# Appendice C

# Sections efficaces et taux de désintégration

## C-1 La probabilité d'interaction

En principe, le calcul de la section efficace relative à une collision de deux particules devrait se faire en partant de (9.3.7b) que l'on élève au carré. Ceci requiert, pour éviter la manipulation de carrés de distribution de Dirac, d'utiliser une description extrêmement lourde en termes de paquets d'ondes. Il est plus simple de partir de (9.3.7a) avec des états normalisés à l'unité dans une boîte de volume $V$ et de considérer que le processus s'effectue pendant un temps d'interaction $T$. On repasse alors en fin de calcul à une normalisation continue.

On considère une collision de deux particules d'impulsion $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ ; en pratique, deux cas sont à considérer :

(i) Exprience sur cible fixe : $\mathbf{p}_1 \neq 0 \qquad \mathbf{p}_2 = 0$

(ii) Collisionneur : $\mathbf{p}_1 \neq 0 \qquad \mathbf{p}_2 \neq 0, \qquad \mathbf{p}_2 // \mathbf{p}_1, \qquad \mathbf{p}_1 . \mathbf{p}_2 < 0$

On cherche la probabilité d' obtenir dans l'état final $M$ particules avec des impulsions comprises entre $\mathbf{p}'_f$ et $\mathbf{p}_f + d\mathbf{p}'_f$ $(1 \leq f \leq M)$. D'après ce que l'on a vu au chapitre 9, le nombre d'états correspondants dans une boîte de volume $V$ est :

$$\prod_{f=1}^{M} \frac{V d\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3}$$

Le nombre de particules produites dans l'élélment cinématique précédent est :

$$dN = |T_{fi}|^2 = \frac{1}{2E_1 V} \, \frac{1}{2E_2 V} \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_f \frac{1}{2E'_f V} \, \frac{V d\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3}$$
$$\times |(2\pi)^4 \, \delta^4(P_f - P_i)|^2$$

### C-2 Le calcul de la section efficace

Pour donner un sens au carré de la distribution de Dirac, on effectue les manipulations habituelles permettant de passer de la distribution au symbole de Kronecker :

$$\begin{aligned} |(2\pi)^4 \ \delta^{(4)} \ (P_f - P_i)|^2 &= |VT \ \delta_{P_f,P_i}|^2 = VT \ \ VT \ \delta_{P_f,P_i} \\ &= VT \ (2\pi)^4 \ \ \delta^{(4)}(P_f - P_i) \end{aligned}$$

Le nombre de particules produites par unité de temps est $dN/T$, où $T$ est le temps d'interaction,et (par définition) la section efficace est obtenue en divisant ce nombre par le flux de particules incidentes :

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} \frac{dN}{T}$$

La densité de particule incidente est $(1/V)$ et le flux est $\phi = \frac{1}{V} \ |\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}|$

La vitesse relative des deux particules incidentes est :

(i) Cible fixe : $\mathbf{p}_2 = 0$

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}| = \frac{p_1}{E_1}$$

(ii) Collisionneur

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}| = \left|\frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}\right|$$

Cette vitesse peut s'écrire de façon générale sous une forme covariante, soit :

$$E_1 E_2 |\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}| = \left[(p_1.p_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2}$$

En regroupant les résultats précédents, on voit que la dépendance dans le volume de normalisation et le temps d'interaction disparaît. La section efficace élémentaire se met alors sous une forme explicitement covariante :

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}|} \ |\mathcal{M}_{fi}|^2 \ \prod_{f=i}^{M} \frac{d\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 \ 2E'_f} \ (2\pi)^4 \ \ \delta^4(P_f - P_i) \qquad (C.1)$$

### C-3 La largeur de désintégration

On calcule de façon similaire la largeur de désintégration d'une particule en $M$ particules. Soit $E$ l'énergie de la particule ; le nombre de particules émises par unité de temps est par définition, la largeur de désintégration qui est l'inverse du temps de vie, soit :

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{dN}{T} = \frac{1}{2E} \int \prod_{f=1}^{M} \frac{d\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3\, 2E_f} \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \, (2\pi)^4 \, \delta^4(P_f - P_i) \qquad (C.2a)$$

Cette largeur est explicitement covariante, excepté le facteur $1/2E$. On entend habituellement par largeur et temps de vie, les quantités correspondant à une particule au repos, soit pour une particule de masse $M$ :

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2M} \int \prod_{f=1}^{M} \frac{d\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3\, 2E_f} \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \, (2\pi)^4 \, \delta^4(P_f - P_i) \qquad (C.2b)$$

Pour une particule en mouvement, on introduit le facteur de Lorentz $\gamma = E/M$ et on obtient en comparant (C.2a) et (C.2b) :

$$\Gamma = \frac{1}{\gamma}\, \Gamma_0 \qquad\qquad \tau = \gamma\, \tau_0$$

Ce dernier résultat traduit l'effet bien connu de dilatation des durées pour une particule en mouvement.

Les quantités observables et mesurables dépendent donc de l'amplitude invariante $\mathcal{M}_{fi}$ dont le calcul se fait suivant la méthode exposée au chapitre 9 à l'aide des règles de Feynman.