

Chapitre 11

LES INTERACTIONS ELECTROFAIBLES

1- L'ELEMENT de MATRICE $V - A$

Les interactions électrofaibles sont aujourd'hui décrites par une théorie standard due à S. Glashow, S. Weinberg et A. Salam. Nous indiquerons quelques unes des étapes qui ont permis d'y aboutir, en partant de la désintégration faible semileptonique des noyaux instables. La paire de leptons (électron et neutrino) peut être dans un état de spin total 1 ou zéro. Le couplage est dit du type Gamow-Teller dans le premier cas et de Fermi dans le second. Le moment orbital L du système leptonique par rapport au noyau n'est pas forcément nul, mais les contributions $L \neq 0$ sont faibles. Si (comme on l'a cru jusqu'en 1954) on impose la conservation de la parité, l'amplitude de désintégration d'un nucléon du noyau pourra, dans le domaine non relativiste, être de la forme $M'_S = S \xi_f^\dagger \xi_i \eta_e^\dagger \eta_\nu^*$ ou $M'_V = V \xi_f^\dagger \vec{\sigma} \xi_i \cdot \eta_e^\dagger \vec{\sigma} \eta_\nu^*$. Il faut attribuer au neutrino une masse finie (petite par rapport aux impulsions p/c) pour que ces expressions aient un sens.

Ces deux configurations étaient susceptibles de deux extensions relativistes, l'une faisant appel au produit de deux scalaires :

$$M_S = \bar{u}_p u_n \bar{u}_e v_{\bar{\nu}}$$

L'autre à deux quadrivecteurs :

$$M_V = \bar{u}_p \gamma^\mu u_n \bar{u}_e \gamma_\mu v_{\bar{\nu}}$$

Par analogie avec l'amplitude de diffusion électromagnétique d'un électron dans un quadripotiel A^μ ("como un quanto di Luce"), c'est l'expression quadrivectorielle qui a été proposée par Fermi.

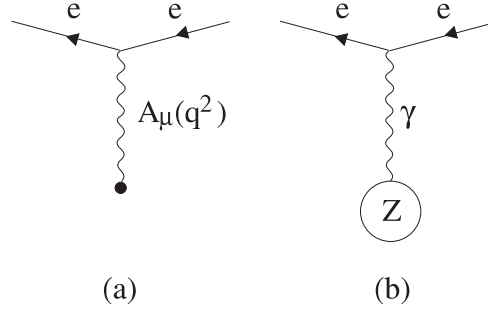


Figure 11.1 : Diffusion électromagnétique d'un électron. a) dans un potentiel externe b) dans le champ d'un noyau de nombre atomique Z .

Il se trouve que cette analogie avec le courant faible a une raison profonde dans la théorie électrofaible actuelle, le boson W remplaçant le photon. Fermi a ainsi proposé dans les années 1930 l'expression suivante de l'amplitude de désintégration du muon

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma^\mu v_{\bar{\nu}} \bar{u}_{\nu} \gamma_\mu u_\mu \quad (11.1.1)$$

Cette expression, qui fait intervenir la constante de Fermi $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^2$, se trouve être exacte, et prédisait correctement le spectre de l'électron dans la désintégration du muon bien qu'elle n'incorpore pas explicitement la violation de la parité résultant de l'hélicité gauche des neutrinos. Le spectre d'impulsion de l'électron est montré sur la figure 11.2, et il peut de manière générale être exprimé à l'aide d'un paramètre ρ proposé par L. Michel, sensible au choix des combinaisons invariantes de Lorentz présentes dans l'amplitude.

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\epsilon} = 12[(1 - \epsilon) - \frac{2}{9}\rho(3 - 4\epsilon)]\epsilon^2 \quad (11.1.2)$$

avec $\epsilon = E_e/E_{max} = 2E_e/m_\mu$. Les effets de résolution expliquent les impulsions observées supérieures à la limite cinématique.

Dans le cas de la désintégration du τ , l'incertitude affectant sa direction dégrade le spectre observé en a) et explique la forme b), le système du centre de masse étant mal connu. Le rôle du paramètre ρ est illustré dans l'exercice 1. La valeur $\rho = 3/4$, caractéristique d'un couplage quadrivectoriel, a été confirmée après quelques péripiéties expérimentales. Cette valeur exclue en particulier un couplage scalaire $g_S \bar{u}_e v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} u_\mu$. Ce n'est qu'en 1957, avec la découverte de la violation de la parité par Lee et Yang que la matrice de transition β a pu être écrite correctement par Feynman et Gell-Mann :

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}} \bar{u}_{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_\mu \quad (11.1.3)$$

Les neutrinos n'ayant qu'un seul état d'hélicité, le résultat est le même qu'à partir de (11.1.1) et les facteurs $(1 - \gamma^5)$ ou $(1 + \gamma^5)$ n'apportent aucune modification réelle. Ils soulignent cependant la présence de contributions intrinsèques violant la symétrie de parité, et c'est dans les transitions hadroniques ou semileptoniques, comme dans la désintégration du Cobalt 60 au chapitre 8, que la forme de l'amplitude (11.1.3) pourra être mise en évidence.

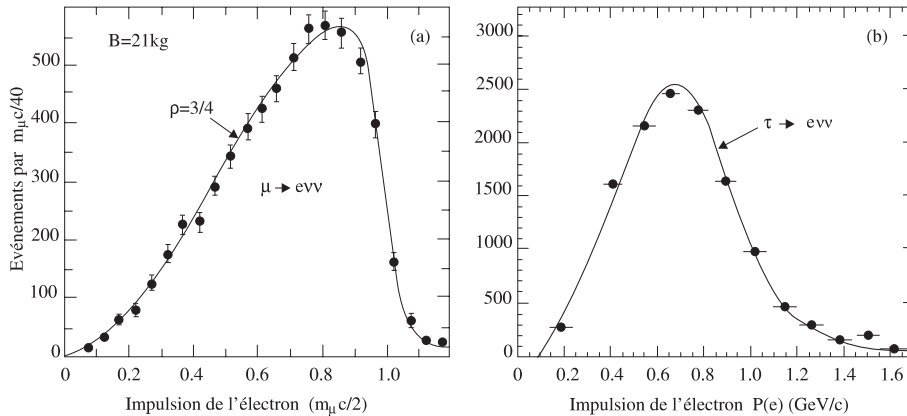


Figure 11.2 : a) Le spectre d'impulsion de l'électron dans la désintégration du muon. b) le spectre observé dans le pseudo-centre de masse du τ avec $\rho = 3/4$.

2- LA THEORIE ELECTROFAIBLE

2-1 Les limites de la théorie "effective" $V - A$

L'expression proposée par Feynman et Gell-Mann convient parfaitement pour toutes les désintégrations leptoniques ou semileptoniques, moyennant une légère modification examinée plus loin pour les quarks. Elle décrit aussi la section efficace vers l'avant de la réaction à deux corps $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$, mesurée presque directement dans la diffusion inélastique d'un neutrino sur une cible hadronique à haute énergie, Cette prédiction est pourtant inacceptable.

On a en effet vu au chapitre 6 que les relations d'unitarité impliquent pour toutes les ondes partielles une borne supérieure décroissant comme $1/W^2$ en fonction de l'énergie W dans le centre de masse. Au contraire, l'analyse en ondes partielles de l'amplitude de Fermi révèle des contributions de moment orbital $L = 0, L = 1$, qui croissent linéairement en fonction de W , et l'unitarité est alors violée pour des énergies dans le centre de masse de l'ordre de $1/\sqrt{G_F}$, c'est-à-dire 300 GeV (voir exercice). L'amplitude de Fermi est ainsi, à basse énergie, une bonne approximation de l'amplitude exacte qui résulte de l'échange

d'un boson, comme en électromagnétisme. Il a fallu longtemps pour élaborer une théorie électrofaible comportant des bosons vecteurs massifs W et Z , et respectant ces contraintes d'unitarité.

2-2 L'invariance de jauge $SU(2)_L$ des leptons

La théorie électrofaible est une théorie de jauge du type décrit dans le paragraphe 2 du chapitre 10 : elle est engendrée par l'invariance du lagrangien dans un groupe de transformations $SU(2)$ locales, ce groupe agissant dans l'espace des champs de leptons et de quarks.

De même que les quarks u et d sont considérés comme deux aspects d'une même particule dans l'invariance forte $SU(2)$, le neutrino ν_e et l'électron gauche e_L apparaissent dans l'interaction faible comme deux variantes d'une même particule dans une symétrie interne $SU(2)$ que l'on notera $SU(2)_L$. Cette symétrie, qui n'agit pas sur les composantes spatiales telles que l'hélicité ne peut pas connecter e_L et e_R . Du point de vue du boson W , l'électron e_L est beaucoup plus proche du neutrino que d'un électron e_R . Ce sont les transformations de Lorentz qui peuvent changer e_L en e_R , dans la mesure où l'électron a une masse non nulle. Bien entendu, la symétrie $SU(2)_L$ des interactions faibles est brisée en ce qui concerne les états physiques puisque la masse des leptons chargés n'est pas nulle, mais c'est une symétrie *exacte* du lagrangien : elle est *spontanément brisée*.

Les états propres d'isospin faible sont ainsi classés selon le tableau 11.I

Tableau 11.I : Les nombres quantiques des leptons dans $SU(2)_L$.

	T_3^L	T_3^R	Y
$\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$e_L^- \quad \mu_L^- \quad \tau_L^-$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
$e_R^- \quad \mu_R^- \quad \tau_R^-$	0	0	-2

Les leptons de chiralité gauche (ν , e_L) s'inscrivent dans des doublets, tandis que ceux qui ont une chiralité droite, comme e_R appartiennent à des singlets d'isospin faible, puisqu'ils n'ont pas de contrepartie neutre : le ν_R n'existe pas, c'est l'antineutrino $\bar{\nu}_R$ qui appartient à un doublet de chiralité droite. Bien entendu, les neutrinos de Majorana évoqués au chapitre 8 peuvent être incor-

porés dans des extensions du modèle standard, et celles-ci contiendront assez naturellement des doublets droits.

Le principe de jauge étudié au chapitre 10 sera appliqué au groupe d'isospin faible $SU(2)_L$ et permettra d'obtenir directement le lagrangien d'interaction des fermions gauches avec les bosons de jauge associés aux champs \mathbf{W}_μ . On écrit le champ fermionique sous la forme

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L^+ \\ \psi_L^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L$$

où $\psi_L^\pm = (1 - \gamma^5)/2 \psi^\pm$ et $\psi_R = e_R^- = (1 + \gamma^5)/2 e^-$.

Le lagrangien libre

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m) \psi_L \quad (11.2.1)$$

est invariant dans les transformations de $SU(2)$

$$\psi'_L = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\Lambda}/2} \psi_L$$

On va imposer l'invariance du lagrangien libre dans les transformations locales, comme dans le chapitre 10.

$$\psi'_L(x) = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\Lambda}(x)} \psi_L(x)$$

Comme précédemment, il faut introduire un triplet de champs de bosons

$$\mathbf{W}^\mu(x) = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$$

avec la loi de transformation infinitésimale :

$$\mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\Lambda} - \vec{\Lambda} \wedge \mathbf{W}_\mu$$

L'analogue du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est :

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \wedge \mathbf{W}_\nu$$

et pour une variation infinitésimale $\delta \vec{\Lambda}$ de $\vec{\Lambda}$

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathbf{F}_{\mu\nu} + \delta \vec{\Lambda} \times \mathbf{F}_{\mu\nu}$$

Le lagrangien

$$\mathcal{L} = i\psi_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} \quad (11.2.2)$$

est invariant de jauge. On y a introduit la dérivation covariante

$$D_\mu \psi_L(x) = (\partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu) \psi_L(x)$$

Comme pour la symétrie d'isospin, les bosons chargés ont les composantes sphériques :

$$\begin{aligned} W^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - iW_2) \\ W^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + iW_2) \\ W^0 &= W_3 \end{aligned}$$

qui forment un triplet d'isospin (la convention de phase adoptée pour W^- diffère des conventions usuelles de l'isospin, mais se conforme à l'usage). L'interaction des bosons W avec les fermions est donnée par

$$\mathcal{L}_{int} = -g \mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu$$

Pour les trois familles de lepton, on définira le courant (non conservé, voir exercice 11)

$$\mathbf{j}_\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \vec{\tau} \psi_L \quad (11.2.3)$$

Comme précédemment dans les symétries de saveur, le courant d'isospin faible \mathbf{j}_μ permet de définir trois générateurs

$$T_i(t) = \int d\mathbf{r} j_i^0(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \psi_L^\dagger \frac{\tau_i}{2} \psi_L \quad (11.2.4)$$

qui vérifient

$$[T_i(t), T_j(t)] = i\epsilon_{ijk} T_k(t)$$

Si on se restreint à la première famille

$$T_3(t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [\nu^\dagger \nu - e_L^\dagger e_L]$$

et il faut bien entendu sommer sur les trois familles.

2-3 L'invariance $SU(2)_L \times U(1)$

Pour englober les interactions faibles et électromagnétiques dans un formalisme unique, on doit ajouter au groupe $SU(2)_L$ le groupe $U(1)$ des transformations de phase locales. La combinaison des deux, $SU(2)_L \times U(1)$ aura les degrés de liberté suffisants pour décrire :

- Les interactions faibles avec courants chargés ou neutres à l'aide des trois bosons $\mathbf{W} = (W^\pm, Z)$ (ceux-ci sont pour l'instant de masse nulle compte tenu de l'expression (11.3.2) du lagrangien).
- Les interactions électromagnétiques avec le photon γ .

L'opérateur T_3 défini précédemment ne peut pas être le générateur du groupe $U(1)$ associé à la charge électrique : celle-ci ne dépend en effet pas de l'hélicité du fermion. On la définit à partir du courant électromagnétique

$$j_\mu^\gamma = \Sigma_i e_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i$$

$$Q = \int d\mathbf{r} j_0^\gamma = - \int d\mathbf{r} [e_L^\dagger e_L + e_R^\dagger e_R]$$

La charge Q contient alors des champs droits e_R . On pourrait ajouter la symétrie $U_Q(1)$ de l'électrodynamique à la symétrie $SU(2)$ pour rendre compte du photon, mais Q ne commute pas avec T_i . Au contraire, l'hypercharge Y , analogue à l'opérateur introduit dans le cadre de $SU(3)_F$, et telle que

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (11.2.5)$$

convient et vérifie $[T_i, Y] = 0$, ce qui simplifie la structure du groupe (qui est alors un produit direct $SU(2) \otimes U(1)$). Tous les membres d'un multiplet d'isospin ont la même hypercharge, mais pas la même charge électrique, conformément à l'observation.

$$Y = 2(Q - T_3) = - \int d\mathbf{r} [(\nu^\dagger \nu + e_L^\dagger e_L) + 2e_R^\dagger e_R]$$

C'est l'hypercharge Y que l'on choisit comme générateur des transformations de phase $U(1)$. Le champ de jauge associé, B_μ , n'est pas le champ électromagnétique ($Y \neq Q$).

L'hypercharge du multiplet (ν_e, e^-) est -1, celle de e_R est -2. La valeur de l'hypercharge Y_R pour les singlets d'hélicité droite est choisie de manière à préserver la relation $Q = Y_R/2$, avec les valeurs données dans le tableau 11.I

En l'absence de termes de masse, la symétrie est exacte, et le lagrangien complet sera :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu (\partial_\mu + ig \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \mathbf{W} + ig' \frac{1}{2} Y_L B_\mu) \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' \frac{1}{2} Y_R B_\mu) \psi_R + \mathcal{L}_{jauge}$$

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} (\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) \quad (11.2.6)$$

g' est la constante de couplage du boson de jauge de la symétrie $U(1)_Y$ et $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ a été défini précédemment. Le tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ s'exprime en fonction du champ B :

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

Les fermions sont ainsi couplés aux bosons neutres W_0^μ et B^μ et aux bosons chargés W_\pm^μ . On désigne souvent les vertex correspondants par les expressions équivalentes de courant chargé et courant neutre.

a- les couplages aux bosons neutres Z et γ

Le couplage des leptons chargés au boson de jauge neutre est alors de la forme

$$\mathcal{L}_I^{CN}(e) = \bar{e}_L \gamma_\mu \left(\frac{g}{2} W_3^\mu + \frac{g'}{2} B^\mu \right) e_L + \frac{g'}{2} 2 \bar{e}_R \gamma_\mu e_R B^\mu$$

et pour les neutrinos, le lagrangien d'interaction est

$$\mathcal{L}_I^{CN}(\nu) = \bar{\nu}_L \gamma_\mu \left(\frac{-g}{2} W_3^\mu + \frac{g'}{2} B^\mu \right) \nu_L \quad (11.2.7)$$

Le neutrino ne se couplant pas au photon, celui-ci doit s'identifier à la combinaison orthogonale à (11.2.7). On définira le champ du photon

$$A^\mu = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W_3^\mu + \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B^\mu$$

La composante neutre du courant faible doit être couplée à un état propre de l'hamiltonien de masse orthogonal au précédent.

$$Z^\mu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W_3^\mu - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B^\mu$$

on définira l'angle de Weiberg θ_W par les relations :

$$\begin{aligned} \cos \theta_W &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$W_3^\mu = \sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu \quad (11.2.8)$$

$$B^\mu = \cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu \quad (11.2.9)$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer le lagrangien en fonction des champs A^μ et Z^μ . La contribution du photon est

$$\mathcal{L}_\gamma = - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu \left[\bar{e}_L \left(t_3 + \frac{y_L}{2} \right) \gamma^\mu e_L + \frac{y_R}{2} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right] \quad (11.2.10)$$

Les nombres t_3 , y_L , et y_R sont ceux qui conviennent au lepton chargé. Compte tenu de (11.2.5), on identifie cette expression avec

$$\mathcal{L}_\gamma = -q \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu$$

avec $e = e_L + e_R$ (e spineur de Dirac). Le coefficient q est la charge (négative) de l'électron ($e = \sqrt{4\pi\alpha}$ où α est la constante de structure fine), et on en déduit, avec $q = -e$

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$$

$$\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}$$

Les couplages du Z s'obtiennent de la même manière. Nous utiliserons des spineurs de $SU(2)$: f_L et des singlets f_R . T_3^L et Q_L sont des matrices diagonales

$$T_3^L = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \tau_3$$

$$Q^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} Z_\mu [\bar{f}_L (T_3^L - \sin^2 \theta_W Q^L) \gamma^\mu f_L + \sin^2 \theta_W \bar{f}_R \gamma^\mu f_R]$$

Les couplages vectoriels et axiaux résultent de la substitution

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi$$

où ψ est également un spineur de $SU(2)_L$.

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} Z_\mu \left[\bar{\psi} \left(\frac{\tau_3}{2} - 2Q^L \sin^2 \theta_W \right) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \frac{\tau_3}{2} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \right] \quad (11.2.11)$$

b- Les couplages du boson chargé W

Le couplage du boson W aux leptons est défini par l'expression (11.2.6) du lagrangien

$$\mathcal{W}_I^{CC} = \mathcal{L}_W = -\frac{e\sqrt{2}}{4 \sin \theta_W} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) \psi_L \quad (11.2.12)$$

$$\tau^\pm = \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2}$$

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1 \mp iW_2)$$

Contrairement au cas du boson Z , les constantes de couplage ne dépendent pas de la charge des constituants. Nous verrons qu'elles ne dépendent pas non plus de leur nature (quarks ou leptons). A titre d'exemple, nous indiquerons l'élément de matrice de la désintégration du muon $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, compte tenu du lagrangien (11.2.12) est

$$\mathcal{M} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M_W^2} \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W} \bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_\mu \quad (11.2.13)$$

A la limite de basse énergie, $q^2 = 0$, on retrouve l'expression (11.1.3) :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{4\pi\alpha}{8 \sin^2 \theta_W M_W^2} \quad (11.2.14)$$

Lorsque les transferts q^2 sont très inférieurs à M_W^2 , l'élément de matrice (11.2.13) s'interprète aussi comme le terme d'ordre le plus bas provenant d'un lagrangien d'interaction faible effectif courant-courant exprimé en fonction des doublets leptoniques ψ_l , et des matrices 2×2 τ^\pm .

$$\mathcal{L}_W^{eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_+^\mu J_\mu^- \quad (11.2.15)$$

avec

$$J_L^{\mu,\pm} = \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau^\pm \psi$$

On verra que la relation (11.2.14) s'applique également aux transitions entre quarks, donc aux transistins nucléaires. Elle comporte des quantités accessibles par des mesures indépendantes :

- G_F mesuré par le temps de vie du muon : $G_F = 1,1664 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^2$
- α par les mesures de moment magnétique anormal ou par l'effet Josephson
 $\alpha = 1/137,036$
- $\sin^2 \theta_W = 0,231$ par les diffusions neutrinos (échanges de Z ou de W) ou les distributions angulaires dans les collisions au Z
- $M_W = 80,22 \text{ GeV}$ par la production de W dans les collisionneurs $p\bar{p}$.

La relation (11.2.14) est très bien vérifiée si l'on tient compte des ordres supérieurs de la théorie des champs.

c- Les couplages des bosons entre eux

Le lagrangien (11.2.6) inclut des couplages à 3 et 4 bosons qui sont mesurés dans les collisions e^+e^- à des énergies supérieures au seuil de production d'une paire de bosons W , comme au CERN ($\sqrt{s} = 172 \text{ GeV}$) auprès de du collisionneur LEP200. Le calcul du couplage ZWW est proposé dans l'exercice 8, et est représenté dans la figure 11.3.

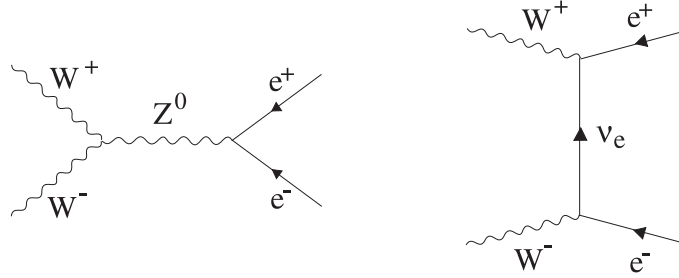


Figure 11.3 Deux contributions à la production des paires W^+W^- dans les collisions e^+e^- .

2-4 La brisure de la symétrie

Les bosons de jauge qui ont été introduits, W^\pm , A , Z ont une masse nulle faute de la présence d'un terme bilinéaire du type $m^2 V^\mu V_\mu$ dans le lagrangien qui briserait la symétrie. Ils ne correspondent manifestement pas à ce qui est observé dans la nature, où les interactions faibles sont à courte portée : le seul boson dépourvu de masse est le photon (le confinement, qui pour QCD aboutissait à une courte portée malgré la masse nulle des gluons, est impossible pour de faibles constantes de couplage). L'extension des idées de Yang-Mills à des bosons de jauge massifs a longtemps échoué, jusqu'à ce que S. Weinberg et A. Salam transposent une notion issue de la physique des milieux condensés. On peut donner de la masse aux bosons, tout en respectant le cadre des théories de jauge à l'aide d'un champ scalaire auxiliaire dont l'état d'énergie minimale n'est pas symétrique. C'est le mécanisme de Higgs dans les théories de jauge spontanément brisées. Un exemple en est fourni par la supraconductivité, où un champ scalaire complexe décrit les paires d'électrons. La symétrie de jauge considérée est la symétrie $U(1)$ de l'électromagnétisme.

$$\phi(x) \rightarrow e^{+iq\Lambda(x)} \phi(x)$$

Le lagrangien est alors la somme du lagrangien électromagnétique usuel et du Lagrangien scalaire

$$\mathcal{L}(\phi) = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (11.2.16)$$

avec $V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$ et la configuration d'énergie minimale correspond à $\phi_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$. Pour préserver l'invariance de jauge, les dérivées partielles doivent être remplacées par des dérivations covariantes

$$\partial_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi \quad \partial_\mu \phi^\dagger \rightarrow (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi$$

où $q = -2e$ est la charge de la paire ($e > 0$), et le champ A_μ transformé selon $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$. L'équation du mouvement de A^μ est :

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (11.2.17)$$

j^μ est le courant de Noether conservé de la transformation de phase $\phi \rightarrow e^{iq\Lambda}\phi$.

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \frac{\partial \phi^*}{\partial \Lambda}$$

$$j^\mu = iq(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) - 2q^2 A^\mu (\phi^\dagger \phi)$$

On peut supposer ϕ réel à l'instant initial, et en régime stationnaire, la partie de j^μ indépendante de A^μ ne contribuera pas. Lorsqu'il y a brisure de symétrie, $\phi(x) = \phi_0 + \xi(x)$, où ϕ_0 est la valeur (non nulle) du champ des paires d'électrons dans l'état fondamental. Si on néglige le (petit) champ ξ le courant se réduit à $j^\mu = -q^2 A^\mu \phi_0^2$, et l'équation (11.2.17) devient

$$\square A^\mu = -m^2 A^\mu \quad (11.2.18)$$

La partie spatiale de (11.2.18) est du type $\Delta \mathbf{A} = m^2 \mathbf{A}$ avec $m^2 = 2q^2 \phi_0^2$. La solution a un comportement exponentiel avec une longueur d'atténuation \hbar/mc , comme si le photon avait acquis une masse m . C'est ce qui se produit dans l'effet Meissner: le courant électromagnétique est

$$\mathbf{j} = -\frac{q^2}{mc} \psi^* \psi \mathbf{A}$$

et la fonction d'onde $\psi(x)$ des paires d'électron joue le rôle du champ ϕ_0 de l'exemple qui précède. Dans une théorie de jauge locale spontanément brisée, le boson acquiert une masse, et ce cas s'observe dans la supraconductivité. Il est énergétiquement avantageux d'avoir une valeur non nulle du champ de paires dans l'état fondamental, et ce champ va empêcher la pénétration du champ magnétique.

Le mécanisme de Higgs est une extension de cette technique au domaine électrofaible. Un singlet scalaire ne peut cependant donner une masse aux trois états W^\pm , et Z . La configuration la plus simple est le doublet de $SU(2)_L$:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

On supposera que l'état fondamental est tel que

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

La dérivation covariante permet d'écrire un lagrangien invariant de jauge à l'aide de la substitution

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \rightarrow \phi^\dagger \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W} - ig' \frac{Y(H)}{2} B \right) \left(\partial^\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W} + ig' \frac{Y(H)}{2} B \right) \phi$$

Les charges attribuées au doublet impliquent, en conservant la relation $Q = T_3 + Y/2$ que $Y(H) = 1$. Les termes de masse sont engendrés par les valeurs dans le vide σ_1 et σ_2 . En ce qui concerne les bosons neutres :

$$4\mathcal{L}_{\text{masse}}^0 = g^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)W_3^2 + 2gg'(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)W_3B + g'^2B^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

L'inversion des formules (11.4.4) et (11.4.5) permet d'exprimer $\mathcal{L}_{\text{masse}}^0$ en fonction des champs A et Z du photon et du Z .

$$\begin{aligned} 4(g^2 + g'^2)^{-1} \mathcal{L}_{\text{masse}}^0 &= \beta_1 A^2 + \beta_2 Z^2 + \beta_3 AZ \\ \beta_1 &= \sigma_1^2 (2 \sin \theta_W \cos \theta_W)^2 \\ \beta_2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 4 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W \sigma_1^2 \\ \beta_3 &= 4\sigma_1^2 \sin \theta_W \cos \theta_W (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \end{aligned}$$

On lit directement sur ces expressions qu'il faut choisir $\sigma_1 = 0$ pour préserver la masse nulle du photon. Inversement, si le champ moyen dans le vide a une charge nulle : $\sigma_1 = 0$, la symétrie $U(1)_{em}$ n'est pas brisée, et la masse du photon reste nulle. Dans l'exemple précédent de la supraconductivité, le photon acquerrait une masse provenant de la valeur moyenne dans le vide du champ (chargé) des paires d'électron. La brisure spontanée se fait ainsi selon une direction bien spécifique du plan (W_3, B) qui va définir le photon et le Z , états propres de masse. Le Z acquiert une masse

$$M_Z^2 = \frac{\sigma_2^2}{2}(g^2 + g'^2)$$

Dans le secteur chargé, le même traitement conduit à

$$M_W^2 = \frac{\sigma_2^2}{2} \cos^2 \theta_W (g^2 + g'^2)$$

et comme $\sigma_1 = 0$, il en résulte une relation entre les masses des bosons

$$M_W = M_Z \cos \theta_W$$

Le nombre de champs réels reste évidemment invariant dans la brisure de symétrie. Le nombre de degrés de liberté est initialement $2\gamma + 6W$ (de masse nulle) + 4 Higgs = 12. Ce nombre est inchangé après brisure, 3 des Higgs venant se combiner aux 3 W pour leur donner une masse, et autoriser l'hélicité $\lambda = 0$, de même que le photon acquerrait une masse dans la supraconductivité.

2-5 La masse des leptons

La masse des leptons (et des quarks) résulte des couplages de Yukawa invariants de jauge entre le doublet de Higgs et les doublets leptoniques

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L^- \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = -g_l \bar{l}_L \phi l_R^- + h.c \quad (11.2.19)$$

Ce lagrangien respecte la symétrie $SU(2)_L$ et conserve la charge, donc préserve également l'invariance par $U(1)_Y$. Il va donner une masse $m_l = g_l \sigma_2$ aux leptons chargés et $m_\nu = 0$ aux neutrinos, ce qui correspond aux préjugés expérimentaux actuels. On voit comment en l'absence de neutrinos droits, un doublet de Higgs rend bien compte de la masse nulle des neutrinos. Celle-ci se trouve corrélée à la masse nulle des photons. Le modèle permet cependant de décrire des neutrinos massifs à l'aide de l'autre scalaire de $SU(2) \otimes U(1)$ possible :

$$\mathcal{L} = -g_\nu \bar{\psi}_L \phi^c \nu_R + h.c \quad (11.2.20)$$

où $\phi^c = \epsilon \phi^* = i\tau_2 \phi^*$. Le doublet ϕ^c est formé d'un Higgs neutre, et d'un Higgs négatif. On vérifie directement que ce deuxième couplage conserve la charge, et par conséquent l'hypercharge, avec $Y(\phi^c) = 1$ et $Y(\nu_R) = 0$. De tels neutrinos sont alors des neutrinos de Dirac massifs avec $m_\nu = 2g_\nu \sigma_2$. Un doublet de Higgs ne peut engendrer des neutrinos de Majorana, avec la violation du nombre leptonique qui en résulte.

3- EXEMPLES d'APPLICATIONS de la SYMETRIE $SU(2)_L \otimes U(1)$

3-1 La physique du Z

Les constantes de couplage du Z aux leptons sont facilement comparées aux mesures expérimentales dans les diffusions de neutrinos et dans les interactions e^+e^- . Nous rappellerons ici les conséquences de la formule (11.2.11) résumée sous la forme :

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} \bar{\psi}_l (C_V - C_A \gamma^5) \gamma^\mu \psi_l Z_\mu \quad (11.3.1)$$

$$C_V = T_3^L(l) - 2Q(l) \sin^2 \theta_W$$

$$C_A = T_3^L(l)$$

Les valeurs de T_3^L ont été indiquées au début de ce chapitre $T_3^L(e) = -1/2$ et $T_3^L(\nu) = 1/2$.

L'élément de matrice de transition de l'interaction $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ en résulte :

$$\mathcal{M} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M_Z^2} \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \bar{u}_\mu \gamma^\mu [C_V(\mu) - C_A(\mu)\gamma^5] v_\mu$$

$$[\bar{v}_e \gamma^\nu (C_V(e) - C_A(e)\gamma^5)] u_e$$

Il est en fait plus simple de revenir aux amplitudes de chiralité donnée, celle-ci étant conservée dans l'interaction.

a- Sections efficaces et différentielles $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ à l'énergie du Z

La figure 11.4 montre la section efficace totale de production de paires de muons en fonction de la masse du Z, ainsi que la section efficace différentielle pour $\sqrt{s} = M_Z$. Cette dernière est caractérisée par l'asymétrie A_{FB} qui intervient dans l'expression de la distribution de l'angle de diffusion θ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 + \cos^2 \theta + \frac{3}{8} A_{FB} \cos \theta$$

L'asymétrie A_{FB} s'exprime de manière simple en fonction des couplages du Z aux fermions initiaux et finals. Dans la transition $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ où le fermion f est un lepton (autre que l'électron) ou un quark, on a de façon générale

$$A_{FB} = \frac{3}{4} A_f A_e$$

avec

$$A_f = \frac{2C_V(f)C_A(f)}{(C_V^2(f) + C_A^2(f))}$$

et une expression analogue pour A_e . Les valeurs des couplages C_V et C_A pour les quarks seront données plus loin. Ces mesures permettent de déterminer l'angle θ_W , avec

$$\sin^2 \theta_W = 0,23200 \pm 0,00027$$

En combinaison avec l'asymétrie de polarisation mesurée à *SLD* (aux Etats-Unis), la valeur actuelle (1996) est

$$\sin^2 \theta_W = 0,23165 \pm 0,00024$$

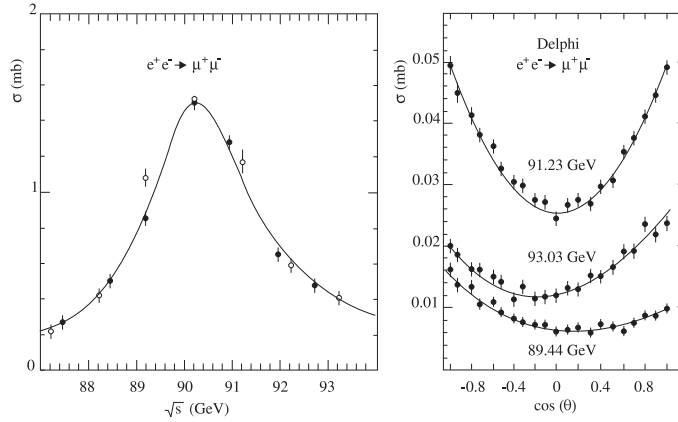


Figure 11.4 : a) La section efficace $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ en fonction de l'énergie totale
 b) La distribution angulaire pour $\sqrt{s} = M_Z$.

b) Largeur et masse du boson Z

La section efficace totale hadronique, représentée sur la figure 11.5 est la somme des sections efficaces partielles de production des différents quarks. Bien que le couplage des quarks ne soit discuté qu'ultérieurement, le cœur de cette physique concerne des paramètres fondamentaux du modèle électrofaible, et nous résumerons les résultats obtenus.

- La masse du boson Z : $M_Z = 91,1865 \pm 0,002$ GeV
- La largeur du boson Z : $\Gamma_Z = 2,4946 \pm 0,003$ GeV
- La valeur de la section efficace de Born pour $\sqrt{s} = M_Z$: $\sigma(M_Z) = 41,508 \pm 0,06$ nb

La section efficace expérimentalement observée de la figure 11.5 est affectée par les corrections radiatives provenant du rayonnement de photons dans l'interaction, ainsi que des ordres supérieurs de l'amplitude électrofaible. La section efficace à l'ordre le plus bas, qui n'est pas directement mesurée, est plus directement utilisable pour la détermination des paramètres du modèle standard. Le nombre de familles de neutrinos légers est contraint de manière absolue par ces données:

$$N_\nu = 2,989 \pm 0,012$$

Ceci limite le nombre de familles à trois dans le domaine cinématique accessible, aussi bien pour les leptons que pour les quarks.

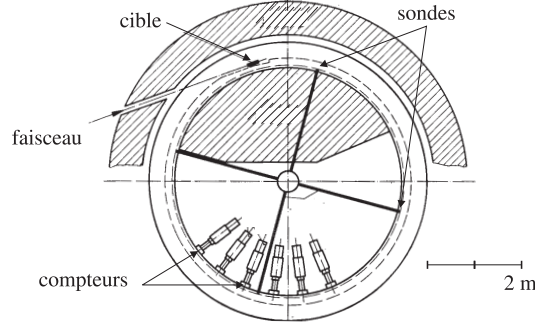


Figure 11.5 : La section efficace hadronique au voisinage du Z.

3-2 La désintégration du muon

a- L'élément de matrice et les traces

L'élément de matrice de transition de la réaction $\mu^-(p_1) \rightarrow e^-(k_1)\bar{\nu}_e(k_2)\nu_\mu(p_2)$ est

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_e(k_1)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)v_{\bar{\nu}_e}(k_2)\bar{u}_{\nu_\mu}(p_2)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u_\mu(p_1)$$

Les indices de spin, qui doivent être spécifiés pour définir les spineurs initiaux et finals des particules massives ont été omis dans la formule précédente. Les facteurs $(1 - \gamma^5)$ sélectionnent explicitement les états d'hélicité appropriés : l'hélicité droite du $\bar{\nu}_e$, et gauche pour μ et ν_μ . Le taux de transition sera d'après le chapitre 6 (et l'appendice D)

$$\Gamma = \frac{1}{2}\Sigma_\sigma \frac{1}{2m_\mu} (2\pi)^4 \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{2E_f(2\pi)^3} \delta^4(P_1 - \Sigma_f p_f)$$

La sommation sur les spins se fait par calcul de trace. On fera ainsi apparaître la contraction de deux expressions tensorielles :

$$\begin{aligned} Tr\{(\not{p}_2 + m_\nu)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)(\not{p}_1 + m_\mu)(1 + \gamma^5)\gamma^\nu\} = \\ 8(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2)) + 8i\epsilon^{\lambda\mu\rho\nu} p_{2\lambda} p_{1\rho} \end{aligned}$$

La trace portant sur le vertex de l'électron est analogue :

$$\begin{aligned} Tr\{(\not{k}_1 + m_2)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)(\not{k}_2 - m_\nu)(1 + \gamma^5)\gamma^\nu\} = \\ 8(k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2)) + 8i\epsilon^{\sigma\mu\tau\nu} k_{1\sigma} k_{2\tau} \end{aligned}$$

On simplifiera le produit des traces à l'aide de la relation

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} g_{\beta\nu} g_{\gamma\rho} = 2(g^{\alpha\lambda} g^{\gamma\mu} - g^{\alpha\mu} g^{\gamma\lambda})$$

La partie symétrique va contribuer pour

$$128[(p_2 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + (p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)]$$

et la partie antisymétrique

$$128[(p_2 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) - (p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)]$$

En désignant par σ l'ensemble des nombres quantiques de spin

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma} |\mathcal{M}_{\sigma}|^2 = 128 G_F^2 (p_1 \cdot k_2)(p_2 \cdot k_1)$$

b- Le taux de désintégration

Les seules variables observables sont celles qui concernent l'électron. En l'absence de polarisation du muon, la distribution angulaire de l'électron final est isotrope, et le spectre est de la forme

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{G_F^2}{12\pi^3} m_{\mu}^2 E_e^2 (3m_{\mu} - 4E_e) E_e^2$$

La forme de cette distribution en énergie correspond bien à la valeur $\rho = 3/4$ du paramètre de Michel dans l'expression 11.1.2 donnée au début de ce chapitre. Si l'on néglige les termes en $(m_e/m_{\mu})^2$, la largeur totale de désintégration est

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{G_F^2 m_{\mu}^5}{192\pi^3} \quad (11.3.2)$$

C'est justement la désintégration du muon qui permet de mesurer avec précision la constante de Fermi G_F :

$$G_F = 1,16637 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^2$$

Une formule plus précise doit être employée pour tenir compte de la masse de l'électron, des corrections radiatives et des effets de propagateur du W . Une bonne approximation est fournie par l'équation (11.3.3)

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_{\mu}^5}{192\pi^3} \left[1 - 8 \left(\frac{m_e}{m_{\mu}} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \right] \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{m_{\mu}}{M_W} \right)^2 \right] \quad (11.3.3)$$

Le temps de vie mesuré est de $\tau = 2,19709 \cdot 10^{-6}$ s.

c- Le cas des muons polarisés

Lorsque le muon est polarisé, la sommation sur ses spins fait intervenir la matrice densité justifiée dans l'exercice 8 du chapitre 4.

$$\rho = \frac{1}{2} (\not{p} + m)(1 - \gamma^5 \not{p})$$

au lieu du projecteur usuel $\not{p} + m$. Le résultat final dépend alors du vecteur polarisation \mathbf{P} du muon d'impulsion \mathbf{p} avec $a^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{p}/m$

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega d\epsilon} = \frac{G_F^2 m^5}{384\pi^4} [(3 - 2\epsilon) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}(1 - 2\epsilon)] \epsilon^2$$

où $\epsilon = E_e/E_{max}$, et $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. C'est la violation de la parité des interactions faibles qui autorise le terme $\mathbf{P} \cdot \mathbf{p}$: le vecteur polarisation est un pseudo-vecteur et la combinaison de termes scalaires et pseudoscalaires dans la section efficace traduit la non-invariance par symétrie miroir. L'électron est ainsi émis de manière privilégiée dans la direction de la polarisation du muon. On a tiré partie de cette propriété pour mesurer avec précision le moment magnétique du muon, comme le représente la figure 11.6. Les muons sont stockés dans l'anneau montré sur la figure 11.6a, l'impulsion des pions qui les ont produit étant choisie pour que leur polarisation longitudinale soit proche de 100 % à $t = 0$. Le spin du muon tourne au cours de sa trajectoire dans le champ magnétique \mathbf{B} . En posant $\gamma = E/m$, la vitesse angulaire (pulsation) de précession vecteur polarisation \mathbf{P} est

$$\vec{\omega} = -\left(\frac{g}{2} + \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}\right) \frac{q\mathbf{B}}{m}$$

avec $q = -e$ et $e > 0$. Le deuxième terme en $(1 - \gamma)$ provient de la précession de Thomas.

$$\vec{\omega} = -\frac{g - 2}{2} \frac{q\mathbf{B}}{m\gamma} + \vec{\omega}_L$$

où $\vec{\omega}_L = -q \frac{\mathbf{B}}{\gamma m}$ est la fréquence de Larmor, égale à la vitesse angulaire de rotation des muons dans l'anneau. Les électrons d'énergie élevée sont émis avec une direction \mathbf{n} très proche de \mathbf{P} . Le taux de comptage de ces électrons, mesuré à l'aide des photomultiplicateurs, va osciller avec la périodicité de la précession. En comparant à l'aide de l'équation (3.3.5) cette fréquence à la fréquence de rotation des muons, on obtient une mesure directe du moment magnétique anormal du muon. La fréquence de rotation est

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

tandis que la fréquence de précession du spin est

$$\omega_s = g \frac{eB}{2m} - \omega_T = \frac{g}{2} \omega_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \omega_0$$

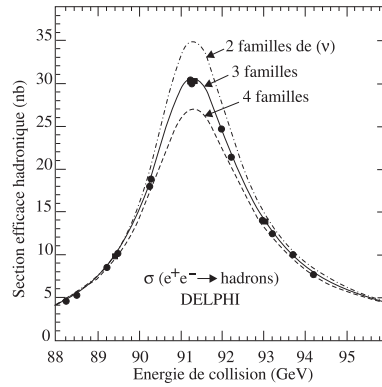


Figure 11.6a : Un anneau de stockage des muons.

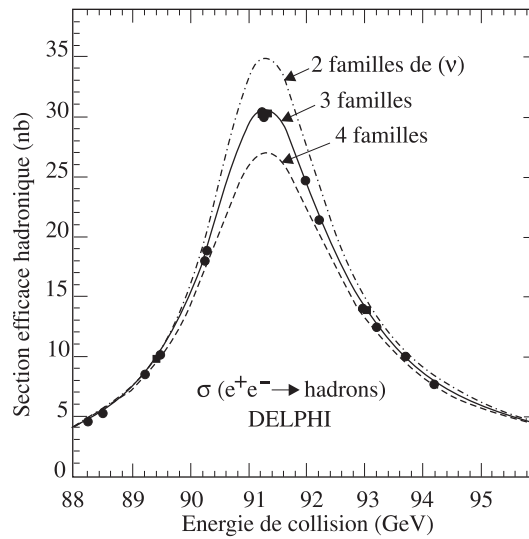


Figure 11.6b L'oscillation temporelle du taux de comptage due au moment anormal.
La courbe inférieure montre la rotation des paquets de muons.

La fréquence anormale $\omega_a = \omega_s - \omega_c = a\omega_0$ se traduit par les oscillations du taux observé d'électrons de désintégration dans la figure 11.6b.

La valeur expérimentale trouvée est

$$a_\mu^{exp} = \frac{g-2}{2} = 1,165923 \cdot 10^{-3} \pm 8 \cdot 10^{-9}$$

avec une précision relative de $7 \cdot 10^{-6}$, en excellent accord avec la valeur théorique calculée

$$a_\mu^{th} \sim \frac{\alpha}{2\pi} = 1,16584730 \pm 6 \cdot 10^{-11}$$

Ce résultat est l'un des tests de haute précision de la théorie des champs.

4- LA DESINTEGRATION FAIBLE DES QUARKS

4-1 Les doublets d'isospin faible

Les leptons gauches ont été classés dans des doublets de l'isospin faible, les états observables coïncidant avec les états propres de l'opérateur T_3^L . Le mélange des neutrinos, si les expériences futures établissaient une valeur finie de la masse, modifierait cette situation. Dans le secteur des quarks, au contraire, l'expérience montre que les états propres de l'isospin faible ne sont pas les états propres de masse, c'est-à-dire de saveur. Le boson W peut transformer un quark u ou c , d'isospin faible $+1/2$, aussi bien en un d qu'en un s . L'état propre de l'isospin faible pour la valeur $T_3 = -1/2$ est alors nécessairement une combinaison linéaire des saveurs d et s . Les doublets d'isospin faible sont ainsi :

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

et les nombres quantiques de ces doublets sont semblables à ceux des leptons, à la valeur de la charge près. Les champs d' , s' , b' , qui ont une charge électrique $-1/3$, s'expriment en fonction des champs d, s, b (saveurs conservées dans les interactions fortes) par une matrice unitaire, la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{CKM} . L'extension à trois familles proposée par Kobayashi et Maskawa permettait de rendre compte très simplement de la violation de CP , et la compréhension de ce phénomène rejoignait ainsi le cadre général de la détermination des constantes de couplage. Le tableau 11.II montre les états propres des générateurs de la symétrie :

Tableau 11.II : Les nombres quantiques des quarks dans $SU(2)_L \otimes U(1)$.

	T_3^L	T_3^R	Y
$u_L \quad c_L \quad t_L$	$\frac{1}{2}$	0	1/3
$d'_L \quad s'_L \quad b'_L$	$-\frac{1}{2}$	0	1/3
$u_R \quad c_R \quad t_R$	0	0	4/3
$d'_R \quad s'_R \quad b'_R$	0	0	-2/3

Comme Y commute avec les générateurs de l'isospin faible, les membres d'un doublet ont la même valeur propre.

4-2 La matrice de masse des quarks

De même que les couplages de Yukawa du champs de Higgs aux leptons engendrent les masses leptoniques, les couplages aux quarks sont à l'origine d'une matrice de masse qui implique les trois familles de quarks. Le couplage de Yukawa du Higgs aux leptons est diagonal : on souhaite pour des raisons expérimentales que les états propres de T_3^L soient les états de saveur leptonique définie, puisque les interactions faibles (semblent) conserver le nombre leptonique. Ces états observables diagonalisent la matrice de masse qui intervient dans l'hamiltonien. Dans les cas des trois familles de quarks, la contribution des couplages de Yukawa au langrangien trouvée pour les leptons en (11.2.1) se généralise, et on définira les doublets gauches et les singlets droits pour les trois familles :

$$Q'_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)q' \quad Q'_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)q'$$

$$(U_R)'_j = (u'_R, c'_R, t'_R) \quad (Q_L)'_i = \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

Le champ $\phi_c = \epsilon\phi^*$ (conjugué du champ de Higgs) permet d'assurer la conservation de la charge :

$$\mathcal{L}_{\phi-U} = (\bar{Q}_L)'_i (g_U)_{ij} \phi^c (U_R)'_j + h.c \quad (11.4.1a)$$

$$\mathcal{L}_{\phi-D} = (\bar{Q}_L)'_i (g_D)_{ij} \phi (D_R)'_j + h.c \quad (11.4.1b)$$

Les variables i, j désignent ici les trois familles de quarks, et comme il est expérimentalement établi que les interactions faibles mélangent les trois familles, les matrices $(g_U)_{ij}$ et $(g_D)_{ij}$ sont complètement arbitraires. Il apparaît ainsi une matrice de masse des quarks

$$\mathcal{L}_{masse} = (\bar{U}_L)'_i (M_U)'_{ij} (U_R)'_j + (\bar{D}_L)'_i (M_D)'_{ij} (D_R)'_j + h.c$$

avec $M'_{U,D} = g_U, D_2^g$. On pourra diagonaliser les matrices 3×3 M'_U et M'_D par des transformations biunitaires : $(U_R)'_j = V_{kj}^* (U_R)'_k$.

$$(M_U)' = V_{UL}^+ M_U V_{UR}^* \quad (M_D)' = V_{DL}^+ M_D V_{DR}^*$$

où les 2 matrices $M_{U,D}$ sont diagonales. L'expression du courant hadronique chargé devient

$$J_+^\mu = \bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \quad (11.4.2)$$

où $V_{CKM} = V_{UL}^\dagger V_{DL}$ et $V_{CKM} V_{CKM}^\dagger = \mathbf{1}$ à cause de l'unitarité des matrices V_U et V_D . Les champs U et D dans (11.4.2) ont trois composantes de saveur

$$U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Le lagrangien complet s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Bosons}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -MW \sqrt{\frac{4G_F}{\sqrt{2}}} J_+^\mu W_\mu^- + h.c \quad (11.4.3)$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{U} \not{\partial} U + i\bar{D} \not{\partial} D + \bar{U} M_U U + \bar{D} M_D$$

et les matrices de masse M_U et M_D sont ici diagonales. La matrice unitaire V_{CKM} est la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, initialement proposée sous la forme d'un angle de rotation θ_c par Cabibbo, avec $\sin \theta_c = 0,220$, puis étendue à une matrice 2×2 par Glashow, Illiopoulos, et Maiani qui invoquaient l'existence du charme (avant sa découverte), puis à une matrice 3×3 par Kobayashi et Maskawa, qui présageaient ainsi la découverte des quarks de la troisième famille, b et t .

4-3 Les paramètres de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

Nous avons vu que les états propres de l'isospin faible ne sont pas les états propres de masse (ou de saveur), mais qu'ils s'en déduisent par une transformation unitaire, la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{CKM} . Le courant couplé au boson W^+ est alors :

$$J_+^\mu = \bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L$$

La matrice de transition à 4 fermions résulte directement du lagrangien (11.4.3) et sera comme pour les leptons

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu} J_1^\mu J_2^\nu$$

Une matrice unitaire $N \times N$ comme V_{CKM} dépend de N^2 paramètres. Parmi ces paramètres, $N(N-1)/2$ sont les angles d'Euler des rotations $O(N)$. Les autres paramètres sont des phases. Tous les champs peuvent cependant être redéfinis en y absorbant des phases ϕ_i arbitraires. Il y a ainsi $2N$ phases ϕ_i , mais seules les différences, soit $2N-1$ paramètres peuvent modifier la matrice V , qui dépend alors de $N^2 - (2N-1) = (N-1)^2$ paramètres dont $N(N-1)/2$ sont des rotations. Il ne reste que $(N-1)(N-2)/2$ phases intrinsèques dans V . S'il n'y a que 2 familles de quarks, un seul angle suffit à décrire la matrice 2×2 V , c'est l'angle de Cabibbo θ_c :

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}$$

Cette matrice réelle n'autorise pas la violation de CP . Lorsque 3 familles de quarks sont présentes, la formule précédente montre qu'une phase va subsister, entraînant la présence de constantes de couplage complexes, et une violation de CP .

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

La matrice V peut être paramétrée de plusieurs façons. On montre dans l'exercice 12 que

$$V = \begin{pmatrix} c_3 c_2 & s_3 c_2 & s_2 e^{-i\delta} \\ -s_3 c_1 - c_3 s_1 s_2 e^{i\delta} & c_3 c_1 - s_3 s_1 s_2 e^{i\delta} & s_1 c_2 \\ s_3 s_1 - c_3 c_1 s_2 e^{i\delta} & -c_3 s_1 - s_3 s_2 c_1 e^{i\delta} & c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

Une autre présentation plus simple mais approchée due à Wolfenstein tire partie de la petitesse de s_2 et s_3 . En posant

$$\lambda = V_{us} = \sin \theta_c = 0,2205 \pm 0,005$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

l'analyse des données expérimentales, que nous présenterons plus tard contraint bien $A = 0,93 \pm 0,15$ alors que ρ et η sont encore mal connus : $\sqrt{\rho^2 + \eta^2} = 0,45_{-0,15}^{+0,2}$. Lorsque l'on néglige les termes en λ^3 et que l'on se restreint aux deux premières familles, on retrouve la matrice de Cabibbo. L'intérêt de cette paramétrisation est de faire apparaître de manière évidente la hiérarchie des taux de transitions entre les trois familles grâce aux puissances croissantes de λ , le paramètre A restant de l'ordre de l'unité.

4-4 Le triangle d'unitarité

L'unitarité de la matrice V implique 3 relations d'orthogonalité entre les 3 lignes et les 3 colonnes, par exemple

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

et 6 autres relations analogues, qui peuvent être représentées par 6 triangles d'unitarité ayant pour côtés $a_1 = V_{ud}V_{ub}^*$, $a_2 = V_{cd}V_{cb}^*$, $a_3 = V_{td}V_{tb}^*$ et les autres produits semblables. Dans la plupart des cas, deux des côtés du triangle sont beaucoup plus grands que le troisième, et il ne contient aucune information significative sur la phase de V_{CKM} . Il suffit de se reporter à la paramétrisation de Wolfenstein pour voir que c'est le cas de la combinaison

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^*$$

qui n'a aucun intérêt. Au contraire, les trois éléments de la première relation citée sont d'ordre λ^3 et donnent lieu au triangle le plus significatif. Il est représenté dans le plan complexe (ρ, η) sur la figure 11.7.

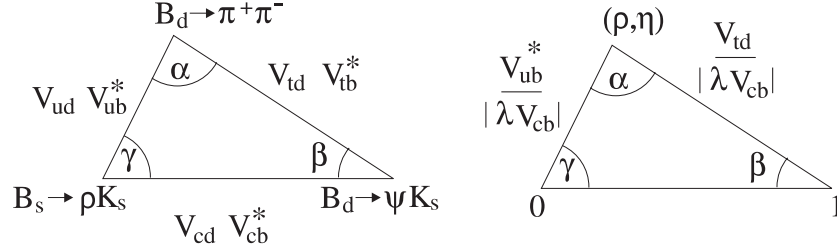


Figure 11.7 Le triangle d'unitarité le plus significatif.
Les réactions indiquées permettent la mesure des angles α, β, γ .

Tous les triangles d'unitarité ont la même surface égale à

$$S = \frac{1}{2} A^2 \lambda^6 \eta = c_1 c_2 c_3 s_1 s_2 s_3 \sin \delta$$

Cette surface est finie lorsque la phase δ qui est à l'origine de la violation de CP n'est pas nulle. Les angles α, β , et γ de la figure 11.7 impliquent des effets de violations CP dans les différentes transitions indiqués sur la figure. La mesure des éléments du triangle d'unitarité permet d'établir (ou d'invalider) l'attribution de l'origine de la violation de CP à la phase de la matrice de Kobayashi-Maskawa. Nous verrons dans le chapitre suivant que c'est dans les mélanges d'états $K^0 - \bar{K}^0$ et $B^0 - \bar{B}^0$ que la violation de CP s'observe facilement.

5- LA MESURE DES ELEMENTS DE LA MATRICE V_{CKM}

Les modules des éléments de la matrice V_{CKM} sont mesurables dans les désintégrations semi-leptoniques des quarks représentées dans la figure 11.8. Comme seuls des hadrons peuvent être directement observés, leur structure en quarks conditionne l'interprétation des résultats, mais de bonnes approximations permettent la détermination de certains des coefficients V_{ij} dans deux limites différentes :

- Lorsque les masses des quarks sont élevées (quarks b et c), ils sont quasiment libres, la constante effective de QCD étant faible.
- Lorsque la 4-impulsion transférée au système leptonique est très faible, dans le domaine des saveurs légères.

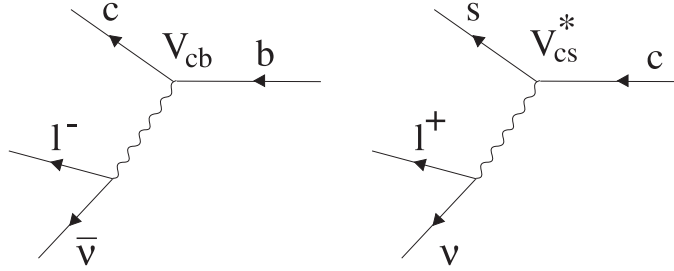


Figure 11.8 La désintégration semileptonique des quarks b et c.

5-1 La désintégration semi-leptonique du neutron

On voit sur la figure 11.9 le diagramme dominant de la désintégration β du neutron. La forme de l'élément de matrice de transition est tout à fait analogue au cas de la désintégration semi-leptonique exclusive des mésons B .

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} L_\mu H_n^\mu$$

$$H_n^\mu(q) = \langle P | \bar{u}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d(0) | N \rangle$$

$$L^\mu = \bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e$$

L'élément de matrice H^μ dépend de la structure en quarks des nucléons. Sa forme s'obtient à partir des règles de Feynman dans l'espace x :

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_n - p - q) H^\mu(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P(p_2) | \bar{u}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d(x) | N(p_1) \rangle$$

L'invariance par translation entraîne

$$\langle P | \bar{u}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d(x) | N \rangle = e^{-i(p_1 - p_2) \cdot x} \langle P | \bar{u}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) | N(p_1) \rangle$$

Dans le domaine des très petits transferts de 4-impulsion ($q = p_n - p_p$ et $q^2 \sim 0$) les résultats du chapitre 10 simplifient l'analyse des mesures. On montre dans l'exercice 18 que $H^\mu(q^2)$ dépend de 6 facteurs de forme, 3 vectoriels $f_i(q^2)$ ($i = 1, 2, 3$) et trois facteurs axiaux $g_i(q^2)$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} \langle p | \bar{\psi}_u(0) \gamma^\mu \psi_d(0) | n \rangle &= \bar{u}_p [f_1(q^2) \gamma^\mu + i f_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + f_3(q^2) q^\mu] u_n \\ \langle p | \bar{\psi}_i(0) \gamma^\mu \gamma^5 \psi_d(0) | n \rangle &= \bar{u}_p [g_1(q^2) \gamma^\mu - i g_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + g_3(q^2) q^\mu] \gamma^5 u_n \end{aligned}$$

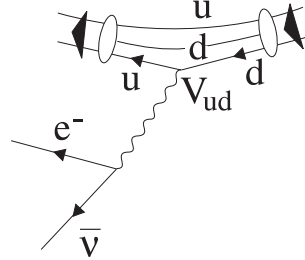


Figure 11.9 La désintégration β du neutron.

Cette base de quantités covariantes est formée avec un sous-ensemble des matrices covariantes S, V, T, A, P du chapitre 8. Les matrices $\sigma_{\mu\nu}\gamma^5$, qui n'y figurent pas, vérifient

$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}$$

avec $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1$, les autres composantes dépendant de la parité de la permutation des indices. Le transfert q^2 étant petit, seuls f_1 et g_1 ont une contribution substantielle. L'élément de matrice de transition prend ainsi la forme

$$\mathcal{M} \sim \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} L_\mu \bar{u}_p \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma^5) u_n \quad (11.5.1)$$

D'après les propriétés de $SU(2)$ vues au chapitre 10, $G_V = f_1(0) = 1$, et la constante G_A peut être évaluée à partir du temps de vie du neutron et comparée au résultat de la relation de Goldberger-Treiman dans le cadre de la symétrie $PCAC$. Le taux de désintégration différentiel est alors fonction de $r = G_A/G_V$. Le calcul complet donne

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{(2\pi^3)} (1 + 3r^2) V_{ud}^2 p (\Delta - E)^2 E dE$$

en fonction de l'impulsion p de l'électron, de son énergie E et de la différence de masse $\Delta = m_n - m_p = 1,3$ MeV. La largeur totale est alors

$$\Gamma_n = 0,47 \frac{G_F^2 \Delta^5 V_{ud}^2}{60\pi^3} (1 + 3r^2)$$

La durée de vie $\tau_n = 896$ s ne permet pas de déterminer les deux inconnues r et V_{ud} . Si l'on accepte la valeur de V_{ud} déterminée par ailleurs (désintégration faible des noyaux ou désintégration des hyperons) : $V_{ud} = 0,9736$, et il en

résulte $r = 1,2$, en bon accord avec PCAC. les deux paragraphes qui suivent vont exposer deux méthodes de mesure de V_{ud} .

5-2 La désintégration semileptonique des noyaux

La mesure la plus précise de V_{ud} est fournie par la désintégration β des noyaux scalaires, dans des transitions entre états nucléaires appartenant à un même multiplet, ce qui laisse la fonction d'onde inchangée. On dit alors qu'il s'agit de transitions super-permises, et les intégrales de recouvrement des fonctions d'onde qui apparaissent se réduisent à l'unité.

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} L_\mu H^\mu$$

avec

$$H^\mu = V_{ud} \langle A' | \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d | A \rangle + V_{ud}^* \langle A' | \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u | A \rangle \quad (11.5.2)$$

L'expression de H^μ va se simplifier pour deux raisons :

- i) Le courant axial ne peut contribuer à une transition entre noyaux scalaires, comme $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} e^+ \nu$. Il est impossible de construire un quadrivecteur axial avec les seules quadri-impulsions initiales et finales. Le seul vecteur qui peut être construit, l'impulsion relative, est un vrai vecteur.
- ii) La partie 4-vectorielle elle-même se simplifie. Un 4-vecteur contient un scalaire et un vecteur, et 2 facteurs de forme sont possibles. L'hypothèse *CVV* vue au chapitre 10 interdit le terme scalaire. En notation covariante

$$H_\mu = (p_1 + p_2)_\mu F_+(q^2) + (p_1 - p_2)_\mu F_-(q^2) \quad (11.5.3)$$

Si les masses sont égales, le courant vecteur est conservé et $q^\mu H_\mu^V = 0$, quelque soit le transfert q^μ :

$$(m_1^2 - m_2^2) F_+(q^2) + q^2 F_-(q^2) = 0 \quad (11.5.4)$$

A la limite d'une symétrie exacte, $m_1 = m_2$, ce qui annule la première contribution. Le transfert q^2 est alors également nul dans la transition β , qui devient cinématiquement impossible. Le même courant et les mêmes facteurs de forme sont cependant définis et observables dans la diffusion élastique d'électrons sur des noyaux comme sur la figure 11.1, où $q^2 < 0$. La conservation du courant vecteur (*CVV*, vue au chapitre 10) dans la transition implique, pour l'élément

de matrice du générateur T^+ dans un multiplet d'isospin T , avec le noyau initial T_3 . $F_+(0) = \sqrt{T(T+1) - T_3(T_3+1)}$.

Dans les désintégrations semi-leptoniques des noyaux scalaires $J^P = 0^+$: ^{14}O , ^{26}Al , ^{34}Cl , ^{46}V , ^{50}Mn , ^{54}Co , la contribution de F_- , proportionnelle à la masse de l'électron va être négligeable et on peut alors directement accéder à la valeur de $V_{ud} = 0,974 \pm 0,001$ tout en vérifiant la validité de CVC à une précision de l'ordre de 10^{-4} . Avant de comprendre que c'est l'ensemble de la matrice V_{CKM} qui est unitaire, on s'est interrogé assez longtemps sur cet écart à l'unité. Inversement, c'est la symétrie forte $SU(2)_f$ qui préserve la proximité de V_{ud} avec l'unité, malgré la présence des interactions fortes. Le couplage n'est pas renormalisé.

5-3 La désintégration semi-leptonique des hypérons

a- Les facteurs de forme

La désintégration semi-leptonique d'un hypéron se fait avec ou sans changement d'étrangeté. Dans le premier cas, un quark s est transformé en un quark u , dans le second c'est un quark d . Selon les transitions examinées apparaîtront les coefficients V_{us} , comme pour $\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ ou V_{ud} comme dans la désintégration β du neutron ou du Σ^\pm . L'élément de la matrice a par exemple la forme générale

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us} L_\mu H^\mu$$

avec

$$H^\mu = \langle h_2 | \bar{u}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s(0) | h_1 \rangle \quad (11.5.5)$$

Comme pour la désintégration du nucléon, $H^\mu(q^2)$ dépend de 6 facteurs de forme, 3 vectoriels et 3 axiaux. Si les masses des quarks u, d, s étaient égales, la symétrie $SU(3)_f$ serait exacte, et la partie vectorielle de H_μ serait conservée : $q^\mu H_\mu^V = 0$. Le facteur de forme $f_3(q^2)$ serait nul. Les masses de quarks m_s et m_u étant sensiblement différentes, $q^\mu H_\mu^V \sim (m_s - m_u)$, ainsi que f_3 . On va pouvoir utiliser la symétrie de saveur $SU(3)_f$ pour relier les différents éléments de matrice qui apparaissent dans ces transitions. La symétrie (approchée) $SU(3)_f$ permet d'exprimer les 10 fonctions $f_1(q^2)$ du tableau 11.III en fonction de deux d'entre elles, par exemple les facteurs de forme du proton et du neutron. Comme ce sont les mêmes courants qui apparaissent dans l'interaction électromagnétique, les facteurs de forme sont les mêmes, et ils s'identifient à la charge électrique des particules à $q^2 = 0$.

$$f_1^p(0) = 1 \quad f_1^n(0) = 0$$

Les moments transférés étant plus grands que pour le neutron, les facteurs de forme $f_2(q^2)$ ne peuvent plus être négligés, mais $SU(3)_f$ permet de les relier aux moments magnétique du proton et du neutron lorsque le transfert d'impulsion est nul, comme le montrera le paragraphe suivant.

b- L'octet des courants

*Tableau 11.III : Couplages vectoriels $f_1(0)$ et $f_2(0)$.
Les valeurs indiquées de f_i, g_i doivent être multipliées
par V_{ud} ou V_{us} selon qu'il y a changement d'étrangeté ou non.*

	Expression générale	$f_1^v(0)$ $D_1^v = 0$ $F_1^v = 1$	$f_2(0)$ $D_2^v = -\frac{3}{2}\mu_n$ $F_2^v = \mu_p + \frac{\mu_n}{2}$	$g_1^a(0)$ F_a, D_a
$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$	$(F + D)$	1	$\mu_p - \mu_n$	$F_a + D_a$
$\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda e^\pm \nu$	$\sqrt{\frac{2}{3}}D$	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\mu_n$	$\sqrt{\frac{2}{3}}D_a$
$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 e^- \nu$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}(\mu_p + \frac{\mu_n}{2})$	$\sqrt{2}f_a$
$\Lambda \rightarrow p \ell \nu$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(F + D/3)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\mu_p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(F_a + \frac{D_a}{3})$
$\Sigma^- \rightarrow n \ell \nu$	$-(F - D)$	-1	$-(\mu_p + 2\mu_n)$	$-(F_a - D_a)$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda \ell \nu$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(F - D/3)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(\mu_p + \mu_n)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(F_a - D_a/3)$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma \ell \nu$	$(F + D)/\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(F_a + D_a)/\sqrt{2}$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ \ell \nu$	$F + D$	1	$\mu_p - \mu_n$	$F_a + D_a$
$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 \ell \nu$	$F - D$	1	$\mu_p + \mu_n$	$F_a - D_a$

La différence des masses m_1 et m_2 autorise les transitions leptoniques, mais l'isospin n'est plus une symétrie exacte, le courant H^μ n'est pas conservé, et le facteur de forme $F_-(q^2)$ n'est plus nécessairement nul. Il est cependant de l'ordre de la différence de masse $m_u - m_d$, c'est-à-dire faible. En outre, le produit

scalaire de $(p_1 - p_2)_\mu$ par le courant leptonique étant proportionnel à la masse de l'électron (en utilisant l'équation de Dirac), la contribution de F_- est tout à fait négligeable. Les opérateurs courant qui figurent dans (11.5.2) et (11.5.5) s'expriment avantageusement à l'aide des triplets de champs de $SU(3)_f$, comme au chapitre 7.

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

L'expression (11.5.5) devient, en introduisant les matrices de Gell-Mann λ_i :

$$H^\mu = \langle h_2 | J^\mu | h_1 \rangle$$

En omettant la coordonnée $x = 0$ qui est en argument dans les opérateurs de champ :

$$J^\mu = V_{ud} \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (\lambda_1 + i\lambda_2) \psi_L + V_{us} \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (\lambda_4 + i\lambda_5) \psi_L$$

L'opérateur J^μ appartient à l'octet d'opérateurs tensoriels déjà rencontré au chapitre 7. Nous y avons montré que pour chacun des facteurs de forme, les éléments de matrice de ces opérateurs entre deux octets ne dépendaient que de deux constantes, soit 4 vectorielles, (F_1, D_1, F_2, D_2) , et 6 axiales (dans la mesure où le terme $f_3(q^2)$ reste négligeable lorsque $SU(3)$ est brisé). Nous négligerons aussi les contributions axiales g_2 et g_3 , proportionnelles à l'impulsion transférée q^μ , pour ne conserver que 6 constantes F et D , 4 vectorielles et deux axiales :

$$\langle B_2 | O_i^k | B_1 \rangle = F_i Tr\{[B_1, B_2^\dagger] \lambda^k\} + D_i Tr\{\{B_1, B_2^\dagger\} \lambda^k\} \quad (11.5.6)$$

Les taux de transition observés permettent ainsi de déterminer l'angle de Cabibbo $\sin \theta_c$, ou de façon équivalente $V_{su} = 0,222 \pm 0,003$ (à comparer à 0,220 par la désintégration des noyaux).

5-4 Les désintégrations semi-leptoniques des mésons

La désintégration du méson $K : K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu$ est le modèle de ces transitions. Il est avantageux de séparer les parties vectorielles et axiales du courant :

$$J^\mu = \bar{s} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u = V^\mu - A^\mu$$

La contribution de la partie axiale du courant est nulle :

$$A^\mu = \langle \pi | \bar{s} \gamma^\mu \gamma^5 u | K \rangle = 0$$

Aucun des quatre vecteurs axial ne peut en effet être construit avec les quadri-impulsions des deux particules pseudoscalaires. Le quadrivecteur axial est en effet la somme directe d'un pseudoscalaire et d'un pseudovecteur, et la conservation du moment angulaire et de la parité interdit les transitions

$$0^- \rightarrow 0^- + 0^- \qquad 0^- \rightarrow 1^+ 0^-$$

(Bien que la parité ne soit pas conservée dans les transitions faibles, les parties axiales et vecteurs prises séparément on des transformées par parité définies, et obéissent aux règles de sélection usuelles). En ce qui concerne la partie vectorielle, il y a deux facteurs de formes correspondant au caractère scalaire ou vectoriel du courant faible :

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sin \theta_c [f_+(q^2)p_\mu + f_-(q^2)q^\mu] \bar{u}_\nu \gamma^\mu [1 + \gamma^5] v_e \quad (11.5.7)$$

Les deux quadrivecteurs p et q sont définis par $p = p_K + p_\pi$ et $q = p_K - p_\pi$. La contribution de f_- , qui donne un terme proportionnel à la masse m_l du lepton peut être a priori négligée dans le canal électron. L'opérateur

$$Q_{us} = \int d^3x \bar{u}(x) \gamma^0 s(x)$$

est un générateur de la symétrie $SU(3)_f$. Les éléments de matrice de V^μ peuvent être calculés à l'aide du tableau 11.III. Comme dans le cas des hypérons, l'ensemble des facteurs de forme f_+ et f_- pour les éléments de matrice de l'octet peuvent s'exprimer en fonction de deux d'entre eux. Le tableau 11.III peut être utilisé de nouveau, en identifiant le K^0 au neutron et le π au Σ , ce qui impose $F_+ = 1$ et $D_+ = 0$, et il en résulte que $f_+(0) = 1$. Le calcul de l'élément de matrice de $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ est proposé à titre d'exercice. Rappelons que les violations de $SU(3)$ sont proportionnelles au carré des masses de l'octet, donc petites pour f_+ en vertu du théorème d'Ademollo et Gatto, mais que f_- est linéaire par rapport aux différences de masse : seul le canal électron peut être utilisé pour déterminer $\sin \theta_c$.

Un deuxième type de transition apparaît avec les mésons pseudoscalaires portant un quark b ou c lorsque le hadron final est vectoriel, comme le K^* (892) avec $J^P = 1^-$. L'état quantique du hadron final de quadrimoment p' est décrit par un quadrivecteur ϵ^μ qui vérifie $p \cdot \epsilon = 0$. On obtient bien ainsi trois composantes spatiales dans le système au repos. Il y a alors 3 facteurs axiaux et un vectoriel :

$$\langle p', \epsilon^\mu | A_\nu | p \rangle = g_o \epsilon_\nu^* + g_+ (\epsilon^* \cdot p) (p + p')_\nu + g_- (\epsilon^* \cdot p) (p - p')_\nu \quad (11.5.8a)$$

$$\langle p', \epsilon^\mu | V_\nu | p \rangle = f \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} \epsilon^{\rho*} (p + p')^\sigma (p - p')^\tau \quad (11.5.8b)$$

Le nombre de ces facteurs de forme est justifiée à l'exercice 19.

5-5 Les désintégrations semi-leptoniques inclusives des quarks b et c

En première approximation, les désintégrations inclusives semi-leptoniques des hadrons porteurs du quark b peuvent être décrites par les diagrammes de la figure 11.8. L'élément de matrice correspondant est tout à fait analogue à celui de la désintégration du muon :

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} \bar{u}_e - \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_\nu \bar{u}_c \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_b \quad (11.5.9)$$

et comme pour le muon, il en résulte directement une expression de la largeur total semi-leptonique :

$$\Gamma(b \rightarrow c\nu) = \frac{Br(b \rightarrow c\nu)}{\tau_b} = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} |V_{cb}|^2 K(r) \quad (11.5.10)$$

Le facteur cinématique K tient compte des effets d'espace de phase provenant de la masse finie du quark c , et on a posé $r = m_c^2/m_b^2$:

$$K(r) = 1 - 8r + 8r^3 - r^4 - 12r^2 \text{Log}(r)$$

Outre les incertitudes sur m_b et m_c , on doit également tenir compte de corrections provenant des interactions fortes, et ces dernières vont affecter la précision avec laquelle V_{cb} est connu. Le modèle le plus simple, suggéré par la figure 11.8 néglige les effets liés à la présence des quarks *spectateurs* qui ne participent pas à la transition faible. On supposera que le calcul effectué avec les quarks décrit l'ensemble des transitions vers les états hadroniques charmés.

$$\Gamma(b \rightarrow c\nu) = \Gamma(B \rightarrow X_c l\nu)$$

où X_c dénote l'ensemble des canaux finals charmés. La largeur partielle $\Gamma(B \rightarrow X_c l\nu)$ peut s'exprimer à l'aide de la largeur totale

$$\Gamma(B \rightarrow X) = \frac{\hbar}{\tau_B}$$

et du rapport de branchement leptonique :

$$B(B \rightarrow c\nu) = \frac{\Gamma(B \rightarrow X_c l\nu)}{\Gamma(B \rightarrow X)}$$

On en déduit

$$\Gamma(B \rightarrow X_c l \nu) = \frac{B(B \rightarrow X_c l \nu)}{\tau_b} = \frac{G_F^2 m_b^5}{192 \pi^3} |V_{cb}^2| K(r) \quad (11.5.11)$$

L'équation (11.5.11) détermine $|V_{cb}|$ en fonction du temps de vie des mésons B et du rapport de branchement leptonique. Le temps de vie du méson B est mesuré à son parcours : $\tau_B = 1,5 \pm 0,1 \cdot 10^{-12}$ s, mais il subsiste de petites incertitudes sur la valeur du branchement semileptonique. La valeur mesurée par les anneaux de collision e^+e^- à la masse de la résonance $\Upsilon(4S)$ est de $B(B \rightarrow X_c l \nu) = 10,31 \pm 0,1 \pm 0,25\%$ alors que les expériences de LEP, mesurant la désintégration des quarks b à l'énergie du Z trouvent $B(b \rightarrow cl \nu) = 11,33 \pm 0,22 \pm 0,41\%$. Ces résultats expérimentaux sont légèrement contradictoires, même en tenant compte des différents états finals accessibles. La valeur de V_{cb} qui en résulte, $|V_{cb}| = 0,040 \pm 0,005$, est très inférieure à V_{us} . Le spectre du lepton est représenté sur la figure 11.10. Les courbes continues décrivent de manière inclusive la désintégration semileptonique du quark b dans le mode $cl \nu$, avec les corrections dues au rayonnement de gluons, et au mouvement de Fermi des quarks à l'intérieur du hadron initial. Le paramètre $\langle p_F^2 \rangle^{1/2} \sim \Lambda_{QCD}$ représente de manière qualitative les effets de la structure hadronique des mésons B .

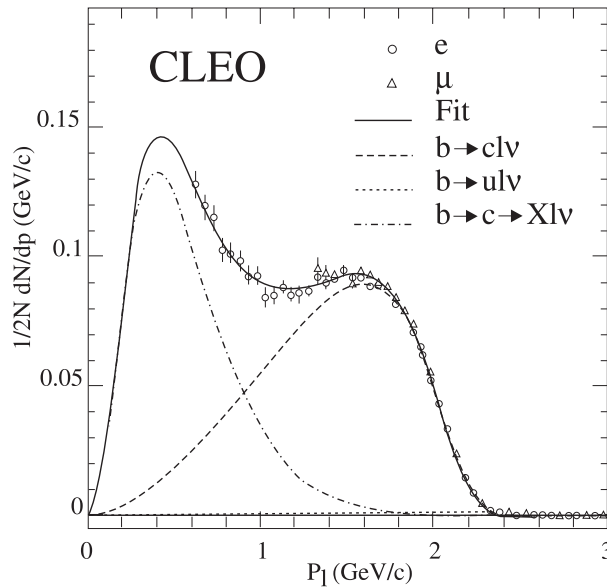


Figure 11.10 Les spectres des leptons de désintégrations primaires de $B \rightarrow cl \nu$ (tirets) et la contribution de $b \rightarrow c \rightarrow Xl \nu$ (traits et points).

5-6 Les symétries de QCD pour les quarks lourds

QCD acquiert une nouvelle symétrie lorsque $m_Q \rightarrow \infty$: la symétrie de spin-saveur $SU(2N_f)$, qui combine une symétrie agissant sur les composantes de spin du quark lourd, et une symétrie de saveur unitaire dans l'espace à deux dimensions (b, c) , analogue à l'isospin. Les générateurs de la symétrie de spin $SU(2)$ sont les opérateurs de spin du quark lourd, S_i , et ils n'agissent que sur ce quark, en laissant (par définition) les quarks ou antiquarks légers inchangés. Cette symétrie transpose dans QCD la petitesse des interactions spin-spin entre le noyau lourd et l'électron dans un atome.

Dans l'approximation des quarks statiques (système au repos du hadron lourd), le quark lourd a approximativement la vitesse du hadron lorsque l'impulsion k du quark léger et du nuage de gluons restent faibles ($\ll m_q$) : si v^μ est la 4-vitesse du hadron l'impulsion du quark est $P_Q = m_Q v - k$, et lorsque k est fini, les deux vitesses sont égales. Le lagrangien effectif de QCD, à la limite des masses infinies s'exprime en fonction du champ effectif $h_v(x)$, relié au champ du quark lourd par

$$Q(x) = \exp(-im_Q.v.x)h'_v(x) \sim \exp(-im_Q.v.x)\frac{1+\not{v}}{2}h'_v(x)$$

On définit le champ statique :

$$h_v(x) = \frac{1+\not{v}}{2}h'_v(x)$$

Le champ h_v vérifie, pour $k/m_Q \sim 0$ l'équation de Dirac d'une particule libre de masse unité :

$$\not{v}h_v = h_v = \frac{1+\not{v}}{2}h_v$$

Le lagrangien effectif ne couple que les états correspondant à la même valeur de la vitesse des quarks :

$$\mathcal{L}_{QCD}(v) = i\bar{Q}(\not{D} - m_Q)Q \sim \bar{h}_v v.Dh_v$$

La dérivée covariante D_μ est de la forme $D_\mu = \partial_\mu + igT_b A_\mu^b$ comme au chapitre 10. Les règles de Feynman s'en déduisent :

(i) Le propagateur du quark ne dépend que de sa vitesse et de la (petite) impulsion k , pas de la masse m_Q :

$$\frac{i}{\not{p}_Q - m_Q + i\epsilon} = \frac{i}{-v.k + i\epsilon} \frac{\not{v} + 1}{2} \quad (11.5.12)$$

(ii) Le vertex d'interaction d'un quark lourd et d'un gluon se simplifie dans l'approximation statique, les 4-vitesses restant inchangées :

$$\bar{h}_b \gamma^\mu h_b = \bar{h}_b \frac{(\not{\epsilon} + 1)}{1} \gamma^\mu \frac{(\not{\epsilon} + 1)}{2} h_b$$

Par commutation ce terme de vertex devient

$$\bar{h}_b \frac{(\not{\epsilon} + 1)}{2} \gamma^\mu \frac{(\not{\epsilon} + 1)}{2} h_b = v^\mu \bar{h}_b h_b \quad (11.5.13)$$

ce vertex ne dépend manifestement plus du spin du quark (c'est évident si on considère qu'il s'agit d'un spineur au repos).

(iii) Bien entendu, la vitesse du quark est modifiée dans la transition *faible* qui fait passer du quark b au quark c .

Le lagrangien *effectif* d'interaction dans l'approximation des quarks lourds est invariant dans les transformations

$$h_v \rightarrow e^{i\phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_Q} h_v \quad (11.5.14)$$

La vitesse v n'est pas affectée : ce n'est *pas* une rotation, ni même une rotation dans le système au repos puisque l'opération n'affecte que le quark lourd. Le moment angulaire total du hadron lourd n'est pas conservé. Si l'on considère les mésons charmés $D(J^P = 0^-)$ et $D^*(J^P = 1^-)$:

$$S_Q^3 |D \rangle = S_Q^3 \frac{1}{\sqrt{2}} |Q \uparrow \bar{q} \downarrow - Q \downarrow \bar{q} \uparrow \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |Q \uparrow \bar{q} \downarrow + Q \downarrow \uparrow \rangle = \frac{1}{2} |D^* \rangle \quad (11.5.15a)$$

et de même

$$S_Q^3 |D^* \rangle = \frac{1}{2} |D \rangle \quad (11.5.15b)$$

Les hadrons sont transformés les uns dans les autres par cette symétrie qui laisse le lagrangien invariant. La symétrie de spin relie les désintégrations où interviennent des mésons D et D^* . Elle est brisée puisque le D et le D^* , le B et le B^* ont des masses un peu différentes

$m_B^* - m_B = 46$ MeV, $m_{D^*} - m_D = 142$ MeV, mais pour le quark s léger, $m_{K^*} - m_K = 398$ MeV.

Cette différence est faible et diminue avec la masse du quark lourd, comme on s'y attend pour la force spin-spin provenant de l'échange d'un gluon :

$$V = -\frac{32\pi}{9}\alpha_s\delta(r)\frac{\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2}{m_1m_2}$$

Les couplages du lagrangien de QCD sont en outre indépendants des saveurs, ce qui entraîne une invariance $SU(2)_Q$ analogue à l'isospin dans l'espace de saveur (b, c) . Comme dans le cas de l'isospin, les 3 générateurs de la symétrie sont les opérateurs

$$Q_i(t) = Q_i(0) = \frac{1}{2} \int dr \bar{q}(t, \mathbf{r}) \gamma^0 \tau_i \mathbf{q}(t, \mathbf{r}) \quad (11.5.16)$$

où q désigne un champ à 2 dimensions de l'espace (c, b) . Les groupes de symétrie de spin et d'isospin lourd se combinent en un groupe unique $SU(4)$. Dans le cadre de l'approximation des quarks lourds précédemment décrite, ce sont des états de même vitesse qui vont être reliés par cette symétrie de saveur, et non pas des états de même impulsion. C'est cette distinction qui garantit que dans une transition $b \rightarrow c$ où le hadron final est au repos, l'élément de matrice de transition est égal à l'unité, à un facteur près, puisqu'il est identique à l'un des générateurs de la symétrie

$$\langle D | Q_i(0) | B \rangle = 1$$

5-7 Les modes exclusifs

Les modes exclusifs les plus utilisés sont les canaux $B \rightarrow D^* l \nu$, et (à moindre degré) $B \rightarrow D l \nu$. L'élément de matrice correspondant est, à l'approximation des courtes distances

$$\mathcal{M}_B = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{bc} L_\mu H^\mu$$

$$L_\mu = \bar{u}_l \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu$$

On définit le 4-vecteur de transfert d'énergie à partir des impulsions p_1 et p_2 du B et du méson charmé : $q^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ et la polarisation du méson vecteur D^* sera décrite par le 4-vecteur ϵ^μ avec la contrainte $p_2^\mu \epsilon_\mu = 0$ (il n'y a que 3 composantes indépendantes).

$$(2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 + p_2) H_B^\mu(q) = \int d^4 x e^{i(q - p_1 + p_2) \cdot x}$$

$$\langle D^{*+}(p_2) | \bar{\psi}_c(0) \gamma^4 (1 - \gamma^5) \psi_b(0) | \bar{B}^0(p_1) \rangle \quad (11.5.17)$$

$$H^\mu(q) = \langle D^{*+}(p_2) | \bar{\psi}_c(0) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_b(0) | B^0(p_1) \rangle$$

L'élément de matrice H^μ dépend d'un facteur de forme vectoriel $V(q^2)$ et de trois facteurs de forme axiaux $A_i(q^2)$, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 5-4.

Dans la limite des quarks lourds, ces 4 facteurs de forme et les deux facteurs de forme de la transition $B^- \rightarrow D^{0l} \bar{\nu}$ dépendent de la même fonction $\xi(w)$, appelée *fonction d'Isgur-Wise*. Au lieu de la variable $q^2 = (p_1 - p_2)^2$, on utilisera pour les transitions des quarks lourds :

$$w = \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 m_2} = v_1 \cdot v_2$$

Les 4-vecteurs v_1^μ et v_2^μ sont les 4-vitesses relativistes (p^μ/m), et

$$q^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 w$$

La variable w reste finie lorsque la masse $m_Q \rightarrow \infty$. Lorsque le hadron final est au repos dans le système du B : $v_2 = v_1 = (1, \mathbf{0})$, $w = 1$, et $q^2 = q_{max}^2 = (m_1 - m_2)^2$. La conservation du courant vectoriel a permis de relier les facteurs de formes de différentes transitions du tableau 11.III. La symétrie $SU(2)_Q$ des quarks lourds engendrée par les opérateurs (11.5.16) va de même permettre d'exprimer les éléments de matrice du courant $\bar{Q}_2 \Gamma Q_1$ en fonction d'un facteur de forme unique $\xi(w)$, qui vérifie la contrainte $\xi(1) = 1$. On le montrera en faisant agir l'opérateur de rotation du quark lourd $e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}}$:

$$\begin{aligned} & \langle D | \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0) | B \rangle = \\ & = \langle e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}} D | e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}} \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}} e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}} | B \rangle \end{aligned}$$

L'opérateur de spin $\mathbf{S}_{Q_2} = \gamma^5 \vec{\gamma}$ n'agit que sur les composantes de spin du quark Q_2 (charmé) et laisse B invariant

$$- \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_Q) D | \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0) | B \rangle + \langle D | [\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_Q, \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0)] | B \rangle = 0$$

L'équation (11.5.15) entraîne alors :

$$\langle D^* | \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0) | B \rangle = 2 \langle D | [\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{Q_2}, \bar{Q}_2(0) \Gamma Q_1(0)] | B \rangle$$

reliant ainsi les deux transitions à l'aide des relations de commutation des matrices γ^μ . Une méthode de calcul simple qui tire partie de l'invariance de spin est proposée dans l'exercice 21 et aboutit aux expressions suivantes :

$$\langle D(v)|V^\mu|B(v') \rangle = \sqrt{m_C m_B} \xi(w) (v^\mu + v'^\mu) \quad (11.5.18a)$$

$$\langle D^*(v), \epsilon |A^\mu|B(v') \rangle = \sqrt{m_C m_B} \xi(w) [\epsilon^\mu (1 + v \cdot v') - v^\mu v' \cdot \epsilon] \quad (11.5.18b)$$

$$\langle D^* \epsilon |V^\mu|B(v') \rangle = -\sqrt{m_C m_B} \xi(w) i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^\nu v'^\alpha v^\beta \quad (11.5.18c)$$

La figure 11.11 représente la détermination expérimentale de la fonction $\xi(w)$ par plusieurs expériences, à partir de la désintégration $B \rightarrow D^* l \nu$. C'est la prédiction absolue $\xi(1) = 1$ qui va permettre d'en déduire l'élément de matrice V_{cb} .

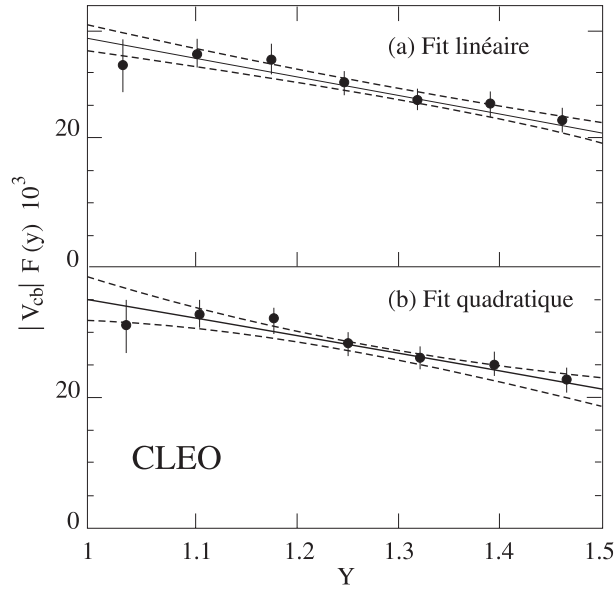


Figure 11.11 La valeur mesurée de $\xi(w)$ dans la désintégration $B \rightarrow D^* l \nu$.

L'expression de la largeur est partielle, en fonction des variables q^2 et w (la relation entre elles a été donnée) est :

$$\frac{d\Gamma}{dw} = \frac{G_F^2}{48\pi^3} (m_B - m_{D^*})^2 m_{D^*}^3 \sqrt{w^2 - 1} (w - 1)^2 \left[1 + \frac{4w}{w + 1} \frac{q^2}{m_B - m_{D^*}} \right] |V_{cb}|^2 \xi(w)^2 \quad (11.5.19)$$

Les données expérimentales, comme celles de la figure 11.11 permettent ainsi de déterminer la fonction $\xi(w)$ et l'extrapolation à $w = 1$ fournit

$$|V_{cb}| = 0,041 \pm 0,003 \pm 0,002_{th}$$

l'erreur théorique indiquée reflète les incertitudes actuelles sur la précision de la théorie des quarks lourds.

EXERCICES

Couplages électrofaibles

- [1] Calculer le spectre de désintégration du muon pour les amplitudes suivantes :

$$M = S \bar{u}_e v_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\nu_\mu} u_\mu$$

$$M = V \bar{u}_e \gamma^\mu v_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\nu_\mu} - \mu \gamma_\mu u_\mu$$

$$M = A \bar{u}_e \gamma^\mu \gamma^5 v_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\mu \gamma^5 u_\mu$$

$$M = T \bar{u}_e \sigma^{\mu\nu} v_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \sigma_{\mu\nu} u_\mu$$

$$M = P \bar{u}_e \gamma^5 v_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^5 u_\mu$$

Donner la valeur correspondante du paramètre de Michel ρ .

- [2] Des muons sont produits par la désintégration $\pi \rightarrow \mu\nu$. Par un faisceau de pions d'impulsion p_1 . Quelle va être la polarisation des μ^+ et des μ^- émis vers l'avant ? Calculer la polarisation longitudinale moyenne dans le laboratoire d'un muon d'impulsion p_2 .
- [3] On considère une paire $\bar{q}_2 q_1$ créée par un W . Quels sont les valeurs de J^P accessibles dans l'état final pour les courants d'interaction $\bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi$ et $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{\tau} \psi$?
- [4] Etablir les transformations par G -Parité : $GV_\mu G^{-1} = V_\mu$, $GA_\mu G^{-1} = -A_\mu$. Les courants V_μ et A_μ sont restreints aux quarks u et d . En déduire que dans la désintégration pionique du Z^0 ou du τ , l'état final ne peut pas avoir les nombres quantiques $J^{PG} = 1^{--}$ ou $J^{PG} = 1^{++}$.
- [5] Calculer en fonction de C_V et C_A la section efficace de la réaction $e^+ e^- \rightarrow q\bar{q}$. Quelle est la zone du plan (C_V, C_A) délimitée par une mesure de précision finie ? Quels autres types de mesure achèvent de contraindre C_V et C_A ?

- [6] Calculer en fonction de C_V et C_A l'asymétrie avant-arrière de la réaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. On appelle asymétrie le rapport $A_{FB} = (\sigma_F - \sigma_B)/(\sigma_F + \sigma_B)$ où

$$\sigma_F = \int_{\theta > \pi/2} d\Omega \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} \quad \sigma_B = \int_{\theta < \pi/2} d\Omega \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega}$$

- [7] Utiliser la réponse au problème précédent pour calculer la largeur de désintégration $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$. Le résultat est-il modifié si le neutrino est une particule de Majorana avec des doublets gauches et droits ?
- [8] Donner les contributions de l'amplitude de Fermi dans la diffusion νq aux amplitudes de diffusion des états $L = 0$ et $L = 1$. A quelle valeur de l'énergie dans le c. d. m. l'unitarité (chapitre 6) est-elle violée ?
- [9] Donner l'expression du couplage à 3 bosons ZWW à partir de l'interaction (11.3.2) et de la définition de Z (11.4.5).
- [10] Vérifier la loi d'atténuation du champ magnétique qui résulte de l'équation (11.5.3).

Désintégration faible des quarks

- [11] Calculer le courant conservé associé à l'invariance de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)$. Le courant conservé correspondant au lagrangien

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu}$$

n'est pas $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{1}{2} \vec{\tau} \psi_L$. Montrer qu'il faut ajouter $\mathbf{F}^{\mu\nu} \wedge \mathbf{W}_\nu$. On considèrera les transformations de jauge de fonction $\Lambda(x)$:

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\Lambda}} \psi$$

$$\mathbf{W}^\mu \cdot \vec{\tau} \rightarrow e^{i\vec{\Lambda} \cdot \vec{\tau}} \mathbf{W}^\mu \cdot \vec{\tau} e^{-i\vec{\Lambda} \cdot \vec{\tau}}$$

$$-\frac{i}{g} e^{i\vec{\Lambda} \cdot \vec{\tau}} \partial^\mu e^{-i\vec{\Lambda} \cdot \vec{\tau}}$$

avec la définition du courant de Noether pour cette transformation :

$$\delta \Lambda_a J_a^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_b^\nu)} \delta W_b^\nu$$

- [12] On peut paramétrer la matrice V_{CKM} la plus générale en partant d'une matrice diagonale

$$D_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

et effectuer 3 rotations réelles d'angles d'Euler $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Montrer que l'on retrouve la forme générale donnée.

- [13] Quels sont les diagrammes de quarks des désintégrations faibles hadroniques $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ et $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$? Quelles sont les amplitudes faibles vers les états finals de quarks d'isospin $I = 1/2$ et $I = 3/2$ dans les deux cas?
- [14] Exprimer le rapport des taux de désintégration $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ et $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$ en fonction des amplitudes $A_{1/2}$ et $A_{3/2}$ dans l'état final. Les taux observés sont de 51% pour $p\pi^0$ et 48% pour $n\pi^+$. Que peut-on en déduire pour $A_{1/2}/A_{3/2}$?
- [15] Dans le modèle des quarks spectateurs on s'attend à ce que les largeurs partielles leptoniques des D^+ et des D^0 soit égales. On observe cependant des rapports de branchement de 17% (D^+) et 8% (D^0). Est-ce incompatible avec la prédiction précédente? Montrer que l'existence de deux diagrammes dans les désintégrations hadroniques du D^0 permet d'expliquer un temps de vie plus faible.
- [16] Quel est le rapport attendu entre les taux de désintégration $\tau \rightarrow \pi\nu$ et $\tau \rightarrow K\nu$ (on observe respectivement $11,7 \pm 0,4\%$ et $6,7 \pm 2 \cdot 10^{-3}$)?
- [17] Retrouver le nombre d'amplitudes attendues dans les désintégrations faibles semileptoniques du B en pseudoscalaire, du B en vecteur et des hyperons en baryon $(1/2)^+$ à l'aide du formalisme de l'hélicité.
- [18] Prédire le nombre des facteurs de forme axiaux et vectoriels dans les cas suivants : désintégration β des hyperons, désintégration β du méson B en $D^*\ell\nu$.
On pourra considérer que J_ν^μ est la somme directe d'un scalaire et d'un vecteur, J_A^μ la somme directe d'un pseudoscalaire et d'un pseudovecteur, et chercher le nombre d'amplitudes de parité donnée en composant les spins puis le moment orbital relatif.
- [19] Donner les deux manières dont l'échange d'un gluon peut modifier la désintégration faible hadronique d'un quark. Les amplitudes d'isospin sont elles affectées par cette correction?
- [20] Montrer que la cinétique d'une transition entre quarks lourds impose la conservation des vitesses à des corrections en $(m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)$ près.

- [21] On peut déterminer l'expression des éléments de matrice en utilisant l'invariance de spin. Par exemple :

$$\langle f, v_2 | \gamma^\mu | i, v_1 \rangle = \text{Tr} \left\{ \frac{(v_2 + 1)}{2} \gamma^\mu \frac{(v_1 + 1)}{2} \right\}$$

En déduire les développements (11.5.18).

- [22] Etablir la formule 11.5.19 à partir des équations 11.5.18.