Appendice D

Les particules de masse nulle

D-1 L'opérateur de Pauli-Lubansky

Nous avons déjà utilisé cet opérateur au chapitre 3 pour construire les transformations de Lorentz laissant la 4-impulsion des particules invariantes.

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$$

et pour un état propre de P^σ d'impulsion p^σ on substituera à l'opérateur sa valeur propre. Si $W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\sigma J^{\nu\rho}$, les transformations de Lorentz de la forme $U(\Lambda) = e^{-iW\cdot a}$ sont celles qui laissent p invariant.
Les relations de commutation de W découlent des règles de commutation des $J_{\mu\nu}$ et des P_μ :

$$[W_\mu, W_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma \qquad (D.1)$$

$$[J_{\mu\nu}, W_\lambda] = i(g_{\mu\lambda}W_\nu - g_{\nu\lambda}W_\mu) \qquad (D.2)$$

W^μ se comporte comme un 4-vecteur de Lorentz. $W_\mu W^\mu$ est un invariant de Lorentz qui commute avec P^μ et $J^{\mu\nu}$.

D-2 La triade de repère

Lorsque la masse de la particule $m^2 \neq 0$, nous avons pu définir 3 vecteurs orthogonaux (au sens des 4-vecteurs) à p^μ.

$$\begin{aligned} &p \cdot n_i(p) = 0 \\ &n_i(p) \cdot n_j(p) = -\delta_{ij} \\ &det(p, n_1, n_2, n_3) = 1 \end{aligned}$$

Ces vecteurs permettaient de définir les 3 opérateurs $W_i(p) = -W(p) \cdot n_i(p)$. Lorsque $m^2 = p^2 = 0$, ce n'est plus possible. Il n'y a plus que 2 vecteurs d'espace orthogonaux à p au sens des 4-vecteurs.

$$\begin{aligned} &n_i(p) \cdot p = 0 \\ &n_i(p) \cdot n_j(p) = -\delta_{ij} \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

si $p = (k, \vec{k})$ on choisira $\vec{k} \cdot \vec{n_1} = \vec{k} \cdot \vec{n_2} = 0$ et $\vec{n_3} = \vec{k}/k$.
Le 4-opérateur W^μ admet alors le développement

$$W^\mu = -\sum_i (W \cdot n_i(p)) n_i(p) + W^0 \frac{p^\mu}{p^0} \qquad (D.3)$$

et on diagonalisera

$$W^0 = \vec{W} \cdot \vec{p}/p^0$$

et W^2 qui commute avec W^0.

$$W^0 \mid [p], \lambda >= \lambda p^0 \mid [p], \lambda >$$

A partir des relations de commutation

$$[J_{\mu\nu}, W_\lambda] = i(g_{\mu\lambda} W_\nu - g_{\nu\lambda} W_\mu)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\mu\lambda} P_\nu - g_{\nu\lambda} P_\mu)$$

on montre facilement que pour une masse nulle, λ est un invariant de Lorentz.

D-3 Les multiplets de spin

Deux opérateurs W^+ et W^- peuvent être construits à partir de $W \cdot n_1$ et $W \cdot n_2$.

$$W^+ = W \cdot n_1 + iW \cdot n_2$$

$$W^- = W \cdot n_1 - iW \cdot n_2$$

Les relations de commutation des W impliquent

$$[W^0, W^+] = W^+$$

$$[W^0, W^-] = -W^-$$

$$[W^1, W^2] = i\frac{W^0}{p^0} m^2 = 0$$

Les opérateurs W^+ et W^- augmentent ou diminuent l'hélicité de une unité.
D'autre part, l' expression de W^μ en fonction des $W \cdot n_i$ (eq. D.3) permet d'établir que

$$W^2 = -\sum_i (W \cdot n_i)^2$$

Deux cas se présentent:

- Si $W^2 \neq 0$: $W \cdot n_1$ et $W \cdot n_2$ ne sont pas nuls, et l'hélicité peut prendre une infinité de valeurs. On n'observe pas dans la nature de particule ayant cette propriété.
- Si $W^2 = 0$: $W \cdot n_i = W^+ = W^- = 0$. Il n'y a alors que un seul état d' hélicité, et les transformations de Lorentz laissent cette hélicité invariante. Au contraire, l'opération parité P, *si elle est définie pour la particule considérée* fait passer de λ à - λ.

D-4 Le neutrino

Il résulte de la définition de W^μ que

$$W_\mu u(p) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}p^\sigma u(p)$$

en utilisant

$$\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}$$

et l'équation de Dirac d'une particule de masse nulle $\not p u = 0$, on obtient

$$W_\mu u = \frac{\gamma^5}{2}p_\mu u = \pm\frac{1}{2}p_\mu u$$

où le signe $\pm$ provient de l'hélicité du neutrino. Le projecteur sur les états d'hélicité $\pm 1/2$ est ainsi $(1 \pm \gamma^5)$. On retrouve la limite à très grande impulsion des propriétés des fermions de masse $m \neq 0$.

On peut définir pour les neutrinos des états spinoriels comme dans le chapitre 3 , mais à chaque hélicite correspond 1 et 1 seul état

Pour des hélicités $\lambda = +1/2$, positives, seules existent les *composantes*

$u_A =< \tilde{p}, A \mid \lambda >$ sur les états états $\mid \tilde{p}, A >$. Ces composantes se transforment par $D^{|\lambda|}_{AB}(\Lambda)$

Les composantes $\tilde{u}_A$ sur les états $< p, A \mid$ ne sont définies que pour les hélicités négatives .

D-5 Le Photon

Il y a plusieurs façons de repérer l'état quantique d'un photon. Nous en citerons trois :

a- Les états d'hélicité

$\mid [p], \lambda >$ avec $\lambda = \pm 1$.

b- Les deux états spinoriels à trois composantes

$$< p, \tilde{A},\ + \mid \lambda \mid \quad \mid \Phi,\ + \mid \lambda \mid >= \phi_A^+$$
$$< p, A,\ - \mid \lambda \mid \quad \mid \Phi,\ - \mid \lambda \mid >= \tilde{\phi}_A^-$$

c- La description par un 4 vecteur de polarisation ϵ^μ

Compte tenu des deux degrés d'hélicité possibles d'un photon libre, le 4-vecteur doit vérifier des contraintes.

- Une condition auxiliaire $p_\mu A^\mu = 0$ Cette condition peut être exigée de toute particule vectorielle de masse $m \neq 0$.
- Un choix de jauge spécifique, par exemple $A^0 = 0$. Les règles de calcul des amplitudes de transition assurent l'indépendance des résultats observables vis à vis de ces contraintes.