarité se combinent pour contraindre la valeur absolue de l'amplitude de transition. Une résonance n'est présente que dans un seul "canal" quantique précisé par l'ensemble des quantités conservées dans l'interaction. Prenons l'exemple de la diffusion élastique de deux particules scalaires. Les états  $|Plm\rangle$  de moment orbital  $l, m$  donné et de 4-impulsion  $P$  peuvent être normalisés selon

$$\langle P'\theta\phi|Plm\rangle = \left(\frac{4W}{q}\right) Y_l^m(\theta, \phi) \delta^4(P - P') \quad (6.3.5)$$

$W$  est l'énergie dans le centre de masse et  $q$  l'impulsion (voir l'exercice 4.22 de ce chapitre) et vérifient (en omettant les facteurs  $(2\pi)^3$  dans ce paragraphe)

$$\langle P_2 l_2, m_2 | P_1, l_1, m_1 \rangle = \frac{4W}{q} \delta^4(P_2 - P_1) \delta_{l_2 l_1} \delta_{m_2 m_1} \quad (6.3.6)$$

Le moment orbital se conserve dans la diffusion de particules scalaires, et l'invariance par rotation entraîne

$$\langle P_2 l_2 m_2 | S | P_1 l_1 m_1 \rangle = \delta^4(P_2 - P_1) S_l(W) \delta_{l_2 l_1} \delta_{m_2 m_1}$$

La relation  $SS^\dagger = \mathbf{1}$ , prise entre deux états  $|P, l, m\rangle$ , implique alors

$$\begin{aligned} \frac{q}{4W} \sum_{lm} \int d^4P \langle P_2, l_2, m_2 | S | P, l, m \rangle \langle P, l, m | S^\dagger | P_1, l_1, m_1 \rangle \\ = \frac{4W}{q} \delta^4(P_2 - P_1) \delta_{l_2 l_1} \delta_{m_2 m_1} \\ |S_l|^2 = \left(\frac{4W}{q}\right)^2 \end{aligned}$$

Il existe une phase  $\delta_l(W)$  telle que

$$S_l(W) = \frac{4W}{q} e^{2i\delta_l(W)}$$

$$i\delta^4(P_2 - P_1) T_l = \langle P_2, l, m | (S - \mathbf{1}) | P_1, l, m \rangle = \frac{8W}{q} i \sin \delta_l(W) e^{i\delta_l(W)}$$

Au voisinage d'un pôle, le module de  $S_l$  ne peut rester égal à  $4W/q$  que si

$$S_l(E) \sim \frac{4W}{q} \frac{E - E_r - i\gamma/2}{E - E_r + i\gamma/2} \quad \text{soit} \quad T_l = \frac{4W}{q} \frac{\gamma}{E - E_r + i\gamma/2}$$

Les ondes de moment orbital différents n'interfèrent pas dans la section efficace totale (pourquoi ?). A la résonance,  $E = E_r$ , et  $\delta_l = \pi/2$ . La section efficace partielle dans l'onde  $l$  est calculée à l'exercice 4.29 et vaut

$$\sigma_l = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (6.3.7)$$

Elle atteint la "limite d'unitarité"  $4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 (2l+1)$  à la résonance. La valeur absolue de la section efficace de l'onde  $l$  est alors déterminée, en l'absence de toute compréhension dynamique du phénomène de résonance.

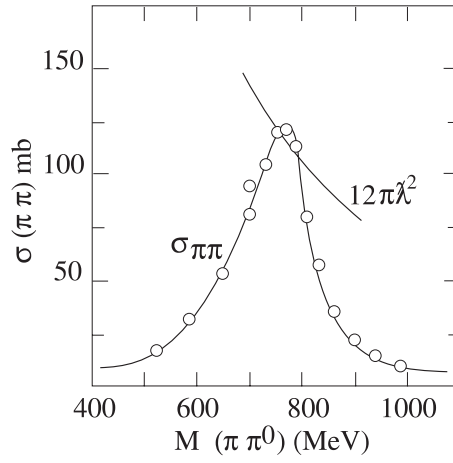


Figure 6.12 : La section efficace  $\pi^- \pi^0$  et la limite d'unitarité au voisinage de la résonance  $\rho(770)$ .

Les données représentées sur la figure 6.12 excèdent légèrement la section efficace limite de l'onde  $l = 1$  à cause d'une petite contribution de moment orbital  $l = 0$ , mais la variation rapide de  $\sigma(E)$  est dominée par le pôle complexe associé à la particule (instable)  $\rho$  qui a une masse de  $770 \text{ MeV}$  :

$$\sigma(E) \sim \sigma_r \frac{\gamma^2/4}{(E - E_r)^2 + \gamma^2/4}$$

C'est la fonction de Breit et Wigner. On montre dans l'exercice 37 que le résultat s'étend au cas de particules pourvues de spin, la matrice unitaire  $S^{j l_i s_i l_f s_f}$  jouant le rôle de  $e^{2i\delta_l}$

$$\sigma = \frac{\pi(\hbar)^2}{q^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j l_i s_i l_f s_f} (2j+1) \text{Re} \{ (\delta_{l_i s_i l_f s_f} - S^{j l_i s_i l_f s_f}) (\delta_{l_i s_i l_f s_f} - S^{j l_i s_i l_f s_f})^\dagger \} \quad (6.3.8)$$

Dans les interactions inélastiques, il est intéressant d'étudier les spectres de masses associées formées avec un groupe de particules de l'état final. La résonance peut être assimilée à un état intermédiaire qui a été produit avec une durée de vie très brève de l'ordre de grandeur de  $(2 \text{Im}(E_r))^{-1}$ , et s'est désintégré dans les particules observées. On voit un excès d'événements à la masse de la résonance, comme sur la figure 6.13 pour les systèmes  $K\pi\pi$  produits dans les interactions  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow D^*X \rightarrow D\pi X$  à 91 GeV. Le symbole  $X$  désigne ici l'ensemble de tous les autres hadrons finals. On dit alors qu'un état intermédiaire  $D^*$  est produit.

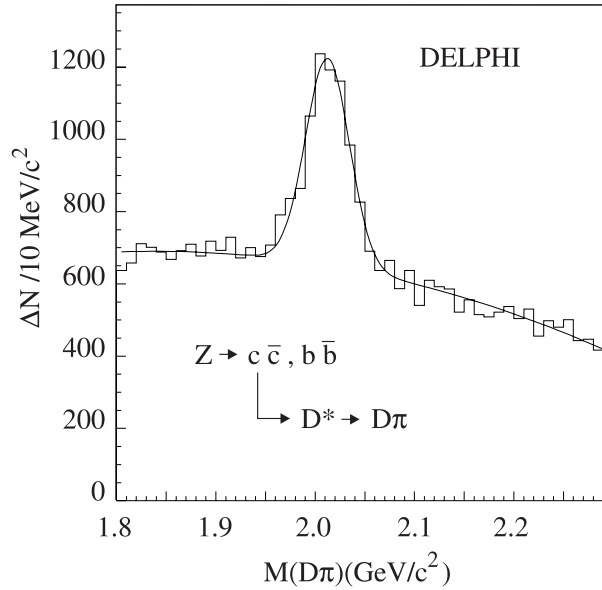


Figure 6.13 : La distribution de masse  $K K \pi$  dans les désintégrations du  $Z^0$  à LEP.

*Remarque* : Dans la figure 6.13, la largeur observée de 20 MeV correspond à la résolution (gaussienne) de l'appareillage, et non pas à la largeur physique de la résonance  $D^*$ , qui est inférieure à 1 MeV. Le méson  $D$  va à son tour se désintégrer, mais par transition faible(pourquoi ?).

#### *g- Formules de discontinuité et de dispersion*

Prenons l'exemple d'une amplitude  $2 \rightarrow 2$  entre particules scalaires de masse  $\mu$ , bien qu'il ne soit pas très réaliste. On peut démontrer qu'il existe un domaine où l'amplitude  $T_{if}$  est une fonction analytique réelle des composantes des 4-vecteurs. L'invariance de Lorentz permet de la considérer comme fonction des seuls invariants  $s$  et  $t$  décrits sur la figure 6.14 (la démonstration sera faite plus

loin). Il résulte de l'équation (6.3.4) que  $T_{ii}(s)$ , l'amplitude de diffusion élastique vers l'avant, est réelle sur l'axe réel du plan complexe de la variable  $s$  lorsque  $s < 4\mu^2$ . Comme pour toute fonction analytique réelle  $T_{ii}(s^*) = T_{ii}(s)^*$  (prendre l'exemple des polynômes). A chaque franchissement d'un seuil sur l'axe réel dans le plan de la variable complexe  $s$ , correspond un point de branchement.

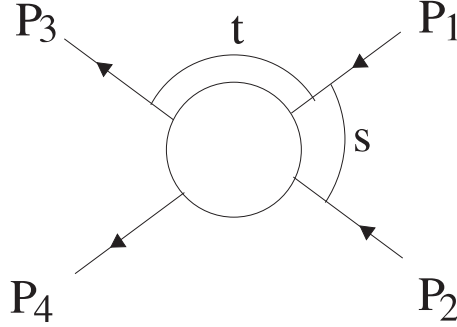


Figure 6.14 : La définition des invariants  $s = (p_1 + p_2)^2$  et  $t = (p_1 - p_3)^2$ .

Si on réunit ces "points de branchements" par une "coupure" unique, la valeur physique de l'amplitude est obtenue à la limite  $i\epsilon > 0$  :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{ii}(s + i\epsilon) = T_{ii}(s)$$

On obtient l'amplitude conjuguée en tournant autour de tous les seuils.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{ii}(s - i\epsilon) = T_{ii}^*(s)$$

La relation d'unitarité devient ainsi une relation de discontinuité pour l'amplitude, comme on le voit sur la figure 6.15, pour la diffusion vers l'avant

$$T_{ii}(s + i\epsilon) - T_{ii}(s - i\epsilon) = -i(2\pi)^4 \sum_n T_{in}(s + i\epsilon) T_{in}(s - i\epsilon) \delta^4(P_f - P_i) \quad (6.3.9)$$

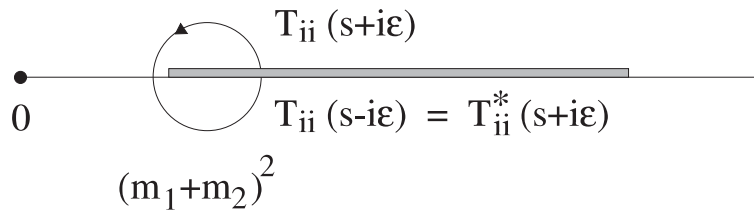


Figure 6.15 : La discontinuité de  $T$  dans le plan complexe de  $s$ .

L'amplitude de diffusion élastique à angle non nul,  $T_{fi}(s, t)$  est en réalité une fonction des deux variables complexes  $s$  et  $t$ , et l'unitarité impose outre les sin-

gularités en  $s$  et  $t$  aux seuils physiques que nous venons de voir, des singularités doubles. On pourra se reporter à d'autres ouvrages pour un exposé plus complet. L'intérêt de ces propriétés d'analyticité a diminué avec l'avènement de la chromodynamique, et des nouvelles techniques de théorie des champs présentées plus loin. Les contraintes simples qui en résultent restent un guide utile pour la paramétrisation de nombreuses amplitudes. Elles aident aussi à comprendre comment une résonance dans la diffusion élastique à deux particules va influencer un état final à trois particules. La relation de discontinuité précédente devient

$$T_{32}(s_1 + i\epsilon) - T_{32}(s_1 - i\epsilon) = iM_{22}(s_1 - i\epsilon) * T_{32}(s_1 + i\epsilon)$$

Le symbole  $*$  représente ici l'intégration sur l'espace de phase à deux particules. Cette relation décrit la production d'un état intermédiaire instable. Le pôle résonant de  $M_{22}$  va se manifester dans  $T_{32}$  et se traduire par un maximum dans le spectre de masse, comme celui qui a été décrit dans la figure 6.13.

## EXERCICES

### 1- Les Leptons

- [1] Es- ce que la transition nucléaire  $Z \rightarrow (Z - 2) + 2e^+$  est permise ?  
 [2] Dessiner les diagrammes élémentaires (avec 1  $W$  ou 1  $Z$ ) pour les transitions :

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-, \quad \nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

### 2- Les Hadrons

- [3]  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  est permis en électromagnétisme, dessiner le diagramme (triangulaire) correspondant. Le  $\pi^0$  est une combinaison de  $u\bar{u}$  et  $d\bar{d}$ .  
 $K^0 \rightarrow \gamma\gamma$  est-il permis en électromagnétisme ?  
 [4] Les deux réactions :  $B^0 \rightarrow D^- l^+ \nu$ ,  $B^0 \rightarrow D^+ l^- \bar{\nu}$  Sont-elles permises ? Dessiner les diagrammes élémentaires (Rappel :  $B^0 = (d\bar{b})$ ,  $D^+ = (c\bar{d})$  ).  
 [5]  $D^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}$  est-elle permise ?  
 $p\bar{p} \rightarrow \nu_\mu\bar{\nu}_\mu$  n'est jamais observée. La transition est-elle interdite ? Si elle ne l'est pas, pourquoi ne l'observe-t-on pas ? Quels sont les états finals usuels ?  
 $K^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}$  est elle permise ?

- [6] Pourquoi  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu$  est-il interdit ?

### 3- Calcul de la section efficace

- [7] Soit deux faisceaux de vitesse relative  $v$  en interaction dans le volume  $V$ , de densités volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Donner le taux d'interaction en fonction de  $\sigma$  par unité de temps.
- [8] Un état libre  $\psi_i(t, \mathbf{x})$  est diffusé avec une matrice de diffusion  $M$ . Quelle est l'amplitude de la transition vers l'état libre  $\psi_f(t, \mathbf{x})$ , et quelle est la probabilité d'observer  $\psi_f$  à l'instant  $t$  ?
- [9] Simplifier l'expression précédente en prenant pour  $\psi_i$  et  $\psi_f$  des états d'énergie  $E_i$  et  $E_f$  et en utilisant la transformée de Fourier spatiale de  $T$ . On supposera que  $M$  ne dépend pas du temps.
- [10] Calculer la probabilité d'observer  $f$  à l'instant  $t$ . On admettra que  $\delta^2(E_i - E_f)$  peut être remplacé par

$$\delta(E_i - E_f) \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{i(E_i - E_f)\tau} = \delta(E_i - E_f) \frac{T}{2\pi}$$

où  $T$  est la durée du processus stationnaire de diffusion.

- [11] En déduire l'expression de la section efficace  $\sigma$  en fonction de  $M$  pour un état initial

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) = e^{-i(E_1 + E_2)t} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}}$$

et un état  $f$  du même type.

### 4- Probabilité d'interaction

- [12] D'où viennent les protons produits dans l'accélérateur ? Comment les accélère-t-on ? Quel est le parcours moyen d'un proton dans le Fer pour  $E = 100$  GeV, sachant que  $\rho_{Fe} = 7$  g/cm<sup>3</sup> ? (on supposera  $\sigma_{pp} = \sigma_{pn} = 40$  mb et  $\sigma_{Fe} = A \cdot \sigma_{pp}$ ).
- [13] Quel est le parcours moyen d'un neutrino de 1 GeV dans le Fer ? On utilisera d'abord la valeur de  $\sigma_\nu$  donnée dans le cours pour les nucléons. Le passage à un noyau sera effectué en sommant les sections efficaces, puis les amplitudes. Quelle est la formulation correcte ?
- [14] Donner un exemple d'état final possible dans l'interaction proton-nucléon. On crée un faisceau de neutrinos en collectant les pions et en les transportant dans un canal de désintégration. Quelles sont les particules présentes à la fin du canal de désintégration ? Que se passe-t-il si cet espace est seulement une zone de parcours libre sans éléments magnétiques ? (Cet exercice de nature purement expérimentale, ainsi que le suivant, requiert une petite enquête.)

- [15] On souhaite augmenter le nombre de neutrinos à l'aide d'une zone de désintégration plus longue. Pourquoi doit-on focaliser les pions par un système de transport de faisceau ? Estimer la longueur optimale en fonction du taux de pertes.
- [16] On suppose que les éléments de matrice de l'amplitude faible à 4 fermions sont donnés par une constante  $G_{eff}$  qui ne dépend pas des particules considérées. C'est une approximation très grossière qui permet d'estimer des ordres de grandeur. Calculer en fonction de  $G_{eff}$  :
- le taux de désintégration du muon,
  - le temps de vie du neutron.
- Qu'en conclure?
- [17] Calculer dans l'approximation précédente la section efficace d'interaction neutrino à basse énergie.
- [18] Quelle quantité de matière faut-il pour voir 10 interactions par mois pour  $10^{13}$  neutrinos ? Pourquoi choisit-on du plomb ou du fer comme matériau cible ?
- [19] L'interaction neutrino va produire des traces secondaires hadroniques et leptoniques. Quel va être le parcours moyen des traces hadroniques dans le plomb ? Le parcours des électrons et des photons est déterminé par une longueur caractéristique, la longueur de radiation  $X_0$ . Dans le fer,  $X_0 = 7$  cm, et dans le plomb,  $X_0 = 2$  cm. Au contraire, les muons peuvent parcourir des dizaines de mètres.
- [20] Que va-t-on observer si le nombre leptonique est conservé ? Que va-t-on observer si le  $\nu_\mu$  peut produire un électron ?
- [21] On observe quand même un petit nombre d'événements du type "électron". Donner trois interprétations possibles et les moyens de les mettre en évidence (Indication : contamination en  $\nu_e$ , présence de neutrons, courants neutres).

### 5- Cinématique et unitarité

- [22] Que signifie la phrase :  $d^3p/(2E)$  est un invariant relativiste? Pour deux particules montrer que

$$(d\mathbf{p}_1/2E_1)(d\mathbf{p}_2/2E_2) = (q/4W)d^4P d\Omega$$

où  $P$  est la 4-impulsion totale du système (12) et  $\Omega_{12}$  la direction relative de 1 dans le centre de masse :



$P = p_1 + p_2$  et  $\Omega_{12} = \Omega_{\vec{q}}$  avec

$$q = \frac{1}{2} \left[ (p_1 - p_2) - \frac{(p_1 - p_2) \cdot P}{P^2} P \right]$$

$q = (q^0, \vec{q})$  mais on notera souvent, en l'absence de risque de confusion  $|\vec{q}| = q$ . Pour établir ce résultat, on utilisera avantageusement les quadrivecteurs  $(p_1 - p_2)$  et  $(p_1 + p_2)$  avec les deux fonctions  $\delta(p_1^2 - m_1^2)$  et  $\delta(p_2^2 - m_2^2)$  sous l'intégration  $\int d^4 p_1 d^4 p_2$ .

- [23] Démontrer la relation (6.3.5).
- [24] Montrer que pour trois particules, la configuration finale est définie par deux scalaires et une rotation.  
Montrer que l'élément d'espace de phase est invariant par rotation.  
Montrer que si l'élément de matrice  $T$  est constant, la densité des particules finales sera uniforme dans la zone permise des plans  $(E_1, E_2)$  ou  $(s_{13}, s_{23})$ , avec  $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$ , etc..
- [25] Donner le contour de la zone accessible à trois particules dans les plans précédents.
- [26] On considère la désintégration en trois particules de même masse  $\mu$  d'une particule de masse  $M$ . Donner la dépendance du taux de désintégration par rapport à  $M$  au voisinage de  $M = 3\mu$ .
- [27] Lorsqu'un photon réel crée une paire dans la réaction  $\gamma + A \rightarrow e^+ e^- A$ , les deux variables importantes sont la masse associée de la paire, et l'énergie de recul du noyau (ou la 4-impulsion transférée à celui-ci)  $t = (p_f - p_i)^2 = 2M^2 - 2ME'$ .  
Donner le contour accessible dans le plan  $(t, M_{e^+e^-})$ , l'énergie initiale du photon étant fixée.
- [28] Montrer que si  $K(s)$  n'a pas de discontinuité, c.à.d.

$$K(s + i\epsilon) = K(s - i\epsilon)$$

$T$  défini par

$$T - K = i \frac{q}{8\sqrt{s}} T K$$

obéit à l'équation de discontinuité. Dans cette relation,  $s$  est le carré de l'énergie dans le centre de masse :  $s = (p_1 + p_2)^2$  et  $q = |\vec{q}|$  le module de l'impulsion dans le centre de masse.

- [29] Dans la diffusion élastique de deux particules scalaires, calculer la contribution de l'onde de moment angulaire  $l$  à l'amplitude élastique vers l'avant. On utilisera, compte tenu de la norme des états  $|l, m\rangle$

$$T(\Omega_f, \Omega_i) = \sum_{l,m} \left( \frac{q}{4W} \right) \langle \Omega_f | lm \rangle T_l \langle lm | \Omega_i \rangle$$

On peut choisir  $oz$  selon  $\Omega_i$ , et utiliser

$$Y_l^m(0, \phi) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

puis le théorème optique (6.3.4) pour calculer la contribution de  $T_l$  à la section efficace. Les facteurs  $(2\pi)^3$  doivent être réintroduits dans la normalisation des états.

- [30] Utiliser l'intégrale sur les angles de diffusion de  $d\sigma/d\Omega$  au lieu du théorème optique pour retrouver le résultat précédent.
- [31] Pourquoi l'unitarité permet-elle d'estimer l'ordre de grandeur des sections efficaces fortes, mais pas celui des sections efficaces faibles ou électromagnétiques?
- [32] Pour démontrer la relation (6.3.8), on définira les états  $|Pjls\rangle$  à partir des états  $|Plm\sigma_1\sigma_2\rangle$ .

-Utiliser les coefficients de Clebsch-Gordan pour établir cette relation.  
 -La matrice des coefficients de Clebsch-Gordan étant unitaire, montrer que les états  $|jls\rangle$  ont la même normalisation que les états  $|lm\sigma_1\sigma_2\rangle$

$$\langle PjlsM | P'j'l's'M' \rangle = \frac{4W}{q} \delta^4(P - P') \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{MM'}$$

-Procéder comme dans le cas de particules sans spin pour montrer que

$$S^j (S^j)^\dagger = \left( \frac{4W}{q} \right)^2$$