

# Chapitre 12

## MELANGE DES SAVEURS ET VIOLATION DE CP

### 1 - MELANGE ET MATRICE DE MASSE

#### 1-1 Les amplitudes violent CP

L'effet de la violation de  $CP$  dans les désintégrations faibles est en général inobservable : cet effet, qui met forcément en jeu les trois familles de quarks, comme dans l'exemple de la figure 12.1b est du deuxième ordre dans les désintégrations faibles et sa contribution va être très inférieure aux termes du premier ordre du diagramme 12.1a, sauf dans une transition où ceux-ci sont interdits.

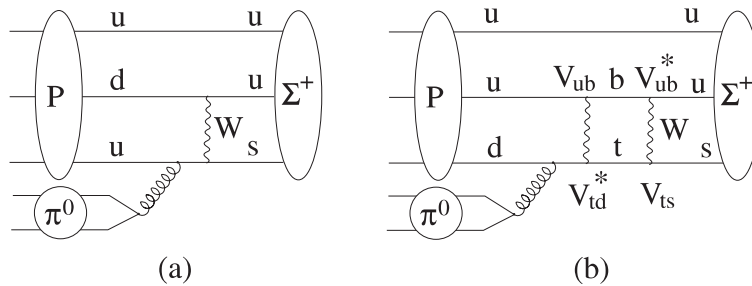


Figure 12.1 : La désintégration  $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$  a) La contribution dominante.  
b) La contribution violent CP.

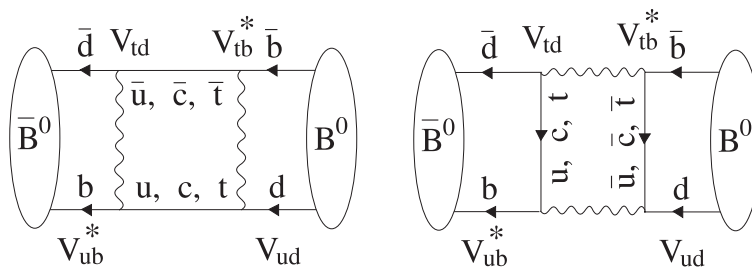


Figure 12.2 : La transition  $B^0 - \bar{B}^0$ .

Dans les mélanges  $K^0 - \bar{K}^0$  et  $B^0 - \bar{B}^0$ , la saveur est changée de 2 unités, ce qui nécessite un double échange de boson  $W$  représenté dans la figure 12.2 pour les mésons  $B^0$ . Un diagramme tout à fait semblable décrit la transition  $K^0 - \bar{K}^0$ .

### 1-2 La matrice de masse

Comme dans la mécanique quantique d'un système à deux niveaux, l'évolution temporelle du système  $P - \bar{P}$  ( $P$  désignant les mésons  $B$  ou  $K$ ), peut être décrite par un hamiltonien effectif  $2 \times 2$  appelé matrice de masse. Si on choisit comme états de base  $|P\rangle$  et  $|\bar{P}\rangle$  les composantes  $\alpha(t) = \langle P | P(t) \rangle$  et  $\beta(t) = \langle \bar{P} | P(t) \rangle$  de l'état  $|P(t)\rangle$  dans cette base forment le vecteur  $P(t)$  et évoluent au cours du temps conformément à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{dP}{dt} = HP(t) \quad (12.1.1)$$

Comme le méson  $P$  peut se désintégrer dans des canaux qui ne sont pas inclus dans la base choisie, la norme de  $|P(t)\rangle$  n'est pas conservée dans l'évolution, et  $H$  n'est pas hermitien. Si l'on définit

$$M = (H + H^\dagger)/2 \quad \Gamma = i(H - H^\dagger)$$

$M$  et  $\Gamma$  sont hermitiens et :

$$H = M - i\frac{\Gamma}{2}$$

L'hamiltonien effectif  $H$  peut être décomposé formellement selon  $H = H_0 + V$ , où  $H_0$  est l'hamiltonien libre des particules  $P$  et  $\bar{P}$ , et  $V$  la perturbation due aux interactions faibles, qui sera définie de manière à préserver la relation donnée au chapitre 6 entre amplitudes et perturbations :

$$T(E) = V + V \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} V + \dots \quad (12.1.2)$$

A l'ordre le plus bas  $T = V$ , mais l'hamiltonien faible (échange d'un boson  $W$ ) ne peut pas connecter des états  $P$  et  $\bar{P}$ , et l'amplitude de mélange sera dominée par la contribution du deuxième ordre en  $V$ . L'amplitude  $T$  et l'hamiltonien effectif de (12.1.1) seront du même ordre. L'état métastable  $|P\rangle$  est *en apparence*, (voir plus loin) produit à l'instant  $t = 0$ . C'est une combinaison linéaire des états  $|P\rangle$  et  $|\bar{P}\rangle$  propres de  $H_0$ . Cet état évolue sous l'effet de la perturbation  $V$ , et nous allons montrer en nous inspirant de la méthode du chapitre 6 que dans le secteur  $(P, \bar{P})$ , cette évolution est régie par un hamiltonien effectif qui, à l'approximation du deuxième ordre, est égal à l'amplitude précédente.

Les différents états propres de l'hamiltonien fort  $H_0$  seront notés  $\Phi_i$ , avec  $i = 1, 2$  pour  $P$  et  $\bar{P}$ .

$$H_0 | \Phi_i \rangle = E | \Phi_i \rangle$$

Les deux valeurs propres sont en effet égales à cause de la symétrie  $CPT$ , comme on l'a vu au chapitre 8. D'autre part, l'état initial est une combinaison linéaire des états  $P$  et  $\bar{P}$ . Dans la représentation d'interaction,

$$|\psi(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\psi^S(t)\rangle$$

Nous utiliserons la même notation  $\psi$  pour la fonction d'onde et l'état. L'équation du mouvement dans la représentation d'interaction est, en notant  $H^0 = M$  la matrice diagonale des masses :

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \psi(t) = V(t)\psi(t) \quad (12.1.3)$$

où  $V$  est la contribution de l'interaction faible. La solution est de la forme :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= U^+(t)\psi(0) \\ U^+(t) &= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} U^+(t') \end{aligned} \quad (12.1.4)$$

et en dans (12.1.3) l'expression de  $U^+(t)$  :

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = V(t) \left[ \psi(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V(t') \psi(t') \right]$$

Comme les états asymptotiques  $|\Phi_i\rangle$  sont indépendants du temps dans cette représentation

$$i\hbar \frac{d\langle \Phi_j | \psi(t) \rangle}{dt} = \langle \Phi_j | V(t) | \psi(0) \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \Phi_j | V(t') e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} | \psi(t') \rangle$$

Une base complète d'états propres de  $H^0$  comprend les états initiaux ( $P, \bar{P}$ ), notés  $|\Phi_j\rangle$  et  $|\Phi_k\rangle$ , ainsi que les autres états couplés présents dans l'état final  $|\Phi_l\rangle$ . On peut substituer à  $H_0$  les valeurs propres correspondantes, et en notant  $V_{jl} = \langle \Phi_j | V | \Phi_l \rangle$  et  $\psi_j(t) = \langle \Phi_j | \psi(t) \rangle$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \langle \Phi_j | \psi(t) \rangle}{\partial t} &= \sum_i e^{-i(E_k - E_j)t} V_{jk} \langle \Phi_k | \psi(0) \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{l,i} e^{-i(E_l - E_j)t} V_{jl} V_{lk} \int_0^t dt' e^{-i(E_k - E_l)t'/\hbar} \langle \Phi_k | \psi(t') \rangle \end{aligned} \quad (12.1.5)$$

Le terme linéaire en  $V$  est nul, l'interaction faible ne changeant la saveur que d'une unité, et seul le terme du deuxième ordre en  $V$  subsiste. A la même précision, nous pourrions substituer  $\psi(t)$  à  $\psi(t')$ ,  $SI$  la seule dépendance temporelle provenait de la perturbation  $V$ . Pour observer l'évolution d'une particule instable, il faut cependant la produire à un instant (presque) défini. Si cette amplitude prend la forme d'une fonction saut à l'instant  $t = 0$ , comme nous l'avons (implicitement) supposé, la dérivée de l'équation (12.1.5) n'existe

plus. Nous la régulariserons en attribuant à l'amplitude de l'état initial une dépendance temporelle de création  $e^{\epsilon t}$ . L'énergie  $\epsilon$  est petite par rapport aux énergies hadroniques  $E_j$ , mais grande par rapport aux largeurs faibles. Dans ces conditions,  $\psi_k(t') = \psi_k(t)e^{-\epsilon(t-t')}$ .

$$i\hbar \frac{\partial \psi_j(t)}{\partial t} = \sum_{l,k} (e^{i(E_j - E_k)t} - e^{i(E_j - E_l)t} e^{-\epsilon t}) \langle \Phi_j | V | \Phi_l \rangle \frac{1}{E_k - E_l + i\epsilon} \langle \Phi_l | V | \phi_k \rangle \psi_k(t) \quad (12.1.6)$$

Dans le cadre des approximations faites, le retour à la représentation de Schrödinger se fait par les relations  $\psi_j(t) = e^{iE_j t} \psi_S(t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_j^S(t)}{\partial t} - E_j \psi_j^S(t) = \sum_{k,l} V_{jl} \frac{1}{E_k - E_l + i\epsilon} V_{lk} (1 - e^{i(E_k - E_l)t} e^{-\epsilon t}) \psi_k^S(t) \quad (12.1.7)$$

La sommation sur les états  $|\Phi_l\rangle$  doit être remplacée par une intégrale sur l'énergie  $E_l$  de ces états avec leur distribution de densité. Dans l'équation (12.1.7), les indices  $i$  et  $j$  qui correspondent au sous espace ( $P$ ,  $\bar{P}$ ) ne prennent que les valeurs 1 et 2 alors que la sommation sur  $l$  doit inclure tous les états intermédiaires possibles. L'intégrale sur l'énergie du terme oscillant s'annule dans les conditions d'approximation indiquées où  $\epsilon$  est une largeur de formation hadronique typique :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_j^S}{\partial t} = E_j \psi_j^S + \sum_{l,k} V_{jl} \frac{1}{E_k - E_l + i\epsilon} V_{lk} \psi_k^S$$

Dans une notation à deux composantes :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_S(t)}{\partial t} = (H_0 + \Delta M - i\frac{\Gamma}{2}) \psi_S(t) \quad (12.1.8)$$

$H_0$  est l'hamiltonien libre (celui des masses au repos) et  $\Delta M$  la contribution supplémentaire due aux interactions faibles. Nous noterons dans la suite  $M = H_0 + \Delta M$  la matrice de masse.

$$(\Delta M - i\frac{\Gamma}{2})_{ji} = \sum_l V_{jl} \frac{1}{E_i - E_l + i\epsilon} V_{li}$$

L'expression trouvée au chapitre 6, à l'approximation du deuxième ordre pour l'amplitude joue le rôle d'un hamiltonien. C'est bien ce que l'on pouvait prédire à partir de l'équation de Lippman-Schwinger, obtenue cependant avec des conditions aux limites différentes. En utilisant

$$\frac{1}{E_k - E + i\epsilon} = P\left(\frac{1}{E_k - E}\right) - i\pi\delta(E - E_k) \quad (12.1.9)$$

nous pouvons expliciter les contributions aux parties hermitienne et antihermitienne

$$(\Delta M)_{jk} = P \sum_l \frac{1}{E_k - E_l} \langle \Phi_j | V | \Phi_l \rangle \langle \Phi_l | V | \Phi_k \rangle \quad (12.1.10a)$$

La somme est effectuée sur tous les états intermédiaires, quelque soit leur énergie  $E_l$ . La matrice des largeurs  $\Gamma$  a pour éléments :

$$\Gamma_{jk} = 2\pi \sum_l \delta(E_k - E_l) \langle \Phi_j | V | \Phi_l \rangle \langle \Phi_l | V | \Phi_k \rangle \quad (12.1.10b)$$

La somme est restreinte aux états d'énergie  $E_k$ . Ce calcul sera repris plus loin en utilisant le modèle des quarks pour les hadrons, les diagrammes employés vérifiant automatiquement les relations de ce paragraphe pour  $M$  et  $\Gamma$ .

### 1-3 Les états propres de la matrice de masse

Le théorème  $CPT$ , comme on l'a vu au chapitre 8, restreint les formes permises de la matrice  $H$

$$\langle P | H | P \rangle = \langle \bar{P} | H | \bar{P} \rangle = m - i\frac{\gamma}{2} \quad (12.1.11a)$$

Ceci entraîne  $m_{11} = m_{22}$  et  $\gamma_{11} = \gamma_{22}$ . D'autre part, les matrices  $M$  et  $\Gamma$  étant par construction hermitiques:

$$\langle \alpha | H | \beta \rangle = m_{\alpha\beta} - i\gamma_{\alpha\beta}/2 \quad (12.1.11b)$$

$$\langle \beta | H | \alpha \rangle = m_{\alpha\beta}^* - i\gamma_{\alpha\beta}^*/2 \quad (12.1.11c)$$

Les indices  $\alpha$  et  $\beta$  désignent maintenant les composantes sur  $|P\rangle$  et  $|\bar{P}\rangle$ . Pour un choix de phase issu de la matrice  $CKM$ ,  $CP|P\rangle = \eta|\bar{P}\rangle$  et si la symétrie  $CP$  est vérifiée :

$$\langle \alpha | H | \beta \rangle = \eta \langle \beta | H | \alpha \rangle \quad (12.1.12)$$

En particulier, lorsque  $m_{\alpha\beta}$  et  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont en phase, la relation (12.1.12) est toujours satisfaite à une phase près, et nous verrons qu'il ne peut y avoir de violation de  $CP$ .

Les états propres  $|P_i\rangle$  de la matrice de masse pour les valeurs propres  $\mu_i$  évoluent selon  $|P_i(t)\rangle = \exp(-it\mu_i) |P_i(0)\rangle$  avec une masse  $m_i = \text{Re}(\mu_i)$  et une largeur  $\gamma_i = -2\text{Im}(\mu_i)$ . Les valeurs propres s'expriment simplement en fonction de la matrice de masse. Soit

$$Q = \sqrt{(m_{\alpha\beta} - i\gamma_{\alpha\beta}/2)(m_{\alpha\beta}^* - i\gamma_{\alpha\beta}^*/2)}$$

$$-m_i = -m \pm \operatorname{Re}(Q)$$

$$\gamma_i - \gamma = \pm 2\operatorname{Im}(Q)$$

Les signes + et - sont respectivement choisis pour  $i = 1, 2$ . On utilisera les notations

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2\operatorname{Re}(Q) \quad (12.1.13a)$$

$$\Delta\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1 = -4\operatorname{Im}(Q) \quad (12.1.13b)$$

Les quantités  $\Delta m$  et  $\Delta\gamma$  sont mesurables par l'observation des taux de décroissance et des interférences entre  $P$  et  $\bar{P}$ , et vérifient les relations suivantes :

$$\Delta m \Delta\Gamma = 4\operatorname{Re}(m_{12}\gamma_{12}^*) \quad (12.1.13c)$$

$$(\Delta m)^2 - \frac{1}{4}(\Delta\Gamma)^2 = 4|m_{12}|^2 - |\gamma_{12}|^2 \quad (12.1.13d)$$

Les états propres sont de la forme :

$$\begin{aligned} |P_1\rangle &= p|P\rangle - q|\bar{P}\rangle \\ |P_2\rangle &= p|P\rangle + q|\bar{P}\rangle \end{aligned} \quad (12.1.14)$$

avec

$$r = \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{m_{12}^* - i\gamma_{12}^*/2}{m_{12} - i\gamma_{12}/2}} \quad (12.1.15)$$

Les états  $|P_1\rangle$  et  $|P_2\rangle$  ne sont pas orthogonaux

$$\langle P_2 | P_1 \rangle = \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2}$$

On préfère souvent utiliser les paramètres équivalents

$$\epsilon = \frac{p - q}{p + q} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

Si  $CP$  est conservé,  $m_{12}$  et  $\gamma_{12}$  ont la même phase,  $r = q/p = e^{i\alpha}$  et  $\epsilon$  est imaginaire pur. Pour qu'apparaissent deux états propres non orthogonaux, ce qui est un des signes de la violation de  $CP$ , il faut que  $m_{\alpha\beta}$  et  $\gamma_{12}$  soient finis (non nuls) et que leurs phases diffèrent. Les valeurs de  $p$ ,  $q$ , et  $\epsilon$  dépendent cependant des conventions de phase adoptées pour la définition des états et l'opération  $C$ . Lorsque  $CP$  est conservé, on peut absorber la phase  $\alpha$  dans la définition de l'état  $\bar{P}$  et se ramener au cas où  $\epsilon = 0$ . Les états propres  $|P_i\rangle$  de norme unité s'expriment en fonction de  $\epsilon$  :

$$|P_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + |\epsilon|^2)}}(P - \bar{P}) + \epsilon(P + \bar{P}) \quad (12.1.15a)$$

$$|P_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}(P + \bar{P}) + \epsilon(P - \bar{P}) \quad (12.1.15b)$$

Les états propres de masse ne sont pas en général des états propres de CP. Dans le cas de la désintégration des  $K$ , on choisira la convention CP  $|P\rangle = -|\bar{P}\rangle$ . Si CP est conservé, les canaux de désintégration accessibles imposent  $\alpha = 0$ .

## 2- L'EVOLUTION TEMPORELLE

### 2-1 Les paramètres phénoménologiques

Les états  $|P_1\rangle$  et  $|P_2\rangle$  évoluent selon des lois exponentielles.

$$|P_i(t)\rangle = e^{-i\mu_i t} |P_i(0)\rangle$$

avec  $\mu_i = m_i - i\gamma_i/2$ . Les états initiaux sont en général à l'instant  $t = 0$  des états propres de saveur  $|P\rangle$  et  $|\bar{P}\rangle$ , avec

$$|P\rangle = \frac{1}{2p}(|P_1\rangle + |P_2\rangle)$$

$$|\bar{P}\rangle = \frac{1}{2q}(|P_2\rangle - |P_1\rangle)$$

à l'instant  $t$ , ces états seront  $|P(t)\rangle$  et  $|\bar{P}(t)\rangle$ , avec comme expression dans la base de saveur :

$$|P(t)\rangle = g_+(t)|P\rangle + g_-(t)r|\bar{P}\rangle$$

$$|\bar{P}(t)\rangle = g_-(t)\frac{1}{r}|P\rangle + g_+(t)|\bar{P}\rangle$$

$r = q/p$  a été défini dans le paragraphe précédent.

$$g_+(t) = \frac{1}{2}(e^{-i\mu_1 t} + e^{-i\mu_2 t})$$

$$g_-(t) = \frac{1}{2}(e^{-i\mu_2 t} - e^{-i\mu_1 t})$$

L'amplitude de désintégration vers un état  $f$  à un instant  $t$  fera intervenir les deux amplitudes  $\langle f|T|P\rangle = D_f$  et  $\langle f|T|\bar{P}\rangle = \bar{D}_f$

$$\Gamma(P(0) \rightarrow f(t)) \propto |D_f g_+(t) + r \bar{D}_f g_-(t)|^2 \phi(f)$$

où  $\phi(f)$  est le facteur d'espace de phase introduit au chapitre 6. Nous terminerons la liste (un peu longue) des paramètres phénoménologiques en définissant  $\rho_f = \bar{D}_f/D_f$  et  $\bar{\rho}_f = D_{\bar{f}}/\bar{D}_{\bar{f}}$ . Les amplitudes  $D_f$  et  $\bar{D}_{\bar{f}}$  dépendent des

conventions de phase fortes et faibles, mais on peut montrer que les rapports  $|D_f/\bar{D}_{\bar{f}}|$  et  $q\bar{D}/pD$  n'en dépendent pas. On obtient le taux de désintégration

$$\Gamma(P(0) \rightarrow f(t)) \propto |D_f|^2 \phi(f) (|g_+(t)|^2 + |r\rho_f|^2 |g_-(t)|^2 + 2\text{Re}(g_+^* g_- \rho_f r)) \quad (12.2.1)$$

Le taux de désintégration d'un  $\bar{P}$  initial en un  $\bar{f}$  est donné par la même formule sous réserve des substitutions :  $D_f \rightarrow \bar{D}_{\bar{f}}$ ,  $r \rightarrow 1/r$  et  $\rho_f \rightarrow \bar{\rho}_{\bar{f}}$ . Lorsque  $CP$  est conservé,  $r = e^{i\alpha}$  et  $D_f = -\bar{D}_{\bar{f}}$ . Quand la première relation est violée, ( $|r| \neq 1$ ) on dit qu'il y a violation de  $CP$  dans la matrice de masse, quand la deuxième l'est, on parle de violation dans l'amplitude, ou de violation de  $CP$  directe. Bien entendu, dans le modèle standard, on s'attend à ce que les deux effets soient présents, mais il se trouve (par hasard) que pour le  $K^0$ , le premier l'emporte de beaucoup.

## 2-2 La désintégration des $K$ en 2 et 3 pions et les états propres de $CP$

Les mésons  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  peuvent se désintégrer en deux ou trois pions, et nous allons préciser les valeurs de  $CP$  permises dans ces deux cas :

- Pour un système de deux  $\pi^0$ , la permutation des deux pions revient à changer de signe leur position relative, et la symétrie de Bose restreint les valeurs du moment orbital aux  $l$  pairs :

$$CP(\pi^0\pi^0) = (-)^l (\eta_C)^2 (\eta_P)^2 = +1$$

Les facteurs de phase  $\eta_C$  et  $\eta_P$  représentent les phases (réelles) de conjugaison de charge et de parité intrinsèque.

- Rappelons que les conventions de phase du chapitre 8 imposaient  $C|\pi^+ \rangle = -|\pi^- \rangle$  et  $C|\pi^- \rangle = -|\pi^+ \rangle$

$$CP(\pi^+\pi^-) = C(\pi^+\pi^-)P(\pi^+\pi^-) = (-)^l (-)^l = +1$$

Un système de deux pions de charge totale nulle a toujours  $CP = +1$ , et sa parité est  $(-)^l = +1$ .

Si  $CP$  est conservé dans les désintégrations faibles, seul l'état  $K_1$  ayant  $CP = +1$  peut se désintégrer en deux pions. L'état  $K_2$  ne peut se désintégrer qu'en trois pions. Le moment angulaire total ( $J = 0$ ) peut être construit comme l'indique la figure 12.3 en combinant le mouvement orbital relatif  $l$  de  $\pi_1\pi_2$  avec le moment angulaire  $L$  du  $\pi_3$  par rapport au centre de masse des deux premiers. Il en résulte  $L = l$ , et la parité (non conservée) du système de trois pions est  $(\eta_P)^3 (-)^{l+L} = -1$ . Comme on l'a vu au chapitre 8, T. D. Lee et C. N. Yang (1956) ont compris que l'existence de désintégrations en deux et trois pions d'une même particule imposait une violation de la parité.



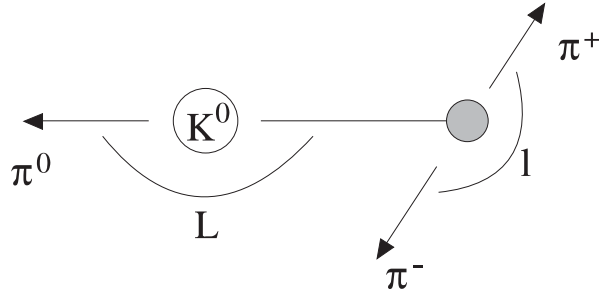


Figure 12.3: Les moments angulaires  $l$  et  $L$  du triplet de pions.

- La symétrie de Bose contraint la paire  $\pi_1\pi_2$  dans l'état final ( $\pi^0\pi^0\pi^0$ ) à avoir un  $l$  pair, et ceci impose  $L$  pair. Le  $\pi^0$  étant un état propre de  $C$  :

$$CP |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = \eta_P^3 (-)^l (-)^L = -1$$

Avec les conventions choisies, seul  $|K_2\rangle$ , qui a  $CP = -1$ , peut se désintégrer en 3  $\pi^0$  lorsque  $CP$  est conservé.

- De même, compte tenu de  $C |\pi^+\pi^-\rangle = (-)^l |\pi^+\pi^-\rangle$  :

$$CP |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = \eta_P^3 (-)^l (-)^l (-)^L = (-)^{l+1}$$

L'état de plus bas moment angulaire  $l = L = 0$ , qui a une amplitude plus grande est un état propre de  $CP = -1$  accessible à partir de  $|K_2\rangle$  si  $CP$  est conservé. L'état  $|K_1\rangle$  peut se désintégrer en trois pions, avec  $l = L = 1$ , mais ce canal est doublement défavorisé par rapport au mode en deux pions : par l'espace de phase et par les barrières angulaires qui introduisent un facteur  $q^l Q^L$  dans l'amplitude pour une impulsion relative  $q$  des deux pions, et  $Q$  du troisième. Comme l'espace de phase est plus petit dans le mode à trois pions, la durée de vie correspondante sera plus longue. L'état de vie longue a donc  $CP = -1$ , et l'état de vie courte  $CP = 1$ . On verra que la durée de vie de l'état  $CP = +1$  appelé  $K_S^0$  ( $S$  pour short) correspond à une longueur de désintégration  $c\tau = 2,67\text{cm}$ . En se plaçant à grande distance du point de production des  $K$ , on réduit la quantité de  $K_S^0$  à une proportion négligeable. La conservation de  $CP$  implique alors que l'on n'observe que des désintégrations en trois pions. L'expérience de Cronin et Fitch dont le schéma de principe est indiqué sur la figure 12.4 a démontré que l'on voyait aussi des modes en deux pions, à un taux qui ne pouvait pas être expliqué par la très faible contamination résiduelle des  $K_S$  :  $CP$  n'était pas conservée. Les éléments principaux de cette expérience se composent d'un volume de désintégration (le réservoir d'Helium, une approximation du vide) et d'un spectromètre à deux bras qui mesurent les impulsions des deux pions et les identifient à l'aide d'un compteur Cerenkov.

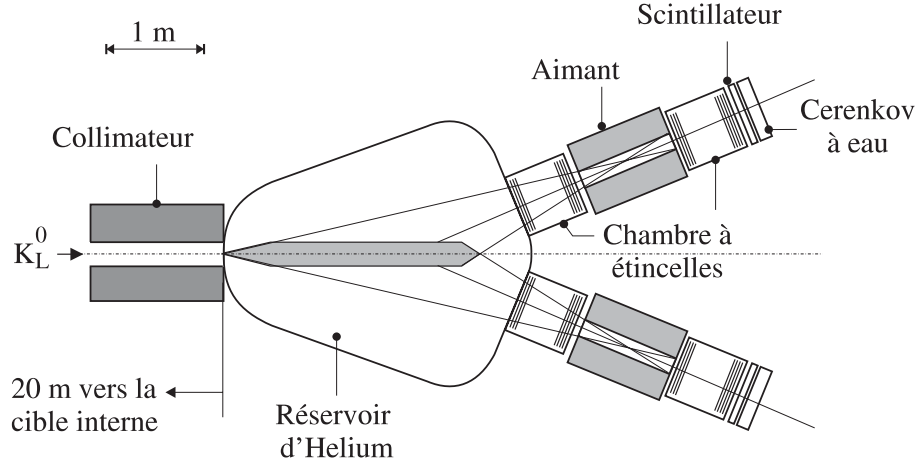


Figure 12.4 : Le schéma de principe de l'expérience qui a démontré la violation de CP.

### 2-3 Les phases de désintégration dans l'état final ( $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ )

Les deux pions peuvent être dans un état d'isospin  $I = 0$  ou  $I = 2$ , et il y a deux contributions :

Les amplitudes *faibles* vers les états  $I = 0$  et  $I = 2$ , qui sont complexes avec des phases  $\phi_I$ . En particulier, la contribution des coefficients de la matrice  $V_{CKM}$  va être conjuguée dans le passage du  $K^0$  au  $\bar{K}^0$ .

Les phases fortes  $\delta_I$ , qui vont intervenir multiplicativement dans l'état final, et sont les mêmes pour  $K^0$  et  $\bar{K}^0$ .

$$A(K^0 \rightarrow \pi\pi, I = 0) = a_0 e^{i\phi_0} e^{i\delta_0} \quad (12.2.2a)$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi\pi, I = 0) = -a_0 e^{-i\phi_0} e^{i\delta_0} \quad (12.2.2b)$$

$$A(K^0 \rightarrow \pi\pi, I = 2) = a_2 e^{i\phi_2} e^{i\delta_2} \quad (12.2.2c)$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi\pi, I = 2) = -a_2 e^{-i\phi_2} e^{i\delta_2} \quad (12.2.2c)$$

Les phases faibles ( $\phi_0, \phi_2$ ) ne sont pas définies de manière absolue, puisque un changement de la phase relative des états peut être compensé par un changement de la matrice  $V_{CKM}$ . On peut imposer  $\phi_0 = 0$ , mais cette convention diffère de celle qui est usuellement adoptée dans la paramétrisation de la matrice  $V_{CKM}$ . Les mesures expérimentales montrent que  $|a_2/a_0| \ll 1$ . A l'aide des deux coefficients de Clebsch-Gordan  $\langle 2, 0 | 1, 1; 1, -1 \rangle = 1/\sqrt{6}$  et  $\langle 0, 0 | 1, 1; 1, -1 \rangle = 1/\sqrt{3}$  on obtient le rapport des amplitudes :

$$\eta_{+-} = \frac{A(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \quad (12.2.3)$$

On définit de manière semblable le rapport  $\eta_{00}$  des deux amplitudes pour l'état final  $\pi^0\pi^0$ . Si les amplitudes d'isospin  $I = 2$  sont nulles ou en phase avec les amplitudes  $I = 0$ , Les équations (12.1.15) entraînent

$$\eta_{00} = \eta_{+-} = \epsilon_K = \frac{pe^{i\phi_0} - qe^{-i\phi_0}}{pe^{i\phi_0} + qe^{-i\phi_0}} = \frac{1 - |r| e^{i(\alpha-2\phi_0)}}{1 + |r| e^{i(\alpha-2\phi_0)}}$$

Lorsque CP est presque conservé et que l'amplitude  $I = 0$  domine,  $\epsilon_K \sim 0$ , c'est-à-dire  $\phi_0 \sim \alpha/2$ . Le paramètre  $\epsilon_K$  diffère de  $\epsilon$  pour les conventions de phase usuelles. En présence d'une amplitude  $I = 2$  on voit que

$$\eta_{+-} = \epsilon_K + \epsilon' \quad \eta_{00} = \epsilon_K - 2\epsilon' \quad (12.2.4)$$

$$\epsilon' \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{pA_2 + q\bar{A}_2}{pA_0 - q\bar{A}_0} \right)$$

voisins des états propres de CP. Lorsque l'amplitude dominante est  $I = 0$ , avec une violation de CP faible,  $\phi_0 = \alpha/2$ , et dans cette approximation :

$$\eta_{+-} \sim \epsilon_K + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{a_2}{a_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \sin(\phi_2 - \phi_0) \quad (12.2.5)$$

La petitesse de  $a_2/a_0$  et du déphasage  $\phi_2 - \phi_0$  vont entraîner celle de  $\epsilon'$ . Les expériences qui comparent  $\eta_{+-}$  et  $\eta_{00}$  n'ont obtenu qu'une limite supérieure :  $|\epsilon'/\epsilon| < 3 \cdot 10^{-3}$ . Les paramètres  $\eta_{00}$  et  $\eta_{+-}$  sont alors très proches de  $\epsilon_K$ .

#### 2-4 Les propriétés du système $K^0 - \bar{K}^0$

On a vu que les états finals associés aux deux états  $K_1$  et  $K_2$ , proches des états propres de CP sont très différents. En particulier, l'espace de phase est beaucoup plus grand dans le canal  $K_1$  proche de CP = +1 qui peut se désintégrer en deux pions avec une grande amplitude. Les deux temps de vie sont

$$\tau_1 = \frac{\hbar c}{\gamma_1} = \tau_S = 0,89 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$\tau_2 = \frac{\hbar c}{\gamma_2} = \tau_L = 5,17 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Les indices  $S$  et  $L$  signifient *Short* et *Long* et correspondent aux temps de vie moyens des deux états, qui sont ainsi très différents. Au contraire, dans le système  $B^0 - \bar{B}^0$ , où beaucoup d'états finals sont accessibles, la différence des deux temps de vie sera faible (et n'a pas encore été mise en évidence). Le rapport des largeurs partielles (en deux pions) s'obtient directement à partir des temps de vie.  $\gamma_S/\gamma_L = 0,55 \cdot 10^3$ . L'élément de matrice  $\gamma_K = \langle K | \Gamma | K \rangle$  se calcule à l'aide de (12.1.15) :  $\gamma_K = 0,5(\gamma_S + \gamma_L) \sim 0,5\gamma_L$  et  $\Delta\gamma = \gamma_S - \gamma_L \sim \gamma_S$

Comme d'autre part  $|\epsilon_K| = 2,28 \cdot 10^{-3}$ , l'expression générale (12.1.15) du rapport  $q/p$ , proche de l'unité contraint les parties imaginaires à être petites.  $Im(m_{12}) \ll Re(m_{12})$  et  $Im(\gamma_{12}) \ll Re(\gamma_{12})$ . La valeur de  $\epsilon$  est alors approximativement donnée par

$$\epsilon \sim \frac{iIm(m_{12}) + 1/2Im(\gamma_{12})}{2Re(m_{12}) - 2iRe(\gamma_{12}/2)} \sim \frac{iIm(m_{12}) + 1/2Im(\gamma_{12})}{2Q}$$

et d'après les relations (12.1.13)

$$\epsilon_K \sim \frac{iIm(m_{12}) + 1/2Im(\gamma_{12})}{\Delta m - i\Delta\Gamma/2} \quad (12.2.7)$$

On observe expérimentalement que  $x_K = \Delta m/\gamma_K = 0,954$  en mesurant les interférences  $K_S - K_L$ . Il en résulte que  $\Delta m = \gamma_K = 0,5\gamma_S \sim 0,5 \Delta\gamma$ . La formule (12.2.7) peut alors être simplifiée de manière à faire apparaître la phase de  $\epsilon$ , telle qu'elle résulte des mesures d'interférences présentées dans le paragraphe suivant. Le canal dominant est unique :  $(\pi\pi)_{I=0}$ . Pour le choix de phase  $\phi_0 = 0$ , l'équation (12.1.10) ne contient que des contributions réelles à l'élément de matrice  $\Gamma_{jk}$ , et  $Im(\gamma_{12}) = 0$ .

$$\epsilon = e^{i\pi/4} \frac{Im(m_{12})}{\sqrt{2}\Delta m} \quad (12.2.8)$$

## 2-5 La loi de désintégration

Le taux de désintégration d'une particule produite à  $t = 0$  se calcule d'après la formule (12.2.1), mais on peut mettre en évidence les paramètres  $r$  et  $\rho_f$ , provenant respectivement de la matrice de masse et de la désintégration. Le taux de désintégration en  $\pi^+\pi^-$  d'un  $K^0$  produit à l'instant  $t = 0$  est :

$$\frac{4}{|D_f|^2} \gamma_{K^0}(t) = A_1 e^{-\gamma_S t} + A_2 e^{-\gamma_L t} + B \cos\Delta m t e^{-(\gamma_S + \gamma_L)t/2} + C \sin\Delta m t e^{-(\gamma_S + \gamma_L)t/2} \quad (12.2.9)$$

Les coefficients sont fonction de  $r = q/p$ , qui caractérise la matrice de masse, et de  $\rho = \bar{D}_f/D_f$  qui dépend du canal  $f$  considéré et a en général un module proche de l'unité. Nous avons vu comment la présence de deux voies de désintégration pour le  $K$  avec des phases  $CKM$  conjuguées induisait une contribution à la violation de  $CP$  due au rapport  $\rho$ . Cette violation est caractérisée par le produit  $r\rho = z$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= |1 + z|^2 \\ A_2 &= |1 - z|^2 \\ B &= 2(1 - |z|^2) \end{aligned}$$

$$C = -4\text{Im}(z)$$

les coefficients  $B$  et  $C$  sont respectivement proportionnels à  $2\text{Re}((1+z)(1-z)^*)$  et  $-2\text{Im}((1+z)(1-z)^*)$ . Comme précédemment, le passage du  $K^0 \rightarrow f$  au  $\bar{K}^0 \rightarrow \bar{f}$  se fait en substituant  $r \rightarrow 1/r$ ,  $\rho_f \rightarrow \bar{\rho}_f$  et  $D_f \rightarrow \bar{D}_f$ . A une normalisation près, la probabilité de désintégration en  $\pi^+\pi^-$  ou  $\pi^0\pi^0$  s'exprime directement en fonction des seuls paramètres  $\eta_{+-}$  ou  $\eta_{00}$ . Pour le canal  $f$  :  $\eta_f = (1+z_f)/(1-z_f)$ . C'est précisément le rapport des amplitudes du  $K_L$  et du  $K_S$  dans les mêmes voies :

$$\frac{\langle \pi^+\pi^- | K_L \rangle}{\langle \pi^+\pi^- | K_S \rangle} = \frac{1+z_{+-}}{1-z_{+-}} = \eta_{+-} = |\eta_{+-}| e^{i\phi} \quad (12.2.10)$$

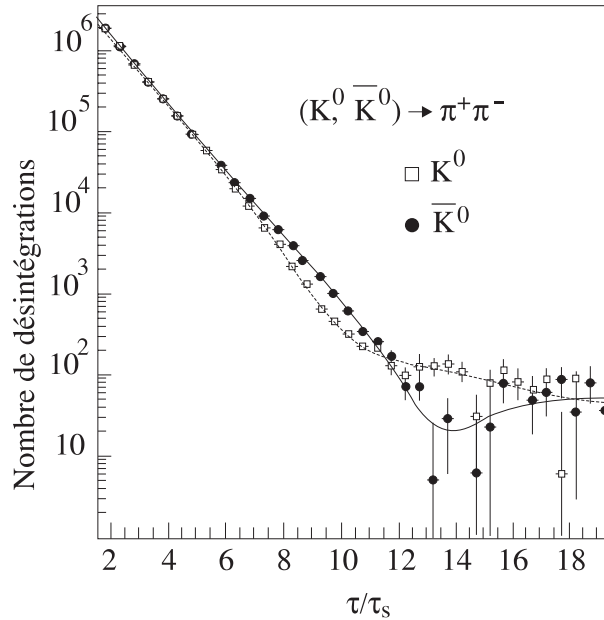


Figure 12.5 : Le taux de désintégration du  $K^0$  et du  $\bar{K}^0$  en fonction du temps. Les courbes sont dessinées avec les valeurs mesurées de  $\Delta m$ ,  $\Gamma_S$ ,  $\Gamma_L$ ,  $\eta_{+-}$ .

Le nombre complexe  $\eta_{+-}$  est mesurable par l'étude de la zone d'interférence entre  $K_L$  et  $K_S$  :  $|\eta_{+-}| = 2,3 \cdot 10^{-3}$  et  $\phi_{+-} = 43^\circ \pm 1^\circ$ . Il en résulte que le produit  $z = r\rho_f$  est indépendant des conventions de phase. On définit de manière analogue  $\eta_{00}$  pour le mode en deux pions neutres, et on a vu que  $\eta_{00} \sim \eta_{+-}$  si la contribution  $I = 2$  dans l'état final est nulle. La valeur de  $\epsilon'/\epsilon$ , obtenue à partir du rapport  $\eta_{00}/\eta_{+-}$  (Voir l'exercice 3) est comprise entre 0 et  $4 \cdot 10^{-4}$  (en 1997). Une nouvelle génération d'expériences devrait réduire cette incertitude. La figure 12.5 met directement en évidence la différence entre

les nombres de désintégrations à un instant  $\tau/\tau_S$  donné d'un  $K^0(t=0)$  et d'un  $\bar{K}^0(t=0)$ , ce qui viole manifestement la symétrie  $CP$ . Le comportement oscillant provient lui aussi de la présence des deux contributions  $K_S$  et  $K_L$  dans l'état final, qui a  $CP = 1$ . La distribution temporelle de la figure 12.5 permet aussi de mesurer, à l'aide de la formule 12.2.9 la différence de masse  $\Delta m = 3,5 \cdot 10^{-6}$  eV.

## 2-6 Les désintégrations semi-leptoniques

Les désintégrations semi-leptoniques révèlent directement la saveur du quark (ou de l'antiquark) impliqué dans la transition :  $s \rightarrow u + W^-$  et  $b \rightarrow c + W^-$ . Les leptons négatifs proviennent des quarks  $b$  et  $s$ , c'est à dire de  $\bar{B}^0$  et  $\bar{K}^0$  respectivement. Les réactions correspondantes sont par exemple (pour un électron)  $K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$  et  $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ . Le formalisme précédent s'applique, avec la simplification due à la présence d'une seule des deux amplitudes possibles pour ces états finals :  $D_{l^-} = 0$  et  $\bar{D}_{l^+} = 0$ . Comme, en outre  $CP$  est presque conservé dans les amplitudes de transition,  $D_{l^+} = \bar{D}_{l^-}$ . Si  $CP$  est conservée  $p/q = e^{i\alpha}$  et les deux taux  $\Gamma(K_L \rightarrow l^-)$  et  $\Gamma(K_L \rightarrow l^+)$  sont égaux.

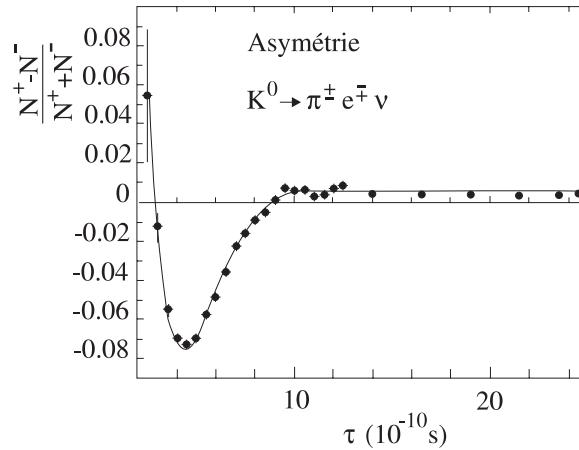


Figure 12.6 : L'asymétrie des taux de désintégration leptonique en fonction du temps de désintégration.

Dans le cas contraire, on observera une asymétrie  $\delta_K$ . En notant par  $L$  et  $S$  les états  $K_L$  et  $K_S$  :

$$\delta_K = \frac{(K_L \rightarrow l^-) - (K_L \rightarrow l^+)}{(K_L \rightarrow l^-) + (K_L \rightarrow l^+)} = \frac{|r\rho|^2 - 1}{|r\rho|^2 + 1}$$

Mais dans le mode leptonique,  $|\rho| = 1$ , et comme  $\epsilon$  est petit  $\delta_K \sim -2\text{Re}\{\epsilon\}$ . Les

données de la figure 12.6 déterminent  $\delta_K = -3,3 \cdot 10^{-3}$ , soit  $Re(\epsilon) = 1,6 \cdot 10^{-3}$ . Cette valeur est compatible avec la détermination plus précise obtenue dans les modes hadroniques. On peut ainsi distinguer matière et antimatière par la charge de l'électron dominant du  $K_L$ .

### 3- L'OSCILLATION $B^0 - \bar{B}^0$

La partie réelle  $M_{fi}$  pourrait s'obtenir à partir de la partie principale de l'expression (12.1.8) de la matrice de masse, mais il faudrait connaître les amplitudes de tous les canaux de désintégration du méson  $B^0$ . Combinée à un modèle de quarks pour les hadrons, la théorie électrofaible permet avec une bonne approximation le calcul direct d'un hamiltonien effectif à partir des diagrammes en boîte de la figure 12.2, et celui-ci joue le rôle d'une matrice de masse. Les corrections perturbatives à cet hamiltonien provenant des ordres supérieurs de QCD sont bien contrôlées et se résument à un facteur correctif  $K_{QCD}$  mieux connu que dans le système  $K^0 - \bar{K}^0$ . L'hamiltonien associé au diagramme en boîte de la figure 12.2 est de la forme

$$H_{eff} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} m_t^2 K_{QCD} \frac{A(\eta)}{\eta} \lambda_t^2 \bar{d}_L \gamma_\mu b_L \bar{d}_L \gamma^\mu b_L \quad (12.3.2)$$

La notation  $q_L$  décrit des champs de quarks de chiralité gauche. La contribution du quark top domine les autres à cause de la grande différence entre les masses  $m_b$  et  $m_t$  du doublet, qui se traduit par le facteur  $m_t^2$ . L'unitarité de la matrice  $V_{CKM}$ , aboutit à une compensation entre les quarks  $u$  et  $c$ , c'est le mécanisme de Glashow-Iliopoulos-Maiani. Le facteur  $K_{QCD}$  vaut 0,85 et tient compte de l'échange de gluons virtuels dans les boîtes de la figure 12.2. Le paramètre  $\eta = (m_t/M_W)^2$  est maintenant connu et vaut environ  $\eta = 4,66$ . Le calcul de la fonction  $A(\eta)$  a été effectué par Inami et Lim :

$$A(\eta) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4(1-\eta)} - \frac{3}{2(1-\eta)^2} - \frac{3\eta^2 \text{Log}(\eta)}{2(1-\eta)^3} \quad (12.3.3)$$

En dépit des apparences,  $A(1) = 3/4$  est finie, et  $A(\infty) = 1/4$  donne une bonne approximation pour les masses de top élevées, de l'ordre de  $175 \text{ GeV}$ . Le paramètre  $\lambda_t = V_{tb}V_{td}^*$  contient précisément la dépendance vis-à-vis des phases de la matrice  $V_{CKM}$  qui va être à l'origine de la violation de CP. Les éléments de matrice  $V_{tq}$  sont de l'ordre de  $\lambda^3$  dans la paramétrisation de Wolfenstein, et l'hamiltonien effectif est de l'ordre de  $m_t^2 \lambda^6$ . Le même formalisme conduirait à  $m_c^2 \lambda^2$  pour le système  $K - \bar{K}$ . On voit comment la grande masse du quark top compense la faiblesse de ses couplages. Il reste à calculer les éléments de matrice de  $H_{eff}$  entre des états hadroniques. Nous avons vu que la méthode naïve qui sommait sur tous les canaux (accessibles) était inapplicable. La forme

adoptée pour  $H_{eff}$  suggère une autre approche : cet opérateur annihile le  $B^0$  initial et crée in  $\bar{B}$ . On peut factoriser l'élément de matrice recherché sous la forme

$$\sum_h \langle B | \bar{d} \gamma^\mu b_L | h \rangle \langle h | \bar{d} \gamma^\mu b_L | \bar{B} \rangle$$

et se limiter au terme dominant qui est celui du vide puisque  $\bar{d}b$  annihile le méson  $\bar{B}$ . La normalisation sera déterminée par la constante de couplage pseudo-scalaire. Pour un pion, nous avons vu au chapitre 10 qu'en fonction de la 4-impulsion  $p^\mu$  d'un pion d'énergie  $E_\pi$  :

$$\langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d | \pi \rangle = i f_\pi \sqrt{2} p_\mu$$

avec  $f_\pi = 94$  MeV,  $f_K = 113$  MeV sont mesurés dans les désintégrations  $\pi \rightarrow \mu\nu$  et  $K \rightarrow \mu\nu$ . Pour le méson  $B$

$$\langle B^0 | J_\mu J^\mu | \bar{B}^0 \rangle = \frac{4}{3} m_B f_B^2$$

Le facteur  $1 + 1/N_c = 4/3$  est dû à la couleur. Les effets liés à l'utilisation du modèle des quarks sont pris en compte par un *facteur de sac* (Bag)  $B_B$  qui représente la distribution effective des quarks dans le méson  $B$  et est estimé à partir des calculs sur réseaux à une valeur proche de l'unité. Le résultat final est

$$m_{12} = \frac{G_F^2 m_t^2 m_B}{12\pi^2} B_B f_B^2 \lambda_t^2 K_{QCD} \frac{A(\eta)}{\eta} \quad (12.3.4)$$

où  $B_B$ , encore assez mal connu peut varier entre 0,5 et 1. Rappelons que  $\lambda_t = V_{tb} V_{td}^*$  pour un quark  $b$  initial (méson  $\bar{B}$ ). La largeur  $\gamma_{12}$  est donnée par la formule (12.1.10) où interviennent les seuls quarks cinématiquement couplés au méson  $B$ , c'est à dire  $u$  et  $c$ .

$$\gamma_{12} = \frac{G_F^2 m_B^3}{8\pi} B_B f_B^2 (\lambda_c^2 Q_{cc} + \lambda_u^2 Q_{uu} + 2\lambda_c \lambda_u Q_{uc}) \quad (12.3.5)$$

les coefficients  $\lambda_c$  et  $\lambda_u$  de la formule (12.3.5) sont les produits  $\lambda_i = V_{ib} V_{id}^*$ , tandis que les facteurs cinématiques  $Q_{cc}$ ,  $Q_{uu}$ ,  $Q_{uc}$ , qui dépendent des masses des quarks et de  $M_W$  sont du même ordre de grandeur. Il résulte des deux équations (12.3.4) et (12.3.5) que  $\gamma_{12}/m_{12} \sim (m_b/m_t)^2 \ll 1$ , et l'équation (12.1.13) se simplifie :

$$\Delta m = 2|m_{12}|$$

On définit le paramètre  $x_q = (\Delta m/\Gamma)$  qui caractérise les oscillations du  $B_q$  autour de la courbe de décroissance exponentielle, la largeur totale  $\Gamma_q$  du méson  $B_q$  étant donnée par son temps de vie :  $\Gamma_q = 1/\tau_{B_q}$

$$x_q = \left(\frac{\Delta m}{\Gamma}\right)_{B_q} = \frac{G_F^2}{6\pi^2} m_t^2 \tau_{B_q} B_{B_q} f_{B_q}^2 m_{B_q} |V_{tq} V_{tb}^*|^2 K_{QCD} \frac{A(\eta)}{\eta}$$



avec les notations suivantes :

$-\tau_B$  : durée de vie.

$-B_B$  : paramètre du sac pour le  $B_u$  ou  $B_d$  considéré, proche de l'unité (non perturbatif).

$-f_B$  : La constante de désintégration purement leptonique.

$m_B$  : La masse du méson.

$A(m_l^2/M_W^2)$  : a été définie à l'équation (12.3.3).

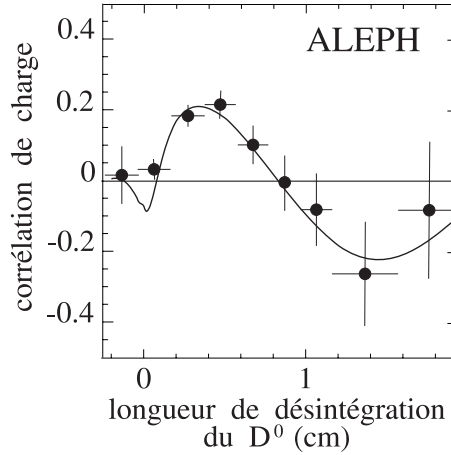


Figure 12.7 : Les dépendances temporelles pour les désintégrations  $Z \rightarrow b\bar{b}$  avec double étiquetage ( $l, D$ ).

Il n'y a pas encore de prédiction fiable ni de mesure de  $f_B B^{1/2}$ . Une estimation plausible à partir des calculs sur réseaux semble être de

$$B^{1/2} f_B \sim 200 \pm 40 \text{ MeV}$$

Les oscillations du  $B_d$  observées à LEP sont représentées sur la figure 12.7. Le lepton négatif étiquette un  $b$ , soit un  $\bar{B}$ , et le  $D^*$  opposé étiquette l'autre méson  $B$ . Seul le fond contribue aux combinaisons de signes opposés (le fond comprend les  $D^*$  provenant d'autres sources, ainsi que les traces hadroniques identifiées comme leptons). Le mélange  $B^0 - \bar{B}^0$  qui apparaît aux temps supérieurs produit des combinaisons de signes opposés. Le signal observé correspond à

$$\Delta m_d = 0,44 \pm 0,033 \text{ ps}^{-1} = (2,87 \pm 0,22) 10^{-4} \text{ eV}$$

soit une valeur  $x_d \sim 0,7$ . Les oscillations du  $B_s$  sont caractérisées par le paramètre  $x_s$  avec

$$\frac{x_d}{x_s} = \frac{|V_{td}|^2}{|V_{ts}|^2}$$

Elles n'ont pas encore été vues et on en déduit  $x_s > 9$ .

#### 4- LA VIOLATION DE CP EN PRESENCE DE MELANGE

##### 4-1 Les simplifications propres au système $B - \bar{B}$

Nous avons établi que  $\gamma_{12}/m_{12} \sim 10^{-2}$ . Nous allons montrer que  $|\Delta\gamma/\Delta m|$  est du même ordre de grandeur. A la limite où les masses des quarks  $u$  et  $c$  sont nulles, les facteurs cinématiques  $Q_{q_1q_2}$  sont égaux, et la contribution des éléments de  $V_{CKM}$  à  $\gamma_{12}$  devient proportionnelle à  $(V_{ub}V_{ud}^* + V_{cb}V_{cd}^*)^2 = (V_{tb}V_{td}^*)^2$ . On voit en utilisant les formules (12.1.13), (12.3.4), (12.3.5) que les phases de  $\gamma_{12}$  et  $m_{12}$  sont égales. Il résulte alors de (12.1.13) que

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta m} = \frac{2 |\gamma_{12}|}{|m_{12}|}$$

$$\Delta\gamma = 2\text{Re}(\gamma_{12}m_{12}^*)/|m_{12}| = 2|\gamma_{12}|$$

$|\Delta\gamma/\Delta m| \sim (m_b/m_t)^2 \sim 10^{-2}$ . La différence des temps de vie est négligeable par rapport à la différence de masse. En outre, seuls les canaux communs à  $B^0$  et  $\bar{B}^0$  contribuent à  $\Delta\Gamma_B$ , et leur rapport de branchement est inférieur à  $10^{-3}$ . Il s'en suit que  $|\Delta\Gamma_B|/\Gamma_B < 10^{-2}$  et que la loi de désintégration (12.2.1) se simplifie :

$$\Gamma(B^0 \rightarrow f) \propto |D_f|^2 e^{-\Gamma t} \{ (1 + |r\rho|^2) + (1 - |r\rho|^2) \cos(\Delta m t) - 2\text{Im}(r\rho) \sin(\Delta m t) \} \quad (12.4.1)$$

##### 4-2 Le paramètre $r$ de la matrice de masse

Le rapport  $r = q/p$  défini au paragraphe 2 à partir de la matrice de masse est directement donné par les éléments de la matrice  $V_{CKM}$ .

$$r = \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{m_{12}^* - i\gamma_{12}^*/2}{m_{12} - i\gamma_{12}/2}} \quad (12.4.2)$$

et comme  $|\gamma_{12}/m_{12}| \ll 1$

$$r_q \sim \sqrt{\frac{m_{12}^*}{m_{12}}} = \frac{V_{tb}^* V_{tq}}{V_{tb} V_{tq}^*} = \frac{(V_{tb}^* V_{tq})^2}{|V_{tb} V_{tq}^*|^2} \quad (12.4.3)$$

L'index  $q$  désigne le quark  $d$  ou  $s$  selon qu'il s'agit d'un  $B_d$  ou d'un  $B_s$ . Le module  $|r_q|$  est proche de l'unité (à  $10^{-3}$  près !). Sa phase est donnée par les éléments de matrice  $V_{CKM}$  mais elle dépend des conventions adoptées pour les états physiques.

### 4-3 Les amplitudes de désintégration

Il reste à déterminer le rapport  $\rho_f$  des amplitudes vers un état  $f$  de  $B$  et  $\bar{B}$ . Pour chaque diagramme de quark ( $i$ ) contribuant à l'état final :  $D_f = \langle f | T | B^0 \rangle = \sum_i V_i T_i e^{i\alpha_i}$ .  $V_i$  est le produit approprié de coefficients de la matrice  $V_{CKM}$ ,  $T_i$  est l'amplitude faible réelle calculée avec l'échange d'un boson  $W$  en omettant les coefficients  $V_{ij}$ , et  $e^{i\alpha_i}$  est la phase forte engendrée par l'interaction des quarks dans l'état final. Nous considérerons deux exemples avec les états finals  $\psi K_S$  et  $\pi^+ \pi^-$  propres de  $CP$ . La transition  $\bar{B}$  vers un état  $\psi \bar{K}^0$  sur la figure 12.7 sera ainsi  $V_{cs}^* V_{cb} A_{c\bar{c}s} e^{i\alpha}$  (l'état final ne peut pas être  $\psi K^0$ ). De même,  $\langle \psi K^0 | T | B \rangle = V_{cs} V_{cb}^* A_{c\bar{c}s} e^{i\alpha}$

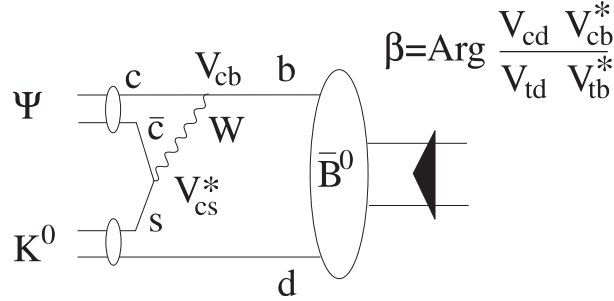


Figure 12.8 : La désintégration  $B_d \rightarrow \psi K^0$  dominante.

Avec les conventions adoptées ici :

$$CP | K^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle, \quad | K_S \rangle = 1/\sqrt{2} (| K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle)$$

En négligeant la (petite) violation de  $CP$

$$\rho_{K_S} = \frac{\langle K_S \psi | T | \bar{B}^0 \rangle}{\langle K_S \psi | T | B^0 \rangle} = - \frac{V_{cs}^* V_{cb}}{V_{cs} V_{cb}^*} = - \frac{(V_{cs}^* V_{cb})^2}{|V_{cs} V_{cb}|^2} \quad (12.4.4)$$

En combinant (12.4.3) et (12.4.4)

$$r\rho = - \frac{(V_{td} V_{tb}^* V_{cb} V_{cs}^*)^2}{|V_{td} V_{tb} V_{cb} V_{cs}|^2} = -e^{2i\beta}$$

où  $\beta$  est l'angle du triangle d'unitarité indiqué sur la figure 11.9. Le produit  $r\rho$  est indépendant des conventions de phase. On montrerait de même que dans l'état final  $\pi^+ \pi^-$ , en l'absence de diagrammes parasites (appelés pingouins) :  $r\rho = e^{2i\alpha}$  où  $\alpha$  est l'angle entre  $V_{td}$  et  $V_{ub}$  dans le triangle d'unitarité. Dans les deux cas, la loi de désintégration prend la forme

$$\Gamma(B^0 \rightarrow f) \propto |D_f|^2 e^{-\Gamma t} (1 + \sin 2\Phi_f \sin(\Delta m t))$$

avec  $\Phi_f = 2\beta$  ou  $\Phi_f = 2\alpha$ . Le choix d'un état final propre de  $CP$  assure l'élimination des phases hadroniques dans l'expression du taux de désintégration. La même analyse appliquée à la désintégration de  $\bar{B}$  va donner un résultat semblable, mais les  $V_{ij}$  qui apparaîtront seront deux à deux conjugués complexes des précédents :

$$\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow f) \propto |D_f|^2 \{e^{-\Gamma t}(1 - \sin 2\Phi_f \sin(\Delta m t))\}$$

La violation de  $CP$  se manifestera par une asymétrie de désintégration

$$A_f = \frac{\Gamma(B(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}(t) \rightarrow f)}{\Gamma(B(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}(t) \rightarrow f)} = 2\sin\Phi_f \sin\Delta m t$$

L'intégration sur le temps va réduire l'effet observé

$$A_{\psi K_S} = \frac{\Gamma(B \rightarrow \psi K_S) - \Gamma(\bar{B} \rightarrow \psi K_S)}{\Gamma(B \rightarrow \psi K_S) + \Gamma(\bar{B} \rightarrow \psi K_S)} = \sin\Phi_f \frac{2x}{1+x^2}$$

avec  $x = \Delta m/\Gamma$ . On peut ainsi directement déterminer les angles du triangle d'unitarité en mesurant les asymétries de désintégration des  $B$  et des  $\bar{B}$ .

Cette asymétrie n'est observable que si l'on connaît la nature du quark ( $b$  ou  $\bar{b}$ ) produit dans l'interaction à l'instant  $t = 0$ . Dans les interactions hadroniques (collisionneurs  $pp$  et  $p\bar{p}$ ) ou électromagnétiques (collisionneurs  $e^+e^-$ ), c'est toujours une paire de quarks  $b\bar{b}$  qui est produite, et on se servira de l'identification de l'autre quark  $b$ . Il peut arriver que celui-ci soit inclus dans un méson  $B^0$  qui le transformera en  $\bar{b}$ , mais c'est une petite correction dans les collisionneurs hadroniques. Au contraire, les collisionneurs  $e^+e^-$  à une énergie voisine de  $10\text{GeV}$ , légèrement supérieure au seuil de production des paires  $B\bar{B}$  tirent partie de la résonance ( $\Upsilon 4S$ ) et produiront *toujours* une paire dans un état  $C = P = -1$ , l'analyse qui précède doit être affinée en tenant compte des corrélations temporelles entre les deux désintégrations.

Une partie importante des programmes de physique en cours et en préparation est consacré à de telles "usines à B" permettant une mesure des paramètres de violation de  $CP$  dans la désintégration du  $B$ . Celles-ci sont en construction à KEK (Tsukuba, Japon), et à SLAC (Stanford, Etats-Unis). Il est possible que la non-conservation de  $CP$  ait pu jouer un rôle dans la génération de l'excédent de matière observé aujourd'hui dans l'univers.

## EXERCICES

- [1] Si  $CPT$  est violée, la relation (12.1.11a) n'est plus vérifiée. Montrer que dans les relations (12.1.15)  $\epsilon$  doit être remplacé par  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  respectivement.

- [2] On définit l'asymétrie de désintégration des  $K$  en  $\pi^+\pi^-$  :

$$A(t) = \frac{\Gamma(\bar{K} \rightarrow (\pi^+\pi^-)) - \Gamma(K \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(\bar{K} \rightarrow \pi^+\pi^-) + \Gamma(K \rightarrow \pi^+\pi^-)}$$

Montrer que

$$A^{+-}(t) = 2\text{Re}(\epsilon_2) - \frac{2|\eta_{+-}|\cos(\Delta m t - \phi_{+-})e^{-\Gamma t}}{1 + |\eta_{+-}|^2 e^{-t/\tau_1}}$$

où  $\phi_{+-}$  est la phase de  $\eta_{+-} \sim \epsilon$  d'après les relations (12.2.6)

- [3] D'après (12.2.7) la phase de  $\epsilon$  (proche de  $\pi/4$ ) est  $\pi/2 + \text{Arctg}(\Delta\gamma/2\Delta m)$ . Montrer à partir de la réponse à la question 1 que l'égalité des phases trouvées à partir de  $\Delta m$  et  $\Delta\gamma$  avec la phase  $\eta_{+-}$  de la question 2 teste *CPT*.
- [4] Si on se restreint aux deux premières générations de quarks, il n'y a pas de violation de *CP*. Qu'en conclure pour leur contributions à la matrice de masse?
- [5] Montrer que  $\epsilon$  est imaginaire pur dans les conventions de phase usuelles du modèle standard (avec  $\phi_0 \neq 0$ ). On pourra prendre comme états de base  $|K_\theta^0 = e^{-i\theta}|K^0\rangle$  et  $|\bar{K}_\theta^0 = e^{-i\theta}|\bar{K}^0\rangle$ .
- [6] Montrer que  $\left|\frac{\eta_{+-}}{\eta_{00}}\right|^2 \sim 1 + 6\epsilon'/\epsilon$
- [7] Quelles sont les phases faibles et hadroniques qui interviennent dans la figure 12.1 ?
- [8] On définit pour la transition  $B_s \rightarrow \rho K_S$  l'asymétrie  $A_{B_s}(t)$  analogue à  $A_{\psi K_S}$  de l'équation (12.4.6). Montrer que cette asymétrie est de la forme

$$A_{B_s}(t) = -\text{Im}(\lambda_s) \sin \Delta m t$$

avec  $\text{Im}(\lambda_s) = -\sin 2\gamma$