Appendice A

Matrices et des spineurs de Dirac

A-1 Matrices et spineurs de Dirac en représentation de Dirac

Dans le chapitre 3, l'étude des reprsentations du groupe de Lorentz nous a conduit à introduire des matrices de Dirac γ^μ et des spineurs de Dirac u et v satisfaisant l'quation de Dirac $\not{p}u = mu$ et $\not{p}v = -mv$. Les matrices γ satisfont aux relations d'anticommutation :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

Ces matrices et ces spineurs ont été définies dans le chapitre 3 dans ce qu'on appelle la représentation de Weyl.

L'équation de Dirac est beaucoup plus générale que celle obtenue en représentation de Weyl. En effet, n'importe quelle transformation unitaire U

$$\gamma^\mu \to U\gamma^\mu U^\dagger \quad u \to Uu \quad v \to Uv$$

conduira à :

-des matrices γ satisfaisant la même algèbre,

-des équations de Dirac identiques.

Une représentation très usuelle est celle de Dirac. Elle est obtenue en effectuant la transformation :

$$U = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices γ en reprsentation de Dirac sont

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.2a}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0\gamma^5\Sigma_i \tag{A.2b}$$

o l'on a intoduit les matrices

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \tag{A.2c}$$

Les spineurs de Dirac en reprsentation de Dirac ont la forme explicite suivante

$$u(p,s) = (E_p + m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma.\mathbf{p}}{E_p+m}\chi_s \end{pmatrix} \tag{A.3a}$$

$$v(p,s) = (E_p + m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma.\mathbf{p}}{E_p+m}\epsilon\chi_s^* \\ \epsilon\chi_s^* \end{pmatrix} \tag{A.3b}$$

o χ_s est un spineur de Pauli vrifiant $\sigma_z\,\chi_s = s\,\chi_s$ avec $s = \pm 1$. $\sigma_z/2$ est la projection du spin sur un axe z arbitraire. Le spineur $v(p,s)$ a été défini ici, à partir du spineur $\epsilon\chi_s^*$. Il diffère de l'usage fréquent (adopté au chapitre 5) χ_{-s} par un facteur de phase qui affecte la transformation par rotation du spineur v. La représentation de Weyl est la plus naturelle du point de vue de la structure du groupe de Lorentz. La représentation de Dirac est cependant très souvent utilisée, pour des raisons historiques. Elle est aussi adaptée à la limite non relativiste, où seules les composantes hautes du bi-spineur $u(p,s)$ survivent. Les composantes inférieures, qui dépendent explicitement de l'opérateur de spin $\vec{\sigma}$, peuvent être vues comme une correction relativiste. L'existence du spin n'est évidemment pas une conséquence de la relativité, mais le couplage au spin des fermions apparait souvent comme une correction relativiste à un couplage indépendant du spin.

A-2 Relations d'orthonormalisation et fermeture ; projecteurs

Les spineurs de Dirac satisfont aux relations d'orthonormalisation et de fermeture (indpendantes de la reprsentation) suivantes

$$\bar{u}(p,s)u(p,s') = -\bar{v}(p,s)v(p,s') = 2m\,\delta_{s,s'} \tag{A.4a}$$

$$\bar{u}(p,s)v(p,s') = \bar{v}(p,s)u(p,s') = 0 \tag{A.4b}$$

$$u^\dagger(p,s)u(p,s') = v^\dagger(p,s)v(p,s') = 2E_p\;\;\delta_{s,s'} \tag{A.4c}$$

$$u^\dagger(E_p,\mathbf{p},s)v(E_p,-\mathbf{p},s') = 0 \tag{A.4d}$$

$$\sum_s \left(u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)\right) = 2m\,\delta_{\alpha,\beta} \tag{A.4e}$$

$$\sum_s \Big(u_\alpha(E_p,\mathbf{p},s)u^\dagger_\beta(E_p,\mathbf{p},s) + v_\alpha(E_p,-\mathbf{p},s)v^\dagger_\beta(E_p,-\mathbf{p},s)\Big) = 2E_p\,\delta\alpha,\beta \tag{A.4f}$$

o les $\alpha,\beta = 1,2,3,4$ désignent une composante des spineurs de Dirac et $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$ et $\bar{v} = v^\dagger\gamma^0$.

Les projecteurs d'nergie sont :

$$\left[\Lambda^{(+)}(p)\right]_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m}\sum_s u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \qquad (A.4g)$$

$$\left[\Lambda^{(-)}(p)\right]_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2m}\sum_s v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s) = \left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \qquad (A.4g)$$

Ils vrifient les proprits caractristiques suivantes :

$$\Lambda^{(+)}(p)\,u(p,s) = u(p,s) \qquad \Lambda^{(+)}(p)\,v(p,s) = 0$$

$$\Lambda^{(-)}(p)\,v(p,s) = v(p,s) \qquad \Lambda^{(-)}(p)\,u(p,s) = 0$$

$$\left(\Lambda^{(\pm)}\right)^2 = \Lambda^{(\pm)} \qquad \Lambda^{(+)} + \Lambda^{(-)} = 1 \qquad \Lambda^{(+)}\Lambda^{(-)} = 0$$

A-3 Formules de traces et identités relatives aux matrices γ

Soient a^μ et b^μ deux quadrivecteurs quelconque. On a :

$$\not{a}\not{b} = a.b - i\sigma^{\mu\nu}a_\mu b_\nu \qquad (A.5a)$$

avec

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \qquad (A.5b)$$

On a galement les identits ($\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$):

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4I$$

$$\left[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho\right] = 2\left(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}\right)$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu = 4g_{\nu\rho}$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu = -2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\mu = 2(\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma + \gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\tau) \qquad (A.6)$$

La trace d'un nombre impair de matrices γ est nulle

$$tr\gamma_5 = 0$$

$$trI = 4$$

$$tr(\not{a}\not{b}) = 4a.b$$

$$tr(\not{a_1}\not{a_2}\not{a_3}\not{a_4}) = 4(a_1.a_2\, a_3.a_4 + a_1.a_4\, a_2.a_3 - a_1.a_3\, a_2.a_4)$$

$$tr(\gamma_5 \not{a} \not{b}) = 0$$
$$tr(\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \qquad (A.7)$$

o $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur compltement antisymtrique tel que $\epsilon_{0123} = 1$.

A-4 Transformation des champs de Dirac dans une transformation de Lorentz

Considérons une transformation de Lorentz (rotations, boosts) du système de coordonnées (point de vue passif) :

$$\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$$

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

Le bi-spineur de Dirac se transforme l'aide d'une matrice 4×4 :

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\, \psi(x) \qquad \psi_r(x) \to \psi'_r(x') = S_{rs}(\Lambda)\, \psi_s(x)$$

L'invariance de forme de l'équation de Dirac impose alors que :

$$S^{-1}(\Lambda)\, \gamma^\mu \, S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \, \gamma^\nu$$

Pour une transformation infinitésimale, la matrice Λ est de la forme $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$; la conservation du produit scalaire requiert que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. On montre alors que la transformation infinitésimale des spineurs de Dirac est :

$$\Delta S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\, \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$$

On notera aussi que :

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} \qquad \sigma^{0i} = i\gamma^5\, \Sigma_i \qquad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\, \Sigma_k$$

a- Rotations ordinaires

Soit une rotation infinitsimale d'angle $\Delta\theta$ autour de l'axe z. Les seuls éléments de matrice $\omega_{\mu\nu}$ non nuls sont $\omega_{12} = -\omega_{21} = -\Delta\theta$. Il en résulte directement que :

$$\Delta S_z(\Delta\theta) = I + \frac{i}{2} \Sigma_3 \, \Delta\theta$$

La loi de groupe permet d'obtenir la loi de transformation pour une rotation finie d'angle θ et, ceci pour une axe quelconque repré par le vecteur unitaire $\mathbf{u}$

$$S_{\mathbf{u}}(\theta + \Delta\theta) = S_{\mathbf{u}}(\theta)\, \Delta S_{\mathbf{u}}(\Delta\theta) \;=\; S_{\mathbf{u}}(\theta) \;+\; \frac{i}{2} S_{\mathbf{u}}(\theta)\, \Delta\theta \, \vec{\Sigma}.\mathbf{u}$$

ce qui donne :

$$S_{\mathbf{u}}(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta\vec{\Sigma}.\mathbf{u}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\vec{\Sigma}.\mathbf{u}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{A.9}$$

On peut alors retrouver la loi de transformation des fonctions d'onde de Dirac

$$\psi(\mathbf{r},t) = S_{\mathbf{u}}(\theta)\,\psi\left(R_{\mathbf{u}}^{-1}(\theta)\mathbf{r},t\right) = e^{i\mathbf{J}.\mathbf{u}}\,\psi(\mathbf{r},t)$$

o

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \vec{\Sigma} = -i\mathbf{r}\times\vec{\nabla}_{\mathbf{r}} + \vec{\Sigma}$$

est le moment cinétique total (orbital+spin) de la particule.

b- "Boost" de Lorentz

Considérons une transformation spéciale de Lorentz le long de l'axe ox avec une rapidité infinitésimale $\Delta\theta$. Les seuls éléments de matrice $\omega_{\mu\nu}$ non nuls sont $\omega_{01} = -\omega_{10} = \Delta\theta$. Il en résulte directement que :

$$\Delta S_x(\Delta\theta) = 1 - \frac{1}{2}\gamma_5\Sigma_1\,\Delta\theta$$

La loi de groupe permet d'obtenir la loi transformation pour un boost de rapidit $\theta = argth(\beta)$. Pour un boost dans la direction quelconque $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}$, on a

$$S_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta + \Delta\theta) = S_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta)\,\Delta S_{\hat{\mathbf{v}}}(\Delta\theta) \;=\; S_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta) - \,\frac{1}{2}\,S_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta)\,\gamma^5\,\vec{\Sigma}.\hat{\mathbf{v}}\,\Delta\theta$$

ce qui donne :

$$S_{\hat{\mathbf{v}}}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta\gamma^5\vec{\Sigma}.\mathbf{u}} = \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \;-\; \gamma^5\,\vec{\Sigma}.\mathbf{u}\,\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{A.10}$$

Rappelons galement que $(\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2})$:

$$\theta = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \qquad \cosh\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{1/2} \qquad \sinh\frac{\theta}{2} = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}$$