

## Chapitre 2

### LES GROUPES D'INVARIANCE

#### 1- NOTION DE SYMETRIE

##### 1-1 Transformations et symétries

En mécanique classique, l'évolution des systèmes dans le temps est inchangée lorsqu'ils subissent certaines transformations nommées symétries. C'est ce qu'on représente sur la figure 2.1 où l'on prend l'exemple d'une translation. Lorsque l'état initial  $M_i$  de vitesse  $v_i$  est transformé par la symétrie en  $M'_i$ , l'état final  $M'_f$  associé à  $M'_i$  est obtenu à partir de  $M_f$  par la même translation. On dit alors que l'interaction est invariante pour la symétrie considérée. Les symétries peuvent être interprétées de deux manières complètement équivalentes selon qu'elles agissent sur le système considéré ou sur les axes de repère. On dira dans le premier cas que l'on adopte le point de vue *actif*, et *passif* dans le deuxième. Le point de vue passif est le plus fréquemment adopté en théorie des champs (chapitre 5).

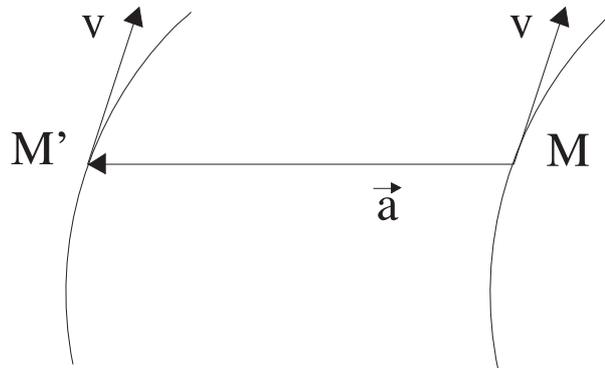


Figure 2.1 : Mouvement d'un système et mouvement transformé par translation.

Lorsque les opérations de symétrie  $g$  forment un groupe  $G$ , comme le groupe des translations, celui des rotations, ou le groupe de Lorentz que nous verrons

au chapitre suivant, l'invariance, associée à l'exigence de simplicité est une contrainte très forte. Outre les symétries associées aux transformations spatiales, comme celles que nous venons de citer, on considérera des opérations agissant sur l'état "interne" des particules, comme leur charge. Dans ce chapitre, nous nous limiterons cependant à l'examen des symétries spatiales les plus simples. La notion de symétrie s'étend à la mécanique quantique et à la théorie des champs, et à tout élément d'un groupe de symétrie sera associé un opérateur de l'espace des états.

### 1-2 Les opérateurs de l'espace des états

A tout élément  $g$  du groupe  $G$  de symétrie correspond un opérateur  $U(g)$  de l'espace des états. Un état quantique  $|\Psi\rangle$  sera ainsi transformé en  $U(g)|\Psi\rangle$ . Si la suite des états  $|i\rangle$  constitue une base complète, l'opérateur  $U(g)$  peut être caractérisé par ses éléments de matrice  $V_{ij}(g) = U(g)_{ij} = \langle i|U(g)|j\rangle$ . Le symbole  $U(g)$  désignera dans la suite l'opérateur, et la matrice qui le représente sera notée  $u_{ij}$  pour la représentation fondamentale du groupe, et  $V_{ij}$  pour les autres. Si  $|i\rangle' = U(g)|i\rangle$ , les vecteurs  $\langle i'|$  vérifient alors  $\langle i'| = \langle i|U^\dagger(g)$  avec  $(V(g))_{ij}^\dagger = V_{ji}^*$ . L'interprétation probabiliste des amplitudes quantiques impose la conservation de la norme par les opérateurs  $U(g)$ . Ces opérateurs devant être unitaires, les matrices  $V$  vérifient

$$VV^\dagger = \mathbf{1}$$

et les transformations  $U(g)$  laissent alors le produit scalaire invariant. La représentation matricielle des opérateurs permet d'associer à la loi de groupe la loi de multiplication des matrices  $V$ . E. Wigner a démontré que l'existence d'une égalité en norme des probabilités pour des points homologues de la symétrie, impliquait assez naturellement l'existence d'une représentation par des opérateurs linéaires (ou antilinéaires<sup>1</sup>) agissant dans l'espace des états. Compte tenu de la phase arbitraire qui intervient dans la définition des états en mécanique quantique, il existe un système de phases  $\omega$  telles que

$$U(g_1 g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1)U(g_2)$$

La correspondance ainsi établie entre le groupe  $G$  et les opérateurs de l'espace des états  $U(g)$  constitue une représentation à *une phase près* du groupe. C'est l'existence de cette phase, naturelle en mécanique quantique, qui autorise en particulier les représentations à 2 dimensions (de spin 1/2) du groupe des rotations  $O(3)$ . On dira parfois pour abréger (malgré un abus de langage) que

<sup>1</sup>Un opérateur antilinéaire  $A$  vérifie :

$$A(\lambda_1 |i_1\rangle + \lambda_2 |i_2\rangle) = \lambda_1^* A|i_1\rangle + \lambda_2^* A|i_2\rangle$$

l'espace de représentation formé par les états de base est une représentation du groupe. Dans le cas du groupe des rotations  $R$ , les  $2J+1$  états  $|J, M\rangle$  forment une base de la représentation de spin  $J$ , où les rotations sont représentées par les matrices  $D_{MN}^J(R)$  déjà vues en mécanique quantique (nous rappellerons leurs propriétés plus loin).

### 1-3 Symétries et lois d'invariance

L'évolution d'un système entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est fournie par l'opérateur d'évolution. Dans la représentation de Schödinger, il s'obtient à partir de l'hamiltonien  $H$  :

$$U(t_1, t_2) = e^{-iH(t_2-t_1)}$$

Si le système est dans l'état  $|i\rangle$  lorsque  $t_1 \rightarrow -\infty$ , la probabilité d'observer l'état  $|f\rangle$  lorsque  $t_2 \rightarrow +\infty$  est :

$$W_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2$$

La matrice  $S = U(-\infty, +\infty)$ , dont le rôle sera précisé plus loin (au chapitre 6) est un opérateur dont les éléments de matrice sont les amplitudes de transition.

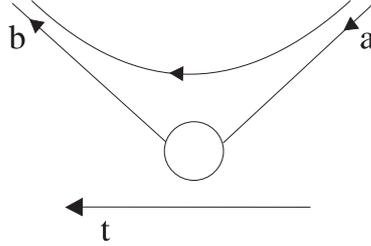


Figure 2.2 : L'état initial (a) et final (b) dans une diffusion.

Il y a symétrie lorsque les probabilités de transition entre les états et les transformés sont égales :

$$W_{f'i'} = |\langle f'|S|i'\rangle|^2 = |\langle f|U^\dagger(g)SU(g)|i\rangle|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = W_{fi} \quad (2.1.1)$$

E. Wigner a montré que l'on pouvait toujours choisir la phase des états pour que la relation (2.1.1) soit vraie pour les amplitudes de transition :

$$S_{f'i'} = \langle f'|S|i'\rangle = \langle f|U^\dagger(g)SU(g)|i\rangle = \langle f|S|i\rangle$$

$$S_{f'i'} = S_{fi} \quad (2.1.2)$$

Au lieu de la matrice  $S$ , nous utiliserons en fait l'opérateur  $T$  qui est plus "régulier". Ses éléments de matrice sont donnés par la relation :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi} \quad (2.1.3)$$

On élimine dans  $T$  la fonction  $\delta^4(P_i - P_f)$  qui impose la conservation de la quadri-impulsion. La relation (2.1.2) est également vérifiée pour les éléments de matrice  $T_{fi}$ .

## 2- LES GROUPES D'INVARIANCE SPATIALE

### 2-1 Les groupes de Lorentz et de Poincaré

Le groupe de Lorentz est le groupe des matrices  $(4 \times 4)$  qui préservent le produit scalaire de deux 4-vecteurs  $a$  et  $b$ . Si  $a' = \Lambda a$ , soit  $(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$  :

$$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^T g b = (a^T)' g b' = a^T \Lambda^T g \Lambda b$$

La matrice diagonale  $g$  est le tenseur métrique

$$(g_{00} = 1 \quad g_{ii} = -1)$$

Les matrices  $\Lambda$  satisfont à l'équation

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

Le groupe de Poincaré contient, outre le groupe de Lorentz, les translations d'espace et de temps

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\nu$$

Les coordonnées  $x^\mu$  d'un point  $(x^0, \mathbf{x})$  sont dites contravariantes. La relation  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$  définit les coordonnées covariantes. Nous ne les utiliserons pas dans la suite (sauf mention explicite), si bien que les indices de  $\Lambda^\mu_\nu$  agissent sans aucune ambiguïté.

Toute transformation de Lorentz est le produit d'une transformation de Lorentz spéciale et d'une rotation. Les transformations de Lorentz spéciales (*boost* en anglais), définissent les formules de changement de repère entre le système au repos et un système en translation uniforme  $\mathbf{v}$  sans modifier les composantes transverses à  $\mathbf{v}$  (voir exercice 1). Dans le système au repos d'une particule, qui convient à la définition de son moment angulaire propre, le groupe de Lorentz se réduit au groupe des rotations : le groupe des matrices  $R(3 \times 3)$  orthogonales, c'est-à-dire vérifiant  $RR^T = \mathbf{1}$ .

Nous n'examinerons dans ce chapitre que les implications de l'invariance par translation et par rotation sur la forme de la matrice de diffusion  $S$ . L'extension relativiste au groupe de Lorentz sera abordée au chapitre suivant. Nous adopterons ici le point de vue *actif*, c'est à dire que les opérations de symétrie agissent sur le système quantique considéré. C'est le point de vue *passif*, dont le contenu

physique est le même, qui sera adopté dans le cadre d'un formalisme lagrangien au chapitre 5.

## 2-2 Les translations

La translation  $a^\mu$  est le changement de coordonnées

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

et pour une translation spatiale  $\mathbf{a}$  à l'instant  $t$  :

$$U(\mathbf{a})|\mathbf{x}, t\rangle = |\mathbf{x} + \mathbf{a}, t\rangle$$

Les opérateurs du groupe des translations doivent conserver la norme. Ils vérifient la relation d'unitarité :

$$U(\mathbf{a})U^\dagger(\mathbf{a}) = \mathbf{1}$$

Si bien que  $U^\dagger(\mathbf{a}) = U(-\mathbf{a})$ . Il va en résulter pour les fonctions d'onde

$$\langle \mathbf{x} | U(\mathbf{a}) | \Psi \rangle = \langle U^\dagger(\mathbf{a})\mathbf{x} | \Psi \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} | \Psi \rangle = \Psi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

La fonction d'onde transformée de  $\Psi(\mathbf{x})$  est  $\Psi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . On en déduit la forme que prend l'opérateur  $\mathbf{P}$  dans l'espace des fonctions d'onde (exercice 1). La loi de composition

$$U(\mathbf{a})U(\mathbf{b}) = U(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

suggère la représentation exponentielle

$$U(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$$

et pour une translation infinitésimale

$$U(\delta\mathbf{a}) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{a}$$

$\mathbf{P}$  est le générateur infinitésimal des translations

$$\mathbf{P} = i\hbar \left. \frac{\partial U(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=0} \quad (2.2.1)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{P}$  sont réelles : ce sont les états propres de l'impulsion. En étendant aux 4-translations ce traitement, on obtient le transformé par translation d'un état propre d'impulsion dans la représentation d'Heisenberg :

$$U(a)|p^\mu\rangle = e^{ip\cdot a}|p^\mu\rangle$$

avec  $p \cdot a = p^0 a^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$ . Une expérience de diffusion se décrit de manière naturelle dans une base d'états propres de l'impulsion. L'invariance par translation conduit à

$$S_{f'i'} = e^{-i(P_f - P_i) \cdot a} S_{fi} = S_{fi}$$

$P_f$  et  $P_i$  sont les impulsions initiales et finales, et la relation précédente implique leur égalité. L'élément de matrice de  $S$  doit contenir  $\delta^4(P_f - P_i)$ , et l'on voit comment l'invariance par translation a entraîné la loi de conservation de l'impulsion, ce qui justifie la décomposition (2.1.3).

## 2-3 Les rotations

### a- Le groupe des rotations

Le groupe des rotations est celui des matrices  $3 \times 3$  orthogonales  $R$  qui vérifient la relation  $RR^T = \mathbf{1}$ , de manière à conserver les longueurs. La dénomination mathématique du groupe,  $SO(3)$  signifie groupe des matrices orthogonales à 3 dimensions réelles et de déterminant 1 (la condition imposée au déterminant élimine les pseudorotations). Ces matrices dépendent de trois paramètres réels, comme on le voit en soustrayant aux 9 éléments les 6 contraintes issues de la relation d'orthogonalité. Ces trois paramètres peuvent être les trois angles d'Euler, ou la direction  $\mathbf{n}$  de l'axe et l'angle  $\phi$  de cette rotation. A titre d'exemple, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , une rotation d'angle  $\phi$  autour de  $\mathbf{e}_3$  est, dans le point de vue actif que nous avons adopté de la forme

$$R = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec la relation entre composantes  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ . La rotation autour d'un axe quelconque  $\mathbf{n}$  s'obtient par les mêmes formules en choisissant comme nouveaux axes de coordonnées  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  ayant pour directions  $\mathbf{n}, \mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , avec  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  et  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_1$  (voir exercice 2).

Comme pour tous les groupes continus, les éléments du groupe sont avantageusement paramétrisés en partant du voisinage de l'identité : la dérivée des matrices de  $R$  à l'origine par rapport aux trois paramètres permet de définir les générateurs infinitésimaux. On choisit en général les 3 rotations infinitésimales autour des trois axes.

$$\begin{aligned} R_k(\mathbf{e}_k, \delta\phi) &= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \mathcal{J}_k \delta\phi \\ \mathcal{J}_k &= i\hbar \left. \frac{\partial R_k}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} \\ (\mathcal{J}_k)_{ij} &= i\hbar \epsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

L'apparition du facteur  $\hbar$  est ici une pure convention, qui donne à  $\mathcal{J}$  la dimension d'un moment angulaire. La loi de groupe permet alors de trouver les dérivées en tout point. Pour deux éléments  $O$  et  $R$  du groupe, la simple interprétation géométrique d'un changement de base de matrice  $O$  montre que :

$$OR(\mathbf{n}, \phi)O^{-1} = R(O\mathbf{n}, \phi) \quad (2.2.3)$$

L'action de la rotation  $O$  sur le vecteur  $\mathbf{n}$  est la rotation usuelle associée à la matrice  $O$  dans l'espace à trois dimensions. On en déduit (exercice 2) les lois de commutation :

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \quad (2.2.4)$$

Ces commutateurs peuvent aussi être obtenus à partir de l'expression matricielle explicite de l'équation (2.2.2). L'exponentiation matricielle permet de construire toutes les rotations à partir des générateurs infinitésimaux  $\mathcal{J}_i$ .

$$R = e^{-\frac{i\phi}{\hbar}\mathcal{J}\cdot\mathbf{n}}$$

On passe du groupe abstrait des rotations aux conséquences physiques de la symétrie en examinant l'action d'une rotation sur les états physiques. A une rotation va être associé un opérateur unitaire (conservant la norme)  $U$ . Il pourra être représenté par une matrice dans un sous-espace de dimension finie invariant par rotation. Un tel sous-espace forme la *base* d'une représentation du groupe. On est tenté d'imposer, à la correspondance entre  $R$  et  $U$  de respecter la loi de groupe, de manière à retrouver la limite classique.

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1 R_2)$$

mais cette relation est *FAUSSE* ! Les états physiques correspondent à des vecteurs de l'espace de Hilbert définis à une phase près, et il n'y a aucune raison d'interdire une phase arbitraire  $\omega$  entre les deux membres, comme on l'a signalé dans la section 1. En vertu d'un raisonnement fréquent, ce qui n'est pas interdit est permis (sauf si une nouvelle loi intervient). L'expression correcte est ainsi, comme on l'a vu de façon générale pour les lois de symétrie :

$$U(R_1)U(R_2) = \omega(R_1, R_2)U(R_1 R_2)$$

Les opérateurs  $U(R)$  dépendent également de trois paramètres et il leur correspond aussi trois générateurs infinitésimaux  $J_i$  qui agissent dans l'espace des états quantiques.

$$J_i = i\hbar \left. \frac{\partial U(R_i)}{\partial \phi} \right|_{\phi=0}$$

Les  $J_i$  obéissent aux mêmes relations de commutation que les  $\mathcal{J}_i$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (2.2.5)$$

Nous omettrons souvent dans la suite le facteur  $\hbar$  de l'équation 2.2.5. Le résultat fondamental, conséquence de l'apparition de la phase  $\omega$  est celui de Wigner. *Les représentations "à une phase près" du groupe des rotations sont des représentations exactes du groupe  $SU(2)$  des matrices unitaires ( $2 \times 2$ ) de déterminant unité.* Les matrices de  $SU(2)$  dépendent également de trois paramètres, et elles sont engendrées par trois générateurs  $s_i$  qui vérifient les relations de commutation (2.2.4)

$$u = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\phi\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}\right)$$

Les matrices  $s_i$  sont des multiples des matrices de Pauli avec

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour deux matrices  $u_1$  et  $u_2$  de  $SU(2)$ , les opérateurs  $U_1$  et  $U_2$  agissant dans l'espace des états vérifient :

$$U(u_1)U(u_2) = U(u_1 u_2)$$

On a ainsi construit une représentation du groupe  $SU(2)$  dans l'espace des états de spin  $1/2$ . La représentation la plus simple du groupe  $SU(2)$  (à part l'identité) est ainsi de dimension 2. Des méthodes algébriques permettent de construire la totalité des représentations irréductibles (n'admettant pas de sous-espace invariant) finies du groupe  $SU(2)$ . Elles sont caractérisées par la valeur propre de  $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  qui prend les valeurs entières ou demi-entières  $j(j+1)$ . Les états de base, au nombre de  $2j+1$ , sont caractérisés par la valeur propre  $m$  de  $J_3$ , qui varie de  $-j$  à  $+j$ . La représentation la plus simple correspond ainsi à un moment angulaire  $j = 1/2$ , et les autres représentations s'obtiennent à partir de celle-ci par produit tensoriel en suivant des règles données ultérieurement.

Les états de base d'une représentation irréductible de moment angulaire total  $j$  sont définis par  $|\alpha jm\rangle$  où  $\alpha$  résume l'ensemble des autres nombres quantiques.

L'existence du spin a été soupçonnée tout d'abord à partir de la description des raies spectrales des atomes, dont le nombre, avec ou sans champ magnétique, n'était compréhensible qu'en introduisant deux degrés de liberté supplémentaires pour l'électron. L'expérience de Stern et Gerlach est venue confirmer de manière (presque) directe le spin  $s = 1/2$  de l'électron. Nous avons déjà vu que le moment angulaire total d'un système quantique pouvait être entier ou demi-entier. Pour comprendre de manière qualitative les propriétés de transformation des composantes de spin, il est utile de revenir à cette l'expérience.

*b- Le spin non relativiste et l'expérience de Stern-Gerlach*

Dans la configuration expérimentale de la figure 2.3, avec le seul aimant  $SG_1$  selon la direction  $oz_1$ , on sait que les ions d'argent émis par la source se séparent en deux paquets associés aux deux états possibles du spin  $1/2$  de l'électron célibataire.

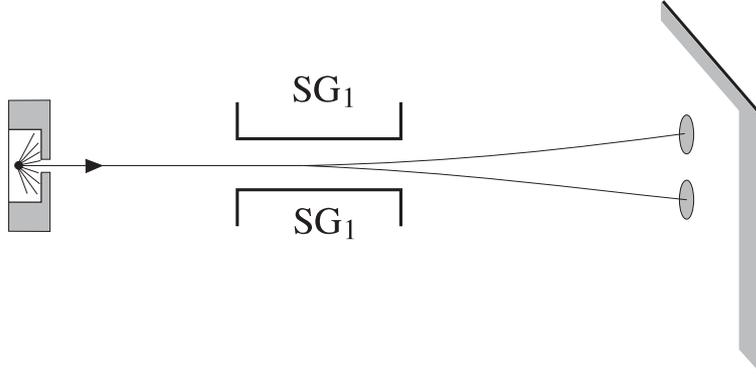


Figure 2.3 Le schéma de principe de l'expérience de Stern Gerlach.

Nous allons montrer que l'expérience de Stern-Gerlach conduit assez naturellement à la loi de transformation des spineurs, d'une manière motivée par la géométrie et non plus par l'algèbre. Le problème de la transformation d'un spineur par rotation apparaît dès que, dans une expérience de principe représentée sur la figure 2.4, on met en place un deuxième aimant d'analyse  $SG_2$ . Quelles vont être les intensités relatives des taches hautes et basses pour un axe  $oz$  orienté selon le champ magnétique  $\mathbf{B}_2$  de  $SG_2$  qui fait un angle  $\alpha$  avec  $oz_1$  ? On appellera  $(\chi_2^+, \chi_2^-)$  les composantes du spineur dans le repère  $SG_2$  défini par  $oz_2$ . Pour conserver la norme de la fonction d'onde, on est tenté d'introduire un angle  $\theta$  tel que

$$\chi_2^+ = \cos \theta \chi_1^+ - \sin \theta \chi_1^-$$

$$\chi_2^- = \sin \theta \chi_1^+ + \cos \theta \chi_1^-$$

En examinant le cas où l'axe  $oz_2$  est opposé à  $oz_1$ , on voit bien que la valeur de  $\theta$  doit être  $\pi/2$ , la moitié de l'angle  $\alpha = \pi$ . En fait, on se convainc facilement que de manière plus générale, le choix  $\theta = \alpha/2$  va permettre de vérifier la loi de groupe. La matrice image de la rotation de  $\alpha$  autour de  $oy$  est

$$u(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 & -\sin \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 & \cos \alpha/2 \end{pmatrix}$$

Cette correspondance vérifie

$$u(R_1 \cdot R_2) = \pm u(R_1)u(R_2)$$

En particulier  $u(R(0).R(2\pi)) = u(\mathbf{1}) = -u(R(0)).u(R(2\pi))$ . Il s'agit bien d'une représentation à une phase près du sous-groupe des rotations autour de l'axe de l'expérience ( $0y$ ).

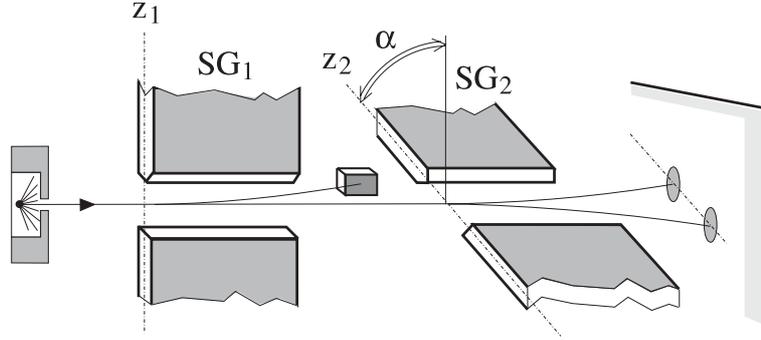


Figure 2.4: Une expérience de type Stern-Gerlach avec deux aimants d'analyse  $SG_1$  et  $SG_2$ .

*c- Les propriétés de la représentation à deux dimensions  $SU(2)$*

Une particule au repos se transforme selon une représentation irréductible de  $SU(2)$  et a un moment angulaire intrinsèque  $j$  (son spin) défini : il n'y a en aucune observation permettant aujourd'hui de supposer qu'il pourrait y avoir des particules fondamentales de même masse avec des moments angulaires différents (bien qu'il y ait des raisons théoriques séduisantes pour une dégénérescence de ce type dans le cadre de la supersymétrie). A un élément  $R$  du groupe des rotations

$$RR^T = \mathbf{1}$$

seront associés, compte tenu de la définition de  $\phi$  à  $2\pi$  près les deux éléments de  $SU(2)$ ,

$$u = \pm e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\mathbf{n}\phi}$$

On obtient en développant (et en laissant de côté l'ambiguïté de signe)

$$u = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i(\vec{\sigma}\cdot\mathbf{n})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Les composantes des états physiques se transforment à l'aide de  $u(R)$  dans une rotation  $R$  des axes de repère.

*d- Les représentations de spin  $J$*

Les représentations de spin  $J$  sont des représentations *irréductibles*, c'est à dire sans sous-espace invariant et de dimension  $(2J+1)$ . Elles peuvent être construites successivement à partir d'autres représentations de dimension inférieure par produit tensoriel, à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan (comme dans le paragraphe suivant), ou à l'aide des règles fournies dans la section 4 (Invariants et tenseurs). Le transformé par rotation d'un spineur non relativiste (ou au repos) de spin  $j$  et de troisième composante  $m$  est donné par les matrices de rotation  $D^j$  :

$$U(R) |j, m\rangle = D_{m'm}^j(R) |j, m'\rangle$$

$$D_{m'm}^j(R) = \langle jm' | U(R) | jm \rangle$$

L'action de  $U(R)$  sur un état d'impulsion et de spin définis sera :

$$U(R)|\mathbf{p}j, m\rangle = D_{m'm}^j(R)|R\mathbf{p}, j, m'\rangle$$

#### e- Produit de deux représentations irréductibles

Nous rappellerons très succinctement la définition des coefficients de Clebsch-Gordan. Pour une paire de systèmes quantiques de moment angulaires propres  $j_1$  et  $j_2$ , l'espace de description est la base  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$  dans l'espace produit tensoriel de deux représentations de spins  $j_1$  et  $j_2$ , et les rotations agissent par le produit tensoriel (et non pas matriciel) des matrices  $D^{j_1}$  et  $D^{j_2}$ . Cette représentation n'est pas irréductible. De manière équivalente, la base  $\xi_m \eta_n$  définie par les produits des composantes  $\xi_m$  et  $\eta_n$  d'un état constitué des deux systèmes sur  $|j_1, m_1\rangle$  et  $|j_2, m_2\rangle$  contient des sous-espaces invariants. La décomposition est indiquée dans tous les cours de mécanique quantique :

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sum_J |J, M\rangle \langle J, M | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

avec  $M = m_1 + m_2$ . La somme est une somme directe d'espaces vectoriels, les différents sous-espaces  $|J, M\rangle$  étant indépendants, et cette formule définit le changement de base qui permet de passer des états propres de  $(\mathbf{j}_1)^2$  et  $(\mathbf{j}_2)^2$  aux états propres de  $(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)^2$ .

#### f- La transformation de l'amplitude

L'invariance par rotation se traduit directement pour les particules scalaires (c'est-à-dire de spin nul). On désignera par  $\mathbf{p}_i$  l'ensemble des impulsions initiales, et  $\mathbf{p}_f$  les impulsions finales, et on examinera l'effet d'une rotation sur l'amplitude de transition  $T(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i)$  déjà définie dans ce chapitre (et revue avec plus de détails au chapitre 6). L'invariance par rotation s'exprime par la relation :

$$T(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = T(R\mathbf{p}_f, R\mathbf{p}_i) \quad (2.2.6)$$

Pour la diffusion d'une particule par un potentiel ou par une autre particule, il suffit se ramener à une configuration de référence où la particule initiale est selon  $oz$  et la particule finale dans le plan  $zox$  pour conclure de (2.2.6) que

$$T(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = T(\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{p}_i)$$

On verra au chapitre 6 qu'il y a équivalence entre cette relation et la conservation du moment orbital. Pour des particules de spin  $j \neq 0$ , l'amplitude se transforme de manière plus complexe par une rotation des états. En prenant l'exemple d'une diffusion où interviennent un spineur initial  $j_i$  et un final  $j_f$

$$\begin{aligned} T_{\sigma_f \sigma_i}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) &= \langle \mathbf{p}_f, j_f, \sigma_f | T | \mathbf{p}_i, j_i, \sigma_i \rangle = \\ &\langle U(R)(\mathbf{p}_f, \sigma_f) | TU(R) | p_i, \sigma_i \rangle \end{aligned}$$

mais on a déjà vu que

$$U(R) | \mathbf{p}_{\sigma_i} \rangle = D_{\tau \sigma_i}^{j_i}(R) | R\mathbf{p}_i, \tau \rangle$$

En opérant de même avec l'état final :

$$T_{\sigma_f \sigma_i}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \sum_{\rho \tau} D_{\rho \sigma_f}^{j_f}(R)^* D_{\tau \sigma_i}^{j_i}(R) T_{\rho \tau}(R\mathbf{p}_f, R\mathbf{p}_i) \quad (2.2.7)$$

Les amplitudes  $T_{\sigma_f \sigma_i}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i)$  ne sont pas invariantes par rotation, aussi la relation précédente n'est-elle presque jamais utilisée en pratique. On se sert directement de la conservation du moment angulaire total  $J$ , et de sa troisième composante  $M$ , pour la simplifier, en tenant compte de la nullité des éléments de matrice de  $T$  entre des moments angulaires différents, ou bien d'expressions tensorielles invariantes. L'invariance par rotation permet de prédire à l'aide des matrices  $D^J$  la dépendance angulaire des transitions dont le moment angulaire ( $J, M$ ) est déterminé. On désignera à nouveau par  $\mathbf{p}_f$  la collection des impulsions finales.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_f | T | J, M \rangle &= \langle \mathbf{p}_f | J, M \rangle T^J \\ &= \langle R^{-1} \mathbf{p}_f | TU(R)^{-1} | J, M \rangle = \sum_N D_{NM}^J(R^{-1}) \langle \tilde{\mathbf{p}}_f | J, N \rangle T^J \end{aligned}$$

L'amplitude  $T^J$  est indépendante de  $M$  et  $N$ . La rotation  $R$  amène la configuration de référence arbitrairement choisie pour le solide formé par les impulsions finales  $\tilde{\mathbf{p}}_f$  sur les impulsions observées  $\mathbf{p}_f$ . S'il n'y a que deux particules, on choisira par exemple l'axe  $oz$ , et comme on reste libre d'effectuer une rotation arbitraire autour de cet axe, il en résulte que  $N = 0$ . La matrice

$$D_{0M}^J(R^{-1}) = (D_{M0}^J)^*(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2J+1)}} Y_J^M(\beta, \alpha)$$

est l'harmonique sphérique  $Y_J^M$  lorsque  $J$  est entier. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment l'utilisation d'expressions *scalaires* permet d'exprimer d'un autre point de vue l'invariance par rotation.

## 2-4 Invariants et tenseurs

Comme l'invariance par rotation connecte des états ayant la même énergie, les différents états de polarisation d'une particule élémentaire, qui ont la même masse, doivent former une représentation irréductible du moment angulaire. Toutes les particules ont ainsi un moment angulaire  $J$  défini.

Les représentations irréductibles de moment cinétique  $J$  défini permettent d'autre part d'exprimer simplement la conservation de cette quantité. On sait que les coefficients de Clebsch-Gordan permettent de former les représentations irréductibles de  $j$  défini, contenues dans un produit tensoriel : nous allons décrire une autre méthode, souvent plus rapide.

### a- Scalaires

Une manière très générale d'incorporer directement une symétrie dans l'amplitude (ou plus tard le lagrangien) est d'utiliser des expressions invariantes (on dit aussi scalaires) dans les transformations associées à la symétrie, comme le produit scalaire de deux vecteurs l'est pour les rotations. Dans la diffusion de deux particules scalaires à une énergie donnée, on a vu que l'amplitude n'est fonction des composantes des impulsions que par l'intermédiaire de la variable  $\cos \theta = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_f / q_i q_f$ . L'extension de cette technique aux spineurs ne présente pas de difficulté. On désignera par la même lettre les deux états  $|\chi\rangle$ ,  $|\eta\rangle$  et les spineurs formés par leurs composantes sur la base  $|+1/2\rangle$ ,  $|-1/2\rangle$ . L'expression scalaire fondamentale pour

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

est

$$S_1 = \chi^\dagger \eta \tag{2.2.8}$$

$$S_1' = \chi'^\dagger \eta' = \chi^\dagger u^\dagger u \eta = \chi^\dagger \eta$$

La matrice  $u$  est dans ce cas l'une des matrices de  $SU(2)$  associée à la rotation considérée. Une autre expression scalaire obtenue à partir de la précédente est utile pour former des scalaires *sans* conjuguer les spineurs, ce qui convient par exemple pour des fermions initiaux. Si l'on introduit la matrice antisymétrique  $\epsilon = i\sigma_2$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Toute matrice de  $SU(2)$  vérifie

$$\epsilon u \epsilon^{-1} = u^*$$

Le spineur  $\epsilon \eta$  se transforme par  $u^*$ :

$$(\epsilon \eta)' = \epsilon u \eta = \epsilon u \epsilon^{-1} \epsilon \eta = u^* \epsilon \eta$$

L'unitarité des matrices de  $SU(2)$  peut de nouveau être appliquée pour montrer que la forme

$$S_2 = \chi^T \epsilon \eta = \chi^1 \eta^2 - \chi^2 \eta^1 \quad (2.2.9)$$

est également une forme scalaire invariante. L'expression  $S_2$ , qui permet de former un scalaire ( $j = 0$ ) à partir deux spineurs ( $j = 1/2$ ) équivaut aux coefficients de Clebsch-Gordan. Il suffit d'adopter pour états de base de l'espace les formes linéaires associées aux composantes (projections). On propose aussi dans l'exercice 3 de démontrer directement cette relation.

#### b- Vecteurs

Nous allons indiquer la façon de former une expression vectorielle à l'aide de deux spineurs. Cette étape est un intermédiaire pratique dans la construction de quantités invariantes qui combinent des spineurs et des vecteurs. Dans une rotation infinitésimale d'axe  $\mathbf{n}$ , un vecteur se transforme selon

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\phi(\mathbf{n} \wedge \mathbf{r})$$

Par suite des relations de commutation, les trois composantes

$$V_k = \chi^\dagger \sigma_k \eta \quad (2.2.10)$$

se transforment de la même façon :

$$u^\dagger \sigma_k u = (1 + i\vec{\sigma} \cdot \mathbf{n} \delta\phi/2) \sigma_k (1 - i\vec{\sigma} \cdot \mathbf{n} \delta\phi/2) = \sigma_k + \delta\phi(\mathbf{n} \wedge \vec{\sigma})_k$$

Il en résulte que  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$  est un vecteur et que pour une transformation finie

$$V'_i = R_{ij} V_j \quad \text{soit} \\ \chi^\dagger u^\dagger(R) \sigma_i u(R) \eta = (R)_{ij} \chi^\dagger \sigma_j \eta$$

Les relations précédentes permettent de trouver la matrice de rotation ( $3 \times 3$ ) associée à une matrice de  $SU(2)$ . On définit les matrices  $X = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{x}$  et  $X' = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{x}'$ , avec  $x' = Rx$ . La relation entre  $X$  et sa transformée par rotation résulte des remarques précédentes :

$$X' = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{x}' = R^{-1} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{x} = u(R) X u(R)^\dagger \quad (2.2.11)$$

On trouvera la relation entre les composantes  $x_j$  et  $x'_j$  à l'aide des traces :  $Tr\{\sigma_i\sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ . Il résulte de (2.2.11) que

$$x'_i = \frac{1}{2}Tr\{u^\dagger(R)\sigma_i u(R)\sigma_j\}x_j \quad (2.2.12)$$

ce qui permet d'exprimer  $R_{ij}$  comme fonction quadratique de la matrice  $u$ .

La base cartésienne à trois dimensions ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) s'exprime en fonction des 3 états propres du moment angulaire  $j = 1, m$ , où  $m$  varie de 1 à 3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_+ &= |1, +1\rangle = -\frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{e}_0 &= |1, 0\rangle = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_- &= |1, -1\rangle = \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Un vecteur  $\mathbf{V}$  est ainsi identifiable à un spin 1 ( $j = 1$ ), et les 3 composantes cartésiennes d'un vecteur quelconque  $V_i$  s'expriment en fonction des projections sur les 3 états  $|1, m\rangle$ . On peut transformer la relation (2.2.10) de manière à mettre en évidence le passage du produit tensoriel de deux représentations de spin 1/2 à un spin 1. Comme  $\chi^T \epsilon$  se transforme comme  $\chi^\dagger$  la matrice antisymétrique  $\epsilon$  permet, comme dans le paragraphe précédent où il s'agissait de construire des scalaires de définir un autre vecteur :

$$W_i = \chi^T \epsilon \sigma_i \eta \quad (2.2.14)$$

Les composantes  $W_i$  sont exprimées dans la base cartésienne, et après passage aux composantes ( $W_+, W_-, W_0$ ), l'équation (2.2.14) exprime la projection du produit tensoriel de deux spineurs sur les 3 états  $|1, m\rangle$ . Elle équivaut donc à la décomposition du produit de deux représentations irréductibles à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan, et cette correspondance est précisée à l'exercice 4. Comme le produit scalaire de deux vecteurs est invariant,  $V_i$  et  $W_i$  peuvent être utilisés pour former des scalaires. L'intérêt de ce genre de construction est que seul un petit nombre de combinaisons bilinéaires doit être examiné, compatible avec les spins totaux possibles, et les vecteurs disponibles indépendants. On citera l'exemple de la diffusion d'un pion (pseudoscalaire) sur un nucléon :  $\pi N \rightarrow \pi N$ . L'amplitude de diffusion élastique est de la forme :

$$A_{\sigma_i \sigma_f} = \xi_f^\dagger M(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_f) \eta_i$$

D'après les équations (2.2.8) et (2.2.10), les deux spineurs  $\eta_i$  et  $\xi_f$  peuvent être couplés de manière à former un scalaire ou un vecteur. Il en résulte que la matrice  $2 \times 2$   $M$  se décompose sur la base ( $\mathbf{1}, \vec{\sigma}$ ) avec des coefficients complexes, ( $\mathbf{1}$  est la matrice unité).

$$M = a\mathbf{1} + \mathbf{b} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.2.15)$$

L'invariance par rotation impose que  $a$  soit une fonction invariante  $a(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = a(R\mathbf{p}_f, R\mathbf{p}_i) = a(\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{p}_i)$  et que les trois composantes de  $\mathbf{b}$  se transforment vectoriellement. Dans le centre de masse, une base de vecteurs indépendants est fournie par les impulsions relatives initiales et finales et leur produit vectoriel :  $\mathbf{q}_f = \mathbf{p}_f^N - \mathbf{p}_f^\pi$  et  $\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i^N - \mathbf{p}_i^\pi$ , ainsi que  $\mathbf{q}_f \wedge \mathbf{q}_i$ . Le vecteur  $\mathbf{b}$  peut être obtenu en multipliant ces trois vecteurs par trois fonctions qui ont pour argument les produits scalaires des trois vecteurs qui précèdent.

### c- Les tenseurs

Nous avons montré que des expressions bilinéaires des coordonnées des spineurs permettaient de former des vecteurs et des scalaires, et que l'on retrouvait de cette manière (exercices 3 et 4) les coefficients de Clebsch-Gordan qui interviennent dans le couplage des moments cinétiques, ou plus généralement dans la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de  $SU(2)$ . Les méthodes tensorielles sont une extension de cette technique. Elles permettent de trouver les représentations irréductibles contenues dans un produit de représentations en appliquant des recettes simples, équivalentes à l'utilisation des coefficients de Clebsch-Gordan.

#### (i) Moment orbital $L = 2$

Avec un vecteur impulsion relative  $q_i$ , on construira le tenseur  $T_{ij} = q_i q_j$  qui a 6 composantes indépendantes. Il contient manifestement la combinaison invariante  $T_{ii} = (q_1)^2 + (q_2)^2 + (q_3)^2$  qui correspond à  $L = 0$ .  $T_{ij}$  n'est donc pas irréductible, et les 5 composantes restantes, qui sont les coordonnées d'un état  $L = 2$  s'obtiennent en éliminant la trace  $T_{ii}$  (avec sommation sur les indices répétés)

$$T_{ij}^{L=2} = q_i q_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k q_k q_k$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs quelconques  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  a 9 dimensions. C'est le tenseur  $T_{ij} = U_i V_j$ . Il contient

- La représentation scalaire  $S = \sum_i U_i V_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$
- La représentation vectorielle  $\mathbf{W} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$
- La représentation symétrique de moment angulaire 2, avec ses 5 composantes

$$T_{ij} = U_i V_j + U_j V_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$$

#### (ii) Spin 3/2

On illustrera ces méthodes tensorielles par la composition d'un moment orbital  $l = 1$  et d'un spineur  $\chi$  dans un moment angulaire total  $j = 3/2$ . Soit  $\mathbf{q}$  l'impulsion relative et  $\xi$  le spineur considéré. Le tenseur  $\Psi_{im} = q_i \xi_m$  a 6

composantes, avec 3 valeurs pour  $i$  et 2 pour  $m$ . Les règles de composition du moment cinétique montrent que ce tenseur est la somme directe d'un spin  $3/2$  (4 composantes) et d'un spin  $1/2$ , il n'est évidemment pas irréductible. Au contraire, le tenseur  $\Psi_m = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{q} \xi_m$  a les deux composantes indépendantes d'un spineur  $j = 1/2$ . On vérifie explicitement dans l'exercice 5 qu'il se transforme par la matrice  $u(R)$  de  $SU(2)$ . Il en résulte que l'expression  $\vec{\Psi}_m = \mathbf{q} \xi_m - 1/3 \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \xi_m$  décrit un spin  $3/2$ . L'indice  $m$  prend deux valeurs, et le coefficient  $1/3$  a été choisi de manière à vérifier la relation  $\vec{\sigma} \cdot \vec{\Psi} = 0$ , ce qui interdit le sous-espace invariant  $j = 1/2$ . C'est le tenseur approprié pour la description de la résonance  $\Delta$  de spin  $J^P = (3/2)^+$  à partir d'un pion (pseudoscalaire) et d'un nucléon ( $j = 1/2$ ). La valeur positive de la parité  $P$ , que nous étudierons plus tard, impose le moment angulaire  $l = 1$ .

(iii) Les règles générales

Les règles permettant de construire des tenseurs de moment angulaire défini se devinent à partir des exemples précédents :

- $T^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}$  constitue une représentation irréductible de  $SU(2)$  de moment angulaire  $I = k$  (entier) si et seulement si il est symétrique et de trace nulle pour toutes les paires d'indice  $i_m = 1, 2, 3$ .
- $T^{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k}$  forme une représentation irréductible de moment cinétique  $I = k/2$  s'il est symétrique par rapport à toutes les paires d'indice  $\eta_m = 1, 2$ .
- Le produit d'un tenseur irréductible  $T^{i_1 i_2 \dots i_n}$  ( $i_k = 1, 2, 3$ ) par un spineur  $\chi$

$$t^{i_1 \dots i_n j_1} = T^{i_1 \dots i_n} \chi_{j_1}$$

sera irréductible si et seulement si on impose pour tous les choix de  $i_k$

$$\sum_k \sigma_k t^{i_1 \dots i_k \dots i_n j_1} = 0$$

Les conditions précédentes sont évidemment nécessaires, puisque les contractions avec  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\delta_{ij}$  et  $\sigma_i$ , permettent d'obtenir des tenseurs de rang inférieur si elles ne sont pas vérifiées. Le fait qu'elles soient suffisantes n'est pas évident (mais vrai).

### 3- L' INVARIANCE D'ECHELLE

#### 3-1 L'analyse dimensionnelle

L'invariance d'échelle a un statut différent des symétries précédemment examinées parce qu'elle n'est pas vérifiée dans la nature. Le groupe considéré est celui des transformations  $x^i \rightarrow \lambda x^i$ , ou  $p^i \rightarrow \lambda^{-1} p^i$ . Une amplitude invariante d'échelle vérifie :  $T_{fi}(\lambda p^i) = \lambda^D T_{fi}(p^i)$  et  $D$  est la dimension de l'amplitude. L'invariance d'échelle est manifestement violée dans le monde réel, où (presque) tous les constituants ont une longueur caractéristique corrélée aux masses qui interviennent dans les phénomènes considérés : rayon de Bohr, rayon du nucléon, portée des forces nucléaires, etc... Au contraire, lorsque les 4-impulsions et toutes les variables scalaires de Lorentz sont grandes, tout se passe comme si les masses fondamentales étaient nulles et les interactions vérifient presque l'invariance d'échelle, la théorie des champs imposant cependant des violations spécifiques. L'invariance d'échelle autorise en première approximation l'analyse dimensionnelle des comportements asymptotiques. Nous citerons un exemple concernant les sections efficaces totales. La notion de section efficace, qui caractérise la probabilité d'interaction entre deux particules a les dimensions d'une surface effective. Elle sera définie avec précision au chapitre 6. Les sections efficaces totales sont de dimension  $-2$  en  $GeV$  dans les unités  $\hbar = c = 1$ . On s'attend à une variation en  $(E_{cm})^{-2}$  lorsque l'énergie dans le centre de masse est grande par rapport aux masses.

### 3-2 Deux exemples

Dans les collisions  $e^+e^-$ , on observe bien le comportement en  $E_{cm}^{-2}$  pour la réaction  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , dès que  $E_{cm}$  est grande par rapport à la masse du muon sur la figure 2.5. C'est ce que l'on désigne sous le nom de section efficace ponctuelle :  $\sigma = 4\pi\alpha^2/3s$  avec  $s = E_{cm}^2$ . La section efficace hadronique, calculable à partir de l'interaction ponctuelle  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  a le même comportement dans les régions où  $E_{cm}$  est très supérieure à la masse des quarks produits.

La masse de l'électron peut de même être négligée à grande énergie dans la diffusion élastique Bhabha ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ) de la figure 2.6. Il faut que  $q^2 = (p_2 - p_1)^2 \gg m_e^2$ , ce qui correspond à des angles de diffusion suffisamment grands. Dans ces conditions

$$\frac{d\sigma}{dq^2} \sim 2\pi \frac{\alpha^2}{(q^2)^2}$$

On peut appliquer l'analyse dimensionnelle aux interactions faibles, mais il faut tenir compte de la masse du boson intermédiaire  $M_W = 82 GeV$ . C'est ainsi que la section efficace neutrino-quark est, pour  $s = (p_\nu + p_q)^2 \ll M_W^2$

$$\sigma(\nu q) \sim \frac{s}{M_W^4}$$

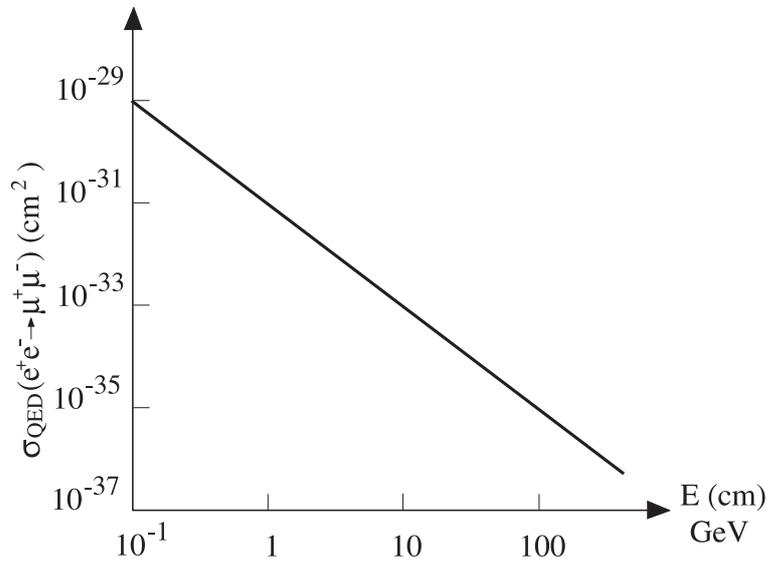


Figure 2.5 : La section efficace de la réaction  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  en électrodynamique.

Nous montrerons ultérieurement que l'invariance d'échelle s'exprime de manière un peu plus complexe que ne le suggère l'analyse dimensionnelle lorsque l'on tient compte de la nécessité de définir les constantes de couplage (comme  $\alpha = 1/137$ ) en liaison avec une expérience dont l'échelle d'énergie doit être précisée. C'est un effet provenant de la relation assez indirecte entre le lagrangien et les phénomènes observables.

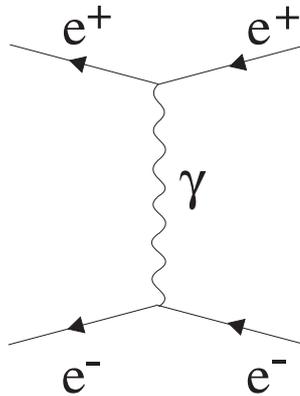


Figure 2.6 : La diffusion  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  (Bhabha).

## EXERCICES

- [1] Montrer à partir de (2.2.1) que dans l'espace des fonctions d'onde,  $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$
- [2] Donner le vecteur transformé par une rotation d'angle  $\phi$  autour d'un axe  $\mathbf{n}$  quelconque. Appliquer au cas d'une rotation infinitésimale. En déduire les relations de commutation en appliquant la loi de groupe  $RO(\mathbf{n}, \phi)R^{-1} = O(R\mathbf{n}, \phi)$  pour une rotation  $R$  infinitésimale.
- [3] A partir des états de base de deux spineurs, construire à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan, la base  $|\mathcal{S}, \Sigma_3 \rangle$ . En déduire la projection de l'état

$$|\Psi \rangle = \sum_{ij} \chi_i \eta_j |i \rangle \otimes |j \rangle$$

sur  $\langle 0, 0 |$ .

- [4] Calculer les trois composantes  $W_+, W_-, W_0$  à l'aide des relations (2.2.13) et (2.2.14), et en déduire les coefficients de Clebsch-Gordan permettant de former un spin 1 avec deux spineurs  $\langle 1, m | 1/2, m_1, 1/2 m_2 \rangle$ .
- [5] Montrer que  $\Psi_m = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{q} \xi_m$  se transforme par la matrice  $2 \times 2$   $u(R)$  associée à la rotation  $R$  comme le spineur  $\xi$ . On pourra utiliser l'équation (2.2.10).

On considère dans la suite les désintégrations

- 1)  $K^1(J^P = 1^+, m = 1410 \text{ MeV}) \rightarrow K^*(J^P = 1^-) \pi(J^P = 0^-)$
- 2)  $D(J^P = 0^-) \rightarrow K^*(J^P = 1^-) \pi(J^P = 0^-)$
- 3)  $D_s(J^P = 0^-) \rightarrow \phi(J^P = 1^-) \pi(J^P = 0^-)$

- [6] Ces désintégrations sont elles fortes ?
- [7] Donner les ondes partielles qui peuvent contribuer. On couplera dans le centre de masse général le moment orbital du méson vecteur  $1^-$  et son moment angulaire propre à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan appropriés. Tenir compte des parités intrinsèques et orbitales  $(-)^L$  pour les transitions fortes.
- [8] Montrer que pour les transitions 2) et 3) les nombres magnétiques relatifs au moment orbital et au méson vecteur  $1^-$  sont opposés.  $\Omega$  sera la direction du  $K^*$  dans le système au repos du  $D$ , et  $\omega$  la direction du  $K$  dans le  $K^*$ . L'amplitude de désintégration d'un état  $|1, m \rangle$  dans une direction  $\omega$  définie de son centre de masse est  $Y_1^m(\omega)$ . Donner l'amplitude de désintégration vers un état  $|\Omega, \omega \rangle$ , d'une part à l'aide d'harmoniques sphériques, de l'autre par une expression utilisant les vecteurs  $\mathbf{Q}_\pi$  et  $(\mathbf{q}^*)_0$

- [9] Le méson vectoriel  $1^-$  peut se désintégrer de la manière suivante :  $K^* \rightarrow K\pi$  et  $\phi \rightarrow K^+K^-$ . Ces désintégrations sont-elles fortes?
- [10] On suppose la particule de moment angulaire et parité  $J^P = 1^-$  dans un état quantique donné  $|J = 1, \lambda\rangle$ . Quelle est l'amplitude de désintégration pour une direction  $\omega$  donnée du  $K$  dans le système du  $K^*$  ?
- [11] Donner l'amplitude de désintégration dans les exemples mentionnés dans la question 8 lorsque la direction  $\Omega$  du méson vectoriel ( $J^P = 1^-$ ) dans le centre de masse général, ainsi que la direction  $\omega$  de sa désintégration sont connues. Réexprimer le résultat trouvé en fonction des 3-impulsions  $\mathbf{Q}$  du  $1^-$  dans le c.d.m. général et  $\mathbf{q}$  du  $K$  de désintégration du  $1^-$  dans son système. Montrer que le résultat est de la forme  $T \propto \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}$ .
- [12] Trouver directement, en utilisant une rotation infinitésimale et les propriétés de la matrice  $\epsilon = i\sigma_2$ , la loi de transformation par rotation des trois composantes  $\chi^T \epsilon \sigma_i \eta$ .